

Reihe 18

Mechanik/  
Bruchmechanik

Nr. 352

Dipl.-Ing. Univ. Johannes Hartmann,  
Graz

## Simulation von Rissen in höchstfesten Stahlblechen mit einem Trefftz-Element für Mixed-Mode- Beanspruchungen



# Simulation von Rissen in höchstfesten Stahlblechen mit einem Trefftz-Element für Mixed-Mode-Beanspruchungen

Johannes Hartmann

18. Februar 2018

An der Montanuniversität Leoben eingereichte Dissertation zur  
Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der  
montanistischen Wissenschaften



Montanuniversität Leoben



# Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 18

Mechanik/  
Bruchmechanik

Dipl.-Ing. Univ. Johannes Hartmann,  
Graz

Nr. 352

Simulation von Rissen  
in höchstfesten  
Stahlblechen mit  
einem Trefftz-Element  
für Mixed-Mode-  
Beanspruchungen

VDI verlag

Hartmann, Johannes

## **Simulation von Rissen in höchstfesten Stahlblechen mit einem Trefftz-Element für Mixed-Mode-Beanspruchungen**

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 352. Düsseldorf: VDI Verlag 2019.

158 Seiten, 91 Bilder, 12 Tabellen.

ISBN 978-3-18-335218-0, ISSN 0178-9457,

€ 57,00/VDI-Mitgliederpreis € 51,30.

**Für die Dokumentation:** Hybrides Trefftz-Element – T-vollständige Lösungen – Strip-Yield-Modell – Mode-III-Riss – Konforme Abbildung – Funktionentheorie

In der vorliegenden Arbeit wird ein spezielles hybrides Trefftz-Element zur Simulation von Rissen in dünnwandigen Strukturen unter Modus-III-Beanspruchung entwickelt. Die Elementformulierung basiert auf analytischen Lösungen für die Kirchhoff-Platte unter exakter Erfüllung der Randbedingungen an den Rissufern. Mit Hilfe der Funktionentheorie werden daraus T-vollständige homogene Ansatzfunktionen entwickelt, die später leicht mit partikulären Ansatzfunktionen erweitert werden können. Des Weiteren wird in der Arbeit ein Versuchskonzept entwickelt und umgesetzt, mit dem Risswachstum unter Modus-III-Belastung effizient untersucht werden kann. Numerische Tests zeigen schließlich eine sehr gute Übereinstimmung der entwickelten Elementformulierung mit hochaufgelösten FE-Detailsimulationen. Abschließend wird aufbauend auf den Ergebnissen der Arbeit ein Konzept zur Simulation von Risswachstum mit kommerziellen expliziten FE-Solvern vorgestellt.

### **Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter [www.dnb.de](http://www.dnb.de) abrufbar.

### **Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek**

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie (German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at [www.dnb.de](http://www.dnb.de).

Dissertation Montanuniversität Leoben 2019

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 2019

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9457

ISBN 978-3-18-335218-0

# Danksagung

Mein Dank gilt an erster Stelle Prof. Reinhard Pippan für die hervorragende Betreuung bei der Umsetzung der vorliegenden Arbeit. Desweiteren möchte ich mich bei Prof. Thomas Antretter für die zügige Durchsicht des Entwurfs und konstruktive Gespräche über die weitere Umsetzung meiner Ideen bedanken. Unverzichtbare Hilfe bei der Entwicklung der numerischen Modelle habe ich von Thomas Heubrandtner und Karlheinz Kunter erhalten, bei denen ich mich für die ausgezeichnete Zusammenarbeit bedanke. Auch wenn ich nur zeitweise zur Durchführung von Versuchen in Leoben sein konnte, habe ich mich am Erich Schmid Institut stets wohl gefühlt und interessante Diskussionen und Gespräche geführt. Stellvertretend für die Unterstützung, die ich hier von allen Seiten erfahren habe, möchte ich mich bei Peter Kutleša, Viktoria Schrutt und Franz Hubner bedanken. Last, but not least möchte ich mich für die schöne Zeit in der Arbeitsgruppe Materials & Forming bedanken. Dort habe ich die persönlichen und fachlichen Rahmenbedingungen vorgefunden, die mir die Umsetzung dieser Arbeit ermöglicht haben.

Johannes Hartmann

## Acknowledgements

Diese Arbeit entstand am VIRTUAL VEHICLE Research Center in Graz, Österreich. Der Autor bedankt sich für die Förderung im Rahmen des COMET K2 Competence Centers for Excellent Technologies Programms des Österreichischen Bundesministeriums für Verkehr, Innovation und Technologie (bmvit), des Österreichischen Bundesministeriums für Wissenschaft, Forschung und Wirtschaft (bmwfw), der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft mbH (FFG), des Landes Steiermark sowie der Steirischen Wirtschaftsförderung (SFG).

Ebenfalls dankt er den unterstützenden Firmen und Projektpartnern Audi AG und Magna Steyr Engineering AG & Co KG sowie dem Erich-Schmid-Institut für Materialwissenschaft der Österreichischen Akademie der Wissenschaften.

*Für Ardak und Armin.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Aktueller Stand von Forschung und Technik</b>	<b>4</b>
2.1	Strukturbauteile aus höchstfestem Stahl . . . . .	5
2.2	Crashsimulation mit der expliziten FEM . . . . .	7
2.3	Risse mit hoher Spannungslokalisierung . . . . .	12
2.4	Kriterien für Rissfortschritt . . . . .	15
2.5	Methoden zur Simulation von Rissen . . . . .	17
2.6	Spezielle hybride Trefftz-Elemente . . . . .	20
<b>3</b>	<b>T-vollständige Lösung des Modus III-Rissproblems</b>	<b>23</b>
3.1	Kinematik und Verzerrungstensor . . . . .	23
3.2	Elastisches Potential der Platte . . . . .	27
3.3	Darstellung in kartesischen Koordinaten . . . . .	30
3.4	Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie und Randwertproblem . . . . .	31
3.5	Komplexe Lösung der Bipotentialgleichung . . . . .	33
3.6	Komplexe Darstellung des Verzerrungstensors und der Randgrößen . . . . .	35
3.7	Darstellung mit komplexen Potentialen . . . . .	36
3.8	Von-Mises-Spannung in komplexer Darstellung . . . . .	37
3.9	Randbedingungen am Rissufer . . . . .	37
3.10	Komplexe Darstellung der Randbedingungen . . . . .	39
3.11	Integrale Form der komplexen Randbedingung . . . . .	40
3.12	Entfaltung der Rissufer durch konforme Abbildung . . . . .	41
3.13	Lösung unter Berücksichtigung der Randbedingungen . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Hybride Formulierung des Rissspitzenelements</b>	<b>44</b>
4.1	Erweitertes Potential mit Langrangemultiplikatoren . . . . .	45
4.2	Erweitertes Potential nach dem Prinzip von Hu-Washizu . . . . .	47
4.3	Herleitung mit dem Satz von Betti . . . . .	48
4.4	Matrixdarstellung des erweiterten Potentials . . . . .	49
4.5	Konstruktion der Verschiebungsrahmen . . . . .	51
4.6	Berechnung des Koeffizientenvektors . . . . .	55
4.7	Berechnung der Starrkörperbewegung . . . . .	56
4.8	Freie Randknoten . . . . .	58
4.9	Algorithmus zur Simulation von Rissfortschritt . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Ermittlung von Materialdaten</b>	<b>63</b>
5.1	Beschreibung des Risswiderstands durch CTOA . . . . .	64
5.2	Versuchsaufbau . . . . .	68
5.3	Auswertungsalgorithmus für CTOA . . . . .	73

5.4	Ergebnisse der Versuche . . . . .	80
5.5	Rissfortschrittskriterium für die Simulation . . . . .	83
5.6	Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Modellvalidierung</b>	<b>88</b>
6.1	Verifikation der Implementierung des T-Elements . . . . .	88
6.2	Validierung der T-Elementformulierung . . . . .	93
6.3	Beispiel für die gekoppelte Simulation . . . . .	97
6.4	Erweiterung zum Mixed-Mode-Element . . . . .	105
6.5	Gekoppelte Simulation mit Rissfortschritt . . . . .	108
6.6	Diskussion der Validierungsergebnisse . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Weitere Auswertungsergebnisse</b>	<b>115</b>
A.1	Weg-, Kraft- und Potentialverläufe der Versuche . . . . .	115
A.2	Validierungsbeispiel mit unsymmetrischer Belastung . . . . .	117
A.3	Weiteres Validierungsbeispiel . . . . .	120
A.4	Polygonförmiges Element . . . . .	123
A.5	Gekoppelte Simulation mit unregelmäßigem Netz . . . . .	127
A.6	Ebene Spannungsanteile des Schalenelements . . . . .	129
A.7	Einzelschritte der Gesamtsimulation . . . . .	130
A.8	Elastische Verzerrungsenergie . . . . .	132
A.9	Plattentheorien im Vergleich . . . . .	132

# Notation

$a$	Risslänge
$A$	komplexes holomorphes Potential
$A_n$	Koeffizienten der Reihendarstellung von $A$
$B$	komplexes holomorphes Potential
$C$	Dämpfungsmatrix
$D$	Plattenbiegesteifigkeit
$E$	Elastizitätsmodul
$f_c$	Eckkraft
$\hat{f}_c$	vorgegebene Eckkraft
$F$	Einzelkraft
$\mathbf{f}$	Knotenkraftvektor
$\mathcal{G}$	Energiefreisetzungsrate
$K$	Spannungsintensitätsfaktor
$K_c$	kritischer Spannungsintensitätsfaktor
$\mathbf{K}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_T$	T-Elementsteifigkeitsmatrix
$l_e$	Elementkantenlänge
$M_n$	Biegemoment
$M_s$	Torsionsmoment
$\mathbf{M}$	konsistente Massenmatrix
$\mathbf{M}$	Momentenvektor
$\hat{\mathbf{M}}$	vorgegebener Momentenvektor
$\mathbf{n}$	Einheitsnormalenvektor
$n$	komplexe Darstellung des Einheitsnormalenvektors
$n_{max}$	berücksichtigte Ordnungen der Reihendarstellung von $A$
$n_c$	Ecken auf $\Gamma$
$n_s$	Ecken auf $\Gamma_s$
$n_{int}$	Ecken auf $\Gamma_{int}$
$n_N$	Knotenanzahl des T-Elements
$N_i$	i-ter Elementknoten des T-Elements
$p(x, y)$	Flächenlast
$\mathbf{P}(\mathbf{u})$	verschiebungsabhängige Steifigkeitsmatrix
$Q$	Querkraft
$\hat{Q}$	vorgegebene Querkraft
$r_p$	Radius der plastischen Zone
$R_{gen}$	allgemeiner Risswiderstand
$D_{gen}$	allgemeine Rissbelastung
$\mathbf{s}$	Einheitstangentialvektor
$s$	komplexe Darstellung des Einheitstangentialvektors

$t$	Plattendicke
$\mathbf{u}$	Knotenverschiebungsvektor
$\hat{\mathbf{u}}$	vorgegebener Knotenverschiebungsvektor
$\tilde{\mathbf{u}}$	Verschiebungsrahmen
$\dot{\mathbf{u}}$	Knotengeschwindigkeitsvektor
$\ddot{\mathbf{u}}$	Knotenbeschleunigungsvektor
$\hat{\mathbf{v}}$	vorgegebener Knotengeschwindigkeitsvektor
$V$	Ersatzquerkraft
$\hat{V}$	vorgegebene Ersatzquerkraft
$w(x, y)$	Durchbiegung der Platte
$\hat{w}$	vorgegebene Durchbiegung
$\delta_t$	CTOD
$\delta_{tc}$	critical CTOD
$\Delta a$	Rissverlängerung
$\Delta t$	Zeitschrittweite
$\Delta z$	Probenauslenkung in $z$ -Richtung
$\nabla w(x, y)$	Gradient von $w$
$\nabla \hat{w}$	vorgegebener Gradient von $w$
$\epsilon$	Verzerrungstensor
$\gamma_t$	CTOA
$\gamma_{tc}$	critical CTOA
$\gamma_{IIIc}$	critical CTOA for mode III
$\Gamma$	Rand des Lösungsgebiets $\Omega$
$\Gamma_c$	Rissufer im Gebiet $\Omega_T$
$\Gamma_{FEc}$	Rissufer im Gebiet $\Omega_{FE}$
$\Gamma_{int}$	Kopplungsrand von $\Omega_T \cup \Omega_{FE}$
$\Gamma_s$	Spannungsrand
$\Gamma_u$	Verschiebungsrand
$\Gamma_T$	Rand von $\Omega_T$
$\nu$	Querdehnzahl
$\Pi$	elastisches Potential der Platte
$\Pi^L$	erweitertes Potential mit Langrangemultiplikatoren
$\Pi^{ext}$	erweitertes elastisches Potential nach Hu-Washizu
$\sigma_F$	Fließspannung
$\sigma_v$	von-Mises-Spannung
$\Omega = \Omega_T \cup \Omega_{FE}$	Lösungsgebiet
$\Omega_T$	T-Elementgebiet
$\Omega_{FE}$	FE-Lösungsgebiet
$\sigma$	Spannungstensor
$\tau$	Cauchyscher Spannungvektor
$\overline{(\cdot)}$	elementweise komplexe Konjugation
$(\cdot)^* := \overline{(\cdot)^T}$	adjungierte (transponiert-konjugierte) Matrix

---

AHSS	advanced high strength steel
CFL-Bedingung	Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung
CTOA	crack tip opening angle
CTOD	crack tip opening displacement
DGL	Differentialgleichung
DIC	digital image correlation
EPBM	elastisch-plastische Bruchmechanik
ESZ	ebener Spannungszustand
Euro NCAP	european new car assessment programme
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FE	finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
LEBM	linear-elastische Bruchmechanik
RWP	Randwertproblem
VCCT	virtual crack closure technique
T-Element	Trefftz-Element
XFEM	extended finite element method

# Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein spezielles hybrides Trefftz-Element zur Simulation von Rissen in dünnen Platten unter Modus III-Belastung entwickelt. Das Element wird zur Erweiterung etablierter Modus I/II-Elemente verwendet und kann zur Simulation beliebiger Belastungen an der Riss Spitze im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik eingesetzt werden.

Die Elementformulierung basiert auf der bekannten analytischen Lösung der Bipotentialgleichung aus der Kirchhoffschen Plattentheorie. Mit Hilfe der Funktionentheorie wird die allgemeine Lösung an das spezielle Problem einer Platte mit Innenriss angepasst, so dass die Spannungsrandbedingungen entlang des Rissufers exakt erfüllt werden. Die Verschiebungsrandbedingungen am verbleibenden Elementrand werden durch ein erweitertes elastisches Potential berücksichtigt. Die freien Parameter des Lösungsansatzes ergeben sich schließlich aus der Minimierung des erweiterten Potentials. Die Validierung der neuentwickelten Elementformulierung zeigt die Konvergenz der Lösung bei Erhöhung der Anzahl der berücksichtigten Ordnungen des Lösungsansatzes gegen die Vergleichslösung aus einem feinvernetzten Finite-Elemente-Modell.

In der linear-elastischen Theorie sind die Freiheitsgrade für Modus I/II- und Modus III-Belastung entkoppelt und das Mixed-Mode-Element ergibt sich durch Zusammenfügen beider Anteile. Für die Simulation von Risswachstum in einem Bauteil wird das Trefftz-Element innerhalb eines Finite-Elemente-Modells eingesetzt. Die Standardelemente im Bereich der Riss Spitze werden dabei durch das spezielle Element ersetzt. Bei Risswachstum breitet sich der Riss zunächst innerhalb des Elementgebiets aus und bei Bedarf wird das Trefftz-Element automatisch in Richtung des fortschreitenden Risses neu positioniert. Dabei werden weitere Standardelemente ersetzt und das Element bewegt sich im weiteren Verlauf des Rissfortschritts mit der Riss Spitze durch das Finite-Elemente-Netz.

Zur Simulation von Risswachstum wird der materialspezifische Risswiderstand benötigt. Für größere Rissverlängerungen unter Modus III-Beanspruchung stehen keine standardisierten Verfahren zur Ermittlung des Risswiderstands zur Verfügung. Daher wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine direkte Auswertung der verformten Rissflanken durchgeführt, wozu das 3D-Bildkorrelationsverfahren eingesetzt wird. Mit Hilfe eines neuentwickelten Auswertungsalgorithmus wird aus den damit gemessenen Geometriedaten der Verlauf des Rissfortschritts und der Rissöffnungswinkel berechnet. Daraus kann der kritische Spannungsintensitätsfaktor  $K_{IIIc}$  mit Hilfe einer Detailsimulation des Versuchsaufbaus gewonnen werden. Als Rissfortschrittskriterium wird dann der aktuell vorliegende Spannungsintensitätsfaktor direkt aus dem Trefftz-Element berechnet und mit dem experimentell ermittelten Risswiderstand verglichen.

Der Rissfortschrittsalgorithmus für die gekoppelte Simulation von Bauteilen mit dem Trefftz-Element im Rahmen der expliziten Finite-Elemente-Methode wird am Beispiel der durchgeführten Versuche getestet. Insgesamt zeigt sich dabei, dass das vorgestellte Verfahren erfolgreich zur Simulation von Rissfortschritt in einem Bauteil eingesetzt werden

kann. Abschließend werden Konzepte für eine Weiterentwicklung der Elementformulierung vorgestellt. Eine Möglichkeit zur Erweiterung des Einsatzgebiets stellt dabei die Modellierung risserschließender Kräfte am Rissufer durch partikuläre Lösungsansätze dar, wie sie zum Beispiel beim Dugdale-Modell auftreten.

## Abstract

Within the present work, a special purpose hybrid Trefftz-element for mode III cracks in thin plates is developed. The element is used as an extension of well-established mode I/II elements. Therefore, the proposed element enables the simulation of arbitrary mixed mode crack tip loading within the framework of linear elastic fracture mechanics.

The element formulation is based on the analytical solution of the bipotential equation of the Kirchhoff plate theory. Using complex analysis the general solution is adapted to fulfill the natural boundary conditions at the crack edges, too. The essential boundary conditions along the remaining part of the element boundary are taken into account for by an extended elastic potential. The remaining degrees of freedom of the solution are calculated from the minimization of the extended potential. Validation of the element formulation shows convergence of the solution to the finite element reference solution by increasing the number of orders included in the calculation.

Within linear elastic theory mode I/II is decoupled from mode III, and the mixed mode Trefftz element is formed by assembling both parts into one element. For the simulation of crack growth in a structural component the special purpose element is used within a standard finite element model, where some of the elements are replaced by the Trefftz element. The crack starts growing inside the element at first and after some crack growth the element position is changed in the direction of crack growth, replacing additional standard elements. Along with the growing crack the Trefftz element can move through the entire structure.

For a crack growth algorithm the specific resistance of the material against crack growth is needed as well. Since there are no appropriate standard procedures for the evaluation of the mode III fracture resistance available, within this work a direct evaluation of the deformed crack edges is performed. The data acquisition is carried out using three dimensional digital image correlation. With a newly developed evaluation algorithm, crack propagation and crack tip opening angle are calculated from the geometry data. Using these results the critical stress intensity factor  $K_{IIIc}$  is found by performing a detailed simulation of the experiment. For the evaluation of the crack growth criterion the actual stress intensity factor is calculated from the Trefftz mixed mode element and compared to the critical value of the material obtained from experiments.

Finally, the proposed algorithm is demonstrated by the simulation of a simple structural component within an explicit finite element analysis. It is shown, that the concept is capable of simulating the crack behaviour accurately. Finally, future enhancement of the crack propagation algorithm with a crack tip plasticity model is outlined.

