Messen und Philosophieren. Hugo Dinglers technikorientierte Begründung der angewandten Geometrie

Jörg Willer

Der biographische Rahmen

Messen und Philosophieren – paßt das überhaupt zusammen? Messen ist die Grundoperation jeder Naturwissenschaft. Nehmen wir als Beispiel die Chemie. Emil Erlenmeyer (1825-1909), der Großvater Hugo Dinglers, war maßgeblich beteiligt an der Entwicklung der chemischen Strukturtheorie. Voraussetzung dieser Entwicklung war die sorgfältige Bestimmung der relativen Verbindungsgewichte von Elementen in einer Vielzahl chemischer Verbindungen, also ein chemisches Meßverfahren. Messen steht somit für die Naturwissenschaften. Philosophie dagegen ist nach allgemeiner Meinung Geisteswissenschaft schlechthin. Sofort erinnert man sich des Schlagworts von den zwei Kulturen: Geisteswissenschaft hier, Naturwissenschaft dort; zwei Gebiete, die scheinbar nichts mit einander zu tun haben. Ist dem wirklich so?

Theodor Litt (1880-1962), der vielseitige Philosoph und Pädagoge, hat einmal gesagt:

> »Wenn der einzelwissenschaftliche Forscher sich bereit finden läßt, auf das Wesen der von ihm vertretenen Wissenschaft zu reflektieren, dann wird er selbst zum Philosophen seiner Wissenschaft.« (Litt 1963: 7)

Im Gegensatz zu dem zitierten Schlagwort von den zwei Kulturen wird in Litts Aussage der Zusammenhang zwischen Philosophie und Naturwissenschaften deutlich. In diesem Sinne, im Reflektieren über die Grundlagen seines Faches, wurde der Mathematiker Dingler zum Philosophen.

Hugo Dingler, geboren 1881 als Sohn des ordentlichen Professors der Botanik Dr. Hermann Dingler, absolvierte das königliche humanistische Gymnasium zu Aschaffenburg im Sommer 1910 und studierte danach an den Universitäten Erlangen, Göttingen und München, wo er im Jahr 1904 das Lehramtsexamen für Mathematik und Physik ablegte. Im Jahr 1906 wurde er an der Universität München promoviert. Das Thema seiner Dissertation lautete *Beiträge zur Kenntnis der infinitesimalen Deformationen einer Fläche* (Amorbach 1907). Obwohl diese Arbeit noch keinerlei methodologische Erörterungen enthält, klingt darin doch ein Leitmotiv von Dinglers späteren Reflexionen über die Grundlagen der Geometrie an: die Betrachtung von Flächen. In seinem als Habilitationsschrift gedachten Werk *Die Grundlagen der angewandten Geometrie* (1911) hat Dingler sich dann in einer für die Geometrie wie auch für die Philosophie seiner Zeit völlig neuartigen Weise mit einer ausgezeichneten Fläche, nämlich mit der Ebene befaßt. Da hier erstmals der neue Ansatz von Dinglers Entwurf einer philosophischen Begründung der exakten Wissenschaften in voller Klarheit ausgearbeitet vorliegt, sei dieses Werk im folgenden ausführlich erörtert.

Ist die Geometrie eine Erfahrungswissenschaft?

Dinglers frühe Schrift aus dem Jahr 1911 handelt, das ist zu betonen, von den Grundlagen der *angewandten* Geometrie. Angewandte Wissenschaft, oder zunächst bescheidener: die auf ein tägliches Bedürfnis, das Ausmessen von Feldern, angewandte Fertigkeit war Geometrie von ihrem Ursprung her. »Geh, um ein Feld abzugrenzen; du wirst weder die Meßleine noch das Meßrohr richtig halten können!« (Sjöberg 1975: 137-176) – so wird in einem altassyrischen Examenstext aus der Bibliothek des Assurbanipal (669-629 v. Chr.) ein unaufmerksamer Schüler zurechtgewiesen. Auch im alten Ägypten gehörten Flächenberechnungen von Feldern, wie recht gut erhaltene Papyri – der »Mathematische Papyrus Moskau« und der »Mathematische Papyrus Rhind« aus der Zeit des Mittleren Reiches (um 2052-1650) – belegen, zum geometrischen Rüstzeug der Beamten, der sogenannten Schreiber (vgl. Neugebauer 1969: 110; Vogel 1929). Lehrsätze oder Formeln kommen allerdings in den ägyptischen und mesopotamischen Quellenschriften expressis verbis nicht vor. Im allgemeinen enthalten sie lediglich angewandte Aufgaben nebst den zugehörigen Lösungen, die zumeist mit der Aufforderung beginnen: »Rechne so: ...« Doch in diesen Lösungen werden, zumindest in Babylon, Lehrsätze wie die später dem Pythagoras oder dem Thales zugeschriebenen wie selbstverständlich angewendet (vgl. Becker/Hofmann 1951: 31).

Im Gegensatz dazu gaben sich die ersten historisch faßbaren griechischen Wissenschaftler, zu denen man die eben genannten Thales und Pythagoras zählt, nicht damit zufrieden, mathematische Lehrsätze einfach anzuwenden. Vielmehr zeichneten sie sich dadurch aus, daß sie, wie Aristoteles betont, »aufgrund von Beweisen redeten«.[1] Den ersten methodisch aufgebauten Abriss der gesamten damals geläufigen Geometrie »aufgrund von Beweisen«, um nochmals des Aristoteles Kriterium zu zitieren, schuf Euklid (4. Jh. vor Chr.) in seinen sogenannten *Elementen*. Dieses Lehrbuch der Geometrie beginnt mit drei Arten von Aussagen:

- den *Definitionen* (Beispiele: »Ein Punkt ist, was keine Teile hat.« oder: »Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.«),
- den *Allgemeinen Annahmen* (Beispiel: »Das Ganze ist größer als der Teil.«),
- den *Postulaten* (Beispiel: »Gefordert soll sein, daß alle rechten Winkel einander gleich sind.«).

Euklids Postulate nannte man später Axiome. Als Kriterium dafür, daß Aussagen Axiome darstellen, gilt, daß sie zum ersten unmittelbar anschaulich und damit einsichtig (evident) sind, und daß sie zum zweiten von einander logisch unabhängig sind, daß also kein Axiom aus den anderen Axiomen eines Axiomensystems ableitbar ist. In der Formulierung von Friedrich Waismann (vgl. Waismann 1970: 26) lauten Euklids Axiome:

1. Jeder Punkt kann mit jedem Punkt durch eine Gerade verbunden werden.
2. Jede Gerade läßt sich über jeden ihrer Endpunkte hinaus beliebig verlängern.
3. Um jeden Punkt läßt sich mit jedem beliebigen Radius ein Kreis beschreiben.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Winkel auf der Innenseite der beiden Geraden zu einer Seite der dritten eine Summe ergeben, die kleiner ist als zwei Rechte, dann schneiden sich diese beiden Geraden, genügend verlängert, auf der erwähnten Seite.

1 | Aristoteles, *Metaphysik* 1000 a, vgl. Lefèvre (1981).

Offensichtlich fällt das fünfte, das sogenannte Parallelenaxiom, aus dem Rahmen. Es ist zu verzwickt, als daß man behaupten könnte, es sei unmittelbar anschaulich und somit evident. Deshalb versuchte man seit der Antike, dieses Axiom aus den vier anderen abzuleiten oder zumindest seine unmittelbare Anschaulichkeit zu bestreiten, so Proclos Diadochos (410-484) in seinem Kommentar zum ersten Buch von Euklids *Elementen*, in dem er das von seinen Vorgängern Erarbeitete zusammenfaßte und scharfsinnig fortführte (vgl. Becker 1954: 96, 168). Doch all diese Versuche scheiterten. Leider kann die äußerst spannende, sich bis in die Neuzeit erstreckende Geschichte der Auseinandersetzungen mit dem Parallelenaxiom hier nicht dargestellt werden. Nur so viel sei berichtet: Rund 2000 Jahre nach Euklid entdeckte Carl Friedrich Gauß (1777-1855), daß auch eine in sich konsequente, widerspruchslose Geometrie denkbar ist, in der das Parallelenaxiom *nicht* gilt. Teils unabhängig davon, teils hierauf aufbauend schufen Johann Bolyai (1802-1860) und Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewski (1793-1856) unabhängig von einander Entwürfe nichteuklidischer Geometrien, die sich allein auf die ersten vier Euklidischen Axiome stützen, das Parallelenaxiom aber durch seine Negation ersetzen.[2] Dabei kamen sie zu Folgerungen, die unserem an der Euklidischen Geometrie geschulten Anschauungsvermögen widersprechen. In Lobatschewskis sogenannter hyperbolischer Geometrie ist die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei rechte Winkel; im Gegensatz dazu ist in der sogenannten elliptischen Geometrie, die Bernhard Riemann (1826-1866), ein Schüler von Gauß, im Anschluß an Lobatschewski entwarf, die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei rechte Winkel. Aufgrund dieser elliptischen Geometrie gelangte Riemann zu der abstrakten Vorstellung eines gekrümmten, endlichen, aber unbegrenzten Raumes.

Die abstrakte Vorstellung eines gekrümmten, endlichen, aber unbegrenzten Raumes – als Laie ist man versucht, einen solchen Gedanken als Spintisiererei theoriebesessener Mathematiker abzutun. Von einer praktischen Anwendbarkeit scheint diese Vorstellung meilenweit entfernt zu sein. Aber nur wenige Jahrzehnte später konnte Albert Einstein (1879-1955), als er in seiner allgemeinen Relativitätstheorie die Messung des kosmischen Raumes mittels Lichtstrahlen beschrieb, sich eben dieser Vorstellung des gekrümmten Riemannschen Raumes bedienen (vgl. Einstein 1969: 69 Fußnote). Demnach ist die nichteuklidische Geometrie Riemanns offensichtlich auf die kosmische Raummessung anwendbar. Seitdem kann man in physikalischen Lehrbüchern Aussagen folgender Art finden: In unserer näheren Umgebung »herrscht« die Euklidische Geometrie; im Weltraum

2 | Im Briefwechsel Gauß/Gerling wird die »Parallelentheorie« erstmals in Gerlings Brief Nr. 112 vom 25. Jan. 1819 erwähnt.

dagegen »herrscht« die nichteuklidische Riemannsche Geometrie. Doch was heißt in diesem Zusammenhang »herrscht«? Und welche Geometrie ist nun die wahre? Die Euklidische oder die nichteuklidische?

Damit kommen wir zu Dingler. Sein Werk mit dem Titel *Die Grundlagen der angewandten Geometrie* (1911), mit dem wir uns hier näher befassen wollen, hat er selbst im Untertitel beschrieben als *eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften*. Implizit stellt sich damit die Frage: Ist die Geometrie als theoretische Wissenschaft anzusehen oder ist sie eine Erfahrungswissenschaft? Das Gedankengebäude der Euklidischen Geometrie, das von bestimmten Axiomen ausgeht, die voneinander logisch unabhängig sind, und mittels allgemein anerkannter logischer Methoden zu einem eindeutigen, widerspruchsfreien Aufbau von Lehrsätzen kommt, ist zweifellos eine theoretische Wissenschaft. Ein Lehrsatz dieser theoretischen Wissenschaft, den man aus den von Euklid zugrunde gelegten Axiomen ableiten kann, besagt, daß die Summe der Innenwinkel in jedem beliebigen Dreieck 180 beträgt. Dieser Lehrsatz *gilt*; das bedeutet: er gibt eine Erkenntnis der theoretischen Wissenschaft, die wir »Euklidische Geometrie« nennen, richtig wieder. Doch nun fragen wir weiter: Ist dieser Lehrsatz *wahr*?

Wahr ist er dann, wenn er sich auf die vorhandene Wirklichkeit, oder anders gesagt: wenn er sich auf unsere Welt beziehen läßt, etwa auf die Ausmessung von Feldern, von Grundstücken, von Ländern oder gar von der Erde insgesamt. Das bedeutet ja »Geo-Metrie«. Und in der Tat hat man zur Land- und Erdvermessung ein Verfahren ersonnen, das den Lehrsatz von der Summe der Innenwinkel in jedem beliebigen Dreieck zur Anwendung bringt: das Verfahren der Triangulation, das auf der Vermessung von aneinander angrenzenden Dreiecken beruht.

Im Jahr 1820 erhielt Gauß den offiziellen Auftrag, die Triangulation des Königreichs Hannover vorzunehmen. Dabei, so berichtet Dingler, wenn auch unter Vorbehalt, kam er auf die Idee, an einem möglichst großen Dreieck, das durch drei Berge, den Brocken, den Hohen Hagen und den Inselsberg gebildet wird, und das laut Dingler die Seitenlängen 69 km, 85 km und 197 km aufweist, durch sorgfältige Messung zu prüfen, ob sich der Satz von der Summe der Innenwinkel von Dreiecken auch in diesem realen Dreieck bestätige.[3]

3 | Dingler ist, als er die Seitenlängen des Dreiecks Brocken – Hoher Hagen – Inselsberg in runden Kilometern angegeben hat, ein Fehler unterlaufen: Die von ihm angegebenen Strecken 69 km, 85 km und 197 km können kein Dreieck bilden, da die längste größer ist als die Summe der beiden kürzeren. In der Tat beträgt der Abstand Brocken-Inselsberg rund 106 km; die beiden anderen Entfernungsangaben Dinglers sind korrekt.

Welchen Sinn hatte diese Messung? Dingler weist darauf hin, daß Gauß aufgrund seiner Entdeckung, daß auch eine nichteuklidische Geometrie denkbar sei, vor der Frage stand, welche Geometrie sich denn nun im wirklich gegebenen – nicht in dem von uns vorgestellten – Raum finden lasse und somit die *wahre* Geometrie sei (Dingler 1911: 13).[4] Damit stellte sich die Frage, ob die Prüfung der Winkelsumme in geodätisch vermessenen Dreiecken diese Frage entscheiden könne. Doch lassen sich empirische Messungen nie mit absoluter Genauigkeit ausführen. Deshalb war von vornherein klar, daß auf diesem Wege kein absoluter Entscheid zu erreichen war. Gauß konnte demnach, immer noch laut Dingler, mit seiner Messung lediglich feststellen, daß innerhalb der seinerzeit möglichen Meßgenauigkeit in unserem Raum die Euklidische Geometrie gilt. Allerdings habe die Betrachtung der trotz aller Sorgfalt unvermeidbaren Meßfehler gezeigt, daß die Meßergebnisse sich ebenso gut durch eine nichteuklidische Geometrie erklären ließen, wenn deren Krümmungsmaß nur hinreichend klein ist.

Exkurs zu Gauß: Triangulation und nichteuklidische Geometrie

Dingler hat seinen Bericht über die von Gauß vorgenommene Triangulation des Königreichs Hannover sowie die Vermessung des Dreiecks Brokken – Hoher Hagen – Inselsberg mit einer Quellenangabe aus Band VIII der Werke von Gauß belegt. Diese Quelle ist nicht überzeugend; denn sie stammt nicht von Gauß, sondern ist einer Gedächtnisadresse von W. Sartorius von Waltershausen aus dem Jahr 1856 entnommen. Waltershausen berichtet darin:

> »Die Geometrie betrachtete Gauß nur als ein consequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie an der Spitze zugegeben sei; er sei indes zur Überzeugung gelangt, daß dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, z.B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohehagen, Inselsberg, daß er näherungsweise richtig sei. Wolle man dagegen das genannte Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine andere ganz selbständige Geometrie, die er gelegentlich einmal verfolgt und mit dem Namen Antieuklidische Geometrie bezeichnet habe.« (Gauß 1900: 267f.)

Waltershausen ergänzt, daß Gauß hierüber nie etwas veröffentlicht habe; doch stehe zu vermuten, daß er, als er als junger Mann meinte, sich als

4 | Vgl. ferner Dingler (1931) sowie Dingler (1932: 153).

Lehrer der Mathematik bewerben zu sollen, hierfür ein Papier ausgearbeitet habe, auf dem er die Anfänge der Mathematik philosophisch entwickelt und gegen die Metaphysik abgegrenzt habe. Ob sich dieses Papier in seinem Nachlaß finden werde, sei allerdings zweifelhaft. Der Gedenkadresse ist eine mit »*Stäckel*« gezeichnete Bemerkung angefügt, die besagt, daß sich das von Waltershausen erwähnte Papier in Gauß' Nachlaß gefunden habe, dieses sich »jedoch im Wesentlichen nur auf die Erklärung des Zahlbegriffs und der vier Species« beziehe. Angesichts dieser unergiebigen Quellenlage erstaunt es nicht, daß die Interpretation der Absichten von Gauß hinsichtlich der Vermessung des Dreiecks Brocken – Hohehagen – Inselsberg unter Historikern nicht unumstritten ist, wie Peter H. Richter unter Hinweis auf die Abhandlung »The myth of Gauss' experiment on the Euclidean nature of physical space« von A. I. Miller anmerkt (vgl. Richter 2000).[5]

Wollte man diesen Problemkreis auch nur annähernd erhellen, bedürfte es eines umfangreichen, vertieften Quellenstudiums. Um zumindest einen ersten Einblick in die historische Sachlage zu gewinnen, seien hier lediglich als Quelle die Briefwechsel herangezogen, die Carl Friedrich Gauß (1777-1855) mit dem Astronomen Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) sowie dem Mathematiker und Physiker Christian Ludwig Gerling (1788-1864) führte. Der Briefwechsel mit Bessel umspannt die Jahre 1804 bis 1844 und enthält insgesamt 193 Briefe, der mit Gerling umspannt die Jahre 1810 bis 1854 und enthält insgesamt 386 Briefe.[6] Bessel lehrte ab 1810 an der Universität Königsberg Astronomie und Mathematik, Gerling ab 1817 an der Universität Marburg Mathematik, Physik und Astronomie. Der Briefwechsel mit Gerling handelt ausführlich von der Triangulation, die Gauß und Gerling gleichzeitig und in gegenseitiger Abstimmung im Königreich Hannover und dem angrenzenden Kurhessen vornahmen. Diese verlief nebst Vor- und Nacharbeiten in zwei Etappen: die erste von 1819 bis 1825[7], die zweite von 1834 bis 1844.[8] Auch im Briefwechsel mit Bessel kommen die Probleme der Triangulation mehrmals zur Sprache. Aus dem Briefwechsel mit Gerling geht klar hervor, daß Gauß von Planungsbeginn an dem Drei-

5 | Den Hinweis auf diesen Beitrag verdanke ich Wolfgang Bleichroth (Göttingen).

6 | Den Hinweis auf diesen Briefwechsel verdanke ich Joachim Vollrath (Würzburg); für weitere Anregungen und Hinweise zu dem Exkurs danke ich Manfred Achilles (Berlin), Klaus Beuermann (Göttingen) und Karl-Heinrich Wiederkehr (Hamburg).

7 | Die erste Nachricht darüber findet sich in Brief Nr. 111 (6. Januar 1819); die letzte in Brief Nr. 170 (27. Januar 1825), beide Briefe von Gauß.

8 | Die erste Nachricht darüber findet sich in Brief Nr. 228 (6. Oktbr. 1834) von Gerling; die letzte in Brief Nr. 345 (14. Julius 1844) von Gauß.

eck Brocken – Hohehagen – Inselsberg besondere Aufmerksamkeit widmete, da sich hieran das südlich gelegene kurhessische Dreiecksnetz anschließen sollte.[9] Die von Gauß angefügten Skizzen zeigen, daß dieses das größte Dreieck in dem von ihm gezeichneten Netz ist; doch weist er hierauf nicht eigens hin. Gerling dagegen lenkt seine Aufmerksamkeit auf »ein ungeheures Dreieck: Taufstein, Herkules, Inselsberg«, das aus Witterungsgründen jedoch schwer zu vermessen sei. Gauß ist in seiner Antwort[10] nicht darauf eingegangen, hat aber noch einmal die Bedeutung einer Einbeziehung des Inselsbergs in die Messungen betont, ohne hierfür jedoch eine nähere Begründung zu geben. Die Vermutung liegt nahe, daß es ihm nach wie vor um die Verknüpfung der hannoverschen mit der kurhessischen Triangulation ging, zumal er von Anfang an danach strebte, die damals in verschiedenen angrenzenden Kleinstaaten vorgenommenen Messungen miteinander zu verknüpfen. Dies wird auch aus dem Briefwechsel mit Bessel deutlich.[11] Die entscheidenden Messungen der zweiten Etappe vom Inselsberg aus nahm Gerling vor.[12] Der Briefwechsel mit ihm enthält zahlreiche Meßreihen; die Entfernungen sind teils in Metern, teils in Meilen, teils in Rheinischen Ruten, teils in Toisen – einem französischen Längenmaß – angegeben.

Bemerkenswert hinsichtlich der nicht nur von Dingler vertretenen Meinung, Gauß habe aus der Vermessung des Dreiecks Brocken – Hohehagen – Inselsberg Rückschlüsse darauf ziehen wollen, ob im wirklich gegebenen Raum eine nichteuklidische Geometrie herrsche, ist, daß in seinem Briefwechsel mit Gerling zwar neben vielem anderen auch von der nicht-Euklidischen Geometrie die Rede ist, jedoch ohne jeglichen Bezug auf die von ihm und Gerling vorgenommenen geodätischen Messungen. So machte Gerling während der Planungsphase der Triangulation Gauß auf das Buch seines Marburger Kollegen prof. juris Ferdinand Schweikart aufmerksam, das sich mit der »Parallelentheorie« in Euklids *Elementen* befaßte, und fügte eine persönliche Mitteilung Schweikarts an Gauß bei, in dem dieser behauptet, daß es neben der Euklidischen Geometrie noch eine »astralische

9 | Briefe Nr. 120 (21. Mai 1821) und Nr. 128 (7. Novbr. 1822).

10 | Gerling, Brief Nr. 138 (4. Aug. 1823); Gauß, Brief Nr. 139 (11. August 1823). Entwurfsskizzen des von Gauß vorgeschlagenen Dreiecksnetzes finden sich in zwei Briefen an Gerling (Nr. 120, 31. Mai 1821 und Nr. 128, 7. Novbr. 1822) und einem an Bessel (Nr. 131, 26. December 1821). In allen drei Skizzen ist das Dreieck Brocken-Hohehagen-Inselsberg das weitaus größte.

11 | Gauß an Bessel (Brief Nr. 154, 20. November 1826): Gauß lag daran, das hannoversche Dreiecksnetz über das kurhessische mit dem württembergischen und dem bayerischen zu verknüpfen.

12 | Gerlings Briefe Nr. 253 (11. Aug. 1836) und 258 (19. Septbr. 1836).

Größenlehre« gebe, in der die Summe der Innenwinkel von Dreiecken nicht gleich zwei Rechten seien. Gauß stimmte in seiner Antwort Schweikart im wesentlichen zu und schrieb ergänzend, daß er die »Astralgeometrie« soweit ausgebildet habe, daß er alle Aufgaben vollständig auflösen könne.[13] Geraume Zeit später berichtet Gauß über eine kleine Schrift des jungen Geometer Johann von Bolyai über die »nichtEuklidische Geometrie« und würdigt Bolyai als »ein Genie erster Größe«.[14] Erst nach vielen Jahren kam Gerling kurz auf diesen Bericht zurück. Gauß teilte Gerling daraufhin den genauen Titel des Buches seines alten Freundes Varkasch von Bolyai und den des angefügten (von dessen Sohn Johann von Bolyai verfaßten) Appendix mit; ferner wies er ihn auf Lobatschewski und dessen Schriften über die – von diesem »imaginäre«, von Schweikart einst »Astralgeometrie« genannte – nichteuklidische Geometrie hin. Im folgenden, wenige Tage später verfaßten Brief hat Gauß dann noch einige weitere »literarische Notizen« über Lobatschewski hinzugefügt und insbesondere über dessen Schrift »Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallel-Linien« ein »sehr vorteilhaftes Urteil« gefällt. Allerdings habe er in dieser Schrift nichts über die in einer anderen Schrift Lobatschewskis angeführte »experimentelle Begrenzung« gefunden, weshalb er nun an ihn – dessen Aufnahme als Korrespondent der Göttinger Sozietät er vor Jahresfrist veranlasst habe – zu schreiben gedenke.[15] Was mit »experimenteller Begrenzung« gemeint ist und ob es in dieser Sache zu einem Briefwechsel zwischen Gauß und Lobatschewski gekommen ist, wird aus den weiteren Briefen an Gerling nicht ersichtlich. Zusammenfassend ist aber nochmals zu betonen, daß die wenigen Bemerkungen zur nichteuklidischen Geometrie im Briefwechsel zwischen Gauß und Gerling keinerlei Bezug zu den zahlreichen und ausführlichen Passagen über die gemeinsam durchgeführte Triangulation in Hannover und Kurhessen erkennen lassen.

Dasselbe gilt für den Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel. Während auch hier in zahlreichen Briefen Probleme der Triangulation erörtert werden, findet sich die Geometrie lediglich ohne Bezug darauf in drei aufeinander folgenden Briefen der Jahre 1829/30 angesprochen. Gauß leitet seine Ausführungen hierzu am Ende eines Briefes und ohne jeden Bezug zu einem anderen Themenbereich mit der Bemerkung ein, daß das Thema der ersten Gründe der Geometrie »bei mir schon fas 40 Jahr alt ist«, und gibt sofort seine Überzeugung kund, »daß wir die Geometrie nicht voll-

13 | Gerling, Brief Nr. 112 (25. Januar 1819) nebst Anlage von Schweikart; Gauß, Brief Nr. 113 (16. März 1819).

14 | Gauß, Brief Nr. 208 (14. Februar 1832).

15 | Gerling, Brief Nr. 335 (18. Dezbr. 1843); Gauß, Brief Nr. 337 (4. Febr. 1844) und 338 (8. Febr. 1844).

ständig *a priori* begründen können«; doch werde er wohl nicht dazu kommen, seine »*sehr ausgedehnten* Untersuchungen« zu diesem Problem veröffentlichen zu können. Sodann weist er darauf hin,

»daß *außer* der bekannten Lücke in Euklid's Geometrie, die man bisher umsonst auszufüllen gesucht hat, und nie ausfüllen wird, es noch einen andern Mangel in derselben gibt [...]. Dieses ist die Definition des *Planum* als einer Fläche, in der die *irgend zwei* Puncte verbindende gerade Linie *ganz* liegt. Diese Definition enthält *mehr,* als zur Bestimmung der Fläche nöthig ist, und involvirt tacite ein *Theorem,* welches erst bewiesen werden muß.«[16]

Bessel pflichtet Gauß unter Hinweis auf Lambert und Schweikart bei und betont,

»daß unsere Geometrie unvollständig ist, und eine Correction erhalten sollte, welche hypothetisch ist, und wenn die Summe des ebenen Dreiecks = 180 ist verschwindet. Das wäre die *wahre* Geometrie, die Euklidische die *praktische*, wenigstens für Figuren auf der Erde«.[17]

Gauß freute sich über diese Zustimmung und gab dem in den folgenden, oft zitierten Sätzen Ausdruck:

»Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die Raumlehre in unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung wie die reine Grössenlehre: es geht unserer Kenntnis von jener durchaus *diejenige* vollständige Ueberzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzteren eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, daß wenn die Zahl *bloss* unseres Geistes Product ist, der Raum auch außer unserm Geist eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.«[18]

In einem Brief mit Wilhelm Olbers (1758-1840) hatte Gauß sich bereits mehr als ein Jahrzehnt früher ähnlich geäußert:

»Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, daß die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom *menschlichen* Verstande noch *für* den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind.

16 | Gauß, Brief Nr. 163 (27. Januar 1829), Hervorhebungen von Gauß.
17 | Bessel, Brief Nr. 164 (10. Februar 1829), Hervorhebungen von Bessel.
18 | Gauß, Brief Nr. 166 (9. April 1830), Hervorhebungen von Gauß.

Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen.«[19]

Man mag aus all dem schließen, daß Gauß in den von ihm erwähnten, jedoch nicht veröffentlichten »sehr ausgedehnten Untersuchungen« zu dem Schluß gekommen sein mußte, daß man die Gesetze des Raumes, sofern er außer unserm Geist eine Realität hat, durch Messung in Erfahrung bringen könne; man mag vermuten, daß er dabei an die Messung der Innenwinkel realer Dreiecke gedacht habe, da der Satz von der Innenwinkelsumme in Dreiecken bei der Diskussion der nichteuklidischen Geometrie mit im Zentrum stand. Legt man diese Vermutung zugrunde, so liegt es nahe, sich der vielen, mit aller Sorgfalt durchgeführten und ausgewerteten Winkelmessungen zu erinnern, die Gauß im Zuge seiner langwierigen Mitarbeit an der Triangulation vornahm. Daß Gauß diesen Schluß tatsächlich gezogen hat, läßt sich jedoch aus seinen Briefwechseln mit Bessel und Gerling nicht belegen; auch andere Belege scheinen nicht bekannt zu sein.

Peter H. Richter behauptet in seiner eingangs dieses Exkurses zitierten Abhandlung unter Berufung auf Axel Wittmann, daß Gauß das Dreieck Brocken – Hohehagen – Inselsberg von vornherein als sphärisches Dreieck behandelt und somit die Entfernungen nicht in euklidischer »Luftlinie«, sondern entlang von Großkreisen auf der Erdkugel angegeben habe, was zu den Entfernungen 69,19369 km, 84,94473 km und 105,97730 km führe; die Rückrechnung auf euklidische Entfernungen ergebe 69,19800 km, 84,94409 km und 105,97951 km. Angesichts einer Messgenauigkeit von »einigen wenigen Bogensekunden« *(*Wittmann*)*, die weniger von der Optik der Fernrohre als von der Refraktion und atmosphärischer Turbulenz herrühre, kommt Richter (a. a. O.) zu dem Schluß:

»*Gauß* war natürlich mit der nicht-euklidischen Natur der sphärischen Geometrie vertraut. Er sah aber keinen Anlaß, den dreidimensionalen Raum, in dem wir leben, als nicht-euklidisch anzusehen. Denn seine Messungen waren konsistent mit der Annahme, daß Lichtstrahlen euklidischen Geraden folgen. Acht Größenordnungen trennten ihn von den Befunden, die die Relativitätstheorie vorhersagt.«

19 | Gauß an Olbers (28. April 1817), zitiert in Gauß (1900: 177), Hervorhebungen von Gauß.

Die Aschaffenburger Meßindustrie und Dinglers technikorientierter Ansatz

Womöglich hat man dem Versuch, durch Messung der Winkelsumme in dem Dreieck Brocken – Hohehagen – Inselsberge die Frage entscheiden zu können, welche Geometrie sich im wirklich gegebenen Raum finden lasse und somit die wahre Geometrie sei, dadurch, daß man ihn Gauß zuschrieb, besonderes Gewicht verleihen wollen. Dingler hat jedenfalls gegen diesen Versuch trotz einer möglichen Berufung auf die Autorität von Gauß vehement Einsspruch erhoben. Er verwies darauf, daß man in der geodätischen Praxis genau den umgekehrten Weg gehe: Man beginne nicht voraussetzungslos mit der Messung; vielmehr führe man zuerst in Gedanken die euklidische Geometrie »gewissermaßen als Regulativ und Definition des störungsfreien und fehlerfreien Verhaltens« (Dingler 1949: 47) ein, um dann erst anhand dieses Regulativs den Betrag, um den die Summe der drei durch Triangulation in einem gegebenen Dreieck gemessenen Innenwinkel von 180 abweicht, als »Fehler« zu definieren. Was aber berechtigt den Geometer zu diesem Vorgehen? Was berechtigt ihn, einen Lehrsatz der theoretischen Wissenschaft Geometrie in der erfahrbaren Wirklichkeit als Regulativ anzuwenden? Dinglers Antwort lautet: Der Geometer darf, ja er muß die Euklidische Geometrie bei seinen Messungen und deren Auswertung voraussetzen, weil seine Meßgeräte nach den Lehren der Euklidischen Geometrie konstruiert und hergestellt sind.

Doch nun ist weiter zu fragen: Trifft diese Behauptung zu? Sind tatsächlich die Meßgeräte der Flächen- und Raummessung nach den Lehren der Euklidischen Geometrie konstruiert und hergestellt? Anders gefragt: Haben denn die Begründer der Aschaffenburger Meßzeugindustrie, haben der Zeugschlosser Franz Anton Hock (1837-1875), sein Schwager, der Mechaniker Joseph Messner (1847-1922) sowie der Kaufmann Gerhard Elshorst (1852-1913), der die Firma F. A. Hock & Co ab 1889 übernahm und deren Tradition, insbesondere deren Fertigungsverfahren fortführte[20], haben diese dem Handwerk verpflichteten Männer sich bei der Fertigung ihrer Meßzeuge an den Lehren der Euklidischen Geometrie orientiert? Sicherlich nicht. Und ebenso wenig dürfte ihnen bekannt gewesen sein, daß gerade in jenen Jahren, in denen sie ihre Meßzeug-Fertigung in Aschaffenburg begannen und zum Erfolg führten, die Wahrheit der Euklidischen Geometrie, wenn auch nicht ihre Anwendbarkeit auf Messungen zu alltäglichen Erfordernissen, wie die Triangulation sie darstellt, in Zweifel geriet. Vielmehr folgten sie den Jahrhunderte alten Fertigungsverfahren ihres Hand-

20 | Zur Geschichte der Aschaffenburger Meßzeug-Industrie vgl. Berghaus (1963: insb. 22-35).

werks und entwickelten diese weiter, um immer präzisere Meßinstrumente herstellen zu können. Diese Fertigungsverfahren, das ist Dinglers zentrale Erkenntnis, muß man analysieren, wenn man zeigen will, daß es wohl begründet war, ist und bleibt, dem Meßverfahren der Triangulation und darüber hinaus jeglicher Messung im realen Raum weiterhin die Euklidische Geometrie als Regulativ zugrunde zu legen.

Deshalb fragt Dingler: Wie verfährt man in der Meßindustrie, um möglichst genaue Lineale oder Reißschienen, das heißt: um möglichst genaue Geraden zu erhalten? In seiner Antwort bezieht er sich ausdrücklich auf die Herstellung von Reißschienen und Richtflächen, wie sie ihm der Inhaber der einer seinerzeit bekannten Präzisionswerkzeugfabrik in Aschaffenburg Gerhard Elshorst vorgeführt und erläutert hatte. So wichtig ist Dingler die Einsicht in dieses Verfahren, daß er am Ende seines Lebens, mehr als 40 Jahre nach dem soeben zitierten Werk, in der postum (1955) erschienenen Abhandlung »Geometrie und Wirklichkeit« noch einmal darauf zu sprechen kommt, wie er es in Aschaffenburg bei Elshorst kennenlernte.

Reißschienen fertigt man im industriellen Verfahren, indem man zwei möglichst ebenmäßige Richtflächen schneidet. Man realisiert – das aber heißt: man verwirklicht – somit möglichst genaue Geraden durch den Schnitt zweier möglichst ebenmäßiger Richtflächen. Damit aber ist das Problem lediglich verlagert auf die Realisierung von möglichst genauen Ebenen in Gestalt von Richtflächen. Das Verfahren zur industriellen Herstellung von Richtflächen – oder, wie Dingler sagt: zur Urzeugung der Ebene – geht folgendermaßen vonstatten: Man nimmt drei grob vorgeebnete Stahlplatten und schleift sie gegenseitig in öfterem Wechsel solange auf einander ab, bis jede derselben genau auf jede andere paßt, was sich in einer starken Adhäsion der aufeinander passenden Platten bemerkbar macht (Dingler 1911: 20, Dingler 1955/56: 350). Zwei Platten genügen für dieses Verfahren nicht, da sonst anstatt einer Ebene auch eine leicht gekrümmte Kugelfläche zustande kommen könnte. Hierauf hatte bereits Ernst Mach (1838-1916), einer der Förderer Hugo Dinglers, in seinem Werk *Erkenntnis und Irrtum* (1905) hingewiesen.

Was aber hat Dingler mit der Einsicht in dieses sogenannte Drei-Platten-Verfahren gewonnen? Erinnern wir uns noch einmal des Problems, von dem Dingler ausging. Seit der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien war die Wahrheit der Euklidischen Geometrie in Zweifel geraten.

Zwar blieb die Widerspruchslosigkeit der Euklidischen Geometrie als theoretische Wissenschaft anerkannt. Doch es war fragwürdig geworden, ob bei der Ausmessung wirklicher Flächen und Räume die Euklidische oder eine nichteuklidische Geometrie zugrunde zu legen sei. Angesichts dieses Dilemmas will Dingler »den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften« untersuchen. Genauer gesagt geht es ihm um den Zusammenhang zwischen den Lehrsätzen der Geometrie, sofern sie eine theoretische Wissenschaft ist, und den Meßergebnissen der Geometrie, sofern sie eine angewandte, oder, wie man auch sagen kann, sofern sie eine Erfahrungswissenschaft ist. Will man diesen Zusammenhang herausarbeiten, so muß man sich der Grundlagen beider, der theoretischen *und* der angewandten Geometrie, vergewissern.

Die Grundlagen der Euklidischen Geometrie sind, wie eingangs erläutert, in deren grundlegenden Definitionen, Axiomen und allgemeinen Annahmen festgesetzt. Dingler legt in seiner Abhandlung dar, daß man zwar seit Euklid bis in die Zeit, als er seine Untersuchung verfaßte (1911), die Bedeutung dieser Grundlagen für den theoretischen Aufbau der Geometrie erörtert habe, nicht dagegen ihren Praxisbezug. Ein solcher Praxisbezug sei in den Grundlagen der Euklidischen Geometrie jedoch allenfalls in Ansätzen gegeben. An der Definition der Ebene lasse sich dies sehr gut zeigen. Euklids Definition der Ebene lautet:

»Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.« [21]

Diese Definition mag sich als Grundbaustein für den theoretischen Aufbau der Geometrie eignen; zur Herstellung von Ebenen und damit zur Herstellung von Meßgeräten, mittels derer man Flächen ausmessen kann, taugt diese Definition jedoch nicht. Deshalb schlägt Dingler vor, man solle die grundlegenden euklidischen Definitionen durch Anweisungen ersetzen, wie Ebenen herzustellen sind, also durch Handlungsanweisungen oder, wie Dingler sagt, durch empirische Definitionen. Im Drei-Platten-Verfahren aber hat Dingler eine solche Handlungsanweisung und damit die empirische Definition der Ebene gefunden. Sie lautet: Man nehme drei grob vorgeebnete Platten, und schleife sie gegenseitig in öfterem Wechsel solange auf einander ab, bis jede derselben mit jeder anderen derart genau aufeinander passt, daß die Platten durch Adhäsion aneinander haften.

Was leistet nun diese empirische Definition der Ebene erstens für die angewandte Geometrie, für die Geometrie als Erfahrungswissenschaft? Diese Definition beschreibt, wie die erste Elementarform jeglicher Meßzeuge zur Flächen- und Raummessung, oder anders gesagt, wie Richtplatten herzustellen sind. Die zweite Elementarform im Herstellungsprozeß von Meßzeugen ist das Lineal oder die Reißschiene, die sich aus dem Schnitt zweier Ebenen herstellen läßt. Hier wird, wie eigens hervorgehoben sei, ein

21 | Zitiert nach Becker (1954: 88); es sei daran erinnert, daß Gauß an dieser Definition Anstoß genommen hat; vgl. den oben im Exkurs zitierten Brief Nr. 163 (27. Januar 1829) an Bessel.

wichtiges Prinzip praktischen Handelns und Produzierens deutlich, das der Philosoph beachten muß, sofern er sich mit den Grundlagen der Erfahrungswissenschaften befaßt: das Prinzip der nicht umkehrbaren Reihenfolge des Handelns oder, wie es Dingler nennt: das *Prinzip der pragmatischen Ordnung*: Lineale lassen sich erst herstellen, wenn man zuvor Richtplatten, das heißt präzise Ebenen hergestellt hat. Und erst wenn man über Richtplatte und Richtschiene verfügt, lassen sich mit deren Hilfe all die weiteren, immer komplizierter werdenden Meßzeuge wie Winkelplatten, Parallel-Endmaße, Maßstäbe und Nonien, Höhenmeß- und Anreißgeräte, Meßmaschinen und Prüfgeräte herstellen.

Was aber leistet die empirische Definition der Ebene zweitens für die Geometrie als theoretische Wissenschaft? Sie bildet, wie Dingler bereits in seiner hier erörterten Untersuchung von 1911, in vertiefter Form aber über vier Jahrzehnte bis zu seinem Tod gezeigt hat, die Grundlage eines theoretischen Aufbaus der Geometrie, welcher dem des Euklid ebenbürtig ist, darüber hinaus aber den Zusammenhang zur praktischen Anwendung durchgängig wahrt. Diese Leistung Dinglers ist bis heute unbestritten. In seinem *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*, das im Jahr 1987, also mehr als 75 Jahre nach Dinglers Untersuchung 1911 erschien, skizziert dessen Autor Paul Lorenzen die konstruktive Begründung der Geometrie als theoretische Wissenschaft. Er beginnt diese konstruktive Begründung mit der Einführung der Ebene, die er durch ihre »freie Klappsymmetrie« definiert. Freie Klappsymmetrie: Beim Drei-Platten-Verfahren werden Ebenen »geklappt«, um sie wechselseitig aufeinander abzuschleifen und ihre wechselseitige Passung zu prüfen. Und so kann Lorenzen abschließend feststellen:

»In anderer Terminologie ist eine äquivalente Definition der Ebene zuerst von H. Dingler 1911 formuliert worden.« (Lorenzen 1987: 194ff., insb. 196)

Wozu aber benötigt man überhaupt einen theoriegeleiteten Aufbau der Geometrie? An der Fortentwicklung der Herstellungsverfahren in der Meßzeugindustrie läßt sich das gut darstellen. Heute werden Richtplatten nicht mehr aus Stahl, sondern aus Hartgestein gefertigt, die mit anderen Techniken als mit dem Drei-Platten-Verfahren eben geschliffen und geläppt werden. Die Ebenheit einer Steinplatte prüft man heute mit sogenannten Ebenheitsmeßgeräten. Ergebnis einer solchen Prüfung ist ein Ebenheits-Meß-Protokoll *(siehe Abbildung)*. Dieses Meß-Protokoll zeigt, daß auch die präzisest gefertigte Ebene nie absolut eben ist. Das Maß für die bestmögliche Ebenheit oder, wie wir zuvor bei der Erörterung der Euklidischen Geometrie sagten: das Regulativ für die absolute Ebenheit einer Richtplatte, sei sie aus Hartgestein oder aus anderem Material gefertigt, ist die durch ihre »freie Klappsymmetrie« definierte Ebene. Die Idee der Klappsymmetrie der

Ebene, gewonnen aus der Praxis des Drei-Platten-Verfahrens, ist gleichzeitig das Regulativ jeder Ebenheitsmessung. Hier, im gemeinsamen Fundament der Geometrie als Theorie wie als Erfahrungswissenschaft, tritt der wechselseitige Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den Wissenschaften zutage. Insofern bleibt die Bedeutung des technisch scheinbar überholten Drei-Platten-Verfahrens weiterhin gewahrt.[22]

In der empirischen Definition der Ebene, gewonnen aus dem Drei-Platten-Verfahren der Meßzeugindustirie, hat Dingler somit den Zusammenhang gefunden zwischen Theorie und Erfahrung in der Geometrie. Er hat damit auch deutlich gemacht, daß eine Flächen- oder Raummessung, sofern sie sich der auf dieser Grundlage konstruierten Meßinstrumente bedient, immer zu Ergebnissen führt, welche der Euklidischen Geometrie genügen und nicht einer nichteuklidischen Geometrie. Denn mit den Meßzeugen wird die Euklidische Geometrie in die Messung und damit in die Wirklichkeit eingebracht. Sie *herrscht* nicht in der Wirklichkeit, sondern wird *in der Herstellung der Meßzeuge sowie im Meßvorgang mit diesen Meßzeugen realisiert.*

In den folgenden Jahrzehnten seines Lebens hat Dingler diese seine Erkenntnis, daß sich allein durch Einführung von Herstellungsanweisungen oder empirischen Definitionen ein Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrungswissenschaft schaffen läßt, weiter ausgearbeitet. In Abgrenzung gegen Kants Lehre vom Apriori der reinen Anschauung (vgl. Kant 1783: § 7 [281]) sprach er 1928 in seinem Werk *Das Experiment* im Hinblick auf die grundlegende Bedeutung des Herstellungsprozesses für den Aufbau der Wissenschaften vom *Herstellungsapriori* der Wissenschaften (Dingler 1928: 185ff., »Das neue Apriori«).[23] Den so auf den Begriff gebrachten neuen Ansatz hat er auf die Gesamtheit der exakten Wissenschaften ausgedehnt. Es würde zu weit führen, das hier im Einzelnen darzulegen. Ein skizzenhafter Überblick mag den – wie Dingler später sagte – »Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaft« (Dingler 1964), der allen anderen Erfahrungswissenschaften zugrunde liegt, aufzeigen. Dieser Aufbau folgt dem Prinzip der pragmatischen Ordnung. Am Anfang steht die Vergewisserung darüber, nach welchen Prinzipien er erfolgt. Das wichtigste dieser Prinzipien wurde bereits genannt: das Prinzip der pragmatischen Ordnung. An-

22 | Im Präzisionswerk von J. Fischer wurde dem Verfasser, als er sich bei der Abfassung des vorliegenden Beitrags über die heute üblichen industriellen Verfahren zur Herstellung von Richtplatten informieren wollte, gezeigt, wie auch heute noch die Ebenheit einer steinernen Richtplatte durch die Adhäsion eines Stahlquaders geprüft und demonstriert wird. In diesem Prüfverfahren kommt das von Dingler beschriebene Drei-Platten-Verfahren auch heute noch zur Anwendung.

23 | Vgl. ferner Dingler (1930: 46, 49, 104), sowie Dingler (1936: 28).

dere, wie das Prinzip der Eindeutigkeit, treten hinzu. Hat man sich des Systems dieser Prinzipien vergewissert, ist als erste Fundamentalwissenschaft die Zahlenlehre, die Arithmetik, auf der Grundlage der Herstellung von Zahlzeichen zu entwickeln. Auch die Arithmetik gründet somit auf Handlungsanweisungen, also auf empirischen Definitionen. Deren erste ist die Herstellungsanweisung für das Zahlzeichen »eins«, das durch einen einfachen Strich repräsentiert wird. Auf die Arithmetik folgt als zweite Fundamentalwissenschaft die Geometrie, mit der wir uns ausgiebig beschäftigt haben. Wie sich darauf als nächste Stockwerke des stolzen Gebäudes der exakten Wissenschaften, Chronometrie und Kinematik, aufbauen, das sei jenen zum Studium überlassen, welche die hier vorgelegte Skizze angeregt hat, sich vertiefter damit zu befassen. Daß an diesem methodischen Aufbau der Wissenschaften auch heute noch weitergearbeitet wird, mögen zwei Werke belegen, die sich auf der Grundlage von Dinglers Erkenntnissen mit moderner, nichtklassischer Physik befassen:

- von Wolfgang Schonefeld*: Protophysik und Relativitätstheorie* (Würzburg 1999)
- von Ulrich Hoyer*: Synthetische Quantentheorie* (Hildesheim 2002)

Man kann daraus ersehen, daß die Philosophie *Dinglers* nicht ins Museum gehört. Sie ist nach wie vor lebendig und es lohnt, sich damit auseinander zu setzen.

Literatur

Becker, O. (1954): *Die Grundlagen der Mathematik,* Freiburg.

Becker, O./Hofmann, J. E. (1951): *Geschichte der Mathematik*, Bonn.

Berghaus, E. (1963): *»Vermessenes« Jahrhundert,* hrsg. von der Industrie- und Handelskammer Aschaffenburg, Wiesbaden.

Dingler, H. (1911): *Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften,* in: Dingler (2004).

Dingler, H. (1928): *Das Experiment. Sein Wesen und seine Geschichte,* München.

Dingler, H. (1930): *Das System. Das philosophisch-rationale Grundproblem und die exakte Methode der Philosophie,* in: Dingler (2004).

Dingler, H. (1931): *Der Zusammenbruch der Wissenschaft und der Primat der Philosophie* (1926, ²1931), in: Dingler (2004).

Dingler, H. (1932): *Die Geschichte der Naturphilosophie,* München.

Dingler, H. (1936): »Methodik statt Erkenntnistheorie und Wissenschaftslehre«, in: Dingler (2004).

Dingler, H. (1949): *Grundriß der methodischen Philosophie. Die Lösungen der philosophischen Hauptprobleme*, Füssen.

Dingler, H. (1955/56): »Geometrie und Wirklichkeit«, in: Dingler (2004).

Dingler, H. (1964): *Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaft*, München.

Dingler, H. (2004): *Gesammelte Werke*, hrsg. von Ulrich Weiß, Karsten Worm InfoSoftWare, Berlin.

Einstein, A. (1969): *Über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, 1916, [21]1969 (in der 21. Auflage des Verlages Friedr. Vieweg & Sohn 1969: S. 69).

Gauß, C. F. (1900): *Werke*, Band VIII, Göttingen.

Gauß, C. F. (1975): Werke, *Ergänzungsreihe*, Band I: Briefwechsel C. F. Gauß, F. W. Bessel, Hildesheim; Band III: Briefwechsel C. F. Gauß, F. W. Gerling, Hildesheim.

Kant, I. (1783): *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*, Riga.

Lefèvre, W. (1981): »Rechensteine und Sprache. Zur Begründung der wissenschaftlichen Mathematik durch die Pythagoreer«, in: Damerow/Lefèvre (Hrsg.), *Rechenstein, Experiment, Sprache*, Stuttgart.

Litt, Th. (1963): *Naturwissenschaft und Menschenbildung*, Heidelberg (4. Aufl.), Vorwort zur zweiten Auflage.

Lorenzen, P. (1987): *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*, Mannheim.

Neugebauer, O. (1969): V*orlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Erster Band: *Vorgriechische Mathematik*, Berlin (2. Aufl.).

Richter, P. H. (2000): »Positive und negative Krümmung im Gaußschen Dreieck«, in: *Mitteilungen*, Nr. 37 (Göttingen 2000) der Gauss-Gesellschaft e.V. Göttingen; dort der Hinweis auf den Beitrag von Miller, *Isis* 63(1972), 345-348.

Sjöberg, A. W. (1975): »Der Examenstext A«, in: *Zeitschrift für Assyriologie*, Bd. 64, II. Halbband.

Vogel, K. (1929): *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik in ihrem Zusammenhang mit der 2:n-Tabelle des Papyrus Rhind*, München.

Waismann, F. (1970): *Einführung in das mathematische Denken*, München (3. Aufl.).