

# Fortschritt-Berichte VDI

VDI

Reihe 11

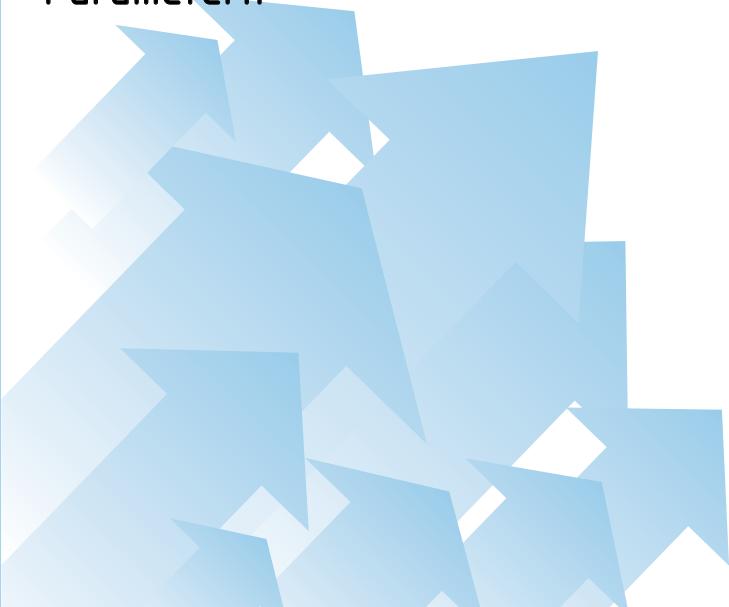
Schwingungs-  
technik

Nr. 352

Benjamin Siegl, M. Sc.  
Darmstadt

## Zur Instationären Unwuchtidentifikation

Modellgestütztes Auswuchten von  
Rotoren mit drehzahlveränderlichen  
Parametern





# Zur Institutionären Unwuchtidentifikation

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte

## Dissertation

von  
**M. Sc. Benjamin Siegl**  
aus Darmstadt

Referent: Prof. Dr.-Ing. Richard Markert  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Uwe Klingauf

Tag der Einreichung: 25. Oktober 2016  
Tag der mündlichen Prüfung: 11. Januar 2017

Darmstadt, 2017

D17



# Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 11

Schwingungstechnik

Benjamin Siegl, M. Sc.  
Darmstadt

Nr. 352

## Zur Instationären Unwuchtdentifikation

Modellgestütztes Auswuchten  
von Rotoren mit drehzahl-  
veränderlichen Parametern

VDI verlag

Siegl, Benjamin

## Zur Instationären Unwuchtidentifikation

**Modellgestütztes Auswuchten von Rotoren mit drehzahlveränderlichen Parametern**

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 352. Düsseldorf: VDI Verlag 2017.

114 Seiten, 45 Bilder, 13 Tabellen.

ISBN 978-3-18-335211-1, ISSN 0178-9554,

€ 48,00/VDI-Mitgliederpreis € 43,20.

**Für die Dokumentation:** Auswuchtechnik – Unwuchtidentifikation – Drehzahlvariable Rotor-  
systeme – Instationäre Resonanzdurchfahrt – Systemidentifikation – Rotordynamik – Magnetlager  
– Abgasturbolader

Die vorliegende Arbeit wendet sich an Ingenieure und Wissenschaftler im Bereich der Auswuch-  
technik und Rotordynamik. In ihr wird ein Unwuchtidentifikationsverfahren im Zeitbereich entwickelt,  
das mit nur einem schnellen Hoch- oder Auslauf ohne Testunwuchtsatz auskommt. Dadurch wird die  
Meßprozedur im Vergleich zu klassischen Verfahren verkürzt. Außerdem sind die während des  
Durchlaufs von Resonanzen auftretenden Schwingungsamplituden gegenüber quasi-stationären  
Meßläufen deutlich verringert. Die Besonderheit bei dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren ist,  
daß sich die Systemmatrizen der Bewegungsgleichungen mit der Drehzahl ändern dürfen. Somit  
können Systemänderungen während des instationären Meßlaufs berücksichtigt werden, beispiels-  
weise durch Kreiselwirkung oder Gleitlagerung. Das vorgestellte Auswuchtverfahren wird anschlie-  
ßend an einigen Rotsystemen – darunter einem Rotor in aktiven Magnetlagern und einem in  
Schwimmbuchsen gelagerten Abgasturbolader – erprobt.

### Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie;  
detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

### Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie  
(German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at  
<http://dnb.ddb.de>.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Prof. Dr.-Ing. Richard MARKERT am Fachgebiet Strukturdynamik im Fachbereich Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt, welches nun als Institut für Angewandte Dynamik unter der Leitung Prof. Dr.-Ing. Bernhard SCHWEIZER steht.

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere danke ich meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Richard MARKERT, der die Anregung zu dieser spannenden Arbeit gab und dessen Tür mir stets offen stand. Besonders geschätzt habe ich die zahlreichen fruchtbaren Gespräche und das mir entgegengebrachte Vertrauen. Durch seinen Einsatz hatte ich die Möglichkeit, mein Thema auf nationalen und internationalen Fachtagungen vorzustellen und zwei Forschungsaufenthalte in Brasilien zu verbringen. Des weiteren bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Uwe KLINGAUF für die Übernahme des Korreferats und den freundlichen Kontakt.

Ein weiterer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Bernhard SCHWEIZER, welcher mir die Freiheit gegeben hat, die Promotion zu einem erfolgreichen Ende zu führen.

Zudem danke ich den Studenten, die Interesse an meinem Forschungsthema gezeigt haben und durch unermüdlichen Einsatz bei ihren Bachelor-, Seminar-, und Masterarbeiten auch mir stets den nötigen Vortrieb gegeben haben. Chronologisch genannt seien hier Martin POSTEL, Matthias LAUZI, Kristin WENDEL, Ruben MICHAELIS, Martin SEILER, Lisa GENTNER und in besonderem Maße Arved ESSER.

Besonders möchte ich meinen Bürokollegen Jens BAUER, Nicklas NORRICK, Bastian PFAU, Gerrit NOWALD und Wolfgang KÖHL für die vielen produktiven Fachgespräche sowie die bei einem solchen Unterfangen notwendige Zerstreuung danken.

An Jochen OTT und Wolfgang HESS geht ein spezieller Dank, da ohne sie die Versuchse im Labor nicht in dieser Form existieren und funktionieren würden.

Bei den Sekretärinnen des Fachgebiets, Maria RAUCK und Helga LORENZ, bedanke ich mich für die stets freundliche und konstruktive Arbeitsatmosphäre.

Ohne die Unterstützung meiner Familie und meiner Freundin Sira wäre es mir schließlich nicht gelungen, immer wieder mit der nötigen Hartnäckigkeit an diese Arbeit heranzugehen. Mein langjähriger Freund Lorenz übernahm die kritische Durchsicht des Manuskriptes. Ihnen gilt mein herzlichster Dank.

Darmstadt, im Januar 2017

BENJAMIN SIEGL

*Meinen Eltern gewidmet.*

---

*„In general, complexity and precision bear an inverse relation to one another in the sense that, as the complexity of a problem increases, the possibility of analyzing it in precise terms diminishes.“*

*— Lotfi A. Zadeh —*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Liste der Formelsymbole</b>	<b>VII</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>XIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIV</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung . . . . .	2
1.2.1 Stationäre Auswuchtverfahren . . . . .	3
1.2.2 Unwuchtidentifikation aus stationären Messungen . . . . .	5
1.2.3 Instationäre Auswuchtverfahren . . . . .	6
1.3 Inhalt und Gliederung der Arbeit . . . . .	8
<b>2 Systemtheoretische Grundlagen</b>	<b>10</b>
2.1 Modellierung von Rotoren mit drehzahlabhängigen Systemmatrizen . .	11
2.1.1 Zeitkontinuierliches Modell im Verschiebungsräum . . . . .	11
2.1.2 Zeitkontinuierliches Modell im modalen Zustandsraum . . . . .	12
2.1.3 Zeitdiskretisierung . . . . .	15
2.2 Instationärer Hoch- oder Auslauf . . . . .	16
2.2.1 Gleichmäßig beschleunigter Hoch- oder Auslauf . . . . .	19
2.2.2 Beliebiger instationärer Drehzahlverlauf . . . . .	20
<b>3 Verfahren zur Unwuchtidentifikation aus instationären Meßläufen</b>	<b>23</b>
3.1 Unwuchtidentifikation im Zeitbereich . . . . .	23
3.1.1 Modellierung und Annahmen . . . . .	23
3.1.2 LTV-Algorithmus im Zeitbereich . . . . .	25
3.1.3 LTI-Voridentifikation . . . . .	26
3.2 Gewichtung bestimmter Drehzahlbereiche . . . . .	27
3.3 Konvergenz und Fehlereinflüsse . . . . .	28
3.3.1 Statistische Voraussetzungen . . . . .	29
3.3.2 Einfluß fehlerbehafteter Modaldaten . . . . .	30

<b>4 Praktische Erprobung des Auswuchtverfahrens</b>	<b>32</b>
4.1 LAVAL-Rotor mit Gyroskopie . . . . .	33
4.1.1 Systembeschreibung und Modellierung . . . . .	33
4.1.2 Meßkette . . . . .	38
4.1.3 Aufbereitung der Meßdaten . . . . .	40
4.1.4 Identifikationsergebnisse . . . . .	41
4.1.4.1 Numerischer Rotor Konfiguration <i>kurz</i> . . . . .	41
4.1.4.2 Experimenteller Einscheibenrotor Konfiguration <i>kurz</i> . . . . .	44
4.1.4.3 Experimenteller Einscheibenrotor Konfiguration <i>lang</i> . . . . .	47
4.2 Starrer Rotor in horizontal nachgiebigen Lagern . . . . .	51
4.2.1 Systembeschreibung und Modellierung . . . . .	51
4.2.2 Meßkette . . . . .	52
4.2.3 Aufbereitung der Meßdaten . . . . .	53
4.2.4 Identifikationsergebnis . . . . .	54
4.3 Zweischeibenrotor (LTI) . . . . .	58
4.3.1 Systembeschreibung und Modellierung . . . . .	58
4.3.2 Meßkette . . . . .	59
4.3.3 Aufbereitung der Meßdaten . . . . .	60
4.3.4 Identifikationsergebnis . . . . .	60
4.4 Rotor in zeitveränderlichen aktiven Magnetlagern (LTV) . . . . .	65
4.4.1 Systembeschreibung und Modellierung . . . . .	65
4.4.2 Meßkette . . . . .	69
4.4.3 Aufbereitung der Meßdaten . . . . .	71
4.4.4 Identifikationsergebnis . . . . .	71
4.5 Abgasturbolader . . . . .	76
4.5.1 Systembeschreibung und Modellierung . . . . .	76
4.5.2 Meßkette . . . . .	77
4.5.3 Aufbereitung der Meßdaten . . . . .	79
4.5.4 Identifikationsergebnis . . . . .	82
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>86</b>
5.1 Zusammenfassung . . . . .	86
5.2 Ausblick . . . . .	88
<b>Anhang</b>	<b>90</b>
<b>A Analyse von zeitvarianten Systemen im Frequenzbereich</b>	<b>90</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>94</b>

# Liste der Formelsymbole

## Lateinische Buchstaben (Indizes in separater Auflistung)

Symbol <sup>1</sup>	Einheit <sup>2</sup>	Bedeutung
<i>a</i>	–	generalisierte modale Masse
<i>A</i>	min <sup>2</sup>	Fläche
<i>A<sub>0</sub></i>	*	(eine) Systemmatrix im Zustandsraum
<i>c</i>	–	Laufzahl für Zeitstützstellen
<i>C</i>	–	Gesamtanzahl der Zeitstützstellen
<i>b</i>	N s/m, N s m	Dämpfungskoeffizient
<i>B</i>	*	Dämpfungsmaß
<i>B<sub>0</sub></i>	*	Eingangsmatrix im Zustandsraum
<i>D</i>	–	modales Dämpfungsmaß
<i>f</i>	Hz	Frequenz
<i>F</i>	N	Kraft
<i>f</i>	N	Erregervektor
<i>G</i>	*	gyroskopische Matrix
<i>H</i>	–	Übertragungsfunktion
<i>i</i>	–	imaginäre Einheit
<i>I</i>	A	elektrischer Strom
<i>k</i>	N/m, N, N m	Steifigkeitskoeffizient
<i>k<sub>0</sub></i>	*	Koeffizient, z. B. von Reglern, AMBs, etc.
<i>K</i>	*	Steifigkeitsmatrix
<i>l</i>	m	Länge
<i>m</i>	kg	Masse
<i>M</i>	*	Massenmatrix
<i>n</i>	min <sup>-1</sup>	Drehzahl
<i>n<sub>AMB</sub></i>	–	Wicklungsanzahl pro Pol im AMB
<i>N</i>	*	zirkulatorische Matrix
<i>p</i>	–	Laufzahl für Moden
<i>P</i>	–	Gesamtanzahl der Moden
<i>q</i>	–	Laufzahl für konjugiert-komplexe Moden

<sup>1</sup> : Variablen- oder Indexplatzhalter

<sup>2</sup> \*: Einheit unterschiedlich

<b><math>q</math></b>	m	physikalischer Koordinatenvektor
<b><math>Q</math></b>	–	Gesamtanzahl konjugiert-komplexer Moden $q$
<b><math>Q(t)</math></b>	m	Instationäre komplexe Amplitudenfunktion
<b><math>r</math></b>	–	Beliebige Laufzahl
<b><math>r(t)</math></b>	m	Komplexe Rotorauslenkungen
<b><math>R</math></b>	mm	Residuum
<b><math>R</math></b>	–	Gesamtanzahl für Laufzahl $r$
<b><math>s</math></b>	m, mm	Beliebiger Abstand
<b><math>S</math></b>	*	Leistungsdichte
<b><math>u</math></b>	*	Erregervektor im Zustandraum
<b><math>t</math></b>	s	Zeit
<b><math>T</math></b>	s	Meßdauer
<b><math>u</math></b>	V	elektrische Spannung
<b><math>U</math></b>	kg m	Unwucht
<b><math>U</math></b>	kg m	Matrix der Unwuchten
<b><math>v</math></b>	m	horizontale Rotorverschiebung
<b><math>w</math></b>	m	vertikale Rotorverschiebung
<b><math>x</math></b>	*	allgemein: Signal
<b><math>x</math></b>	–	Rotorlängsachse (festes KS)
<b><math>x</math></b>	m, m/s	Zustandsvektor im physikalischen Raum
<b><math>X</math></b>	*	allgemein: zum Signal $x$ gehörendes Spektrum
<b><math>\mathbf{X}</math></b>	*	Modalmatrix
<b><math>y</math></b>	–	horizontale Rotorachse (festes KS)
<b><math>z</math></b>	–	vertikale Rotorachse (festes KS)

## Griechische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\alpha$	1/s <sup>2</sup>	Anfahrbeschleunigung
$\beta$	–	Aufkeilwinkel der Scheibe
$\gamma$	–	Phasenwinkel der Aufkeilung
$\delta$	–	Phasenwinkel der Exzentrizität
$\varepsilon$	m	Exzentrizität
$\lambda$	1/s	Eigenwert
$\mu$	H/m	magnetische Permeabilität
$\varphi$	–	Drehwinkel des Rotors
$\varphi_{\text{R}}$	–	allgemein: Drehwinkel
$\psi$	–	Phasenwinkel der Übertragungsfunktion

$\theta$		Spaltenmatrix der Optimierungsgrößen
$\Theta$	$\text{kg m}^2$	Massenträgheitsmoment
$\xi$	*	modaler Zustandsvektor
$v$	-	Referenzsignal (Erregervektor)
$\omega$	$1/\text{s}$	Eigenkreisfrequenz
$\Omega$	$1/\text{s}$	Drehzahl
$\bar{\Omega}$	$1/\text{s}$	Kreisfrequenz der FOURIER-Transformation

## Indizes

Symbol	Bedeutung
a	axial
AMB	aktives Magnetlager ( <i>Active Magnetic Bearing</i> )
b	bezugs-
B	Lager ( <i>Bearing</i> )
d	den Auslauf betreffend ( <i>down</i> )
D	differentiell-
e	eck-
end	end-
I	integral-
ini	anfangs- ( <i>initial</i> )
ident	identifiziert
L	Luft
mag	magnetisch
max	maximal
p	polar
$p$	$p$ -te (Mode)
P	proportional-
$q$	$q$ -te (konjugiert-komplexe Mode)
$r$	$r$ -te
r	im Residuenvektor gewählte Koordinaten
R	Regel-
s	Abtast- ( <i>sampling</i> )
S	Schwerpunkt
soll	einen Sollwert betreffend
u	den Hochlauf betreffend ( <i>up</i> )
$v$	den modalen Erregervektor betreffend
V	Vormagnetisierung

W	Wellendurchstoßpunkt
$\varphi$	Rotation betreffend
$x$	das Signal $x$ betreffend
$\xi$	den modalen Zustandsvektor betreffend
$y$	die $y$ -Achse betreffend
$z$	die $z$ -Achse betreffend
0	Anfangs-/Ruhe-

## Sonstige mathematische Symbole

Symbol	Bedeutung
$\text{diag}$	Diagonalmatrix
$\frac{\partial}{\partial x}$	Partielle Ableitung
$\frac{d}{dx}$	Totale Ableitung
$\Delta \square$	Differenz
$\frac{d}{dt}$	Zeitableitung ( $\frac{d \mathbf{x}}{dt}$ )
$\hat{\mathbf{x}}$	Eigenvektor (wenn Platzhalter <b>fett</b> )
$\tilde{x}$	Amplitude (wenn Platzhalter nicht fett)
$\widetilde{x(t)}$	Messung
$\widetilde{x(\Omega)}$	Auf Meßdauer bezogene FOURIER-Transformierte
$\bar{x}$	Mittelung bzw. die FOURIER-Transformierte betreffend
$\mathbf{x}^R$	Rechtseigen-
$\mathbf{x}^L$	Linkseigen-
$\mathbf{x}^T$	Transponiert
$\mathbf{x}^*$	Konjugiert-komplex
$\mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$	* Operator „FOURIER-Transformierte von“
$\Im\{\mathbf{x}\}$	Operator „Imaginärteil von“
$\Re\{\mathbf{x}\}$	Operator „Realteil von“
RMS $\{\mathbf{x}\}$	Operator „quadratisches Mittel“

## Abkürzungen

Symbol	Bedeutung
AA	anti-Aliasing
AMB	aktives Magnetlager ( <i>Active Magnetic Bearing</i> )
ATL	Abgasturbolader
BGL	Bewegungsgleichung

DGL	Differentialgleichung
EK	Einflußkoeffizienten
EMA	experimentelle Modalanalyse
engl.	englisch
ICSI	IHI Charging Systems International GmbH
KS	Koordinatensystem
LTI	linear-zeitinvariant ( <i>Linear-Time-Variant</i> )
LTV	linear-zeitvariant ( <i>Linear-Time-Invariant</i> )
PID	proportional-integral-differentieller Regler
RMS	quadratisches Mittel ( <i>Root Mean Square</i> )



# Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein Unwuchtidentifikationsverfahren im Zeitbereich beschrieben, das mit nur einem schnellen Hoch- oder Auslauf ohne Testunwuchtsatz auskommt. Dadurch wird die Meßprozedur im Vergleich zu klassischen Verfahren verkürzt. Außerdem sind die während des Durchlaufs von Resonanzen auftretenden Schwingungsamplituden gegenüber quasi-stationären Meßläufen deutlich verringert. Die Besonderheit verglichen mit vorherigen Arbeiten ist bei dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren, daß sich die Systemmatrizen der Bewegungsgleichungen mit der Drehzahl ändern dürfen. Somit können Systemänderungen während des instationären Meßlaufs berücksichtigt werden, beispielsweise durch Kreiselwirkung oder Gleitlagerung.

Der Unwuchtidentifikationsalgorithmus erfolgt durch eine modellgestützte Parameteridentifikation im Zeitbereich. Dazu werden während eines Hoch- oder eines Auslaufs Schwingungssignale gemessen. Anschließend wird die Quadratsumme des Fehlers zwischen diesen Signalen und denen aus einer numerischen Simulation eines modal reduzierten Rotors bei demselben Drehzahlverlauf minimiert. Der Suchlauf wird abgebrochen, wenn eine zufriedenstellende Genauigkeit erreicht ist und damit die Unwuchten bekannt sind. Um die Wahrscheinlichkeit des Hängenbleibens in lokalen Minima zu senken, wird ein kaskadierendes Verfahren zur Startwertsuche vorgestellt, das mit sehr wenigen anzupassenden Parametern auskommt.

Das vorgestellte Auswuchtverfahren wird anschließend an einigen Rotorsystemen erprobt. Dabei werden die Sonderfälle von drehzahlunabhängigen Rotorsystemen ebenso untersucht wie der Sonderfall eines Rotors, dessen Eigenfrequenzen sich linear mit der Drehzahl ändern. Außerdem wird das Verfahren an einem Rotor mit ausgeprägter Kreiselwirkung und an einem in Schwimmbuchsen gelagerten Abgasturbolader getestet.

# Abstract

In this thesis, a method for unbalance identification in time-domain is presented. It is capable to identify the unbalance from one fast run-up or run-down process without using test weights. This shortens the balancing procedure compared to conventional methods. It also reduces the amplitudes while passing through the resonance compared to slow run-ups or run downs. The novelty compared to previous works is that the system matrices may be speed-dependent. This gives rise to the identification of rotor systems which change during the measurement procedure, for example due to gyroscopic effects or journal bearings.

Based on a speed-dependent modal model, a numerical simulation in modal space gives a solution in time-domain. The identification algorithm works by model-based parameter identification in time-domain. It minimizes the squared error sum of the numerical time signals transformed into physical coordinates and the measured time signals. To avoid solutions stuck in a local optimum a cascading procedure to find initial values is presented. This procedure only needs very few fitting parameters.

Subsequently, the presented balancing method is validated using several rotor systems. In particular this includes speed-independent rotors and a rotor with natural frequencies linear dependent of the rotor speed. Plus, the method is tested at a rotor with distinctive gyroscopics and an automotive turbocharger in full-floating ring bearings.

---

## Kapitel 1

# Einleitung

### 1.1 Motivation

Aus fertigungs- und montagetechnischen Gründen kann kein Teil einer Maschine mit absoluter Präzision hergestellt werden. Die Abweichung der Rotationsachse (Lagerverbindungsline) von einer zentralen Hauptträgheitsachse des Rotors führt bei rotierenden Bauteilen zu Unwuchten, die umlaufende (Schein-)Kräfte und Momente zur Folge haben. Sie führen zu – meist unerwünschten – Schwingungen und/oder Lagerkräften. Diese verringern die Lebensdauer und die Laufsicherheit der Maschine und erhöhen zudem die Schallemissionen.

Zur Minimierung dieser unwuchterzwungenen Schwingungen und/oder Rüttelkräfte in den Lagern werden nahezu alle rotierenden Bauteile ausgewuchtet. Dabei wird Material so abgetragen oder hinzugefügt, daß die Kräfte auf die Lager oder die hervorgerufenen Schwingungen im Rahmen der erforderlichen Auswuchtgüte<sup>1</sup> minimiert werden. Das dynamische Verhalten des Rotors soll sich also möglichst wenig von einem perfekt gefertigten runden Maschinenteil unterscheiden. Vorher muß allerdings der Unwuchtzustand des Rotors identifiziert werden.

Beim Auswuchten wird unterschieden, ob der Rotor als *starr* oder *elastisch* (genauer: flexibel) ausgewuchtet werden muß. Beim umgangssprachlichen *starren Wuchten* werden die Lagerkräfte minimiert. Ein Rotor ist näherungsweise als starr anzusehen, solange seine Drehzahl unterhalb der Hälfte der ersten biegekritischen Drehzahl liegt. Oberhalb dieser Drehzahl verformt sich der Rotor infolge der Resonanznähe merklich<sup>2</sup>. Durch das sogenannte *elastische Wuchten* werden die unwuchterzwungenen Rotorauslenkungen vermindert. Aufgrund der begrenzten Anzahl an Auswuchtebenen ist das Wuchten eines flexiblen Rotors jedoch immer nur ein Kompromiß, da der einmal gewählte Wuchtzustand nicht für jede Drehzahl optimal ist. Beispiele für solche elastisch zu wuchtenden Maschinen sind die Rotoren von Generatoren, Asynchronmotoren, Turbopumpen, Dampf- und Gasturbinen und der in Bild 1.1 beispielhaft gezeigte Abgasturbolader, an dem das neue Auswuchtverfahren erprobt wird.

---

<sup>1</sup> DIN ISO 1940-1 ([7], 2004)

<sup>2</sup> KELLENBERGER, *Elastisches Wuchten* ([28], 1987, S. 116ff.)



Bild 1.1: Abgasturbolader (©ICSI), Wuchtaufgabe in Kap. 4.5

## 1.2 Stand der Forschung

Bei Turbomaschinen werden geringe Spaltmaße zwischen Rotor und Stator angestrebt, um den Wirkungsgrad der Maschinen zu erhöhen. Zur Vermeidung der unwucht-induzierten Spaltüberbrückung müssen die flexiblen Rotoren ausgewuchtet werden. Aufgrund der technischen und wirtschaftlichen Bedeutung wurden verschiedene Verfahren entwickelt, um den Unwuchtzustand eines Rotors ermitteln und ausgleichen zu können. Traditionelle Verfahren basieren auf stationären Messungen im eingeschwungenen Zustand bei konstanter Drehzahl in Resonanznähe, woraus starke Belastungen des Rotorsystems resultieren können. Zudem sind bei diesen Verfahren in der Regel Testmassensetzungen nötig, was zusätzlichen zeitlichen Aufwand mit sich bringt. Um den Zeitaufwand zu verringern, ist die Idee von neueren Verfahren, kurze instationäre Messungen während des Hoch- oder Auslaufs zu verwenden, die ohne Testmassen auskommen. Infolge der eingesparten Testläufe und der Instationarität sind weniger und schnellere Meßläufe möglich, zudem wird der problematische resonanznahe stationäre Betrieb des Rotors umgangen. Der mit den modernen Verfahren verbundene erhöhte Rechenaufwand ist zunächst einmal nachteilig, jedoch aufgrund des Fortschritts im Bereich der Digitalrechner immer mehr vernachlässigbar.

### 1.2.1 Stationäre Auswuchtverfahren

#### Modales Wuchten (stationär)

Beim modalen Wuchten wird idealerweise für jede zu wuchtende Eigenform Scheinresonanz herbeigeführt. Daher wird es auch *Wuchten nach Eigenformen* genannt. FEDERN schlug 1957 das systematische Vorwärtswuchten vor, das in seiner modernen Ausführung als  $(N+2)$ -Methode bekannt ist<sup>3</sup>. Dabei erfolgt zunächst eine Starrkörperwuchtung in zwei Ebenen. Anschließend werden zur Beruhigung der Eigenformen Wuchtsätze verwendet, die die Starrkörperwuchtung und die bereits gewuchten Eigenformen nicht beeinflussen. Sie verändern allerdings die nach höheren Eigenformen entwickelten Unwuchten. Für jede Eigenform wird eine weitere Wuchtebene benötigt, sodaß zum Wuchten von  $N$  Eigenformen  $(N+2)$  Wuchtebenen erforderlich sind. KELLENBERGER schlug 1967 die Verwendung aller Wuchtebenen bei allen modalen Wuchtprozeduren und auch bereits bei der Starrkörperwuchtung vor<sup>4</sup>. Dies führt zu vorwärts-orthogonalen Wuchtsätzen, die auch die noch zu wuchtenden höheren Eigenformen nicht anregen. Bei einer sukzessiven Eliminierung der modalen Unwuchten zu den Eigenformen ist das vorteilhaft. Zudem sind meist insgesamt geringere Wuchtmassen erforderlich. Allerdings müssen die Eigenformen *a priori* bekannt sein.

BISHOP und GLADWELL regten 1959 an, auf die Starrkörperwuchtung zu verzichten<sup>5</sup>. Dieses Verfahren ist als  $N$ -Methode bekannt. Es ist besonders dann geeignet, wenn nicht die Eliminierung der Lagerkräfte, sondern die Verminderung der Schwingungsamplituden im Vordergrund steht. Für das Wuchten von  $N$  Eigenformen werden hier folglich  $N$  Wuchtebenen benötigt. In den meisten Fällen wird durch die  $N$ -Methode gleichzeitig die Starrkörperwuchtung verbessert<sup>6</sup>.

Bei Rotoren mit unsymmetrischen Systemmatrizen sind zur modalen Entkopplung zusätzlich zu den Rechtseigenvektoren auch die Linkseigenvektoren nötig. Dies wird beim *bimodalen Wuchten* beachtet, das sich in der Praxis jedoch nicht durchgesetzt hat. Die Wuchtresultate verbessern sich damit meist nicht wesentlich, der Rechenaufwand steigt jedoch stark an<sup>7</sup>. Zudem bietet das im nächsten Abschnitt beschriebene Verfahren der Einflußkoeffizienten eine einfachere Berücksichtigung unsymmetrischer Systemmatrizen. Als Vereinfachung des bimodalen Wuchts schlug BALLO das *quasimodale Wuchten* vor<sup>8</sup>. Damit konnten jedoch keine hohen Wuchtgüten erzielt werden.

Generell gilt für die modalen Wuchtverfahren, daß die Rotorschwingungen an jedem Ort der Rotorlängsachse in einem bestimmten Drehzahlbereich beruhigt werden, da

<sup>3</sup> FEDERN, „Grundl. einer systemat. Schwingungsentstörung wellenelast. Rotoren“ ([13], 1957)

<sup>4</sup> KELLENBERGER, „Wuchten von Rotoren in allgemein-elastischen Lagern“ ([27], 1967)

<sup>5</sup> BISHOP; GLADWELL, „The Vibration and Balancing of an Unbalanced Flexible Rotor“ ([5], 1959)

<sup>6</sup> KELLENBERGER, *Elastisches Wuchten* ([28], 1987, S. 155ff.)

<sup>7</sup> KELLENBERGER, *Elastisches Wuchten* ([28], 1987, S. 203)

<sup>8</sup> BALLO, „On the Balancing of Flexible Rotors Independent on Boundary Conditions“ ([3], 1981)

die gewichteten modalen Anteile der nach Eigenformen entwickelten Bewegungen reduziert werden. Demgegenüber steht der systematische Fehler durch die generelle Vernachlässigung der Schwingungsanteile anderer Moden in Resonanznähe der gerade betrachteten Eigenform. Zudem ist der zum Wuchten nötige resonanznahe Betrieb des Rotors nicht immer von vornherein möglich, weshalb das Auswuchten ggf. iterativ erfolgen muß. Ein weiterer Nachteil ist, daß alle Läufe bei gleicher Drehzahl aufgenommen werden müssen, da in Resonanznähe schon geringe Abweichungen der Meßdrehzahlen zu starken Änderungen der Übertragungsfunktionen führen.

### Einflußkoeffizientenverfahren (stationär)

GOODMAN lieferte 1964 den Anstoß zum *Einflußkoeffizientenverfahren* (EK-Verfahren)<sup>9</sup>. Der wesentliche Unterschied zu den modalen Verfahren besteht darin, daß nicht sukzessive die Schwingungsbestandteile der einzelnen Eigenformen, sondern die Gesamtschwingung aller Eigenformen an den Meßpunkten bei einer Meßdrehzahl berücksichtigt wird. Das EK-Verfahren erfordert wenig Vorwissen über die Systemeigenschaften. Lediglich Linearität und ausreichende Wiederholbarkeit der Messungen müssen gegeben sein. Alle möglichen rotordynamischen Effekte werden im Experiment berücksichtigt und sind in den EK zusammengefaßt.

Im klassischen Verfahren werden diese EK durch  $N$  Testläufe mit und ohne untereinander linear unabhängigen Testmassensätzen bei jeweils derselben Drehzahl bestimmt. Dabei bezeichnet  $N$  die Anzahl der Meßebenen, die berücksichtigt werden sollen. In einem weiteren Meßlauf mit einem zusätzlichen linear unabhängigen Testunwuchtsatz werden dann die Urunwuchten berechnet. Dieses Vorgehen wird für alle Drehzahlen durchgeführt, die im Wuchtkreislauf beachtet werden sollen. Dabei ist dafür Sorge zu tragen, daß durch die Wuchtung bei weiteren Drehzahlen vorausgegangene Wuchtungen nicht zerstört werden. Um möglichst gute Wuchtergebnisse zu erzielen, ist aber auch beim EK-Verfahren Vorwissen über Resonanzbereiche und Eigenformen hilfreich, da die Meßpunkte außerhalb von Schwingungsknoten plaziert und die Wuchtdrehzahlen nahe der Resonanzen gewählt werden sollten<sup>10</sup>.

Durch zusätzliche Meßinformationen (Meßläufe, Meßstellen) kann mit einem statistischen Fehlerausgleich ein Optimum für die Reduktion der Schwingungen an allen Meßpunkten gefunden werden<sup>11</sup>. Außerdem ermöglicht das EK-Verfahren eine Gewichtung der Meßpunkte, sodaß besonders sensible Bereiche im Fehlerausgleich stärker berücksichtigt werden können.

<sup>9</sup> GOODMAN, „A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections“ ([20], 1964)

<sup>10</sup> KELLENBERGER, *Elastisches Wuchten* ([28], 1987, S. 336f.)

<sup>11</sup> MARKERT, *Rotordynamik – Skript zur Vorlesung* ([42], 2011)

Des weiteren wurden von ZORZI, GIORDANI und LEE<sup>12</sup> sowie unabhängig davon von WANG<sup>13</sup> Methoden zur wählbaren Beschränkung von Amplituden und Kompensationsunwuchten mittels LAGRANGE-Multiplikatoren eingeführt, die unter dem Namen „Unified Constrained Approach“ bekannt sind.

Es wurde gezeigt, daß das EK-Verfahren ebenso wie das modale Wuchten mehrere stationäre Messungen in Resonanznähe mit dem damit verbundenen Nachteil großer Rotor- oder Lagerbelastung erfordert. Die Ermittlung der EK ist sehr zeitaufwändig. Für Großserienteile werden daher die EK an einem sogenannten „Meisterrotor“ ermittelt und für baugleiche Rotoren als a-priori-Information übernommen. Somit entfallen zusätzliche Läufe mit Testmassen<sup>14 15</sup>.

## 1.2.2 Unwuchtidentifikation aus stationären Messungen

Bei sogenannten *Identifikationsverfahren* wird die Unwucht des Rotors aus einem einzigen Lauf ohne Testmassensetzung ermittelt. Sie umgehen zusätzliche Meßläufe. Diesen Verfahren liegen üblicherweise aufwändige Berechnungen zugrunde, die auf analytischen Modellen der zu wuchtenden Rotoren basieren.

HÜBNER schlug bereits 1961 den Verzicht auf Testmassensetzung für das modale Wuchten vor<sup>16</sup>. Die Übertragungsfunktionen werden dabei durch analytische Berechnungen bestimmt. Dieses Vorgehen scheiterte jedoch an der fehlenden Genauigkeit der Berechnungsergebnisse und an der Vernachlässigung der Dämpfung. GASCH und DRECHSLER schlugen 1978 eine Variation des modalen Wuchtens vor, die ohne Testmassensetzung auskommt<sup>17</sup>. A priori müssen dazu näherungsweise die Eigenformen und modalen Massen des Rotorsystems bekannt sein. Dies ist zumeist gegeben. Zudem sind die modalen Massen unempfindlich gegen Variationen der Lagersteifigkeiten. Für Eigenfrequenzen und Dämpfungsmaße können grobe Schätzungen als Startwerte verwendet werden, die dann vom Algorithmus angepaßt werden. Bei diesem Verfahren werden mehrere Messungen bei verschiedenen konstanten Drehzahlen verwendet. Durch eine Minimierung der quadratischen Fehler werden die modalen Unwuchten und die modalen Parameter der untersuchten Resonanz berechnet.

MÜLLER präsentierte 1984 ein Verfahren, bei dem zur Unwuchtidentifikation auf speziellen Wuchtmaschinen umschaltbare Lagersteifigkeiten verwendet werden. Dabei sind Messungen sowohl in den Lagerebenen als auch in den Wuchtebenen notwendig<sup>18</sup>.

<sup>12</sup> ZORZI; GIORDANO; LEE, „A Unified Approach to Balancing with Mult. Constr.“ ([72], 1982)

<sup>13</sup> WANG, *Unters. des Schwingungsverhaltens eines mehrf. gleitgelagerten Rotorsystems* ([68], 1984)

<sup>14</sup> SCHNEIDER, *Auswuchttechnik* ([57], 2013, S. 240)

<sup>15</sup> Patent: DE 10 2006 060 583 A1 ([67], 2008)

<sup>16</sup> HÜBNER, „Das Auswuchten elastischer Rotoren, ein Problem der Strukturanalyse“ ([25], 1961)

<sup>17</sup> GASCH; DRECHSLER, „Modal. Auswuchten elast. Läufer ohne Testgewichtsetzungen“ ([15], 1978)

KREUZINGER-JANIK testet nach einer Idee von MARKERT<sup>19</sup>, aufbauend auf einem Verfahren von BELZ<sup>20</sup>, einen modalanalysegestützten Ansatz zur Unwuchtidentifikation<sup>21</sup>. Bei der Modalanalyse am rotierenden Rotor sind Gleitlager- und Gyroskopieeffekte berücksichtigt, da die komplexen Eigenvektoren identifiziert werden. Daraus wird die Übertragungsfunktionsmatrix gebildet, aus der die Unwucht in einem Meßlauf ermittelt wird. Die notwendige Expansion der Eigenvektoren führt ohne Verwendung eines FE-Modells zu schlechten Ergebnissen. Zur Ergebnisverbesserung zeigte LINDEMANN ein Verfahren zur Modellanpassung mittels FE<sup>22</sup>.

### 1.2.3 Instationäre Auswuchtvfahren

Erste Arbeiten auf dem Gebiet des *instationären Auswuchtens* gehen auf MARKERT zurück. Zur Unwuchtidentifikation können schnelle Hochläufe verwendet werden, da das Spektrum der Unwuchterregung alle durchfahrenen Frequenzen enthält<sup>23</sup>. Außerdem können bei schneller Resonanzdurchfahrt zu große Resonanzüberhöhungen vermieden werden. In dem vorgeschlagenen Verfahren werden Testmassen eingesetzt, um aus den Testläufen die Matrix der Übertragungsfunktionen zu bestimmen. Das Verfahren ist im Grunde ein EK-Verfahren – daher stecken alle linear(isierbar)en zeitinvarianten (LTI) Effekte in den ermittelten Übertragungsfunktionen. Drehzahlabhängigkeit und damit linear-zeitvariante (LTV) Phänomene sind jedoch – wegen der meist nicht möglichen aber dazu notwendigen multiplikativen Trennung der Spektren des Systems und der Antwortsignale – ausgeschlossen. Über die Minimierung des quadratischen Fehlers werden alle Frequenzstützstellen (durchfahrene Drehzahlen) in die Unwuchtermittlung einbezogen.

MENZ und GASCH entwickelten ein instationäres Verfahren für starre Rotoren, das im Zeitbereich arbeitet und harte Lager verwendet<sup>24 25</sup>. Die Autoren machen zudem auf die erhebliche Zeiter sparnis aufmerksam, die bei der Verwendung von instationären Messungen entsteht. MENZ erweiterte das Verfahren später auf weiche Maschinen<sup>26</sup>. Dabei macht er jedoch den systematischen Fehler, daß er Hoch- und Auslauf in einem einzelnen Meßschrieb zur Identifikation heranzieht. Er übersieht dabei, daß es wegen des gegenläufigen Phasenverlaufs von Hoch- und Auslauf an bestimmten Frequenzen zur Auslöschung im Spektrum des Antwortsignals kommt (vgl. Bild 2.1 f.).

<sup>18</sup> MÜLLER, „Ein neues Verfahren zum Auswuchten elastischer Rotoren“ ([53], 1984)

<sup>19</sup> MARKERT, „System- und Unwuchtident. von elast. Rotoren aus Anfahrmessungen“ ([45], 1984)

<sup>20</sup> BELZ, *Modalanalysegestützte Unwuchtidentifikation elastischer Rotoren* ([4], 1997)

<sup>21</sup> KREUZINGER-JANIK; IRRETTIER, „Unwuchtident. an elast. Rotoren mit Hilfe der EMA“ ([32], 2000)

<sup>22</sup> LINDEMANN, *Model updating an einem biegeelastischen Rotor* ([35], 2008)

<sup>23</sup> MARKERT, „System- und Unwuchtident. von elast. Rotoren aus Anfahrmessungen“ ([45], 1984)

<sup>24</sup> MENZ; GASCH, „Instationäres Auswuchten starrer Rotoren“ ([50], 1995)

<sup>25</sup> MENZ; GASCH, „Inst. Balancing of Rigid Rotors in the Time-domain and Exp. Res.“ ([51], 1996)

<sup>26</sup> MENZ, *Drehzahlvar. Auswuchten starrer Rotoren in einer elast. Auswuchtmaschine* ([49], 1995)

Von DE SILVA stammt ein im Frequenzbereich arbeitendes instationäres Verfahren für flexible Rotoren, das keine Testmassen benötigt<sup>27</sup>. Dafür sind jedoch Kenntnisse über die Eigenform und die modale Masse der zu wuchtenden Mode nötig. Die restlichen modalen Parameter sowie die plastische Vorkrümmung (Schlag) des Rotors können durch den Algorithmus identifiziert werden. Das Verfahren setzt voraus, daß die resonanznahe Eigenform in den Schwingungssignalen überwiegt und macht daher ebenfalls den systematischen Fehler des klassischen modalen Auswuchts. Unsymmetrische Systemmatrizen infolge Gyroskopie oder Gleitlagerung finden keine Beachtung.

Von den Autoren EDWARDS, LEES, FRISWELL, SINHA, SMART und PRESS wurden mehrere theoretische und experimentelle Arbeiten zur Unwucht- und Fundamentidentifikation aus Hoch- und Ausläufen vorgestellt<sup>28 29 30 31 32</sup>. Dabei werden nur konstante, also drehzahlunabhängige Systemparameter zugelassen. Außerdem müssen die Hochläufe quasi-stationär sein. Daher profitiert das Verfahren nicht von der Amplitudenreduktion in der Resonanz beim schnellen Hochlauf.

GUTIÉRREZ-WING und AGUIRRE-ROMANO nutzen gleichmäßig beschleunigte Messläufe für konventionelle Wuchtverfahren<sup>33</sup>. Die verfälscht ermittelte Unwucht wird anschließend korrigiert, wobei die Korrekturen in Phase und Amplitude aus den Abweichungen der BODE-Diagramme für den stationären und den instationären Betrieb eines Schwingers mit einem Freiheitsgrad entnommen werden.

SEIDLER entwickelte ein Verfahren, das sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich wirksam ist<sup>34 35</sup>. Durch den Abgleich von Simulation und Messung des Rotorverhaltens werden dabei die Unwucht, die kritischen Drehzahlen und die modalen Dämpfungen identifiziert. Das Verfahren ist aufgrund der nötigen multiplikativen Trennung der Spektren des Systems und der Antwortsignale auf zeitlich konstante Systemmatrizen beschränkt. Zudem können keine unsymmetrischen Systemmatrizen berücksichtigt werden. Durch die gleichzeitige Berücksichtigung mehrerer Moden wird der systematische Fehler verkleinert, der in der Nähe einer Resonanz nur die dominante Mode beachtet. Zudem umgeht das Verfahren das Problem der Frequenzauslöschung bei Signalen, die Hoch- und Ausläufe in einem Meßschrieb enthalten. Zur Identifikation wird die Kenntnis der modalen Massen und Eigenformen vorausgesetzt. Diese Vorgabe kann jedoch durch einen zusätzlichen Lauf mit einer Test-Unwucht ersetzt werden. Dann liefert das Verfahren neben der Unwucht auch alle modalen Parameter

<sup>27</sup> SILVA, *Auswuchten elastischer Rotoren nach nur einem transienten Messlauf* ([64], 1991)

<sup>28</sup> LEES U. A., „The Ident. of Foundation Dynamics from Machine Run-Down Data“ ([34], 1998)

<sup>29</sup> EDWARDS; LEES; FRISWELL, „The Identification of Rotor Unbalance [...]“ ([10], 1999)

<sup>30</sup> EDWARDS; LEES; FRISWELL, „Estimating Rotor Unbalance from a Single Run-Down“ ([8], 2000)

<sup>31</sup> EDWARDS; LEES; FRISWELL, „Exp. Ident. of Excitation and Support Parameters [...]“ ([9], 2000)

<sup>32</sup> SINHA; LEES; FRISWELL, „Est. the Rotor Unbalance of a Rotating Machine [...]“ ([65], 2001)

<sup>33</sup> GUTIÉRREZ-WING; AGUIRRE-ROMANO, „Rotor Balancing Using Vibr. Data [...]“ ([22], 1999)

<sup>34</sup> SEIDLER; MARKERT, „Time Domain and Freq. Dom. Ident. for Non-stat. Balancing“ ([61], 1999)

<sup>35</sup> SEIDLER, *Instationäres Auswuchten elastischer Rotoren* ([60], 2002)

und führt praktisch eine experimentelle Modalanalyse (EMA) durch. Zudem können zum Fehlerausgleich mehrere Meßstellen genutzt werden und das Verfahren erlaubt unterschiedliche Gewichtungen von Signalbereichen.

REGENER entwickelte ein iteratives Vorgehen zum Auswuchten, das mit einem FE-Modell das Rotorverhalten berechnet und mit Messungen abgleicht<sup>36</sup>. Dazu wird bei jedem Iterationsschritt eine Ausgleichsunwucht berechnet und im Rahmen einer Modellanpassung das FE-Modell geändert. Letztendlich erhält man durch das Vorgehen zusätzlich zu dem ausgewuchtenen Rotor ein validiertes Computermodell. Der Autor konnte die Funktionsweise erfolgreich an einem magnetgelagerten Rotor zeigen.

Von KRESCHEL wurde ein instationäres Verfahren im Zeitbereich entwickelt, das mit Abstrichen drehzahlabhängige, im instationären Betrieb also zeitvariante, Systemparameter zuläßt<sup>37 38</sup>. Dem Verfahren müssen die modalen Massen und die Eigenvektoren vorgegeben werden. Diese werden abschnittsweise in den Resonanzen konstant gehalten. Durch Links- und Rechtseigenvektoren können unsymmetrische Systemmatrizen berücksichtigt werden. Die Realteile der Eigenwerte (Abklingkoeffizienten) werden ebenfalls konstant gehalten, die Imaginärteile (Schwingfrequenzen) als linear in der Drehzahl angesetzt.

## 1.3 Inhalt und Gliederung der Arbeit

Die in Kapitel 1.2.3 dargestellten instationären Auswuchtverfahren haben bisher nur vereinzelt Einzug in die industrielle Auswuchtpraxis gehalten. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher ein neues instationäres Verfahren entwickelt und an einigen Testrotoren erprobt. Das Verfahren kann als Weiterentwicklung der Arbeiten von SEIDLER und KRESCHEL angesehen werden, deren Machbarkeit schon nachgewiesen wurde<sup>39 40</sup>. Es eignet sich daher ausdrücklich für die Anwendung bei Rotoren mit ausgeprägter Gyroskopie oder Gleitlagereffekten, also Phänomenen, die unsymmetrische und drehzahlabhängige Systemmatrizen zur Folge haben. Infolge der Instationarität beim Hoch- oder Auslauf werden diese Rotorsysteme dann linear(isierbar)-zeitvariant (LTV). Bei diesem Verfahren werden alle Änderungen der modalen Parameter als linear in der Drehzahl approximiert und das Rotorverhalten auf dieser Grundlage berechnet. Durch den Vergleich von berechneten und gemessenen Daten werden die Systemparameter inklusive der Unwucht identifiziert. Erstmals wird die Zeitabhängigkeit aller Parameter berücksichtigt. Weiterhin erlauben die eingeführten Vereinfachungen die Zahl der

<sup>36</sup> REGENER, *Modellgestütztes Auswuchten – Unwuchtdentifikation* ([55], 2006)

<sup>37</sup> KRESCHEL; MARKERT; SEIDLER, „Instat. Balanc. of Elast. Rotors w. Speed-dep. [...]“ ([31], 2005)

<sup>38</sup> KRESCHEL, *Instationäres Verhalten von Abgasturboladern* ([30], 2010)

<sup>39</sup> SIEGL; MARKERT, „Modellgestützte instationäre Unwuchtdentifikation“ ([63], 2015)

<sup>40</sup> SIEGL; MARKERT, „Model-based Non-stationary Unbalance Identification“ ([62], 2016)

unbekannten Parameter einzuschränken und dennoch das Verhalten des zeitvarianten Rotorsystems praktisch exakt nachzubilden.

Das Kapitel 1 legte nach einer kurzen Motivation den aktuellen Stand der Forschung für das Auswuchten flexibler Rotoren dar.

Im Kapitel 2 werden die benötigten systemtheoretischen Grundlagen für das Auswuchtverfahren für beliebige LTV-Rotorsysteme dargestellt. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der modalen Theorie.

Im Kapitel 3 wird der Ablauf des Auswuchtverfahrens entwickelt und erläutert. Dabei werden Besonderheiten wie die Gewichtung bestimmter Drehzahlbereiche und Fehlereinflüsse gesondert diskutiert.

Im Kapitel 4 wird das Auswuchtverfahren an mehreren unterschiedlichen Rotorsystemen praktisch getestet. Begonnen wird mit einem synthetischen LAVAL-Rotor mit Gyroskopie. Anschließend wird die Unwuchtidentifikation an einem vergleichbaren Versuchsrotor auch real durchgeführt. Es folgt das Auswuchten eines starren Rotors in nachgiebigen Lagern und eines elastischen Zweischeibenrotors. Damit wird sichergestellt, daß das neu entwickelte Verfahren auch an LTI-Systemen nicht versagt und dieselben guten Ergebnisse wie das Verfahren von SEIDLER liefert. Der Test an einem Mehrscheibenmotor in aktiven Magnetlagern (AMBs) wird durchgeführt, weil über die Magnetlager künstlich ein stark drehzahlabhängiges aber lineares Rotorsystem realisiert werden kann. Die Untersuchungen an einem Abgasturbolader (ATL) bilden abschließend den Lackmustest für das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren. Durch die sehr hohen Betriebsdrehzahlen kommt es bei diesem System infolge der Gleitlagereffekte zu bedeutenden Änderungen in den Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften und damit des Eigenverhaltens. Hinzu kommt, daß Turbolader vergleichsweise leichte Rotoren besitzen, woraus eine Gleichgewichtslage nahe der Lagermitte resultiert, in der die Tragkraft des Ölfilms sehr gering ist<sup>41</sup>. Dies stellt erhöhte Anforderungen an die Linearisierung um den Betriebspunkt. Die Ergebnisse des instationären Wuchtens von Turboladern demonstrieren schließlich, daß das neue Verfahren auch besonderen Herausforderungen gewachsen ist.

Kapitel 5 faßt die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen kurzen Ausblick.

---

<sup>41</sup> SPURK; AKSEL, *Strömungslehre* ([66], 2010, S. 185)

## Kapitel 2

# Systemtheoretische Grundlagen

In dieser Arbeit wird das Auswuchten von Rotoren betrachtet, deren modale Parameter drehzahlabhängig sein können. Des weiteren werden schiefsymmetrische Anteile in den Systemmatrizen zugelassen. Die einzige Forderung an die auszuwuchtenden Rotoren ist, daß sich der drehsynchrone Anteil ihres Schwingungsverhaltens in Resonanznähe linear beschreiben läßt.

Ein solch allgemeiner Rotor muß zunächst mathematisch modelliert werden. Diese Modellierung und die im Modell getroffenen Vereinfachungen werden in Kapitel 2.1 dargestellt. Je nach Phänomen, das drehzahlabhängige modale Parameter und/oder schiefsymmetrische Anteile in den Systemmatrizen des Rotorsystems hervorruft, kann die Einführung weiterer Freiheitsgrade im Vergleich zum LAVAL-Rotor<sup>1</sup> nötig werden.

*Kreiselwirkung* (Gyroskopie) ruft einen antimetrischen Anteil  $\mathbf{G}$  in der Matrix der geschwindigkeitsproportionalen Kräfte und Momente hervor. Dieser Anteil enthält linear die aktuelle Drehzahl des Rotors  $\dot{\varphi}(t)$  und entsteht durch die zeitliche Ableitung des Dralls. Zur mathematischen Darstellung des Drallvektors ist die Einführung von Drehfreiheitsgraden nötig. Daher ergeben sich beispielsweise für einen Einscheibenrotor mit Kreiselwirkung vier reelle (bzw. zwei komplexe) Freiheitsgrade, nämlich zwei translatorische und zwei Kippfreiheitsgrade um die Achsen quer zur Rotorachse. Zusätzlich zur geschwindigkeitsproportionalen gyroskopischen Matrix  $\mathbf{G}(\dot{\varphi})$  entsteht beim Ableiten des Drallvektors im allgemeinen eine weitere schiefsymmetrische Matrix der auslenkungsproportionalen Kräfte und Momente. Diese wird zirkulatorische Matrix  $\mathbf{N}(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  genannt und hat bei in der Praxis erreichbaren Hochlaufbeschleunigungen praktisch keinen Einfluß auf die Systemdynamik<sup>2</sup>. Gyroskopische Kräfte und Momente leisten keine Arbeit<sup>3</sup>. Die zirkulatorischen Kräfte und Momente gehen hingegen in die Leistungsbilanz ein.

*Gleitlager* führen ebenfalls zu drehzahlabhängigen (und zudem unsymmetrischen) Anteilen in den Matrizen<sup>4</sup> der verformungs- und geschwindigkeitsproportionalen Kräfte und Momente. Empirisch leuchtet dies ein: Ein langsam auf einem Schmierfilm gleitender Rotor wird bei einer Verschiebung aus der Gleichgewichtslage andere Lagerkräfte erfahren, als wenn derselbe Rotor in demselben Lager schnell rotiert. Zudem wird dem

<sup>1</sup> Nach dem schwedischen Ingenieur Gustaf Patrik de LAVAL, \*1845 in Orsa, †1913 in Stockholm.

<sup>2</sup> LAUZI, *Theoretische Untersuchungen an Rotoren mit Kreiselwirkung* ([33], 2012)

<sup>3</sup> MARKERT, *Strukturdynamik* ([44], 2013, S. 284)

<sup>4</sup> GASCH; NORDMANN; PFÜTZNER, *Rotordynamik* ([17], 2006, S. 227ff.)

Rotor aufgrund von zusätzlicher Fluiddämpfung mehr Energie entzogen, was im mathematischen Rotormodell zu berücksichtigen ist<sup>5</sup>. Zur Modellierung von Gleitlagern ist die Einführung von Freiheitsgraden in den jeweiligen Lagern nötig.

In Kapitel 4.1 wird zunächst das Wuchten des schwach gedämpften Einscheibenrotors mit Kreiselwirkung und außermittigem Scheibensitz behandelt. In den anschließenden Kapiteln 4.2 und 4.3 erfolgt der Test des Auswuchtverfahrens an Rotoren mit näherungsweise drehzahlvariantem Systemverhalten. Die hierzu gewählten Beispiele sind ein im betrachteten Drehzahlbereich starrer Rotor in nachgiebigen Lagern (Kapitel 4.2) sowie ein flexibler Zweischeibenmotor (Kapitel 4.3).

In Kapitel 4.4 wird das Verfahren an einem Rotor mit deutlich drehzahlvariablen Systemverhalten, einem Mehrscheibenmotor in aktiven Magnetlagern, erprobt. Dazu wird die Lagersteifigkeit derart verstellt, daß sich die Eigenfrequenzen linear mit der Drehzahl signifikant ändern – also eine in Kapitel 3.1.1 getroffene Vereinfachung exakt erfüllt wird.

Unter Nutzung der generellen Modellierung für Rotoren in Gleitlagern wird abschließend in Kapitel 4.5 das Auswuchten eines Turboladers in sogenannten Schwimmbuchsenlagern behandelt. Diese Schwimmbuchsenlager sind konstruktiv zwei in Reihe geschaltete Gleitlager, deren Schmierfilme über sogenannte Kommunikationsbohrungen in einer im Öl schwimmenden, radial ungefesselten Hülse miteinander gekoppelt sind.

## 2.1 Modellierung von Rotoren mit drehzahlabhängigen Systemmatrizen

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen für die Modellierung von linear(isierbar)en Rotorsystemen angegeben. Ziel ist es, eine allgemeingültige Form zu finden, in der eine modale Reduktion vorgenommen werden kann und die unabhängig von der realen Ausgestaltung des Rotors ist.

### 2.1.1 Zeitkontinuierliches Modell im Verschiebungsraum

Die erzwungenen Schwingungen  $\mathbf{q}(t)$  infolge des verallgemeinerten Erregervektors  $\mathbf{f}(t)$  jedes linear(isierbar)en mechanischen Systems mit  $Q$  generalisierten Koordinaten können allgemein durch eine inhomogene Differentialgleichung der Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

<sup>5</sup>FELSCHER, Rückwirkung des Gleitlagermoments auf die Drehbewegung des Rotors ([14], 2016)

beschrieben werden<sup>6 7</sup>. Alle Systemmatrizen weisen dann die Dimension  $Q \times Q$  auf. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die gyroskopische Matrix  $\mathbf{G}$  und die zirkulatorische Matrix  $\mathbf{N}$  die jeweils schiefsymmetrischen Anteile der geschwindigkeits- bzw. auslenkungsproportionalen Matrix sind, während die Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{K}$  den zugehörigen symmetrischen Anteil darstellen. Für reale Rotoren sind die Summen  $[\mathbf{B}(\dot{\varphi}) + \mathbf{G}(\dot{\varphi})]$  und  $[\mathbf{K}(\dot{\varphi}) + \mathbf{N}(\dot{\varphi})]$  im allgemeinen drehzahlabhängig<sup>8</sup>, insbesondere bei Rotoren in Gleitlagern oder mit ausgeprägter Kreiselwirkung.

Beim instationären Betrieb eines Rotors, also beispielsweise einem Hoch- oder Auslauf, ist die Drehzahl  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$  zeitabhängig. Daraus folgen in Gleichung (2.1) zeitabhängige Systemmatrizen  $[\mathbf{B}(t) + \mathbf{G}(t)]$  und  $[\mathbf{K}(t) + \mathbf{N}(t)]$ . Das lineare Gleichungssystem ist somit nun linear-zeitvariant und daher ist die multiplikative Trennung der FOURIER-Spektren der Systembewegung  $\mathbf{q}(t)$  von den Systemeigenschaften nicht mehr in jedem Fall möglich.

Diese zeitvariante allgemeine Bewegungsgleichung (2.1) kann durch die Definition des physikalischen Zustandsvektors  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]$  mit den Systemmatrizen

$$\mathbf{A}_1(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) + \mathbf{G}(t) & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_0(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(t) + \mathbf{N}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}$$

in den zeitabhängigen Zustandsraum der physikalischen Koordinaten  $\mathbf{x}(t)$  überführt werden,

$$\mathbf{A}_1(t) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_0(t) \mathbf{x} = \mathbf{u}. \quad (2.2)$$

Dabei ist  $\mathbf{u}^T = [\mathbf{f}^T, \mathbf{0}^T]$  der Erregervektor im physikalischen Zustandsraum. Ein so definierter Zustandsraum hat den Vorteil, daß die Systemmatrizen  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_0$  symmetrisch sind, wenn alle ihre Submatrizen symmetrisch sind. Außerdem wird die Invertierung der Massenmatrix vermieden.

## 2.1.2 Zeitkontinuierliches Modell im modalen Zustandraum

Um diesen zeitabhängigen Zustandsraum der physikalischen Koordinaten in einen zeitabhängigen Zustandsraum modaler Koordinaten zu überführen, müssen die verallgemeinerten Rechts- und Linkseigenwertprobleme

$$\begin{aligned} [\lambda_p(t) \mathbf{A}_1(t) + \mathbf{A}_0(t)] \hat{\mathbf{x}}_p^R(t) &= \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{x}}_p^{LT}(t) [\lambda_p(t) \mathbf{A}_1(t) + \mathbf{A}_0(t)] &= \mathbf{0}^T \end{aligned} \quad (2.3)$$

gelöst werden. Daraus erhält man  $P=2Q$  zeitabhängige Eigenwerte  $\lambda_p(t)$ , die bei beiden Eigenwertproblemen gleich sind, sowie i. a. komplexe zeitabhängige Rechts- und

<sup>6</sup> MARKERT, *Strukturdynamik* ([44], 2013, S. 287)

<sup>7</sup> HAGEDORN; HOCHLENERT, *Technische Schwingungslehre* ([24], 2012, S. 157)

<sup>8</sup> GASCH; NORDMANN; PFÜTZNER, *Rotordynamik* ([17], 2006, S. 269)

Linkseigenvektoren  $\hat{\mathbf{x}}_p^R(t)$  und  $\hat{\mathbf{x}}_p^{LT}(t)$ , die sich bei unsymmetrischen Systemmatrizen unterscheiden. Die so gewonnenen modalen Parameter gelten zu jedem beliebigen festen Zeitpunkt  $t = t^*$  für das LTV-System von Gleichung (2.2).

Die Eigenvektoren werden nun spaltenweise in die sogenannten Rechts- und Linksmatrizen eingesortiert. Jeder aus Gleichung (2.3) ermittelte Eigenwert  $\lambda_p(t)$  mit seinem zugehörigen Eigenvektor  $\hat{\mathbf{x}}_p^{L,R}(t)$  besitzt einen konjugiert komplexen Partner. Dies wird für die Notation genutzt, indem die Paare zusammengefaßt werden und der alte Laufparameter  $p \in [1, 2Q]$  durch  $q \in [1, Q]$  ersetzt wird. Die Gesamtheit der Eigenwerte kann somit als  $\lambda_q(t), \lambda_q^*(t)$  und die Modalmatrizen können als

$$\mathbf{X}^R(t) = [\cdots \hat{\mathbf{x}}_p^R(t) \cdots] \quad \text{und} \quad \mathbf{X}^L(t) = [\cdots \hat{\mathbf{x}}_p^L(t) \cdots]$$

geschrieben werden. Aufgrund der Zusammensetzung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t)$  aus den physikalischen Verschiebungs- und Geschwindigkeitsgrößen  $\mathbf{q}(t)$  und  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  gilt für die Eigenvektoren im Zustandsraum

$$\hat{\mathbf{x}}_q^R(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_q^R(t) \\ \lambda_q(t) \hat{\mathbf{q}}_q^R(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{x}}_q^L(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_q^L(t) \\ \lambda_q(t) \hat{\mathbf{q}}_q^L(t) \end{bmatrix}.$$

Nun können die (zeitabhängigen) Modalmatrizen endgültig durch

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^R(t) &= \begin{bmatrix} \cdots & \hat{\mathbf{q}}_q^R(t) & \cdots & \hat{\mathbf{q}}_q^{R*}(t) & \cdots \\ \cdots & \lambda_q(t) \hat{\mathbf{q}}_q^R(t) & \cdots & \lambda_q^*(t) \hat{\mathbf{q}}_q^{R*}(t) & \cdots \end{bmatrix} \quad \text{und} \\ \mathbf{X}^L(t) &= \begin{bmatrix} \cdots & \hat{\mathbf{q}}_q^L(t) & \cdots & \hat{\mathbf{q}}_q^{L*}(t) & \cdots \\ \cdots & \lambda_q(t) \hat{\mathbf{q}}_q^L(t) & \cdots & \lambda_q^*(t) \hat{\mathbf{q}}_q^{L*}(t) & \cdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Eine geschickte Normierung aller  $Q$  Eigenvektoren erfolgt dann mit dem Normierungswinkel für jeden Eigenvektor

$$\varphi_{r,\text{norm}}^{R,L} = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \arg\{\hat{x}_{r,q}^{R,L}\} \quad \text{mit} \quad r = 1 \dots Q, \quad (2.4)$$

der als mittlerer Phasenwinkel der Verschiebungsbestandteile  $\hat{\mathbf{q}}_q^{R,L}$  jedes einzelnen komplexen Eigenvektors aufgefaßt werden kann. Nach der Drehung der Eigenvektoren um diesen mittleren Phasenwinkel,

$$\hat{\mathbf{x}}_{r,\text{norm}}^{R,L}(t) = \hat{\mathbf{x}}_r^{R,L}(t) e^{-i \varphi_{r,\text{norm}}^{R,L}} \quad \text{mit} \quad r = 1 \dots Q, \quad (2.5)$$

werden die neu gewonnenen normierten komplexen Eigenvektoren ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit anstelle ihrer Vorgänger in die Modalmatrizen eingesortiert. Zur Reduktion der freien Parameter im Computermodell für den Algorithmus

aus Kapitel 3.1.2 wurden diese Eigenvektoren noch mit den verallgemeinerten modalen Massen<sup>9</sup>  $a_q(t) = \hat{\mathbf{x}}_q^{LT}(t) \mathbf{A}_1(t) \hat{\mathbf{x}}_q^R(t)$  durch Division durch  $\sqrt{\|a(t)\|}$  binormiert, sodaß  $a_q(t) = 1$  gilt. Diese Operation ist jedoch nur ein Kunstgriff für die Implementierung in MATLAB. Bei ungeeigneter Koordinatenwahl hinsichtlich der auftretenden Einheiten in  $\mathbf{q}(t)$  kann sie mathematisch unsinnig werden, weil bei der Betragbildung eine Summe von Größen unterschiedlicher Einheit auftreten kann. Daher werden bei der Modellbildung weiterhin zeitlich variable verallgemeinerte modale Massen  $a_q(t) \neq 1$  zugelassen.

Die Schwingungsantwort  $\mathbf{x}(t)$  wird nun gemäß

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^R(t) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (2.6)$$

nach den normierten Rechtseigenvektoren modal entwickelt. Gleichung (2.6) und ihre zeitliche Ableitung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}^R(t) \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \dot{\mathbf{X}}^R(t) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (2.7)$$

in Gleichung (2.2) einsetzen sowie Linksmultiplikation mit der transponierten Linksmodalmatrix liefert die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{X}^{LT} \mathbf{A}_1 \mathbf{X}^R \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{X}^{LT} \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}^R \boldsymbol{\xi} + \mathbf{X}^{LT} \mathbf{A}_0 \mathbf{X}^R \boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}^{LT} \mathbf{u} \quad (2.8)$$

für die modalen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}(t)$ , in der alle Systemgrößen zeitabhängig sind. Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehungen<sup>10 11</sup> erkennt man in Gleichung (2.8) die Diagonalmatrizen

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{M}}(t) &= \mathbf{X}^{LT}(t) \mathbf{A}_1(t) \mathbf{X}^R(t) = \text{diag}\{\dots a_q(t) \dots a_q^*(t) \dots\} \quad \text{und} \\ \widetilde{\mathbf{K}}(t) &= \mathbf{X}^{LT}(t) \mathbf{A}_0(t) \mathbf{X}^R(t) = -\text{diag}\{\dots \lambda_q(t) a_q(t) \dots \lambda_q^*(t) a_q^*(t) \dots\}. \end{aligned}$$

Diese als generalisierte „Massen“- und „Steifigkeitsmatrizen“ auffaßbaren Diagonalmatrizen enthalten nur noch die (zeitabhängigen) verallgemeinerten modalen Massen und die (zeitabhängigen) Eigenwerte.

Rückeinsetzen dieser Matrizen in Gleichung (2.8) liefert die kurze Form

$$\widetilde{\mathbf{M}} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{X}^{LT} \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}^R \boldsymbol{\xi} + \widetilde{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}^{LT} \mathbf{u}. \quad (2.9)$$

Hierbei ist die für LTI-Systeme übliche vollständige modale Entkopplung wegen des mittleren Terms  $\mathbf{X}^{LT} \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}^R \boldsymbol{\xi}$  nicht gewährleistet. Untersuchungen im Zuge der Seminararbeit von LAUZI<sup>12</sup> und der Master-Thesis von MICHAELIS<sup>13</sup> zeigten jedoch, daß

<sup>9</sup> MARKERT, *Strukturdynamik* ([44], 2013, S. 286)

<sup>10</sup> NORDMANN, „Modal Parameter Ident. and Sensitivity Analysis in Rotating Mach.“ ([54], 1982)

<sup>11</sup> GASCH; KNOTHE; LIEBICH, *Strukturdynamik* ([16], 2012, S. 231ff.)

<sup>12</sup> LAUZI, *Theoretische Untersuchungen an Rotoren mit Kreiselwirkung* ([33], 2012)

<sup>13</sup> MICHAELIS, *Untersuchung von Algorithmen zur Unwuchtidentifikation bei Rotoren [...]* ([52], 2013)

bei realistischen Betriebsbedingungen der Koppelterm im Vergleich zu den anderen beiden Termen verschwindend klein ist. Daher wird im folgenden die Näherung

$$\mathbf{X}^{LT} \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}^R \boldsymbol{\xi} \approx \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{X}^R(t) \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.10)$$

angenommen. Abschließend wird für die allgemeine Modellierung linearer drehzahl- bzw. (infolge instationärer Hoch- oder Auslaufvorgänge) zeitveränderlicher Rotorsysteme die Gleichung (2.9) von links mit  $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$  multipliziert. Dadurch ergibt sich der zeitveränderliche modale Zustandsraum

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}_{\xi}(t) \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{B}_v(t) \ddot{\boldsymbol{\nu}}(t) \quad (2.11)$$

mit der System- und der Erregermatrix

$$\mathbf{A}_{\xi}(t) = \text{diag}\{\lambda_q(t)\} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_v(t) = \text{diag}\{1/a_q(t)\} \mathbf{X}^{LT}(t) \mathbf{U}$$

sowie der zweiten Zeitableitung des meßbaren Referenzsignals der Rotordrehung

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

als Erregervektor<sup>14</sup>. In der Matrix  $\mathbf{U}$  ist der gesuchte Unwuchtzustand mit Betrag und Phase der statischen und der kinetischen Unwucht enthalten.<sup>15</sup>

Abhängig von den zu modellierenden rotordynamischen Effekten, die berücksichtigt werden sollen, ergeben sich in Gleichung (2.1) unterschiedlichste Matrizen. Solange das Systemverhalten jedoch linear(isierbar) ist, kann jedes Rotorsystem mit der in diesem Kapitel 2.1.2 beschriebenen Methode modal entkoppelt werden.

### 2.1.3 Zeitdiskretisierung

Die Meßdatenerfassung erfolgt heutzutage mit konstanter Zeitschrittweite  $\Delta t$  auf einem Digitalrechner. Um zu jedem Zeitpunkt Meßdaten mit Daten aus dem in Kapitel 2.1.2 angegebenen Rotormodell vergleichen zu können, wird die zeitkontinuierliche Differentialgleichung (2.9) in eine Differenzengleichung überführt<sup>16</sup>. Diese lautet dann

$$\boldsymbol{\xi}(t_{c+1}) = \mathbf{A}_c(t_c) \boldsymbol{\xi}(t_c) + \mathbf{B}_c(t_c) \ddot{\boldsymbol{\nu}}(t_c). \quad (2.13)$$

Hierbei sind

- $\boldsymbol{\xi}(t_c)$  der Zustandsvektor zum Zeitpunkt  $t_c$
- $\mathbf{A}_c(t_c)$  die Systemmatrix des zeitdiskreten Systems
- $\mathbf{B}_c(t_c)$  die Eingangsmatrix des zeitdiskreten Systems und
- $\ddot{\boldsymbol{\nu}}(t_c)$  die modale Erregerfunktion zum Zeitpunkt  $t_c$ .

<sup>14</sup> MARKERT, „Modal Balancing of Flexible Rotors [...] from Non-stationary Run-up [...]“ ([40], 1988)

<sup>15</sup> In der Rotordynamik ist die Wahl komplexer Koordinaten oft zweckmäßig. Dann wird der Erregervektor zum komplexen Erregersignal  $\boldsymbol{\nu}(t) = e^{i\varphi(t)}$ , welches das Referenzsignal beinhaltet.

<sup>16</sup> JUANG, *Applied System Identification* ([26], 1994, S. 18ff.)

Die dazu nötigen Matrizen werden durch Ausrechnung des Matrixexponentials bzw. der unendlichen Reihen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c(t_c) &= e^{\mathbf{A}_\xi(t_c)\Delta t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{A}_\xi(t_c)\Delta t]^r}{r!} \quad \text{und} \\ \mathbf{B}_c(t_c) &= (e^{\mathbf{A}_\xi(t_c)\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}_\xi^{-1}(t_c) \mathbf{B}_v(t_c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{A}_\xi(t_c)\Delta t]^r}{(r+1)!} \mathbf{B}_v(t_c) \Delta t\end{aligned}\quad (2.14)$$

bestimmt. Diese Transformation von der kontinuierlichen in die diskrete Betrachtung ist exakt, wenn die modale Erregerfunktion  $\dot{\mathbf{v}}$  für jeweils ein Zeitintervall  $\Delta t$  konstant bleibt. Für sehr kleine Zeitintervalle, was einer hohen Abtastrate  $f_s$  entspricht, ist dies näherungsweise erfüllt.

## 2.2 Instationärer Hoch- oder Auslauf

Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode zum Auswuchten erfordert Meßdaten, die an einem instationär betriebenen Rotor aufgenommen wurden. Dabei kann die Drehzahl zeitlich schnell verändert werden. Dies erfolgt entweder in einem schnellen Hoch- oder einem schnellen Auslauf, wobei „schnell“ durch das Verhältnis zwischen der Drehzahländerung  $\varphi$  und dem Quadrat der durchfahrenen Eigenfrequenzen  $\omega_r$  beschrieben wird. Hoch- und Auslauf in demselben Meßschrieb zu verwenden, bringt das Problem von Auslöschungen im Frequenzspektrum mit sich. Dies äußert sich an den Frequenzstützstellen des durchfahrenen Frequenzbereichs, an denen die Phasenlage beim Hoch- und beim Auslauf entgegengesetzt ist<sup>17</sup>. Dies wird in Bild 2.1 gezeigt: Links sind die Drehzahl  $n_{\text{D}}(t)$ , das Zeitsignal  $x(t) = \hat{x} \sin \varphi(t)$  sowie das zugehörige (auf die Meßzeit  $T$ ) bezogene Spektrum  $\tilde{X}(\bar{\Omega}) = \mathcal{F}\{x(t)\}/T$  für einen gleichmäßig beschleunigten Hochlauf abgebildet, wie er detailliert in Kapitel 2.2.1 beschrieben wird. Im Vergleich dazu ist rechts ein Vorgang, bei dem der Hoch- und der nachfolgende Auslauf in demselben Meßschrieb verwendet wird, analog dargestellt. In Bild 2.1 f) ist deutlich zu erkennen, daß das Spektrum immer wieder auf den Wert 0 einbricht. Das ist auf den o. g. Effekt der Auslöschungen zurückzuführen.

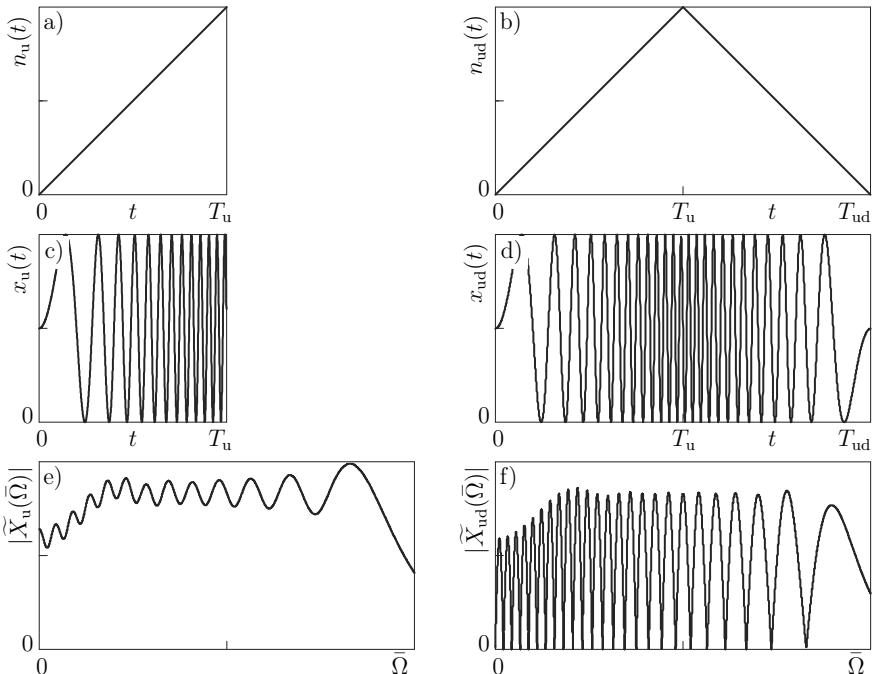
Um das Problem der Auslöschungen zu beheben, sollte man die Meßschriebe des Hoch- und des Auslaufs voneinander trennen und besser mit Leistungsdichten

$$\tilde{S}_{xx}(\bar{\Omega}) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{X}_r^*(\bar{\Omega}) \tilde{X}_r(\bar{\Omega}) \quad (2.15)$$

arbeiten. Voraussetzung für diese Art der Mittelung ist jedoch die Ergodizität des Signals<sup>18</sup>. Der Effekt einer solchen Mittelung ist in Bild 2.2 zu sehen. Das Zeitsignal

<sup>17</sup> MENZ, *Drehzahlvar. Auswuchten starrer Rotoren in einer elast. Auswuchtmaschine* ([49], 1995)

<sup>18</sup> Ergodizität bedeutet, daß die Mittelung über einen langen Zeitraum (Zeitmittel) und die Mittelung über mehrere Ensembles (Scharmittel) zum gleichen Ergebnis führen.



**Bild 2.1:** Vergleich eines Hochlaufs (links) mit einem Hoch- und Auslaufs (rechts) in einem einzelnen Meßschrieb:

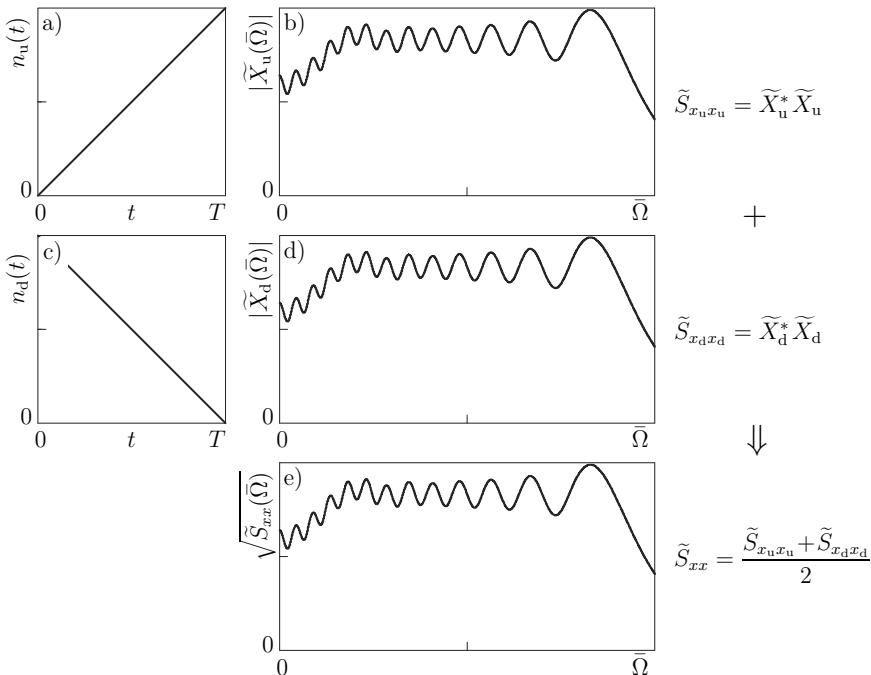
- a) und b) die Drehzahlverläufe  $n_u(t)$  und  $n_{ud}(t)$ ,
- c) und d) die zugehörigen Erreger-Zeitsignale  $x_u(t) = \hat{x} \sin \varphi(t)$  und  $x_{ud}(t) = \hat{x} \sin \varphi(t)$ ,
- e) und f) die zugehörigen Spektren  $|\tilde{X}_u(\bar{\Omega})|$  und  $|\tilde{X}_{ud}(\bar{\Omega})|$

aus Bild 2.1 d) wird dabei schlicht zwischen Hoch- und Auslauf aufgespalten und als unterschiedliche Ensembles behandelt. Da der Hoch- und der Auslauf in diesem Beispiel gleich schnell erfolgen, sind beide Spektren betragsmäßig gleich. In Bild 2.2 e) ist dann die Mittelung der Autoleistungsdichten aus den beiden Ensembles *Hochlauf* und *Auslauf* zu sehen<sup>19</sup>. Auslöschenungen sind im Gegensatz zu Bild 2.1 f) nicht mehr zu erkennen. Ein entsprechendes Ergebnis ließe sich auch über eine Mittelung über Kreuzleistungsdichten erzielen<sup>20</sup>. Dabei sind die Zeitsignale wieder rückwärts berechenbar, weil die Phaseninformation bei der Bildung von Kreuzleistungsdichten nicht verloren geht. Um die Einführung des dafür nötigen Referenzsignals zu umgehen, wird der Mittelungseffekt hier anhand der Autoleistungsdichten gezeigt.

Prinzipiell entstehen beim schnellen Durchlaufen durch Resonanzen Wechselwirkungen zwischen dem sich lateral bewegenden Rotor und dem Antrieb. Dabei bewirkt (ein

<sup>19</sup> Durch die hier auftretende Gleichheit der Spektren gilt:  $\sqrt{\tilde{S}_{xx}(\bar{\Omega})} = |\tilde{X}_u(\bar{\Omega})| = |\tilde{X}_{ud}(\bar{\Omega})|$ .

<sup>20</sup> MARKERT, Schwingungsmeßtechnik – Skript zur Vorlesung ([43], 2005, S. 55)



**Bild 2.2:** Aufteilung von Hoch- und Auslauf in zwei Ensembles:

- a) und c) die Drehzahlverläufe  $n_u(t)$  und  $n_d(t)$ ,
- b) und d) die zum Hoch- bzw. zum Auslaufen gehörigen Spektren  $|\widetilde{X}_u(\bar{\Omega})|$  und  $|\widetilde{X}_d(\bar{\Omega})|$ ,
- e) die Wurzel aus der (gemittelten) Autoleistungsdichte  $\sqrt{\widetilde{S}_{xx}(\bar{\Omega})}$

Teil der) Antriebsleistung eine Vergrößerung der Rotoramplituden und steht daher nicht für die Drehbeschleunigung des Rotors zur Verfügung<sup>21</sup>. Dies führt bei Hochläufen zu einer geringeren und bei Ausläufen zu einer betragsmäßig größeren Drehbeschleunigung während der Resonanzdurchfahrt. Bei Hochläufen kann es dadurch bei schwachen Antrieben im Extremfall zum Hängenbleiben der Rotordrehzahl in der Resonanz kommen. Bei Durchläufen verschieben sich die Maximalamplituden in Vergleich zum quasi-stationären Rotorbetrieb hin zu späteren Zeitpunkten. Also liegen die Maximalamplituden in den Zeitschreien von Hochläufen nicht beim Durchfahren der Eigenfrequenzen, sondern bei höheren Drehzahlen – bei Ausläufen ist es umgekehrt.

Der entscheidende Vorteil bei schneller Durchfahrt der Resonanzen von RotorSystemen ist, daß das Maximum im Vergleich zum quasi-stationären Betrieb umso kleiner ist, je größer die Anfahrbeschleunigung ist. Beim Wuchten ist dieser Vorteil besonders

<sup>21</sup> MARKERT; GASCH; PFÜTZNER, „Biegeschwingungsverhalten rotierender Wellen [...]“ ([46], 1977)

verlockend, da flexible Rotoren üblicherweise in ihren Resonanzen beruhigt werden sollen und dazu bei stationären Verfahren ein Betrieb in Resonanznähe nötig ist. Sollte das aufgrund zu hoher Amplituden nicht gefahr- und beschädigungsfrei möglich sein, müssen diese durch iterative Wuchtvorgänge abgesenkt werden. Dies kann einen immensen Zeitaufwand erfordern.

### 2.2.1 Gleichmäßig beschleunigter Hoch- oder Auslauf

Für (Rotor-)Systeme, die gleichmäßig beschleunigt werden, existieren analytische Lösungsansätze, sofern eine multiplikative Trennung der Spektren der Systemmatrizen und der Zustandsvektoren möglich ist<sup>22</sup>. Eine gleichmäßige Beschleunigung ist für konstante Anfahrbeschleunigung  $\ddot{\varphi} = \alpha$  gegeben. Mit dieser ergeben sich der Drehzahlverlauf und der Drehwinkel des Rotors gemäß

$$\dot{\varphi}(t) = \alpha t + \Omega_0 \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \Omega_0 t + \varphi_0. \quad (2.16)$$

Dabei kennzeichnen  $\Omega_0$  die Anfangswinkelgeschwindigkeit und  $\varphi_0$  den Anfangsdrehwinkel des Rotors. Somit ergibt sich beispielsweise für einen gleichmäßig beschleunigten ungewichtigen LAVAL-Rotor<sup>23</sup> in komplexen Koordinaten die Erregerfunktion

$$f_U(t) = \varepsilon \{ e^{i\varphi(t)} \}^{\ddot{\cdot}}. \quad (2.17)$$

Der schon genannte Effekt der verkleinerten Resonanzamplituden beim schnellen Hoch- oder Auslauf gegenüber dem quasi-stationären Betrieb kann für den gleichmäßig beschleunigten Betrieb eines linear-zeitinvarianten Rotor systems unter Nutzung des Wahrscheinlichkeitsintegrals<sup>24</sup> analytisch gezeigt werden. Mit dem zeitabhängigen komplexen Amplitudengang  $Q(t) = |Q(t)| e^{-i\psi(t)}$  ist zudem eine dem stationären Fall sehr ähnliche Formulierung

$$r(t) = |Q(t)| e^{i[\varphi(t) - \psi(t)]} \quad (2.18)$$

erreichbar<sup>25</sup>. Durch die aufwändige Auswertung des Wahrscheinlichkeitsintegrals ist es jedoch nicht möglich, die zu erwartenden Maximalamplituden  $|Q|_{\max}$  (und auch die zugehörige Drehzahl)  $\Omega_{Q \max}$  in vertretbarer Weise exakt zu berechnen. Daher geben MARKERT<sup>26</sup> und SEIDLER<sup>27</sup> – in diesem Fall für Unwuchterregung – die Näherungsformeln

$$|Q|_{\max} = \frac{\omega}{0.67 \sqrt{|\alpha|}} - 2.70 \frac{D\omega^2}{|\alpha|} + 2.92 \frac{\omega(\omega D)^2}{\sqrt{|\alpha|^3}} + \operatorname{sgn} \alpha \quad \text{und} \\ \Omega_{Q \max} = \omega + 2.157 \operatorname{sgn} \alpha \sqrt{|\alpha|} \quad (2.19)$$

<sup>22</sup> MARKERT, *Resonanzdurchfahrt ungewichtiger biegeelastischer Rotoren* ([41], 1980)

<sup>23</sup> MARKERT, *Rotorodynamik – Skript zur Vorlesung* ([42], 2011, S. 191f.)

<sup>24</sup> ABRAMOWITZ; STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions* ([2], 1965, S. 931ff.)

<sup>25</sup> MARKERT; PFÜTZNER, „An- und Auslaufvorgänge einfacher Schwingen“ ([47], 1981)

<sup>26</sup> MARKERT, „Amplitudenabschätzung bei der instationären Resonanzdurchfahrt“ ([38], 1996)

<sup>27</sup> MARKERT; SEIDLER, „Analytically based estimation of the maximum amplitude [...]“ ([48], 2001)

an, die man durch Vernachlässigung unwesentlicher Terme in der exakten Lösung von MARKERT erhält. Diese Formulierung ist abhängig von der Eigenfrequenz  $\omega$ , dem Dämpfungsmaß  $D$  und der Anfahrbeschleunigung  $\alpha$ .

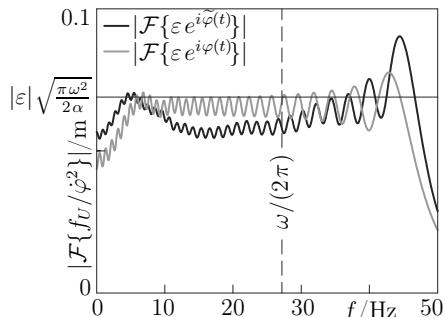
## 2.2.2 Beliebiger instationärer Drehzahlverlauf

Die an realen Rotoren aufgenommenen Meßdaten stammen jedoch nicht zwingend aus exakt gleichmäßig beschleunigten Hoch- oder Ausläufen, sondern der Drehzahlverlauf ergibt sich aus dem Antriebsmoment und der Drehträgheit des Rotors sowie den wirkenden Reibmomenten. Insbesondere beim Versuch am ungeregelt an- oder auslaufenden Abgasturbolader (vgl. Kapitel 4.5) spielt dies eine entscheidende Rolle. Der sich einstellende Drehwinkelverlauf  $\tilde{\varphi}(t)$  muß also während des Versuchs mit aufgenommen werden<sup>28</sup>, wird jedoch nicht immer gezielt beeinflußt.

Allerdings werden auch in einem nicht gleichmäßig beschleunigten Hochlauf oder Auslauf die zu wuchtenden Eigenformen vergleichbar zum gleichmäßig beschleunigten Vorgang angeregt, wenngleich sich die genauen Verläufe der Erregersignale im Frequenzbereich quantitativ etwas unterscheiden. Der Vergleich dieser beiden Erregerspektren ist in Bild 2.3 dargestellt, die zugehörigen Drehzahlverläufe sind in Bild 2.4 zu sehen.

Bei einem ungleichmäßig beschleunigten Hochlauf, bei dem sich die Drehzahl  $\varphi(t)$

ohne Regelung des Antriebsmoments infolge der mechanischen Eigenschaften des Rotor systems einstellt, lassen sich bei vergleichbarer Anfahrbeschleunigung die gleichen Phänomene wie beim gleichmäßig beschleunigten Hochlauf beobachten. In Bild 2.4 sind die Ergebnisse der numerischen Integration eines unwuchterregten LAVAL-Rotors im Zeit- und im Frequenzbereich gegenübergestellt. In Bild 2.4 a) ist die Hüllkurve der Rotoramplituden zu sehen, welche sich einstellte, wenn der gemessene Drehzahlverlauf ein quasi-stationäres Verhalten hervorrief. Zudem sind zwei instationäre Amplitudenkurven zu erkennen: Unwuchterzwungene Schwingungen infolge des gemessenen ungleichmäßigen Drehzahlverlaufs und infolge eines gleichmäßig beschleunigten Hochlaufs mit global vergleichbarer Anfahrbeschleunigung. In Bild 2.4 b) sind die bezogenen FOURIER-Spektren der in a) dargestellten Zeitsignale gegenübergestellt, welche



**Bild 2.3:** Spektren eines ungleichmäßig und eines vergleichbaren gleichmäßig beschleunigten Erregersignals

<sup>28</sup> Oder der Drehwinkel  $\tilde{\varphi}(t)$  muß anhand der aufgenommenen Drehzahl  $\tilde{n}(t)$  und einem zusätzlichen Winkelreferenzsignal berechnet werden, ist dann jedoch wie ein Meßsignal behandelbar.

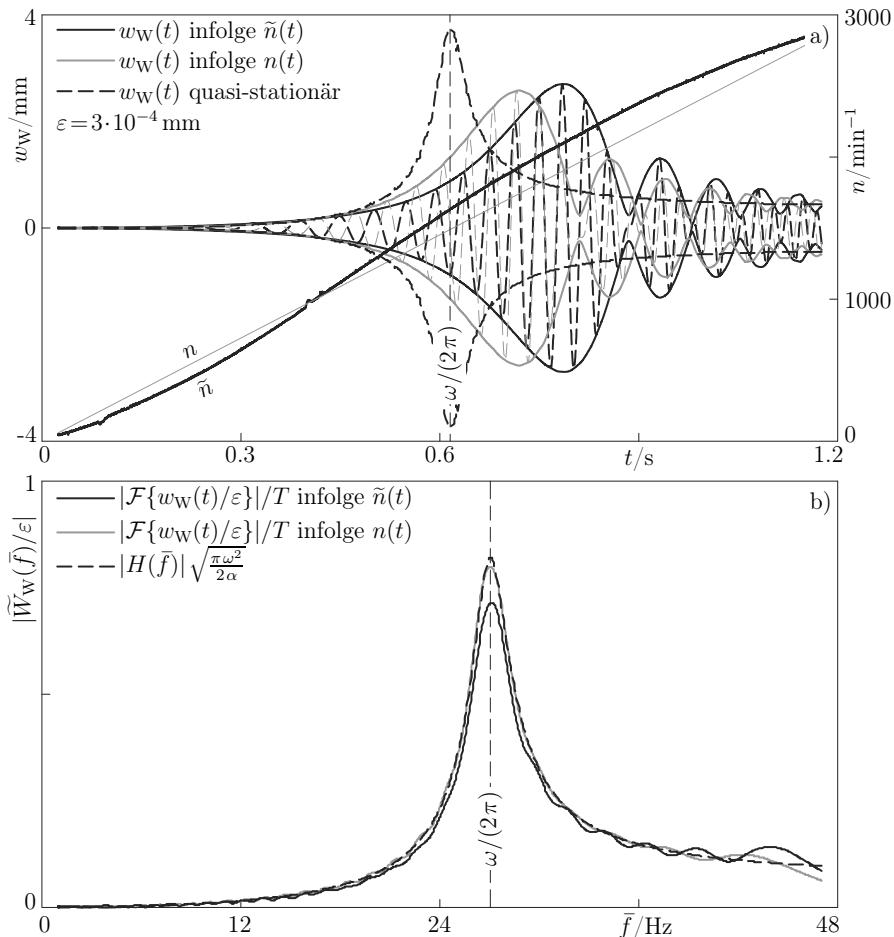
die für den Zeitbereich genannten Phänomene der Instationarität<sup>29</sup> nicht mehr zeigen. Im Vergleich dazu ist die stationäre Übertragungsfunktion  $H(\bar{f})$  des zugrunde liegenden LAVAL-Rotors, multipliziert mit der mittleren Erregeramplitude, dargestellt. Zwischen dieser und den bezogenen FOURIER-Spekturen des Zeitsignals – resultierend aus dem gleichmäßig beschleunigten Hochlauf – sind nur geringe Unterschiede zu erkennen. Diese sind ausschließlich auf den welligen Verlauf der Erregerfunktion (siehe Bild 2.3) infolge der begrenzten Meßdauer zurückzuführen.

Bild 2.4 a) zeigt, daß sich also auch bei einem ungleichmäßig beschleunigten Hoch- oder Auslauf dieselben Phänomene beobachten lassen wie bei gleichmäßig beschleunigten. Diese lauten noch einmal zusammengefaßt:

1. Das Amplitudenmaximum infolge Unwuchterregung verschiebt sich beim Hochlauf zu höheren und beim Auslauf zu niedrigeren Drehzahlen.
2. Das Amplitudenmaximum ist abhängig vom Betrag der Drehbeschleunigung und bei schneller Resonanzdurchfahrt deutlich geringer als bei quasi-stationärem Resonanzbetrieb.
3. Die in dieser Arbeit betrachteten Rotorsysteme können z. B. aufgrund von Kreiseffekten und/oder Gleitlagerung drehzahlabhängig sein. Infolge einer sich zeitlich ändernden Drehzahl  $\dot{\varphi}(t)$  wird ein solches Rotorsystem ebenfalls zeitabhängig.

---

<sup>29</sup> Verkleinerung der Maximalamplitude, Verschiebung des Maximum hin zu einem späteren Zeitpunkt



**Bild 2.4:** Auslenkungen eines LAVAL-Rotors während eines ungleichmäig und eines gleichmäßig beschleunigten sowie eines quasi-stationären Hochlaufs:

- Zeitverläufe
- Beträge der bezogenen FOURIER-Spektren

## Kapitel 3

# Verfahren zur Unwuchtidentifikation aus instationären Meßläufen

Das in dieser Arbeit entwickelte neue Verfahren zur Unwuchtidentifikation aus instationären Meßläufen wird in diesem Kapitel vorstellt und sein Ablauf erklärt. Der Algorithmus vergleicht die Meßdaten mit Daten aus einem numerischen Modell im Zeitbereich. Dies erfolgt kaskadierend, um die Generierung physikalisch sinnvoller und numerisch unproblematischer Anfangswerte für den Hauptdurchlauf des in Kapitel 3.1.2 beschriebenen Algorithmus' sicherzustellen.

### 3.1 Unwuchtidentifikation im Zeitbereich

#### 3.1.1 Modellierung und Annahmen

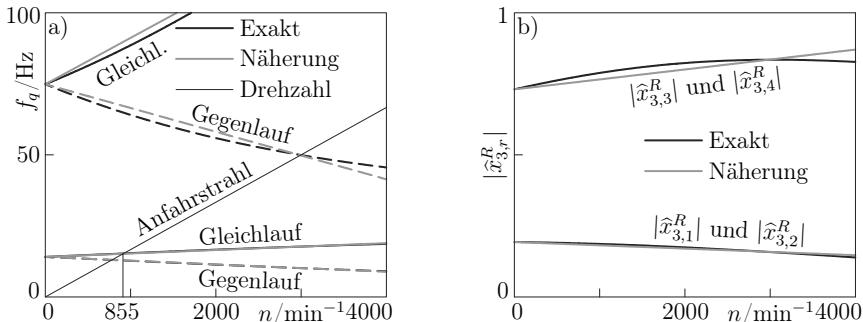
Aus der Modellierung in Kapitel 2.1 geht hervor, daß zur Berechnung der unwuchterzwungenen Schwingungen nur diejenigen Moden verwendet werden müssen, die im jeweiligen Betriebsbereich liegen. Um die dafür nötige modale Entkopplung durchführen zu können, ist die Vernachlässigung des Terms  $\mathbf{X}^{LT}\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{X}}^R\xi$  in Gl. (2.9) nötig. Zudem sind alle modalen Parameter des Rotormodells drehzahl- und infolge des instationären Rotorbetriebs zeitabhängig. Da die Funktionen der Drehzahlabhängigkeit in den meisten Fällen nicht analytisch in expliziter Form formulierbar sind, werden hierfür Näherungen verwendet. Die sich mit der Drehzahl und damit mit der Zeit ändernden Modaldaten werden durch Geraden angenähert. Die Drehzahlabhängigkeit aller für die Berechnung der unwuchterzwungenen Schwingungen verwendeten modalen Parameter genügen somit der TAYLOR-Approximation<sup>1</sup>

$$\lambda_q(\dot{\varphi}) = \lambda_{q,0} + \frac{\partial \lambda_q}{\partial \dot{\varphi}} \Big|_{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{x}}_q^{R,L}(\dot{\varphi}) = \hat{\mathbf{x}}_{q,0}^{R,L} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_q^{R,L}}{\partial \dot{\varphi}} \Big|_{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi}. \quad (3.1)$$

Die Zweckmäßigkeit dieser Näherung wird nun am Beispiel des Einscheibenrotors mit ausgeprägter Kreiselwirkung aufgezeigt. Dieser Rotor wird ausführlich in Kapitel 4.1 vorgestellt und ist an die Arbeit von WEGENER<sup>2</sup> angelehnt. In Bild 3.1 a) sind die Eigenfrequenzen  $f_q$  und in b) die Beträge der Einträge  $|\hat{x}_{3,r}^R|$  eines beispielhaften Eigenvektors sowie deren Näherungen als Geraden über der Drehzahl  $n$  dargestellt.

<sup>1</sup> Nach dem britischen Mathematiker Brook TAYLOR, \*1685 in Edmonton, †1731 in London.

<sup>2</sup> WEGENER, *Untersuchungen zum Kreiseleinfluß auf den [...] Betrieb v. elast. Rotoren* ([69], 1993)



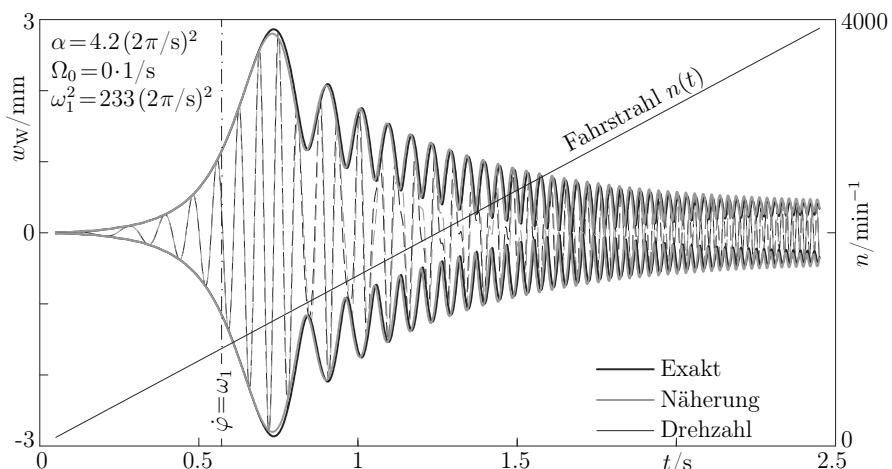
**Bild 3.1:** LAVAL-Rotor (*kurz*) mit Kreiselwirkung:

a) CAMPBELL-Diagramm der Eigenfrequenzen und

b) Beträge der Einträge des dritten Rechtseigenvektors in Abhängigkeit von der Drehzahl

TAYLOR-Polynome höherer Ordnung wären prinzipiell ebenfalls geeignet, erhöhen jedoch den numerischen Aufwand. Bei unbefriedigenden Identifikationsergebnissen stellt die Ordnungserhöhung der Polynome sicherlich eine Möglichkeit zur Steigerung der Genauigkeit des angesetzten Rotormodells dar.

Bild 3.2 belegt beispielhaft, daß diese linearen Näherungen auch bei den Rotorschwingungen gute Approximationen liefern. Dargestellt sind die exakte Scheibenauslenkung und die aus einer Näherung während eines gleichmäßig beschleunigten Hochlaufs vom Stillstand auf  $n_{\max} = 4000 \text{ min}^{-1}$ . Bei der Näherung wurde lediglich die erste Gleichlaufmode berücksichtigt und für die Modaldaten wurde die lineare Approximation



**Bild 3.2:** Numerisch berechnete Scheibenauslenkungen  $w_w(t)$  bei einem Hochlauf: exakt und aus modaler Reduzierung unter Nutzung genauerter Modaldaten

angesetzt. Beide Rechnungen wurden mit derselben Exzentrizität  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$  m und demselben Aufkeilwinkel  $\beta = 0$  durchgeführt. Die Abweichungen sind minimal, insbesondere in der Resonanz bei etwa 1 s. Daraus folgt, daß die modale Reduktion und die lineare Näherung der Modaldaten (zumindest in diesem Fall) zulässig sind.

### 3.1.2 LTV-Algorithmus im Zeitbereich

Das Schema zur Unwuchtidentifikation ist in Bild 3.3 dargestellt und arbeitet im Zeitbereich. Die verwendeten Eingangssignale sind während eines schnellen Hoch- oder Auslaufs eines unwuchtigen Rotors gemessene Bestandteile des Zustandsvektors  $\tilde{\mathbf{x}}_r(t_c)$ . Weitere Meß- und Eingangssignale sind der Sinus und der Cosinus des Drehwinkels ( $\sin \tilde{\varphi}, \cos \tilde{\varphi}$ ), die als Drehwinkelreferenz nötig sind<sup>3</sup>. Für den Start der Identifikation sind Schätzwerte für die Eigenwerte  $\lambda_q$  (Eigenfrequenzen  $\omega_q$ , modale Dämpfungsmaße  $D_q$ ) sowie die Rechts- und Linkseigenvektoren ( $\hat{\mathbf{x}}_q^R$  bzw.  $\hat{\mathbf{x}}_q^L$ ) und deren linearisierte Drehzahlabhängigkeiten vorzugeben. Die Schätzungen für diese modalen Größen können beispielsweise aus experimentellen oder numerischen Modalanalysen (EMA, NuMA) des Rotorsystems oder FE-Berechnungen stammen. Zusätzlich zu den Schätzwerten für die modalen Parameter sind selbstverständlich Anfangsunwuchten in der Unwuchtmatrix  $\mathbf{U}_{\text{LTV,ini}}$  vorzugeben. Wenn diese jedoch vorab nicht über andere Verfahren geschätzt werden, genügt es, aus der Kenntnis des Herstellungsprozesses heraus eine „typische“ Unwucht vorzugeben.

Zur Identifikation werden die Zeitverläufe der modalen Koordinaten an den gemessenen Zeitstützstellen  $\xi(t_c)$  im genäherten modalen Zustandsraum durch numerische Integration der diskretisierten und modal reduzierten Bewegungsgleichung (2.13) berechnet. Mit der Transformationsbeziehung (2.6) werden diese modalen Zeitverläufe in den physikalischen Raum transformiert. Mit den gemessenen Bestandteilen des Zustandsvektors  $\tilde{\mathbf{x}}_r(t_c)$  und den zugehörigen Bestandteilen des numerisch berechneten Zustandsvektors  $\mathbf{x}_r(t_c)$  wird der Residuenvektor

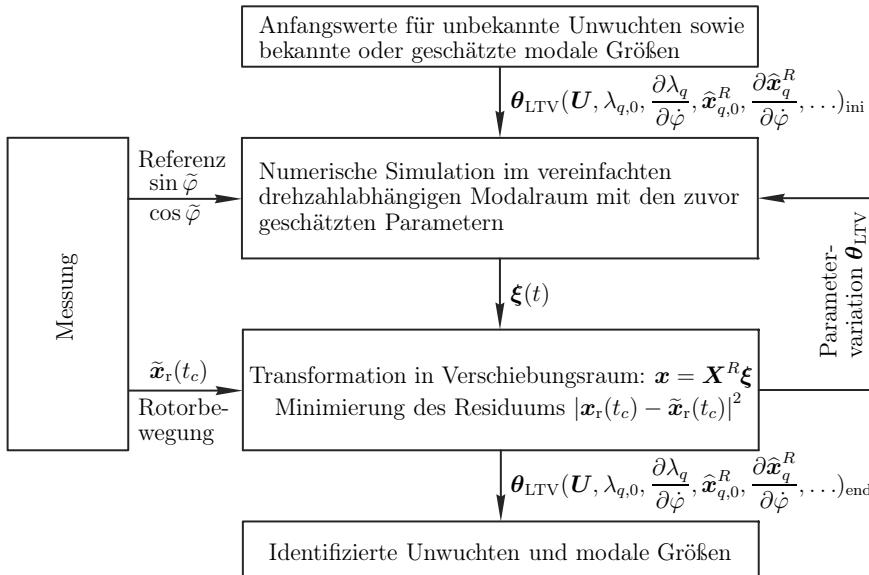
$$\mathbf{R}(t_c) = \mathbf{x}_r(t_c) - \tilde{\mathbf{x}}_r(t_c) \quad (3.2)$$

an  $c = [1, C]$  Zeitstützstellen  $t_c$  gebildet. Zur Unwuchtidentifikation wird schließlich die mittlere quadratische Abweichung zwischen Rechnung und Messung minimiert. Dies erfolgt durch Minimierung der 2-Norm des Residuenvektors aus Gleichung (3.2) an jeder Zeitstützstelle durch wiederholte gradientenbasierte Anpassung<sup>4</sup> der modalen Parameter und der Unwuchten  $\mathbf{U}$ ,

$$\min_{\boldsymbol{\theta}_{\text{LTV}}} \sum_{c=1}^C |\mathbf{R}(t_c)|^2 \implies \boldsymbol{\theta}_{\text{LTV,end.}} \quad (3.3)$$

<sup>3</sup> MARKERT, „Modal Balancing of Flexible Rotors [...] from Non-stationary Run-up [...]“ ([40], 1988)

<sup>4</sup> COLEMAN; LI, „An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization [...]“ ([6], 1996)



**Bild 3.3:** Flußbild für den Algorithmus zur System- und Unwuchtidentifikation im Zeitbereich

Eingesetzt wird hier ein nichtlinearer Optimierungsalgorithmus (`lsqnonlin` aus der Programmbibliothek „Optimization Toolbox“ von MATLAB). Man erhält nach dem Ende des letzten Optimierungsschrittes eine Spaltenmatrix mit einem Parametersatz  $\boldsymbol{\theta}_{\text{LTV},\text{end}}$ , die bei erfolgreicher Identifikation die gesuchten Unwuchten und deren Phasen enthält, jedoch auch die angepaßten modalen Parameter.

### 3.1.3 LTI-Voridentifikation

Ein bekanntes Problem bei vieldimensionalen nichtlinearen Optimierungsaufgaben ist, daß gradientenbasierte Optimierungsalgorithmen aufgrund unpassender Anfangswerte in einem lokalen Minimum hängen bleiben können. Zur Minimierung dieses Problems können genetische Algorithmen vorgeschaltet oder Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt werden. Nachteilig ist dabei der damit verbundene erhöhte Rechenaufwand. In dieser Arbeit wurde ein anderer Ansatz verfolgt: Die Dimension des Parametersatzes in  $\boldsymbol{\theta}_{\text{LTV}}$  wurde verringert, indem für die Startwerte ein deutlich einfacheres linear-zeitinvariantes (LTI) Ersatzsystem mit symmetrischen Systemmatrizen identifiziert wird. Da die Unwuchtphasen sehr sensiv gegenüber Hängenbleiben in lokalen Minima sein können, werden zunächst nur diese bei ungefährer Lage der Eigenfrequenzen ermittelt. Der Grund für diese Sensitivität kann anhand der notwendigen Bedingung für ein lokales Minimum, in diesem Fall von sin-Funktionen, erklärt wer-

den:

$$\min_{\delta} \sum_{c=1}^C [\sin \varphi_c - \sin(\varphi_c + \delta)]^2 \implies \sum_{c=1}^C \frac{d}{d\delta} [\sin \varphi_c - \sin(\varphi_c + \delta)]^2 = \sum_{c=1}^C \sin 2(\varphi_c + \delta) - 2 \sin \varphi_c \cos(\varphi_c + \delta) = 0 \quad (3.4)$$

Aus Gl. (3.4) wird deutlich, daß das globale Minimum in Abhängigkeit des möglichen Gesamtphasenwinkels  $\varphi_c + \delta$  für  $\delta = 0$  erreicht wird. Die Ableitung enthält jedoch eine Doppelwinkelfunktion, was zu der doppelten Anzahl von Nullstellen führen kann. Dies führt bei Nutzung eines gradientenbasierten Optimierers unter Umständen zum Erreichen eines lokalen Minimums. Dann wird keine weitere Variation des Winkels  $\delta$  mehr vorgenommen und der Phasenwinkel nicht korrekt identifiziert. Daher muß die ungefähre Ermittlung der Unwuchtphase vorab und global erfolgen.

Die Eigenvektoren und die Unwuchtbeträge werden in diesem ersten Voridentifikationsschritt festgesetzt, die Phasenwinkel werden im Intervall  $[0 \dots 2\pi]$  variiert. Anschließend wird für die LTI-Voridentifikation nach einem ähnlichen Schema wie bei der LTV-Hauptidentifikation in Bild 3.3 vorgegangen. Dies ist in Bild 3.4 dargestellt.

Die Anfangswerte für die modalen Parameter stammen aus einer experimentellen oder numerischen Modalanalyse. Die Ergebnisse dieser sogenannten Voridentifikation an einem symmetrischen LTI-Rotorsystem werden dann als Startwerte für die eigentliche Identifikation am linear(isiert)en zeitvarianten (LTV) Rotorsystem verwendet. Die Links-Modalmatrix  $\mathbf{X}^L$  ist aufgrund der vorausgesetzten Symmetrie gleich der Rechts-Modalmatrix  $\mathbf{X}^R$ . Die modalen Parameter des Modells für die Voridentifikation sind nicht mehr drehzahl- bzw. zeitabhängig. Die der Voridentifikation zugrundeliegende Bewegungsgleichung in modalen Koordinaten [für LTV-Systeme war das Gl. (2.9)] wird also zu

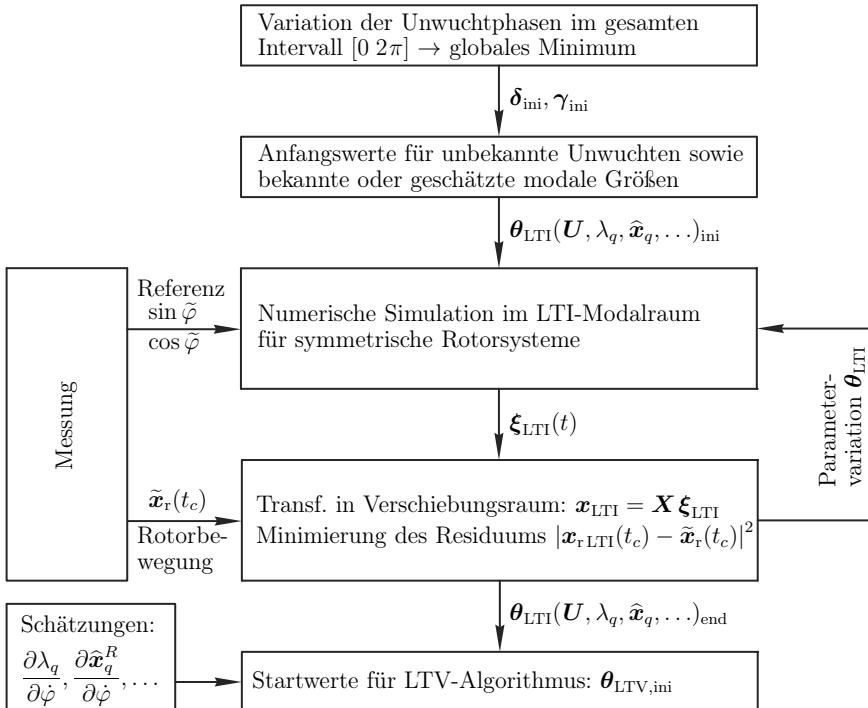
$$\widetilde{\mathbf{M}} \dot{\xi} + \widetilde{\mathbf{K}} \xi = \mathbf{X}^T \mathbf{u} \quad (3.5)$$

mit den Modalmatrizen

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{X}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{X} = \text{diag}\{\dots, a_q, \dots, a_q^*, \dots\} \quad \text{und} \\ \widetilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{X}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{X} = -\text{diag}\{\dots, \lambda_q a_q, \dots, \lambda_q^* a_q^*, \dots\}. \end{aligned}$$

## 3.2 Gewichtung bestimmter Drehzahlbereiche

Um Meffehler, z.B. Runout, zu minimieren oder um das Signal-Rausch-Verhältnis zu verbessern, kann es hilfreich sein, nur den Teil eines Hochlaufs zur Berechnung des Residuums nach Gleichung (3.2) heranzuziehen, der in Resonanznähe ist. Dieses Vorgehen ist in dem implementierten Algorithmus möglich und wird in dieser Arbeit z.T. auch angewendet.



**Bild 3.4:** Flussbild für die LTI-Voridentifikation des Systems und der Unwuchten zur Ermittlung von Startwerten

In vielen Fällen reicht die automatisch höhere Gewichtung der Resonanzbereiche gegenüber Antiresonanzen durch ihre vergrößerten Amplituden schon aus, um zufriedenstellende Identifikationsergebnisse zu liefern.

Soll der gesamte Drehzahlbereich zur Identifikation herangezogen werden und die Resonanzen über ihre immanente Übergewichtung hinaus besonders berücksichtigt werden, kann eine Vorfilterung (z. B. über ein gleitendes Bandpaßfilter) angewandt werden.

### 3.3 Konvergenz und Fehlereinflüsse

Das in den Kapiteln 3.1 und 3.2 beschriebene Unwucht- und Parameteridentifikationsverfahren ist (allgemein beschrieben) eine Anpassung der Antwort eines (vereinfachten) Rotormodells an die gemessene Antwort des realen Rotorsystems. Daher ist zu klären, inwiefern überhaupt die Unwuchten und modalen Größen identifiziert werden können und welche Voraussetzungen dafür die Meßdaten erfüllen müssen. Dabei ist

zu beachten, daß jedes Meßsignal i. a. mit systematischen und statistischen Fehlern<sup>5</sup> behaftet ist. Zudem wurde schon anhand von Bild 3.2 ersichtlich, daß durch die vereinfachte Systemmodellierung systematische Fehler in den Identifikationsergebnissen zu erwarten sind.

Eine einleuchtende Forderung zur Vermeidung systematischer Fehler ist, daß diejenigen Moden, von denen keine Antwort im (relevanten) Frequenzbereich der (synchron) durchfahrenen Rotordrehzahl zu erwarten ist<sup>6</sup>, a priori aus dem Modell entfernt werden sollten. Ein verlässliches Ergebnis für Moden, die im untersuchten Frequenzbereich nicht in Resonanz geraten, ist nicht zu erzielen, weil ihr Beitrag zur gesamten Schwingungsantwort im Vergleich zu Moden mit Resonanzen verschwindend gering ist.

Das Verfahren ist auf eine iterative und gradientenbasierte Optimierung zugeschnitten. Dadurch kann nicht prinzipiell davon ausgegangen werden, daß die Identifikation im globalen Minimum des Anpassungskriteriums endet. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlerfalls wurde durch die in Bild 3.4 dargestellte kaskadierende Voridentifikation minimiert, ist jedoch verfahrensimmanent niemals systematisch auszuschließen. Auch genetische Algorithmen oder Monte-Carlo-Simulationen könnten prinzipbedingt niemals absolut sicherstellen, daß das globale Minimum gefunden wird. Mit der hier angewendeten Startwertgenerierung aus Voridentifikation am LTI-System konnte das Steckenbleiben des LTV-Suchalgorithmus in einem lokalen Minimum fast immer vermieden werden. Die selten auftretenden Fehlerfälle waren allerdings aufgrund physikalisch unsinniger Identifikationsergebnisse sofort ersichtlich und durch das Setzen von Grenzen für einzelne Parameter vermeidbar.

### 3.3.1 Statistische Voraussetzungen

Die verwendeten Minimierungsvorschriften für das Anpassungskriterium müssen zusätzlich unter statistischen Gesichtspunkten sinnvoll sein. Die dazu nötigen Herleitungen und Beweise sind bei LJUNG<sup>7</sup> zu finden. Die in den Meßsignalen enthaltenen Störungen müssen demnach zufällig und dürfen nicht mittelwertbehaftet sein. Außerdem dürfen sie zueinander und zur Systemerregung keine Korrelation aufweisen. Diese Annahmen werden in der Schwingungsmeßtechnik überlicherweise getroffen<sup>8</sup>. Die von LJUNG getroffenen Aussagen bezüglich der statistischen Voraussetzungen an das Modell sind noch einmal vereinfacht zusammengefaßt:

- *Erwartungstreue* ist gegeben, wenn der Erwartungswert dem realen Wert des zu schätzenden Parameters entspricht. Im konkreten Fall bedeutet das anschaulich:

<sup>5</sup> MARKERT, *Schwingungsmeßtechnik – Skript zur Vorlesung* ([43], 2005, S. 6 und 84ff.)

<sup>6</sup> z. B. Gegenlaufmoden oder Moden in einem völlig anderen Drehzahlbereich

<sup>7</sup> LJUNG; LJUNG, *System Identification* ([36], 1999, S. 208ff.)

<sup>8</sup> MARKERT, *Schwingungsmeßtechnik – Skript zur Vorlesung* ([43], 2005, S. 84ff.)

Wenn das reale Systemverhalten mit einem bestimmten Satz modaler Parameter und Unwuchten exakt wiedergegeben werden kann. Dabei konvergiert das Ergebnis des iterativen Identifikationsalgorithmus<sup>9</sup> mit steigender Meßinformation gegen die wahren Unwuchten und Systemparameter.

- Läßt die gewählte Modellierung keine exakte Beschreibung des realen Systemverhaltens zu<sup>9</sup>, dann konvergieren zumindest die Übertragungsfunktionen des Modells gegen die Übertragungsfunktionen des realen Systems; und zwar so, daß die Fehlerquadratsumme gewichtet mit der Autoleistungsdichte der Erregerfunktionen minimiert wird<sup>10</sup>. Zur Verbesserung des Identifikationsergebnisses können bestimmte Frequenzbereiche durch Filterung der Ein- und Ausgangssignale zusätzlich gewichtet werden.

### 3.3.2 Einfluß fehlerbehafteter Modaldaten

Der Einfluß fehlerbehafteter modaler Parameter kann anhand der vereinfachten analytischen Grundgleichung (2.11) sowie der Transformationsbeziehung (2.6) zwischen modalen und physikalischen Koordinaten gezeigt werden. Daß die hieraus berechnete(n) theoretische(n) Schwingungsantwort(en)  $\boldsymbol{x}_r(t)$  an bestimmten Meßstellen an die korrespondierenden gemessenen Schwingungsantworten  $\tilde{\boldsymbol{x}}_r(t)$  angepaßt werden, ist der Kern des Identifikationsverfahrens in dieser Arbeit. Die Anpassung erfolgt über die Variation der Unwuchtmatrix  $\boldsymbol{U}$ , der Eigenwerte  $\lambda_q(t)$ , der verallgemeinerten modalen Massen  $a_q(t)$ , sowie der Rechts- und der Linksmodalmatrix  $\boldsymbol{X}^R(t)$  bzw.  $\boldsymbol{X}^L(t)$ . Da sich die Drehzahl während des instationären Meßlaufs stark ändert, ist die daraus resultierende Zeitabhängigkeit der modalen Parameter bei drehzahlvariablen Systemen ebenfalls zu berücksichtigen<sup>11</sup>.

Der Einfluß der modalen Daten ist jedoch den oben erwähnten Gleichungen unmittelbar anzusehen:

- Fehler in den *generalisierten modalen Massen*  $a_q(t)$  und ihren linearisierten Zeitabhängigkeiten gehen in den berechneten Zeitverlauf jeweils linear ein.
- Fehler in den *Eigenwerten*  $\lambda_q(t)$  und ihren linearisierten Zeitabhängigkeiten gehen ebenfalls linear in den berechneten Zeitverlauf ein.
- Fehler in der *Linksmodalmatrix*  $\boldsymbol{X}^L(t)$  und ihrer linearisierten Zeitabhängigkeit gehen auch linear in den Zeitverlauf ein.
- Fehler in der *Rechtsmodalmatrix*  $\boldsymbol{X}^R(t)$  und ihrer linearisierten Zeitabhängigkeit gehen nur an der Meßstelle in den Zeitverlauf ein, dort ebenfalls linear.

<sup>9</sup> Es gibt also keinen Satz korrekter Parameter oder Unwuchten.

<sup>10</sup> SEIDLER, *Instationäres Auswuchten elastischer Rotoren* ([60], 2002)

<sup>11</sup> Diese wurden in Kapitel 3.1.1 linear in der Drehzahl genähert.

Diese Abhängigkeiten gelten jedoch nur für die Anfangswerte und sie ermöglichen eine Schätzung, wie stark das Ergebnis des ersten Identifikationsschritts vom Meßergebnis entfernt liegen wird. Da im Algorithmus jedoch alle modalen Parameter und ihre Drehzahlvariabilität kaskadierend angepaßt und korrigiert werden, werden die Ungenauigkeiten in den Startwerten und damit die Einflüsse der fehlerhaften Anfangswerte verringert.

Durch die Näherung der modalen Parameter als linear mit der Drehzahl Veränderliche und die Vernachlässigung von nicht durchfahrenen Moden, sind dem Verfahren systematische Fehler immanent. Eine überschlägige graphische Abschätzung dieser Fehler wurde schon anhand von Bild 3.2 getroffen. Formalistisch ist eine solche Abschätzung jedoch nur dann möglich, wenn das spezielle zu betrachtende Rotorsystem als analytisches modales Modell vorliegt.

---

## Kapitel 4

# Praktische Erprobung des Auswuchtverfahrens

In diesem Kapitel wird das in Kapitel 3 dargestellte Verfahren an mehreren Rotorsystemen auf seine Funktionsweise getestet.

Das zuerst betrachtete Rotorsystem, ein Einscheibenrotor mit ausgeprägten gyroskopischen Effekten, ist vergleichsweise akademisch, weist jedoch schon eine starke Drehzahlabhängigkeit der Modaldaten auf. An diesem Rotorsystem werden zunächst per numerischer Simulation synthetische „Meßdaten“ generiert, mit denen prinzipielle Funktionsfähigkeit des Unwuchidentifikationsalgorithmus<sup>1</sup> gezeigt wird. Anschließend werden an einem entsprechenden Rotorprüfstand für zwei unterschiedliche Konfigurationen Hochläufe gemessen und als Tests für die instationäre Unwuchidentifikation herangezogen.

Zwei weitere Rotorsysteme werden als Referenzen verwendet, da sie am Fachgebiet u. a. in zahlreichen Praktikums- und Vorlesungsversuchen eingesetzt wurden und daher ihre Eigenschaften und ihr Verhalten genau bekannt sind: Ein starrer Rotor in horizontal nachgiebigen Lagern und ein flexibler Zweischeibenrotor, welcher auch bei der Unwuchidentifikation in der Arbeit von SEIDLER<sup>1</sup> eingesetzt wurde. Beide Rotorsysteme weisen keine erkennbaren Drehzahlabhängigkeiten in den Modaldaten auf, sodaß sie gut geeignet sind, die Funktionalität des neuen Algorithmus<sup>1</sup> für den Sonderfall von drehzahl- und damit zeitunabhängigen Rotoren zu überprüfen.

In einem vierten Beispiel wird das Verfahren an einem flexiblen Mehrfreiheitsgrad-Rotor in aktiven Magnetlagern (AMBs) erprobt, der von ZHANG<sup>2</sup> konstruiert und ebenfalls ausgiebig untersucht wurde. Dabei werden die modalen Daten des Rotors in ihrer Drehzahl- und darausfolgenden Zeitabhängigkeit über die Lagereigenschaften eingestellt und vollständig bekannt. Die erste Gleichlaufeigenfrequenz ändert sich im durchfahrenen Drehzahlbereich um 5 %, die zweite um 62 %. Die modalen Dämpfungen und Eigenformen bleiben nahezu unverändert.

Abschließend wird der neue Auswuchtalgorithmus an einem Abgasturbolader mit Schwimmbuchsenlagern getestet – ein Beispiel für höchste Anforderungen an Auswuchtverfahren<sup>3</sup>.

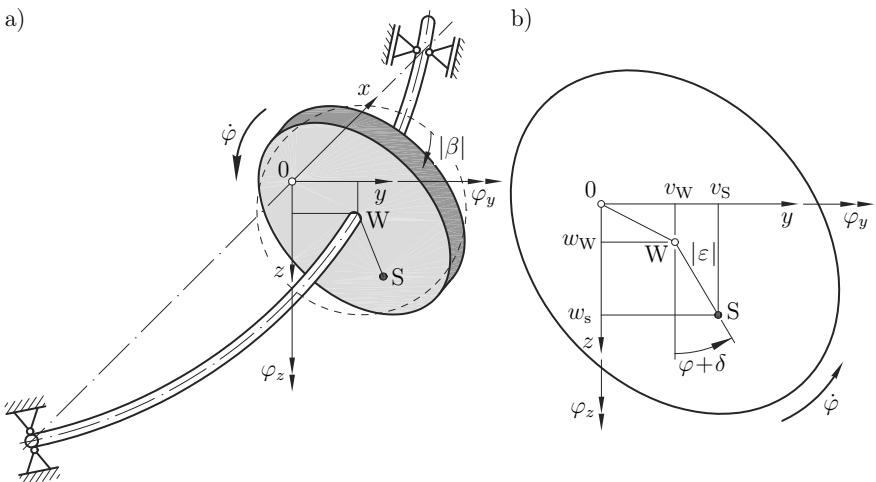
<sup>1</sup> SEIDLER, *Instationäres Auswuchten elastischer Rotoren* ([60], 2002)

<sup>2</sup> ZHANG, *Aktive Regel- und Kompensationsstrategien für magnetgelagerte [...]* ([71], 2002)

<sup>3</sup> KRESCHEL, *Instationäres Verhalten von Abgasturboladern* ([30], 2010)

## 4.1 LAVAL-Rotor mit Gyroskopie

Der Einscheibenrotor mit Kreiselwirkung soll als erstes Demonstrationsobjekt für den Algorithmus aus Kapitel 3 dienen. Die Herleitung des rotordynamischen Verhaltens eines solchen Rotors ist in Lehrbüchern beschrieben, z.B. bei GASCH<sup>4</sup>, und wird deshalb nur kurz wiedergegeben. In Bild 4.1 a) ist das mechanische Ersatzmodell eines solchen Einscheibenrotors mit ausgeprägter Gyroskopie dargestellt.



**Bild 4.1:** Mechanisches Modell eines LAVAL-Rotors mit Gyroskopie:

- a) Räumliche Darstellung mit dem festen Koordinatensystem,
- b) Kinematik in der  $yz$ -Ebene

### 4.1.1 Systembeschreibung und Modellierung

Der klassische LAVAL-Rotor besitzt einen (komplexen) Freiheitsgrad  $r = w + iv$ , der die Scheibenauslenkungen in  $z$ - und  $y$ -Richtung beschreibt<sup>5</sup>. Wenn man nun zusätzlich die Verkipplungen um die beiden Querachsen berücksichtigt, treten (abgesehen von mittiger Scheibe) Kopplungen zwischen den Verkipplungen und Absenkungen der Scheibe auf. Drehungen um die Querachsen führen zu Kreiselmomenten. Diese sind abhängig von den Rotationsgeschwindigkeiten um die einzelnen Achsen  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\varphi}_y$  und  $\dot{\varphi}_z$  sowie dem Trägheitstensor  $\Theta^S$  des Körpers<sup>6</sup>. Zur mathematischen Beschreibung dieser Kreiseleffekte werden Drehfreiheitsgrade gemäß Bild 4.1 a) und b) eingeführt.

<sup>4</sup> GASCH; NORDMANN; PFÜTZNER, *Rotordynamik* ([17], 2006, S. 159–190)

<sup>5</sup> MARKERT, *Rotordynamik – Skript zur Vorlesung* ([42], 2011, S. 112f.)

<sup>6</sup> GASCH; NORDMANN; PFÜTZNER, *Rotordynamik* ([17], 2006, S. 164f.)

Die beiden mit einer Bezugslänge  $l_b$  multiplizierten Verkippungen der Scheibe werden analog zu den komplexen translatorischen Verschiebungen  $r = w + iv$  beim LAVAL-Rotor zu einer komplexen Verkippung  $\phi = \varphi_z + i\varphi_y$  summiert und in dem komplexen Zustandsvektor

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} r \\ \phi l_b / i \end{bmatrix}_{W,S} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} r_{W,S} &= w_{W,S} + i v_{W,S} \\ \phi_{W,S} &= \varphi_{zW,S} + i \varphi_{yW,S} \end{aligned} \quad (4.1)$$

zusammengefaßt (vgl. GASCH, NORDMANN, PFÜTZNER<sup>7</sup>). Dabei bilden die komplexen Koordinaten  $r$  und  $\phi$  den Vektor der physikalischen Zustandsgrößen. Die translatorische Verschiebung  $r$  kann im Wellendurchstoßpunkt W oder im Schwerpunkt S angegeben werden. Ein (formaler) Vorteil dieser Definition des Zustandsvektors mit der Bezugslänge  $l_b$  ist, daß nun beide Einträge dieselbe Einheit besitzen und daher in einen Vektor geschrieben werden dürfen. Als Bezugslänge wird willkürlich die halbe Rotorlänge  $l_b = l/2$  gewählt.

Den flexiblen Rotor mit ausgeprägter Kreiselwirkung können zwei Imperfektionen zu Schwingungen anregen: Zum einen ist dies die (i. a. komplexe) Exzentrizität der Scheibe  $\varepsilon$  und zum anderen der (i. a. ebenfalls komplexe) Aufkeilwinkel  $\beta$  der Scheibe (auch beschreibbar über ein Unwuchtpaar)<sup>8</sup>. Diese ergeben sich aus Bild 4.1 zu

$$\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\delta} \quad \text{und} \quad \beta = |\beta| e^{i\gamma}, \quad (4.2)$$

wobei  $\delta$  und  $\gamma$  die jeweiligen Nullphasenwinkel bezüglich der positiven  $z$ -Achse darstellen. Die Verschiebungen und Verdrehungen in  $z$ - und  $y$ -Richtung von Schwerpunkt und Wellendurchstoßpunkt sind nun durch die Zusammenhänge

$$r_S = r_W + |\varepsilon| e^{i(\varphi+\delta)} \quad \text{und} \quad \phi_S = \phi_W + |\beta| e^{i(\varphi+\gamma)} \quad (4.3)$$

gegeben.

Durch zeitliche Ableitung des Impulses und des Dralls der Scheibe erhält man die Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , die drehzahlabhängige gyroskopische Matrix  $\mathbf{G}(\dot{\phi})$  und die drehbeschleunigungsabhängige zirkulatorische Matrix  $\mathbf{N}(\ddot{\phi})$ . Auf die Scheibe wirken die Rückstellkräfte und -momente der Welle sowie die Dämpfungskräfte und -momente. Kräfte- und Momentensatz der Scheibe ergeben eine homogene Bewegungsgleichung, in der die Schwerpunkts- und die Wellendurchstoßpunktkoordinaten enthalten sind.

Mit der Kinematik aus Gl. (4.3) kann eine dieser Koordinaten eliminiert werden. Daraus folgt ein Störterm auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung, welcher die sogenannte *statische* Unwucht  $U_\varepsilon = m\varepsilon$  und die *kinetische* Unwucht  $U_\beta = (\Theta_a - \Theta_p)\beta/l_b$  enthält. Beide Unwuchten gemeinsam werden auch *dynamische* Unwucht oder *Unwuchtdyname* genannt<sup>9</sup>. Diese Unwuchtdyname kann auch als zwei Einzelunwuchten

<sup>7</sup> GASCH; NORDMANN; PFÜTZNER, *Rotordynamik* ([17], 2006, S. 167)

<sup>8</sup> GASCH; PFÜTZNER, *Rotordynamik – Eine Einführung* ([18], 1975, S. 98)

<sup>9</sup> FEDERN, *Auswuchttechnik* ([12], 1977, S. 60f.)

in zwei unterschiedlichen Ebenen der starren Scheibe aufgefaßt werden. Zur Identifikation der Unwuchten im Computerprogramm ist es zudem hilfreich, wenn die zu identifizierenden Parameter in derselben Größenordnung liegen. Dies ist der eigentliche Grund für die oben erwähnte Bezugslänge  $l_b$ .

Mit der Vernachlässigung des zirkulatorischen Anteils der Drallableitung, der bei Drehbeschleunigungen in realen Rotorsystemen gegenüber dem gyroskopischen Anteil sehr klein ist<sup>10</sup>, läßt sich das Modell des Rotors in die Form der allgemeinen Bewegungsgleichung (2.1) für schwingungsfähige linear(isierbar)e Systeme bringen. Diese lautet dann

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_a/l_b^2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b_\varphi - i\dot{\varphi}\Theta_p/l_b^2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12}/l_b \\ k_{12}/l_b^2 & k_{22}/l_b^2 \end{bmatrix} \mathbf{q} = - \begin{bmatrix} U_\varepsilon \\ U_\beta \end{bmatrix} (e^{i\varphi})^{\bullet\bullet}. \quad (4.4)$$

### Numerischer Rotor

Zunächst wird ein numerisches Rotormodell betrachtet, das qualitativ dem in Bild 4.1 dargestellten Einscheibenrotor entspricht. Die genauen konstruktiven Daten können der Tabelle 4.1 entnommen werden<sup>11</sup>.

**Tabelle 4.1:** Rotordaten für den Einscheibenrotor mit Gyroskopie

Größe	Wert	Einheit
Abstand Lager – Scheibe $l_1$	120	mm
Gesamtlänge $l$	615	mm
E-Modul der Nirowelle $E_{St}$	$2.1 \cdot 10^5$	N mm <sup>2</sup>
Masse der Scheibe $m$		kg
Konfiguration <i>kurz</i>	2.55	
Konfiguration <i>lang</i>	2.18	
Polares MTM $\Theta_p$		kg m <sup>2</sup>
Konfiguration <i>kurz</i>	$1.07 \cdot 10^{-2}$	
Konfiguration <i>lang</i>	$2.05 \cdot 10^{-3}$	
Axiales MTM $\Theta_a$		kg m <sup>2</sup>
Konfiguration <i>kurz</i>	$6.56 \cdot 10^{-3}$	
Konfiguration <i>lang</i>	$7.51 \cdot 10^{-3}$	

Für den theoretischen Test anhand numerisch generierter, also *synthetischer*, Messsignale wird dabei nur die Konfiguration *kurz* verwendet. Dies hat aufgrund der dünnen kurzen Scheibenform ein für Rotoren mit Gyroskopie charakteristisches Verhältnis

<sup>10</sup> LAUZI, *Theoretische Untersuchungen an Rotoren mit Kreiselwirkung* ([33], 2012)

<sup>11</sup> Achtung: Diese Daten gelten auch für die auf den folgenden Seiten aufgeführten Rotorprüfstände.

zwischen dem polaren und dem axialen Massenträgheitsmoment  $\Theta_p/\Theta_a > 1$  zur Folge. Daraus ergibt sich das Phänomen, daß die zweite Gleichlaufeigenfrequenz mit der Drehzahl so stark ansteigt, daß die Drehzahl des Rotors diese zweite Gleichlaufeigenfrequenz niemals erreichen kann. Die zweite Gleichlaufmode gerät also niemals in unwuchtinduzierte Resonanz<sup>12</sup>. Die erste Gleichlaufresonanz wird maßgeblich durch die statische Unwucht  $U_\epsilon$  erregt.

### Rotorprüfstand mit ausgeprägter Kreiselwirkung

Ein entsprechendes Versuchsmode ist in den Bildern 4.2 a) und b) in seinen verschiedenen Konfigurationen dargestellt. Der Versuchsrotor wurde von WEGENER in seiner Diplomarbeit entwickelt und hergestellt<sup>13</sup>. Kern des Versuchsrotors ist eine elastische Welle mit 8 mm Durchmesser und einer Länge von etwa 615 mm. In der Abbildung ist gut zu erkennen, daß die Trägheitskonfiguration dabei ohne vollständige Demontage des Rotors von *kurz* nach *lang* umgeschaltet werden kann. Dies erfolgt durch Festsetzen der Scheibe (e) am raumfesten Fanglager und Anflanschen der äußeren Zusatzmassen (c und g) am Rotor. Dabei wird die Scheibe (e) zu einem nichtrotierenden Teil, während die äußeren Zusatzmassen nun zu mitrotierenden Teilen werden. Durch diese Maßnahmen ergeben sich die in Tabelle 4.1 aufgeführten Massenträgheiten, die auch dem Simulationsmodell zugrunde liegen.

Die Meßflächen (d und f) des Rotors sind für Wirbelstromsensoren des Typs TELEMESS I-W-A A26 ausgestaltet. Der longitudinale Abstand der Meßfleckzentren dieser Sensoren liegt bei  $b = 100$  mm. Mit diesem Abstand, der Annahme kleiner Winkel und der Voraussetzung, daß die gesamte Konstruktion der Umlaufmasse (c–g) in dem während der Hoch- und Ausläufe durchfahrenen Frequenzbereich als Starrkörper anzusehen ist, können mit den Verschiebungen an den Meßflächen die Verdrehungen um die  $y$ - und die  $z$ -Achse

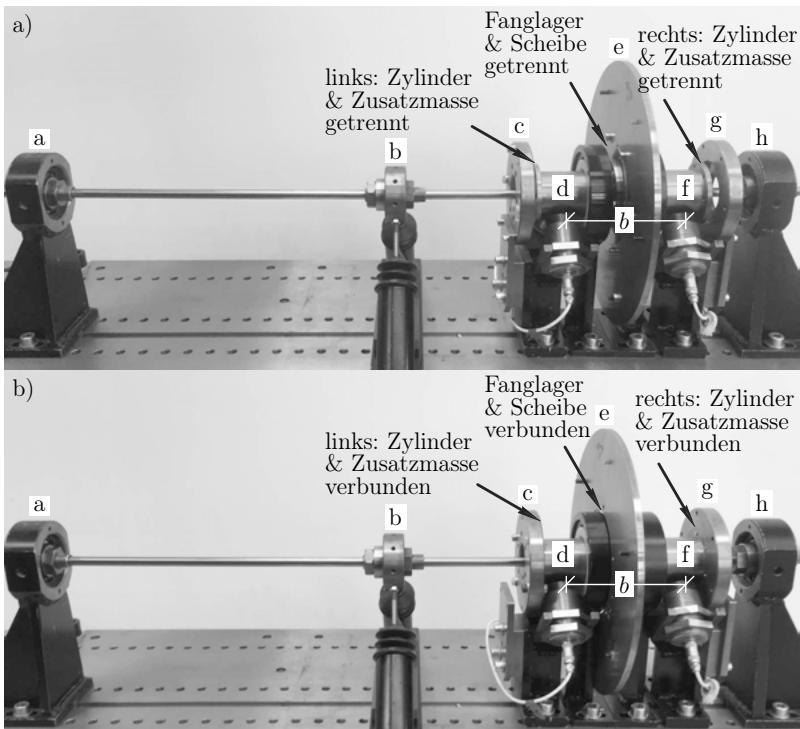
$$\varphi_y = \frac{w_{W1} - w_{Wr}}{b} \quad \text{und} \quad -\varphi_z = \frac{v_{W1} - v_{Wr}}{b} \quad (4.5)$$

berechnet werden.

Der explizite Dämpfer (b) besteht aus zwei im 90°-Winkel zueinander angeordneten Röhren, die mit Öl (CASTROL GP SAE 50) gefüllt sind. Darin befinden sich kreisförmige Plättchen, die über Stößel mit einem auf den Rotor gespannten Kugellager verbunden sind. Dies sorgt für näherungsweise geschwindigkeitsproportionale Dämpfung. Die so umgesetzte äußere Dämpfung hat zwei Aufgaben: Zum einen ist sie überkritisch nötig zur Stabilisierung, da die aufgrund der kraftschlüssigen Verbindungselemente (Spannhülsen) infolge von Mikroschlupf auftretende innere Dämpfung

<sup>12</sup> In dem CAMPBELL-Diagramm in Bild 3.1 a) ist dies gut zu erkennen.

<sup>13</sup> WEGENER, *Untersuchungen zum Kreiseleinfluß auf den [...] Betrieb v. elast. Rotoren* ([69], 1993)



**Bild 4.2:** Einscheibenrotor mit Kreiselwirkung:

- a) in Konfiguration *kurz*,
- b) in Konfiguration *lang*

oberhalb der biegekritischen Drehzahl anfachende Wirkung besitzt<sup>14</sup>; zum anderen begrenzt die Dämpfung die Maximalamplituden in der Resonanz. Dies ist insbesondere hilfreich für die Initialwuchtung des Rotors mit klassischen Verfahren<sup>15</sup>, welche für Vergleichszwecke durchgeführt wurde. Der Rotor ist beidseitig mit handelsüblichen Pendelkugellagern (FAG 1204-TVH) in quasistarren Lagerböcken (a und h) gelagert. Angetrieben wird das Rotorsystem von einem nicht im Bild ersichtlichen bürstenlosen Servomotor, auf dessen freien Wellenende ein Inkrementalgeber für die Messung des Rotordrehwinkels sitzt.

In Bild 4.3 sind die Ergebnisse einer experimentellen Modalanalyse – jeweils im Stillstand – für beide Konfigurationen dargestellt. Die Eigenvektoren sind dabei so normiert, daß der betragsmäßig größte Eintrag auf 1 gesetzt ist. Die modalen Dämpfungswerte sind im Vergleich zu üblichen Stahlkonstruktionen sehr hoch<sup>16</sup>, was an

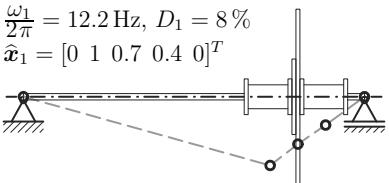
<sup>14</sup> MARKERT, *Rotordynamik – Skript zur Vorlesung* ([42], 2011, S. 133 ff.)

<sup>15</sup> In dieser Arbeit wurde das stationäre Wuchten nach Eigenformen angewendet.

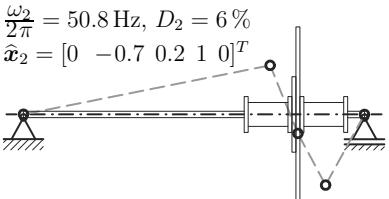
den viskosen Dämpfern liegt.

a) Konfiguration *kurz*

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = 12.2 \text{ Hz}, D_1 = 8 \% \\ \hat{x}_1 = [0 \ 1 \ 0.7 \ 0.4 \ 0]^T$$

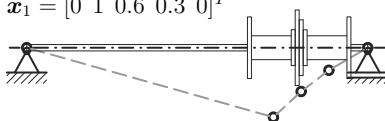


$$\frac{\omega_2}{2\pi} = 50.8 \text{ Hz}, D_2 = 6 \% \\ \hat{x}_2 = [0 \ -0.7 \ 0.2 \ 1 \ 0]^T$$



b) Konfiguration *lang*

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = 13.6 \text{ Hz}, D_1 = 15 \% \\ \hat{x}_1 = [0 \ 1 \ 0.6 \ 0.3 \ 0]^T$$



$$\frac{\omega_2}{2\pi} = 53.0 \text{ Hz}, D_2 = 10 \% \\ \hat{x}_2 = [0 \ -1 \ 0 \ 0.9 \ 0]^T$$



**Bild 4.3:** Rotor mit Kreiselwirkung: Ergebnis der experimentellen Modalanalysen im Stillstand,

a) für Konfiguration *kurz*,

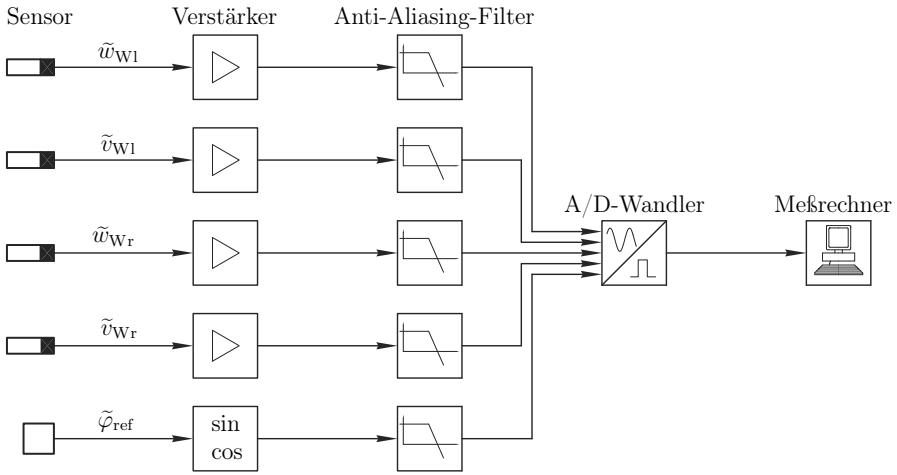
b) für Konfiguration *lang*

#### 4.1.2 Meßkette

Die Meßkette des Prüfstandes mit dem Einscheibenrotor ist in Bild 4.4 zu sehen. Die Verschiebungen links und rechts der Scheibe in  $z$ - und  $y$ -Richtung ( $w_{W1}, v_{W1}$ ,  $w_{Wr}, v_{Wr}$ ) werden mit Wirbelstromaufnehmern des Typs DORNIER I-W-A A26 und den zugehörigen Verstärkern gemessen und auf den Spannungsbereich  $\pm 5 \text{ V}$  transformiert. Anschließend werden die Signale mit analogen Tiefpassfiltern der Eckfrequenz  $f_e = 100 \text{ Hz}$  gefiltert. Der Drehwinkel des Rotors wird mit einem Inkrementalgeber gemessen. Dieser hat gebräuchliche 2048 Inkremente pro Umdrehung und ein Nullsignal. Das Pulssignal enthält also dominant die 2048-fache Drehfrequenz sowie ganzzahlige Vielfache davon. Daraus resultiert ein völlig anderer Frequenzbereich in Vergleich zu den Verschiebungssignalen in  $y$ - und  $z$ -Richtung (im wesentlichen drehfrequente Signale). Die Phasenverschiebung der Winkelinformation durch das Anti-Aliasing-Filter sollte den Phasenverschiebungen der Auslenkungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung entsprechen. Deshalb wird das Inkrementalgebersignal durch eine Auswerteelektronik in ein analoges sin- bzw. cos-Signal gewandelt. Diese Signale enthalten dieselbe Frequenz wie die unwuchterregten Schwingungen und werden somit durch das analoge Anti-Aliasing-Filter (KEMO CardMaster 21.2) um dieselbe Phase verschoben. Eine relativ-

<sup>16</sup> Diese würden bei etwa  $D=1\%$  oder darunter liegen.

ve Phasenverschiebung durch das Tiefpaßfilter wird somit technisch ausgeschlossen. Die Anti-Aliasing-gefilterten Meßdaten werden nun A/D-gewandelt (Abtastfrequenz  $f_s = 2^{13}$  Hz) und im Meßrechner gespeichert<sup>17</sup>.



**Bild 4.4:** Meßkette am Prüfstand für den LAVAL-Rotor mit ausgeprägter Gyroskopie

Die wichtigsten Komponenten zur Meßdatenerfassung sind kompakt in der Tabelle 4.2 aufgelistet.

**Tabelle 4.2:** Komponenten am Versuchsstand des Einscheibenrotors

Komponente	Typ	Eigenschaft
Servomotor (bürstenlos)	ESR POLLMEIER MR 7434.5812-U5-N120	Maximaldrehzahl $12000 \text{ min}^{-1}$ Nennmoment 1.7 Nm
Drehgeber	HENGSTLER RI58-O	2048 Inkremente
Wirbelstromsensoren	DORNIER I-W-A A26 4 Stück	Auflösung 4 $\mu\text{m}$ Meßbereich 10 mm
Tiefpaßfilter	KEMO CardMaster 21.2 8 Kanäle	Butterworth 8. Ordnung Eckfrequenz $f_e = 100 \text{ Hz}$
Echtzeitregelsystem	dSPACE DS1103	Abtastfrequenz $f_s = 2^{13} \text{ Hz}$

<sup>17</sup> Dies ist eine extreme Überabtastung im Vergleich zum NYQUIST-Kriterium. Downsampling der gemessenen Daten erfolgt ggf. im *postprocessing*

### 4.1.3 Aufbereitung der Meßdaten

Beim sogenannten *postprocessing* werden die Meßdaten so aufbereitet, daß sie mittelwertfrei, quasi-harmonisch und drehfrequent sind. Die Meßdaten weisen zunächst einen Gleichanteil auf, der sich aus dem mittleren Sensorabstand zum Rotor, dem Gewichtsdurchhang der Welle, sowie ggf. der plastischen Vorkrümmung des Rotors zusammensetzt. Außerdem enthalten sie statistische Fehler („Mefrauschen“) bis zur Eckfrequenz des Anti-Aliasing-Filters, Netzbrummen, sowie Höherharmonische infolge der Kugellagerung.

#### Beseitigen des stationären Mittelwerts

Der Mittelwert kann auf verschiedene Arten beseitigt werden. Eine Hochpaßfilterung ist der klassische Weg in der Schwingungsmeßtechnik und ist immer mit (mindestens) einer Eckfrequenz  $f_e$  verbunden, unterhalb derer nach der Filterung keine Aussage mehr über das Ursprungssignal getroffen werden kann. Außerdem erfährt das gesamte Signal eine frequenzabhängige Phasenverschiebung, welche die Unwuchtidentifikation negativ beeinflussen kann. Daher wurde hier beim postprocessing die Annahme getrofen, daß der arithmetische Mittelwert eines Schwingsignals hinreichender Länge dem Median entspricht. Da das Beseitigen des stationären Mittelwerts nach der Meßwertaufnahme erfolgen kann, ist die Subtraktion des Medians eine einfache Alternative zum Hochpaßfilter.

#### Runout-Korrektur

Eine Runout-Korrektur verringert den Einfluß imperfekter Meßflächen auf das Meßergebnis. Diese Imperfektionen können scheinbare Oszillationen vortäuschen, obwohl nur eine unebene Meßfläche oder Unregelmäßigkeiten im Gefüge und keine Schwingung die Ursachen sind. Die Runout-Korrektur erfolgt bei möglichst niedriger Rotor-drehzahl. Die dabei aufgenommenen Meßdaten werden als quasi-statischer Zustand angesehen, bei dem die Rotordynamik noch keine Rolle spielt. Die so gemessenen Sensorsignale werden anschließend den Winkeln zugeordnet. Nun ist über den zugeordneten Winkel für jede Zeitstützstelle der Wert des Runouts definiert und kann in den Folgemessungen von den Sensorsignalen abgezogen werden. Der Einfluß imperfekter Meßflächen wird dadurch ausgeglichen.

#### Gleitendes Bandpaßfilter

Ein mit der Drehzahl gleitendes Filter kann erforderlich sein, wenn asynchrone Anteile in den Meßsignalen enthalten sind. Für die Versuche am Einscheibenrotor war es nicht erforderlich, weil die gemessenen Signale bereits hinreichend quasi-harmonisch mit der drehsynchronen Frequenz sind.

#### 4.1.4 Identifikationsergebnisse

Die Resultate der Unwuchtidentifikationen am Einscheibenrotor werden in diesem Kapitel dargestellt. Der zunächst betrachtete Fall ist ein numerischer Rotor der *kurzen* Bauart mit den Konstruktionsparametern, die auch den Prüfstand in der Konfiguration *kurz* beschreiben (Tabelle 4.1).

##### 4.1.4.1 Numerischer Rotor Konfiguration *kurz*

Am numerisch aufgebauten Rotor soll die generelle Funktionsweise des Algorithmus' aus Kapitel 3.1 überprüft werden. Dabei sind die modalen Parameter bekannt. Sie werden linearisiert fest vorgegeben, sodaß die einzigen Unbekannten bei der Unwuchtidentifikation die komplexen Unwuchten sind. Die drehzahlabhängigen Eigenfrequenzen und die gleichermaßen drehzahlabhängigen Bestandteile eines ausgewählten Eigenvektors sind schon in Bild 3.1 dargestellt.

Das Ergebnis einer numerischen Integration der Bewegungsgleichung (4.4) im physikalischen Raum mit dem Koordinatenvektor  $\mathbf{q} = [r_w \phi_w l_b]^T$  [vgl. Gl. (4.1)] wurde dem Identifikationsalgorithmus als Meßdaten zugeführt.

Die vorgegebene und damit zu identifizierende Unwuchtdyname (statische Unwucht  $U_\varepsilon$  und kinetische Unwucht  $U_\beta$ ) ist im Erregervektor

$$\mathbf{f} = - \begin{bmatrix} U_\varepsilon \\ U_\beta \end{bmatrix} (e^{i\varphi})^{\bullet\bullet}.$$

zusammengefaßt und lautet

$$U_\varepsilon = m\varepsilon = 7.65 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \quad \text{und} \quad U_\beta = (\Theta_a - \Theta_p)\beta/l_b = 0 \text{ kg m}.$$

Simulierte wurde ein Hochlauf innerhalb von 2.5 s von 0 bis  $4000 \text{ min}^{-1}$  (Fahrstrahl in Bild 4.5, schwarze dünne Linie). Die Scheibenauslenkung in  $z$ -Richtung, welche Bestandteil der synthetisch generierten „Meßdaten“ ist, ist in Bild 4.5 als schwarze Kurve dargestellt. Beim Hochlauf wird augenscheinlich nur eine Gleichlaufresonanz durchfahren. Daher wird im modalen Modell auch nur diese eine Mode berücksichtigt.

Als Startwerte für die Unwuchtidentifikation werden beide Unwuchten  $U_\varepsilon$  und  $U_\beta$  null gesetzt. Die aus der Rechnung bekannten Parameter für die berücksichtigte Mode, Eigenwert  $\lambda_1(0)$ , Eigenvektor  $\hat{\mathbf{x}}_1(0)$  sowie die verallgemeinerte modale Masse  $a_1(0)$  im Stillstand sowie die zugehörigen linearisierten Änderungsraten mit der Drehzahl werden fest vorgegeben. Aus diesen Startwerten für die Unwuchten und bekannten modalen Parametern ergibt sich zu Beginn der Optimierung zu jeder Zeitstützstelle  $t_c$  das Anfangsresiduum  $\mathbf{R}_{\text{ini}}(t_c)$ . Zur Bildung dieses Residiums gemäß Gleichung (3.2) in jedem Iterationsschritt werden aus den Meßdaten  $\tilde{\mathbf{x}}_r$  bzw. Koordinaten  $\mathbf{x}_r$  im Identifikationsalgorithmus nur die komplexen Absenkungen  $\tilde{r} = \tilde{w}_w + i\tilde{v}_w$

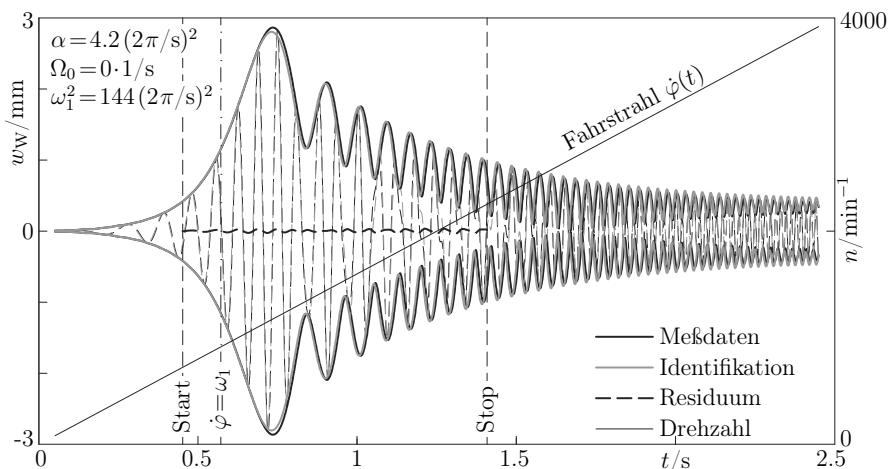
bzw.  $r_W = w_W + i v_W$  der Scheibe verwendet. Die Verkippungen  $\tilde{\phi}_W = -\tilde{\varphi}_{W,z} + i \tilde{\varphi}_{W,y}$  bzw.  $\phi_W = -\varphi_{W,z} + i \varphi_{W,y}$  werden zunächst nicht zur Identifikation herangezogen.

Zur Identifikation wird nur der Resonanzbereich gewählt. Dies erfolgt grob, indem die Lage des Resonanzbereiches großzüig angegeben wird. Das für die Identifikation herangezogene Intervall ist durch die gestrichelten vertikalen Linien in Bild 4.5 abgegrenzt.

Der Löser für das nichtlineare Optimierungsproblem aus Gleichung (3.3) bricht nach  $J$  Iterationsschritten ab<sup>18</sup>, sobald die Änderung der quadratischen Residuennorm zwischen zwei Iterationsschritten

$$\sum_{c=1}^C |\mathbf{x}_r(t_c) - \tilde{\mathbf{x}}_r(t_c)|_J^2 - \sum_{c=1}^C |\mathbf{x}_r(t_c) - \tilde{\mathbf{x}}_r(t_c)|_{J-1}^2 \leq 10^{-12} \text{ mm}^2 \quad (4.6)$$

hinreichend klein wird, in diesem Fall kleiner als  $10^{-12} \text{ mm}^2$ . Die dann noch verbleibenden Abweichungen  $\mathbf{x}_r - \tilde{\mathbf{x}}_r$  an den Zeitstützstellen  $t_c$  sind in Bild 4.5 gestrichelt schwarz dargestellt. Zu Beginn der Optimierung sind diese Residuen maximal, Residuen nahe null sind optimal. Eine Verschärfung des Abbruchkriteriums für die Residuennorm aus Gl. (4.6) führt meist zu keiner weiteren Verringerung der Residuen. Bei den getroffenen Modellvereinfachungen<sup>19</sup> ist keine bessere Modellanpassung erzielbar. Die nach



**Bild 4.5:** Rotorausbiegung  $w_W(t)$  des numerischen Rotors mit Gyroskopie (kurz) während eines Hochlaufs: exakt (schwarz) und Resultat des LTV-Identifikationsalgorithmus' (grau) aus synthetisch generierten Messsignalen nach dem letzten Iterationsschritt

<sup>18</sup> In dem in Bild 4.5 dargestellten Fall ist die Anzahl der Iterationsschritte  $J \approx 220$

<sup>19</sup> Lineare Näherung der Modaldaten in der Drehzahl, Vernachlässigung der Zeitableitung der Rechts-Modalmatrix und Modellbildung ohne die zweite vorwärtslaufende Mode (und alle rückwärtslaufenden), da offenbar nur eine Resonanz durchfahren wird

dem  $J$ -ten Anpassungsschritt als Bestandteil des Anpassungskriteriums berechnete Auslenkung in  $z$ -Richtung  $w_{W,\text{end}}(t_c)$  ist in Bild 4.5 grau dargestellt.

Die sich aus der Identifikation ergebenden Unwuchten sind in Tabelle 4.3 numerisch und in Bild 4.6 grafisch den tatsächlichen Unwuchten gegenübergestellt. Zudem sind die verwendeten Unwuchtstartwerte vermerkt. Das Ergebnis für die kinetische Unwucht  $U_\beta$  ist in der Tabelle nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Korrekterweise wurde der Startwert 0 nicht durch den Algorithmus verändert. Die kinetische Unwucht hat beim Einscheibenrotor nur einen sehr geringen Einfluss auf die erste Resonanz. Im Bild ist daher nur das Ergebnis für die statische Unwucht  $U_\varepsilon$  dargestellt.

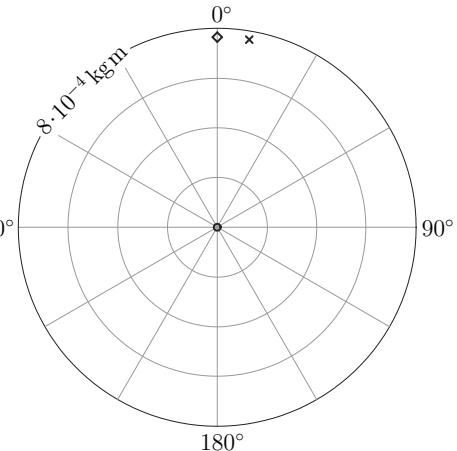
**Tabelle 4.3:** Identifikationsergebnis am numerischen Rotor mit Gyroskopie

	$ U_\varepsilon $	$\delta$	$ U_\beta $	$\gamma$
Startwerte	0 kg m	0°	0 kg m	0°
Identifiziert	$7.49 \cdot 10^{-4}$ kg m	9.9°	$\sim 0$ kg m	$\sim 0$ °
Ziel	$7.65 \cdot 10^{-4}$ kg m	0°	0 kg m	0°

Bei der grafischen Darstellung in Bild 4.6 ist als schwarze Rauten die Zielunwucht  $U_{\varepsilon,\text{soll}}$  und als schwarzes Kreuz die identifizierte Unwucht  $U_{\varepsilon,\text{LTV}}$  dargestellt. Der schwarze Kreis im Koordinatenursprung markiert den Startwert. Die gewählten Anfangswerte für die Unwuchten  $U_\varepsilon = U_\beta = 0$  sind für die Identifikation die ungünstigste Konfiguration. Nichtsdestotrotz ist das Wuchtergebnis sehr gut. Der Rechenzeitbedarf liegt für diese Identifikation bei etwa 105 s auf einem INTEL Core i7 mit 3.4 GHz. Davon entfallen mehr als 95 % auf das Laden der Pseudo-Mesddaten  $\tilde{x}(t)$ .

Am Beispiel eines numerisch modellierten Einscheibenrotors mit

Kreiselwirkung konnte somit die generelle Funktionsfähigkeit des neuen Algorithmus zur modellgestützten Unwuchtdentifikation auf modaler Basis nachgewiesen werden. Die Robustheit der Ergebnisse gegenüber der Vernachlässigung der Zeitableitung der Rechtsmodalmatrix sowie gegenüber der Näherung der modalen Parameter durch



**Bild 4.6:** Polardiagramm der Unwucht des numerischen Einscheibenrotors (*kurz*):

- ◊ Tatsächliche Unwucht  $U_{\varepsilon,\text{soll}}$
- × Identifizierte Unwucht (LTV)  $U_{\varepsilon,\text{LTV}}$
- Ausgangswert der Identifikation  $U_{\varepsilon,\text{ini}}$

lineare Drehzahlfunktionen ist das Merkmal des Verfahrens. Nun ist die Funktionsfähigkeit am Experiment und mit unbekannten modalen Parametern nachzuweisen.

#### 4.1.4.2 Experimenteller Einscheibenrotor Konfiguration *kurz*

Das gleiche Rotorsystem, das im Abschnitt 4.1.4.1 numerisch analysiert wurde, wird in diesem Abschnitt experimentell mit dem Unwuchtidentifikationsalgorithmus untersucht. Die „Meßdaten“ sind nun exakte experimentelle Daten.

Auch hier sind wieder die genannten systematischen Fehler zu nennen, weshalb unabhängig von der Güte der Meßdaten keine vollständige Übereinstimmung der simulierten und der gemessenen Verschiebungen zu erwarten ist. Diese sind die lineare Approximation der modalen Parameter in der Drehzahl, die Vernachlässigung der Zeitableitung der Rechts-Modalmatrix  $\frac{\partial \mathbf{X}^R}{dt}$  sowie die Vernachlässigung der zweiten vorwärtslaufenden und aller rückwärtslaufenden Moden.

Die Lage der ersten Gleichlaufeigenfrequenz im Stillstand geht aus der experimentellen Modalanalyse hervor (vgl. Bild 4.4) und ist bei  $f_1 = 12.2\text{ Hz}$ .

Die am Rotor angebrachte Unwuchtdyname, welche identifiziert werden soll, liegt bei  $U_\varepsilon = 3.9 \cdot 10^{-4} e^{i\pi/6}\text{ kg m}$  und  $U_\beta = 0\text{ kg m}$ .

Die Auslenkungen des Wellendurchstoßpunkts in  $z$ -Richtung werden bei einem schnellen Hochlauf von 75 auf  $2000\text{ min}^{-1}$  in 0.9 s gemessen. Sie sind in Bild 4.7 in schwarz dargestellt. Die leicht wellige Hüllkurve entsteht, weil die Aufnehmer in  $z$ - und  $y$ -Richtung nicht exakt  $90^\circ$  einschließen. Der Drehzahlverlauf  $n$  ist die dünne schwarze Kurve.

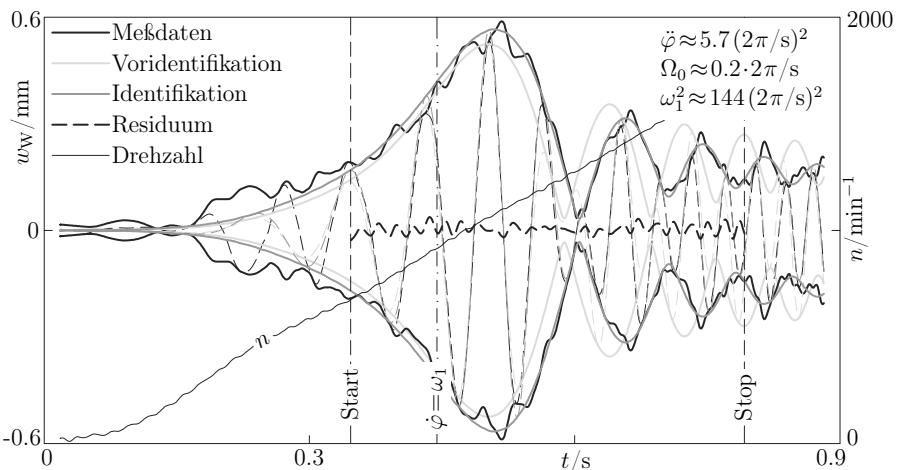
Zur Unwuchtidentifikation wird nun das in Kapitel 3.1 vorgestellte kaskadierende Verfahren zur Vermeidung lokaler Minima verwendet. Als Startwerte für die Identifikation werden für beide Unwuchten  $U_\varepsilon$  und  $U_\beta$  Nullen angesetzt, da kein Vorwissen vorausgesetzt werden soll. Als Startwert für die erste Gleichlaufeigenfrequenz wird  $f_{1,\text{ini}} = 15\text{ Hz}$  gewählt.

Als Unter- und Obergrenzen für die Gleichlaufeigenfrequenz  $f_1$  der berücksichtigten ersten Mode werden wie beim numerischen Einscheibenrotor 10 bzw. 20 Hz angesetzt. Für die Dämpfung werden die physikalisch sinnvollen Grenzen von  $0 \leq D_1 \leq 0.2$  gewählt.

Das letzte Resultat der numerischen Integration für  $z_W$  vor Abschluß der linear-zeitinvarianten Voridentifikation ist in Bild 4.7 hellgrau dargestellt. Dies stellt die theoretische Schwingungsantwort für ein LTI-Rotorsystem während eines Hochlaufs mit dem gemessenen Drehzahlverlauf dar, bei dem alle Parameter so angepaßt werden, daß es die Schwingungsantwort eines in Wirklichkeit LTV-Systems optimal abbilden kann. Die so ermittelten Werte werden nun a priori als Startwerte im Algorithmus

verwendet, bei dem das Rotorsystem als linear-zeitvariant modelliert ist. Das beste (letzte) Resultat der numerischen Integration dieses Systems ist als graue Linie in Bild 4.7 zu sehen. Es ist erkennbar, daß schon beim LTI-System die Verschiebung der Scheibe in  $z$ -Richtung (insbesondere in der Resonanz) die richtige Größenordnung hat. Die Messung wird allerdings durch das LTV-System praktisch ideal abgebildet. Die nach dem  $J_{\text{LTV}}$ -ten Iterationsschritt der Anpassung des LTV-Systems verbleibenden Residuen sind gestrichelt schwarz dargestellt<sup>20</sup>. Auch hier wird zur Formulierung des Anpassungskriteriums nur der Bereich zwischen den vertikalen gestrichelten Linien herangezogen.

Die sich aus der kaskadierenden Identifikation ergebenden Unwuchten sind in Tabelle 4.4 numerisch und in Bild 4.8 grafisch der tatsächlich angebrachten Unwuchtdyname gegenübergestellt. Zudem sind die verwendeten Startwerte vermerkt. Es ist erkennbar, daß die Voridentifikation die Phasenlage der Unwucht schon deutlich eingrenzt. Die Amplitude wird jedoch erst bei der Anpassung des linear-zeitvarianten Rotor-systems passend getroffen. Das Ergebnis für die kinetische Unwucht  $U_\beta$  ist nur der Vollständigkeit halber und nur in der Tabelle aufgeführt. Korrekterweise wurde der Startwert 0 weder bei der LTI-Voridentifikation noch durch den LTV-Algorithmus verändert. Die kinetische Unwucht hat hier nur einen sehr geringen Einfluß auf die



**Bild 4.7:** Scheibenauslenkungen  $w_W(t)$  des Einscheibenrotors (*kurz*) während eines schnellen Hochlaufs:

Messsignal (schwarz), Resultat des LTI-Identifikationsalgorithmus' (hellgrau) und Resultat des LTV-Identifikationsalgorithmus' (grau) nach dem letzten Iterationsschritt

<sup>20</sup> Für den in Bild 4.7 dargestellten Fall ist  $J_{\text{LTI}} = 1500$ , was die Grenze für den Abbruch der LTI-Optimierung darstellt, und  $J_{\text{LTV}} \approx 4500$ .

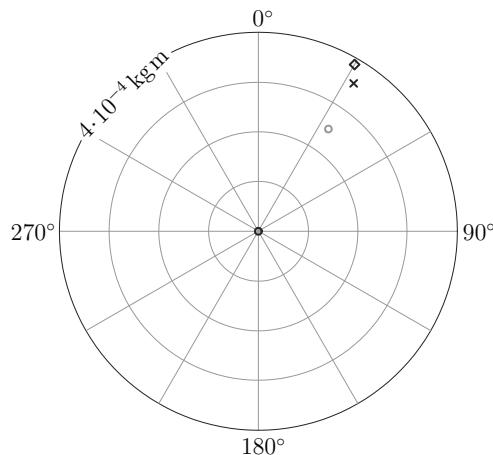
erste Gleichlaufresonanz.

**Tabelle 4.4:** Ergebnis der Unwuchtdentifikation am Einscheibenrotor *kurz*

	$U_\varepsilon$	$U_\beta$
Anfangswerte Voridentifikation	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$
Ergebnis Voridentifikation	$2.5 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 34.4^\circ$	$\sim 0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$
Anfangswerte Identifikation	$2.5 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 34.4^\circ$	$\sim 0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$
Ergebnis Identifikation	$3.5 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 32.8^\circ$	$\sim 0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$
Zielwerte	$3.9 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 30^\circ$	$\sim 0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$

Bei der grafischen Darstellung in Bild 4.8 ist als schwarze Raute die Zielunwucht  $U_{\varepsilon,\text{soll}}$ , als grauer Kreis ist das Ergebnis  $U_{\varepsilon,\text{LTI}}$  der LTI-Identifikation und als schwarzes Kreuz das Endergebnis  $U_{\varepsilon,\text{LTV}}$  der LTV-Identifikation Unwucht dargestellt. Der schwarze Kreis im Koordinatenursprung markiert – wie beim numerischen Rotor – den Startwert  $U_{\varepsilon,\text{ini}}$  der Unwuchtdentifikation. Die hier gewählten Anfangswerte für die Unwuchten sind mit  $U_\varepsilon = U_\beta = 0$  die ungünstigste Konfiguration. Dennoch ist das endgültige Wuchtergebnis hervorragend. Der Rechenzeitbedarf liegt für diese Identifikation bei etwa 170 s auf einem INTEL Core i7 mit 3.4 GHz. Davon entfallen allerdings mehr als 150 s auf das Laden und Verarbeiten der Meßdaten  $\tilde{x}(t)$ .

Am ersten realen Rotor, dem Einscheibenrotor mit Kreiselwirkung in seiner *kurzen* Konfiguration, konnte somit die gute Funktionsfähigkeit des Algorithmus' zur modellgestützten Unwuchtdentifikation auf modaler Basis anhand echter Meßdaten nachgewiesen werden. Die Robustheit gegenüber Vernachlässigung der Zeitableitung der



**Bild 4.8:** Polardiagramm der Unwucht am Rotor mit Gyroskopie (*kurz*):

- ◊ Tatsächliche Unwucht  $U_{\varepsilon,\text{soll}}$
- Identifizierte Unwucht (LTI)  $U_{\varepsilon,\text{LTI}}$
- × Identifizierte Unwucht (LTV)  $U_{\varepsilon,\text{LTV}}$
- Ausgangswert der Identifikation  $U_{\varepsilon,\text{ini}}$

Rechtsmodalmatrix im Modell und gegenüber der Vereinfachung der Abhängigkeit der modalen Parameter als lineare Funktionen der Drehzahl ist auch hier nachgewiesen.

#### 4.1.4.3 Experimenteller Einscheibenrotor Konfiguration *lang*

Der Rotor, an dem der Identifikationsalgorithmus für die *kurze* Konfiguration erprobt wurde, wird in diesem Abschnitt auf die *lange* Konfiguration umgestellt. Die während eines schnellen Hochlaufes gewonnenen Meßdaten werden zur Unwuchtidentifikation herangezogen.

Erneut sind hier die systematischen Fehler zu nennen: Die lineare Approximation der modalen Parameter in der Drehzahl, die Vernachlässigung der Zeitableitung der Rechts-Modalmatrix  $\frac{\partial \mathbf{X}^R}{dt}$  sowie die Vernachlässigung der rückwärtslaufenden Moden. Die zweite vorwärtslaufende Mode ist jedoch mitzumodellieren, da zwei Resonanzen während des Hochlaufes durchfahren werden.

Die genauen Werte beider Gleichlaufeigenfrequenzen im Stillstand gehen aus der experimentellen Modalanalyse hervor (vgl. Bild 4.4) und liegen bei  $f_1 = 13.6\text{ Hz}$  bzw.  $f_2 = 53.0\text{ Hz}$ .

Die am Rotor angebrachte Unwuchtdyname, welche identifiziert werden soll, wird nun nicht in eine statische und eine kinetische Unwucht aufgeteilt, sondern in eine Unwucht an der linken und eine Unwucht an der rechten Zusatzmasse  $U_l$  und  $U_r$  [siehe Foto 4.2 b)]. Diese angebrachten Unwuchten liegen bei  $U_l = 1.4 \cdot 10^{-4} e^{i7\pi/6}\text{ kg m}$  und  $U_r = 3.2 \cdot 10^{-5} e^{i\pi/6}\text{ kg m}$ .

Die Auslenkungen des Wellendurchstoßpunkts in  $z$ -Richtung bei einem schnellen Hochlauf von 75 auf  $4000\text{ min}^{-1}$  in  $1.8\text{ s}$  gemessen. Sie sind in Bild 4.9 in schwarz dargestellt. Die leicht wellige Hüllkurve entsteht, weil die Aufnehmer in  $z$ - und  $y$ -Richtung nicht exakt  $90^\circ$  einschließen. Es ist gut zu erkennen, daß der angebrachte zu identifizierende Unwuchtsatz beide Resonanzen anregt. Das Identifikationsverfahren muß also mehrere angeregte drehzahlveränderliche Moden simultan identifizieren. Der Drehzahlverlauf  $n$  wird durch die dünne schwarze Kurve dargestellt.

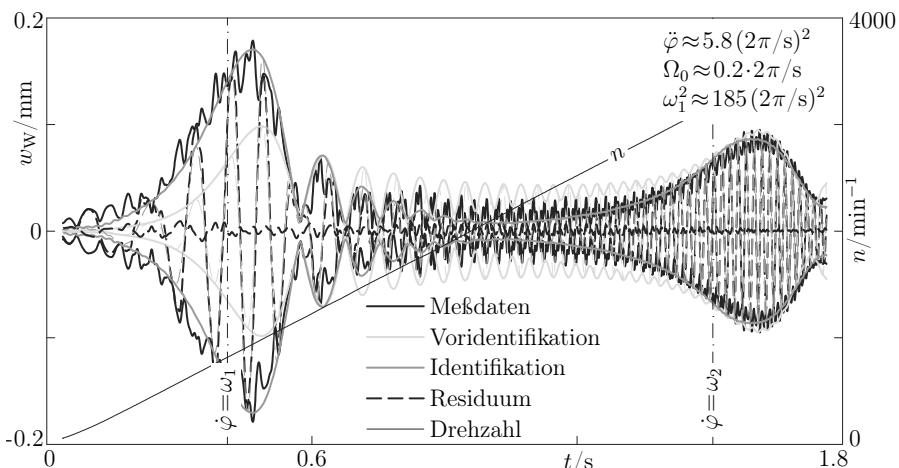
Zur Unwuchtidentifikation wird wieder das kaskadierende Verfahren zur Vermeidung lokaler Minima eingesetzt. Als Startwerte für die Identifikation werden für beide Unwuchten  $U_\varepsilon$  und  $U_\beta$  Nullen angesetzt, um kein Vorwissen vorauszusetzen. Als Startwerte für die beiden durchfahrenen Gleichlaufeigenfrequenzen werden  $f_{1,\text{ini}} = 15\text{ Hz}$  und  $f_{2,\text{ini}} = 70\text{ Hz}$  gewählt.

Für die erste Eigenfrequenz  $f_1$  werden die Unter- und Obergrenzen bei 10 bzw. 20 Hz gesetzt. Die Grenzen für die zweite Eigenfrequenz  $f_2$  liegen bei 40 und 300 Hz<sup>21</sup>.

<sup>21</sup> Die Obergrenze für  $f_2$  wird so hoch angesetzt, um die Angabe einer falschen Obergrenze zu vermeiden. Die zweite Eigenfrequenz ist bei Einscheibenrotoren mit Kreiselwirkung potentiell extrem drehzahlabhängig.

Für die Dämpfungen werden die physikalisch sinnvollen Grenzen von  $0 \leq D_{1,2} \leq 0.2$  gewählt.

Das letzte Resultat der numerischen Integration für  $z_W$  vor Abschluß der linear-zeitinvarianten Voridentifikation ist in Bild 4.9 hellgrau dargestellt. Dies stellt die theoretische Schwingungsantwort für ein LTI-Rotorsystem während eines Hochlaufs mit dem gemessenen Drehzahlverlauf dar. Bei diesem werden dem alle Parameter so angepaßt, daß es die Schwingungsantwort eines in Wirklichkeit LTV-Systems optimal abbildet. Die so gewonnenen Werte werden nun a priori als Startwerte in dem Algorithmus verwendet, bei dem das Rotorsystem als linear-zeitvariant (sprich: drehzahlvariabel) modelliert ist. Das optimale Resultat der numerischen Integration dieses Systems ist als graue Linie in Bild 4.9 zu sehen. Es ist erkennbar, daß schon beim LTI-System in der zweiten Resonanz die Verschiebung der Scheibe in  $z$ -Richtung die richtige Größenordnung hat. Die Messung wird allerdings durch den Einsatz eines LTV-Systems praktisch ideal abgebildet. Die nach dem  $J_{LTV}$ -ten Iterationsschritt der Anpassung des LTV-Systems verbleibenden Residuen sind gestrichelt schwarz dargestellt<sup>22</sup>. Zur Formulierung des Anpassungskriteriums wurde der gesamte Drehzahlbereich der Messung verwendet, da sich das Rotorsystem praktisch während der gesamten Messung aufgrund der hohen Drehbeschleunigung zumindest in Resonanznähe befindet.



**Bild 4.9:** Scheibenauslenkungen  $w_W(t)$  des Einscheibenrotors (*lang*) während eines schnellen Hochlaufs:

Meßsignal (schwarz), Resultat des LTI-Identifikationsalgorithmus' (hellgrau) und Resultat des LTV-Identifikationsalgorithmus' (grau) nach dem letzten Iterationsschritt

<sup>22</sup> Für den in Bild 4.9 dargestellten Fall ist  $J_{LTI}=1500$ , was die Grenze für den Abbruch der LTI-Optimierung darstellt, und  $J_{LTV}\approx 5100$ .

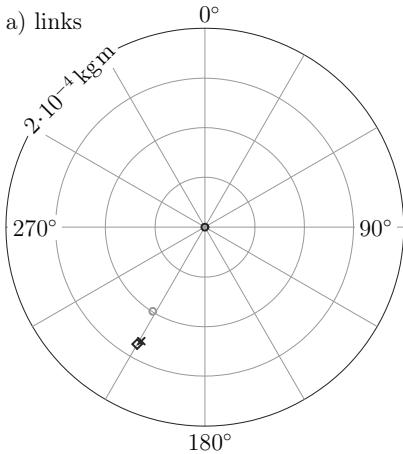
**Tabelle 4.5:** Ergebnis der Unwuchtdentifikation am Einscheibenrotor *lang*

	$U_l$	$U_r$
Anfangswerte Voridentifikation	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$
Ergebnis Voridentifikation	$1.0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 212.0^\circ$	$2.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 28.7^\circ$
Anfangswerte Identifikation	$1.0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 212.0^\circ$	$2.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 28.7^\circ$
Ergebnis Identifikation	$1.3 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 210.9^\circ$	$3.2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 29.0^\circ$
Zielwerte	$1.4 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 210^\circ$	$3.2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 30^\circ$

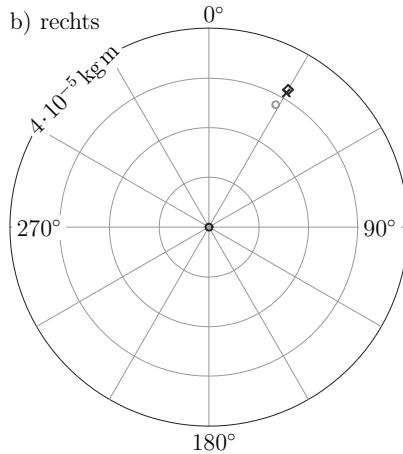
Die sich aus der kaskadierenden Identifikation ergebenden Unwuchten sind in der Tabelle 4.5 numerisch und im Bild 4.10 grafisch der tatsächlich angebrachten Unwuchtdynäme gegenübergestellt. Zudem sind die verwendeten Startwerte vermerkt. Es ist erkennbar, daß die Voridentifikation die Phasenlagen beider Unwuchten sehr gut trifft. Die Amplituden werden jedoch erst bei der Anpassung des drehzahlvariablen (LTV-)Rotorsystems passend identifiziert.

Bei der grafischen Darstellung in Bild 4.10 sind als schwarze Rauten die Zielunwuchten  $U_{l/r,\text{soll}}$ , als graue Kreise die Ergebnisse  $U_{l/r,\text{LTI}}$  der LTI-Identifikation und als schwarze

a) links



b) rechts

**Bild 4.10:** Polardiagramme der Unwuchten am Einscheibenrotor (*lang*):

- Tatsächliche Unwucht  $U_{l/r,\text{soll}}$
- Identifizierte Unwucht (LTI)  $U_{l/r,\text{LTI}}$
- × Identifizierte Unwucht (LTV)  $U_{l/r,\text{LTV}}$
- Ausgangswert der Identifikation  $U_{l/r,\text{ini}}$

Kreuze die Endergebnisse  $U_{l/r,LTV}$  der LTV-Identifikation dargestellt. Die schwarzen Kreise im Koordinatenursprung markieren die Startwerte  $U_{\varepsilon,ini}$  der Unwuchtidentifikation. Die hier gewählten Anfangswerte für die Unwuchten sind mit  $U_l=U_r=0$  die ungünstigste Konfiguration. Dennoch ist das endgültige Wuchtergebnis praktisch ideal. Der Rechenzeitbedarf liegt für diese Identifikation auf dem bekannten Rechner bei etwa 250 s. Davon entfallen allerdings mehr als 230 s auf das Laden und Verarbeiten der Meßdaten  $\tilde{x}(t)$ . Bei dieser mittlerweile deutlich erhöhten Ladezeit ist auch mit einem schnelleren Rechner keine signifikante Verbesserung mehr zu erwarten. In einer industriellen Umsetzung sollten die hier aus Genauigkeitsgründen mit der extrem hohen Abtastrate  $f_a = 2^{13} \text{ Hz}$  aufgenommenen Meßdaten wiederabgetastet werden. Dadurch kann die Datenmenge deutlich reduziert werden<sup>23</sup>

Das zuletzt betrachtete Beispiel war ein schneller Hochlauf mit deutlicher Erregung beider möglicher Resonanzen eines Einscheibenrotors mit Kreiselwirkung in seiner *langen* Konfiguration. Dabei konnte die Funktionsfähigkeit des Algorithmus' zur modellgestützten Unwuchtidentifikation inclusive seiner kaskadierenden Routine zur Startwertgenerierung auf modaler Basis anhand echter Meßdaten nachgewiesen werden. Die Robustheit gegenüber Vernachlässigung der Zeitableitung der Rechtsmodalmatrix sowie gegenüber einer einfachen linearen Näherung der modalen Parameter mit der Drehzahl ist auch hier nachgewiesen.

---

<sup>23</sup> Dabei ist auf die Einhaltung des NYQUIST-Kriteriums gegen Aliasing zu achten.

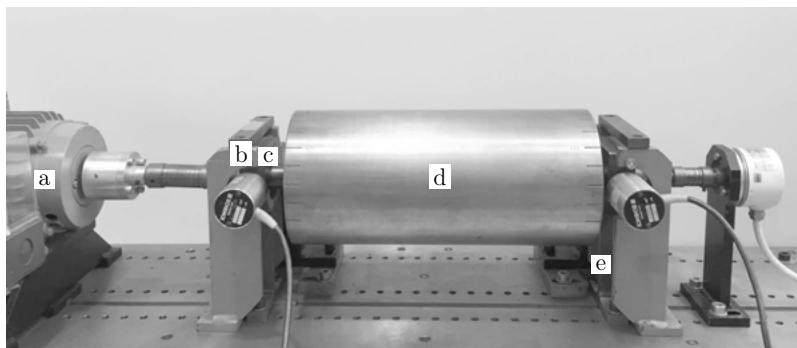
## 4.2 Starrer Rotor in horizontal nachgiebigen Lagern

Der starre Rotor in horizontal nachgiebigen Lagern ist das erste von zwei hier benutzten experimentellen Referenzsystemen, deren dynamische Eigenschaften am Fachgebiet sehr gut erforscht sind. Diese Systeme werden regelmäßig im Rahmen von Vorlesungen und Tutorien zur Demonstration klassischer Wuchtverfahren herangezogen.

### 4.2.1 Systembeschreibung und Modellierung

Mit der experimentellen Erprobung wird sichergestellt, daß der Algorithmus auch bei der Unwuchtidentifikation von drehzahlunabhängigen (also LTI-)Rotorsystemen gute Ergebnisse liefert.

Ein Foto des Rotors ist in Bild 4.11 zu sehen. Die Trommellänge beträgt etwa 350 mm (d) und der Trommeldurchmesser 138 mm. Angetrieben wird der Rotor von einem Gleichstrommotor<sup>24</sup> (a).



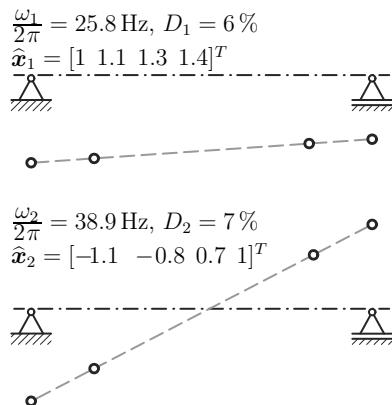
**Bild 4.11:** Starrer Rotor in horizontal nachgiebigen Lagern [Labor des Fachgebiets sdy der TU Darmstadt]

Die Lagerböcke (e) mit den Kugellagern (FAG Pendelkugellager 1204-TVH) (c) sind als vertikale Kragbalken ausgeführt, die vertikal sehr steif, horizontal aber nachgiebig sind. An beiden Lagern sind Haken befestigt, deren Enden in ein hochviskoses Öl getaucht sind. Dadurch wird zusätzliche Dämpfung in das System eingebracht. An den Gehäusen der Kugellager wird die Lagerbewegung in horizontaler Richtung mit elektrodynamischen Schwinggeschwindigkeitsaufnehmern gemessen. Als Sicherung gegen zu große Schwingungsamplituden oder gar Versagen sind beidseitig Fanglager (b) mit einstellbaren Anschlägen montiert. Der Drehwinkel des Rotors wird über einen am rechten Ende angebrachten Inkrementalgeber gemessen.

<sup>24</sup> SIDO GNE 71LL/1, Nennleistung 1 PS

Der Rotor kann aufgrund seiner großen (Dreh-)Masse und seines verhältnismäßig schwachen Antriebes durch nicht so schnell beschleunigt werden, wie das bei den anderen in dieser Arbeit betrachteten Systemen der Fall ist; die Drehzahl  $n = 2000 \text{ min}^{-1}$  beispielsweise wird aus dem Stillstand bei maximaler Bestromung erst nach über 20 s erreicht.

Die Ergebnisse einer vorab durchgeföhrten experimentellen Modalanalyse des stehenden Rotorsystems in horizontaler Richtung sind in Bild 4.12 zu sehen. Die beiden ersten Eigenformen weisen keinerlei Verformung des Rotors auf, sondern lassen ausschließlich Starrkörperbewegungen erkennen. Die erste Mode mit gleichsinniger Lagerbewegung ist eine dominierende Translationseigenform. Die zweite mit gegensinniger Lagerbewegung ist eine Starrkörperperkippung. Bis in den  $\text{kHz}$ -Bereich ist keine weitere Mode mehr zu finden. Deshalb ist der Rotor bis mindestens zur zweiten Eigenfrequenz  $f_2 = 38.9 \text{ Hz}$  (also  $2334 \text{ min}^{-1}$ ) als starrer Rotor anzusehen.

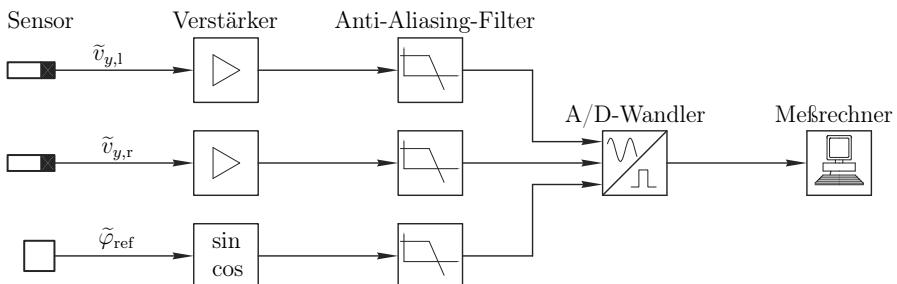


**Bild 4.12:** Starrer Rotor: Ergebnis der experimentellen Modalanalyse im Stillstand

## 4.2.2 Meßkette

In Bild 4.13 ist die Meßkette des Auswuchtversuchs am starren Rotors in horizontal nachgiebigen Lagern dargestellt.

Die horizontalen Lagerbewegungen links und rechts ( $v_l, v_r$ ) werden jeweils mit elektrodynamischen Schwinggeschwindigkeitsaufnehmern erfaßt. Diese haben eine maßgebliche eigene Dynamik. Da die Übertragungsfunktion der Aufnehmer jedoch bekannt



**Bild 4.13:** Meßkette des Prüfstands für den starren Rotor in horizontal nachgiebigen Lagern

ist, kann das Übertragungsverhalten problemlos herausgerechnet werden.

Der Drehwinkel wird mit einem Inkrementalgeber mit 512 Inkrementen aufgenommen. Das ausgehende TTL-Puls-Signal weist aufgrund seiner Impulsdichte und seines stoßartigen Charakters einen völlig anderen Frequenzinhalt als die Schwingungssignale  $v_l$  und  $v_r$  auf. Die TTL-Pulse werden daher mithilfe einer Schaltung in analoge  $\sin \varphi$ - und  $\cos \varphi$ -Signale transformiert. Diese Funktionen haben eine ähnliche Frequenz wie die Lagerschwingungssignale und ein systematischer Fehler wird durch die nachgeschalteten Anti-Aliasing-Filter vermieden.

Alle Signale werden in gleichen analogen Filtern Anti-Aliasing gefiltert. Anschließend erfolgt die A/D-Wandlung und die digitalisierten Daten werden im Mekrechner gespeichert.

Die eingesetzten Komponenten sind in Tabelle 4.6 zusammengefaßt.

**Tabelle 4.6:** Komponenten am Versuchsstand des starren Rotors

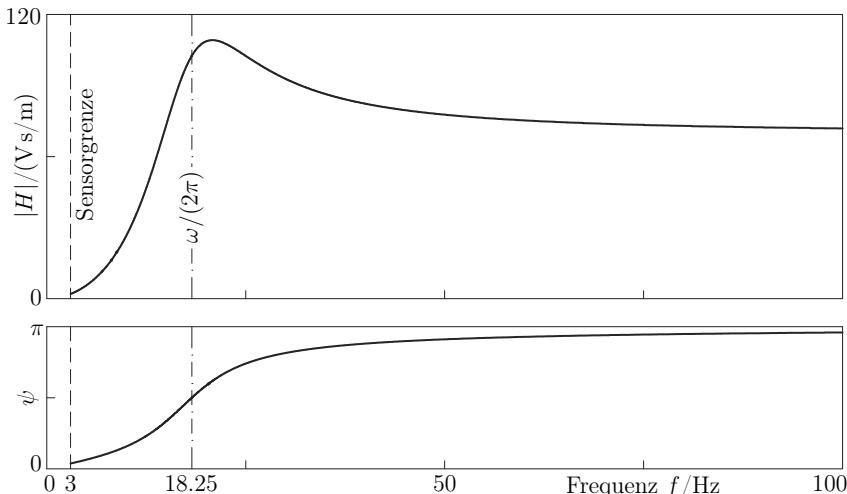
Komponente	Typ	Eigenschaft
Gleichstrommotor	SIDO GNE 71LL/1	Nennleistung 1 PS
Drehgeber	HENGSTLER RI58-O	512 Inkremeante
El.-dynamische Geschwindigkeitssensoren	SCHENCK T77 2 Stück	Untere Grenze 3 Hz
Tiefpaßfilter	KEMO CardMaster 21.2 8 Kanäle	Butterworth 8. Ordnung Eckfrequenz $f_e = 100$ Hz
Echtzeitregelsystem	dSPACE DS1103	Abtastfrequenz $f_s = 2^{13}$ Hz

### 4.2.3 Aufbereitung der Meßdaten

Die im Versuch verbauten elektrodynamischen Schwinggeschwindigkeitsaufnehmer haben eine eigene Dynamik, die beachtet werden muß: Die untere Frequenzgrenze, liegt bei den Aufnehmern SCHENCK T77 bei 3 Hz. Unterhalb dieser Grenze aufgenommene Daten dürfen also nicht zur Identifikation herangezogen werden. Die Resonanz liegt bei etwa 20 Hz und damit im durchfahrenen Drehzahlbereich. Bild 4.14 zeigt die Übertragungsfunktion der verwendeten Aufnehmer, welche digitalisiert vorliegt. Dieses Übertragungsverhalten der Aufnehmer muß aus den Meßdaten herausgerechnet werden<sup>25</sup>.

Die während des Versuchs aufgenommene Ausgangsspannung jedes Geschwindigkeitsaufnehmers ist also mittels einer schnellen FOURIER-Transformation (FFT) in den

<sup>25</sup> CARL SCHENCK AG, *Schenck Vibroport* ([56], 1979, S. 11)



**Bild 4.14:** Übertragungsfunktion der elektrodynamischen Geschwindigkeitsaufnehmer SCHENCK T77

Frequenzbereich zu überführen und mit der inversen Übertragungsfunktion zu multiplizieren. Das so berechnete Spektrum der Schwinggeschwindigkeit wird dann mittels inverser FFT zurück in den Zeitbereich transformiert. Somit hat man die wahre Schwinggeschwindigkeit und die Eigendynamik der Aufnehmer ist kompensiert.

#### 4.2.4 Identifikationsergebnis

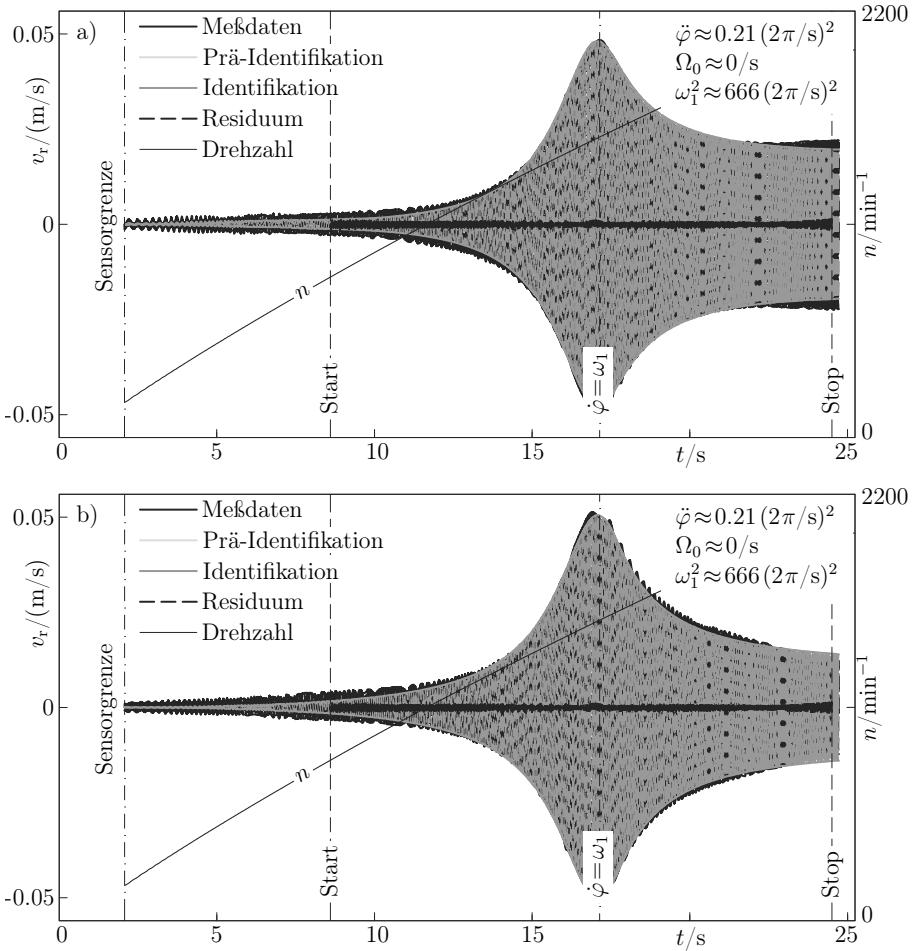
Im Modell zur Unwuchtentfernung werden hier gegenüber der Realität die rückwärtsgängigen und nicht durchfahrenen Moden vernachlässigt. Die modalen Parameter sind nicht von der Drehzahl abhängig. Wenn der Algorithmus korrekt arbeitet, müssen die im Modell zugelassenen linearen Änderungen der modalen Parameter in der Drehzahl verschwinden. Die Vernachlässigung der Zeitableitung der Rechts-Modalmatrix darf keine Rolle spielen. Das Identifikationsverfahren wird dadurch überprüft, ob es bei näherungsweise linear-zeitinvarianten Rotorsystemen noch immer korrekt arbeitet und die Drehzahlnabhängigkeit detektiert.

Die am Rotor angebrachte Unwuchtdyname, welche identifiziert werden soll, wird durch zwei Unwuchten an der linken und an der rechten Trommelseite  $U_l$  und  $U_r$  erzeugt. Diese angebrachten Unwuchten liegen bei  $U_l = 2.54 \cdot 10^{-4} e^{i 189\pi/180} \text{ kg m}$  und  $U_r = 3.31 \cdot 10^{-5} e^{i 230\pi/180} \text{ kg m}^{26}$ .

Der genaue Wert der ersten Eigenfrequenz, gemessen im Stillstand, geht aus der experimentellen Modalanalyse hervor (vgl. 4.12). Er liegt bei  $f_1 = 25.8 \text{ Hz}$ .

<sup>26</sup> Die angegebenen Zielunwuchten haben diese etwas unhandlichen Zahlenwerte, da einfach die bei der Vorwuchtung angebrachten Schrauben und/oder das Wuchtkitt entfernt wurden.

Die gemessenen Schwinggeschwindigkeiten beider Lager in  $y$ -Richtung (waagerecht)  $\tilde{v}_{y,l}$  und  $\tilde{v}_{y,r}$  während eines (aus Antriebsgründen eher langsam) Hochlaufs von 0 auf  $2200 \text{ min}^{-1}$  in 25 s sind in Bild 4.15 a) und b) in schwarz dargestellt. Diese Kurven stellen die Zielgrößen dar. Der gemessene Drehzahlverlauf wird durch die dünne schwarze Kurve dargestellt.



**Bild 4.15:** Lagerschwingungen am starren Rotor während eines langsamem Hochlaufs, a) Geschwindigkeit links  $v_l(t)$  und b) Geschwindigkeit rechts  $v_r(t)$ :  
Meßsignal (schwarz), Resultat des LTI-Identifikationsalgorithmus' (hellgrau) und Resultat des LTV-Identifikationsalgorithmus' (grau) nach dem letzten Iterationsschritt

Als Startwerte für die Identifikation werden für beide Unwuchten links und rechts  $U_l$  und  $U_r$  Nullen angesetzt. Für die erste Eigenfrequenz  $f_1$  werden die Unter- und Obergrenzen bei 15 bzw. 40 Hz gesetzt. Als Startwert für die Eigenfrequenz wird  $f_{1,\text{ini}} = 30 \text{ Hz}$  angesetzt. Für die Dämpfungen werden dieselben physikalisch sinnvollen Grenzen gewählt ( $0 \leq D_{1,2} \leq 0.2$ ) wie bisher.

In diesem Falle wird zur Formulierung des Anpassungskriteriums wieder ein Drehzahlintervall verwendet, da bei extrem niedrigen Drehzahlen ein geringer Runout zu erkennen ist. In Resonanznähe fällt dieser gegen das Nutzsignal weniger ins Gewicht. Das genutzte Intervall ist in Bild 4.15 durch gestrichelte Linien eingegrenzt.

Zur Unwuchtentwicklung wird das kaskadierende Verfahren eingesetzt. Die Resultate der linear-zeitinvarianten Voridentifikation sind in Bild 4.15 a) und b) hellgrau dargestellt. Sie zeigen die Schwingungsantwort eines drehzahl- und damit zeitunabhängig modellierten Rotorsystems während eines Hochlaufs mit dem gemessenen Drehzahlverlauf, bei dem alle Parameter so angepaßt sind, daß es die gemessenen Schwingungsantworten eines realen Rotorsystems optimal abbildet. Die damit ermittelten Werte werden nun als Startwerte in dem Algorithmus verwendet, bei dem das RotorSystem als linear-zeitvariant (sprich: drehzahlvariabel) modelliert ist. Das optimale Resultat der numerischen Integration dieses Systems ist als graue Linie in Bild 4.15 zu sehen. Es überdeckt das Resultat der LTI-Prä-Identifikation praktisch vollständig. Die Messung wird also schon mit der Modellierung als drehzahlinvariantes System praktisch ideal abgebildet. Die nach dem  $J_{\text{LTV}}$ -ten Iterationsschritt der Anpassung des LTV-Systems verbleibenden Residuen sind gestrichelt schwarz dargestellt. Für den in Bild 4.15 dargestellten Fall ist  $J_{\text{LTI}} \approx 720$  und  $J_{\text{LTI}} = 12$ . Auch daran kann man erkennen, daß nach der Anpassung des LTI-Systems praktisch keine Veränderung im LTV-modellierten Rotor möglich sind, mit denen das Anpassungskriterium weiter minimiert wird.

**Tabelle 4.7:** Ergebnis der Unwuchtentwicklung am starren Rotor

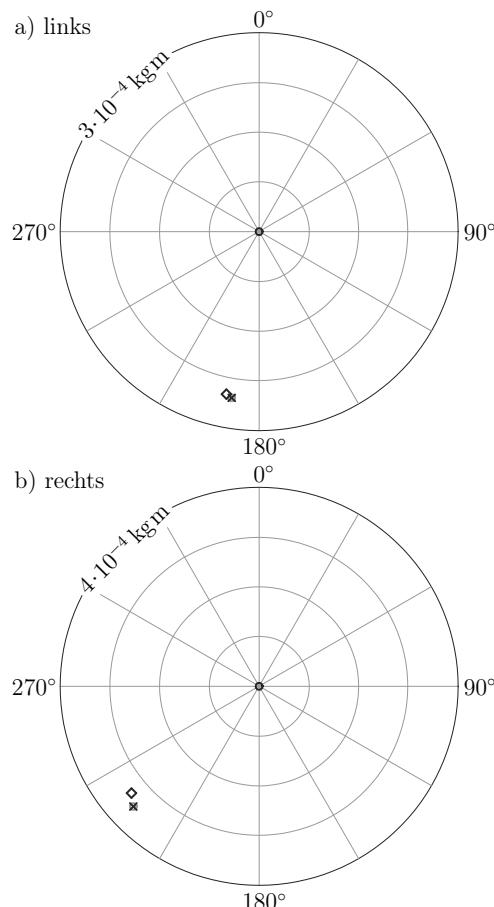
	$U_l$	$U_r$
Anfangswerte Voridentifikation	$0 \text{ kg m } \angle 0^\circ$	$0 \text{ kg m } \angle 0^\circ$
Ergebnis Voridentifikation	$2.50 \cdot 10^{-4} \text{ kg m } \angle 191.4^\circ$	$3.51 \cdot 10^{-4} \text{ kg m } \angle 226.3^\circ$
Anfangswerte Identifikation	$2.50 \cdot 10^{-4} \text{ kg m } \angle 191.4^\circ$	$3.51 \cdot 10^{-4} \text{ kg m } \angle 226.3^\circ$
Ergebnis Identifikation	$2.50 \cdot 10^{-4} \text{ kg m } \angle 191.4^\circ$	$3.51 \cdot 10^{-4} \text{ kg m } \angle 226.3^\circ$
Zielwerte	$2.54 \cdot 10^{-4} \text{ kg m } \angle 189^\circ$	$3.31 \cdot 10^{-4} \text{ kg m } \angle 230^\circ$

Die sich aus der kaskadierenden Identifikation ergebenden Unwuchten sind in Tabelle 4.7 numerisch und in Bild 4.16 grafisch den tatsächlich angebrachten Unwuchten

gegenübergestellt. Zudem sind die verwendeten Startwerte vermerkt. Es ist erkennbar, daß die Voreidennifikation schon das Ergebnis der Identifikation am LTV-System vorwegnimmt. Die LTV-Modellierung liefert das gleiche Ergebnis bei weitaus mehr Anpassungsfreiheit.

In den Polardiagrammen der Unwuchten von Bild 4.16 sind als schwarze Rauten die Zielunwuchten  $U_{l/r,\text{soll}}$ , als graue Kreise die Ergebnisse der LTI-Identifikation  $U_{l/r,\text{LTI}}$  und als schwarze Kreuze die Endergebnisse der LTV-Identifikation  $U_{l/r,\text{LTV}}$  dargestellt. Die schwarzen Kreise im Koordinatenursprung markieren die Startwerte  $U_{\varepsilon,\text{ini}}$ . Die Ergebnisse der LTI-Voreidennifikation werden auch in dieser Darstellung durch die Ergebnisse der Identifikation am LTV-Modell verdeckt. Obwohl die gewählten Anfangswerte für die Unwuchten mit  $U_l = U_r = 0$  wieder die ungünstigste Konfiguration sind, ist das endgültige Wuchtergebnis sehr gut. Der Rechenzeitbedarf liegt für diese Identifikation bei etwa 90 s. Davon entfallen jedoch mehr als 80 s auf das Laden und Verarbeiten der gemessenen Lagerbewegungen  $\tilde{x}(t)$ .

An diesem Versuchsrotor wurde die Funktionsfähigkeit des neuen Algorithmus' zur modellgestützten Unwuchtidentifikation auch an einem Rotor nachgewiesen werden, der nachweislich schon durch ein drehzahl- bzw. zeitinvariantes Modell abgebildet werden kann. Die Robustheit der Ergebnisse gegenüber Vernachlässigung nichtdurchfahrener Moden scheint auch für solche Rotorsysteme gegeben zu sein.



**Bild 4.16:** Polardiagramme der Unwuchten am

starren Rotor an beiden Seiten:

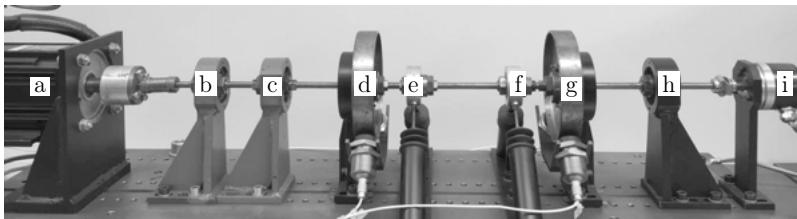
- ◊ Tatsächliche Unwucht  $U_{l/r,\text{soll}}$
- Identifizierte Unwucht (LTI)  $U_{l/r,\text{LTI}}$
- × Identifizierte Unwucht (LTV)  $U_{l/r,\text{LTV}}$
- Ausgangswert der Identifikation  $U_{l/r,\text{ini}}$

## 4.3 Zweischeibenrotor (LTI)

Der symmetrische Zweischeibenrotor in Kugellagern ist das zweite der beiden betrachteten Referenzsysteme, die am Fachgebiet lauffähig vorhanden sind und ohne größere Anpassungen für Erprobungen von Auswuchtverfahren herangezogen werden können.

### 4.3.1 Systembeschreibung und Modellierung

Auch am Zweischeibenrotor (mit vernachlässigbarer Kreiselwirkung) ist für den Identifikationsalgorithmus sicherzustellen, daß er für drehzahlunabhängige (also LTI-)Rotorsysteme nicht versagt und erkennt, daß das Rotorsystem keine signifikante Drehzahlabhängigkeit aufweist. Der nun untersuchte Rotor ist im Bild 4.17 zu sehen.



**Bild 4.17:** Zweischeibenrotor [Labor im Fachgebiet Strukturdynamik der TU Darmstadt]

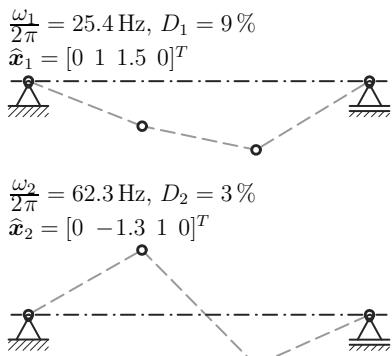
Kern des Rotors ist eine flexible Welle mit einem Durchmesser von 8 mm. Der Lagerabstand beträgt etwa 700 mm, die beiden gleichen Scheiben (d und g, Masse  $m_{1,2} \approx 1 \text{ kg}$ ) sind symmetrisch zur geometrischen Mitte im Abstand von etwa 300 mm mit Spannhülsen auf die Welle gespannt. Die Meßflächen befinden sich an den Scheibenaußenseiten und sind für Wirbelstromsensoren ausgestaltet. Zwei Dämpfer (e und f) bestehen aus je zwei im 90°-Winkel zueinander angeordneten ölgefüllten<sup>27</sup> Röhren. Im Öl befinden sich kreisförmige Plättchen, die über Stößel mit einem auf den Rotor gespannten Kugellager verbunden sind. Die damit eingebrachte äußere Dämpfung kann überkritisch die – durch den in den Spannhülsen auftretenden Mikroschlupf – eingebrachte innere Dämpfung kompensieren. Außerdem begrenzt die Dämpfung die Amplituden in der Resonanz auch bei niedriger Anfahrbeschleunigung. Dies ist hilfreich für die Initialwuchtung des Rotors mit klassischen Verfahren<sup>28</sup>. Die Initialwuchtung wird durchgeführt, damit durch anschließend angebrachte bekannte Unwuchten der zu identifizierende Unwuchtzustand bekannt ist. Der Rotor ist in handelsüblichen Pendelkugellagern (FAG 1204-TVH) in Lagerböcken (b, c und h) gelagert. Angetrie-

<sup>27</sup> CASTROL GP SAE 50

<sup>28</sup> Dieser Rotor wurde stationär nach Eigenformen gewuchtet.

ben wird der Rotor von einem bürstenlosen AC-Servomotor. Am anderen Wellenende befindet sich ein Inkrementalgeber zur Erfassung des Rotordrehwinkels.

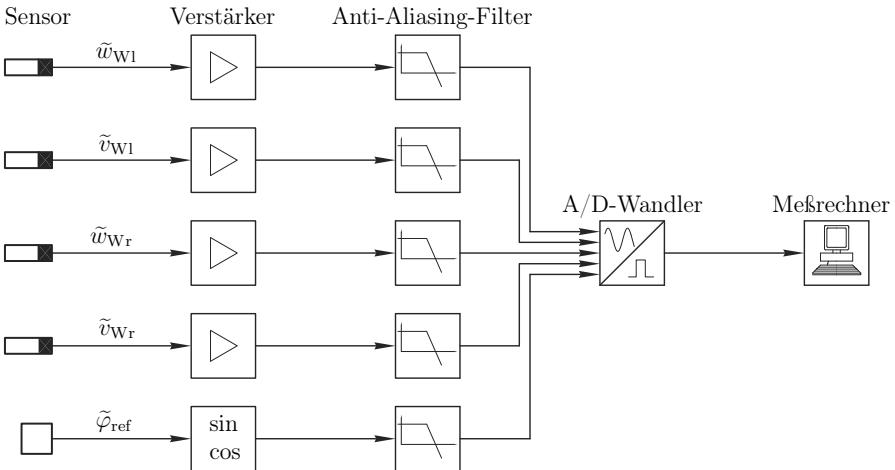
Die Ergebnisse einer experimentellen Modalanalyse im Stillstand sind Bild 4.18 zu entnehmen. Die Gleichlaufeigenfrequenzen liegen bei 25.4 und 62.3 Hz. Diesen sind eine gleichphasige und eine gegenphasige Eigenform zugeordnet. Symmetrie zur Rotorlängsmitte ist trotz der geometrischen Symmetrie des Aufbaus nicht ganz gegeben. Dies ist hauptsächlich durch die steifere Lagerung auf der linken Rotorseite durch die zwei Kugellager erklärbar. Die modalen Dämpfungswerte sind wegen der Dämpfer verhältnismäßig hoch. Daß  $D_2$  nicht in der Größenordnung von  $D_1$  liegt, ist mit der örtlichen Nähe der Dämpfer zum Schwingungsknoten zu erklären.



**Bild 4.18:** Zweiseibenrotor: Ergebnis der experimentellen Modalanalyse

### 4.3.2 Meßkette

Die Meßkette im Prüfstand mit dem Zweiseibenrotor ist in Bild 4.19 zu sehen. Die



**Bild 4.19:** Meßkette im Prüfstand des flexiblen Zweiseibenrotors

Verschiebungen der linken und der rechten Scheibe in  $z$ - und  $y$ -Richtung ( $w_{W1}, v_{W1}, w_{Wr}, v_{Wr}$ ) werden mit Wirbelstromaufnehmern aufgenommen. Die Signale werden

auf den Spannungsbereich  $\pm 5$  V transformiert und anschließend mit gleichen analogen Tiefpassfiltern der Eckfrequenz  $f_e = 100$  Hz gefiltert. Der Drehwinkel des Rotors wird mit einem Inkrementalgeber gemessen. Dieser hat zusätzlich ein Nullsignal pro Umdrehung. Das Pulssignal wird durch eine Auswerteelektronik in ein analoges sin- bzw. cos-Signal gewandelt. Zur Vermeidung von Aliasing werden die Signale vor der A/D-Wandlung (Abtastfrequenz  $f_s = 2^{13}$  Hz)<sup>29</sup> durch analoge Anti-Aliasing-Filter geführt. Die digitalisierten Signale werden abschließend im Meßrechner gespeichert.

Die wichtigsten verwendeten Geräte sind in Tabelle 4.8 aufgeführt.

**Tabelle 4.8:** Komponenten am Versuchsstand des Zweischeibenrotors

Komponente	Typ	Eigenschaft
Servomotor (bürstenlos)	ESR POLLMEIER MR 4212.2224	Maximaldrehzahl $6000 \text{ min}^{-1}$ Nennmoment $1.7 \text{ Nm}$
Drehgeber	BALLUFF BDG 6360	512 Inkremeante
Wirbelstromsensoren	TELEMESS I-W-A/OLIE-K A26	Auflösung $4 \mu\text{m}$ Meßbereich $10 \text{ mm}$
Tiefpassfilter	KEMO CardMaster 21.2 8 Kanäle	Butterworth 8. Ordnung Eckfrequenz $f_e = 100 \text{ Hz}$
Echtzeitregelsystem	dSPACE DS1103	Abtastfrequenz $f_s = 2^{13} \text{ Hz}$

### 4.3.3 Aufbereitung der Meßdaten

Ein *postprocessing* ist hier nicht erforderlich, da das Nutzsignal näherungsweise einer unwuchterzwungenen Schwingung entspricht.

### 4.3.4 Identifikationsergebnis

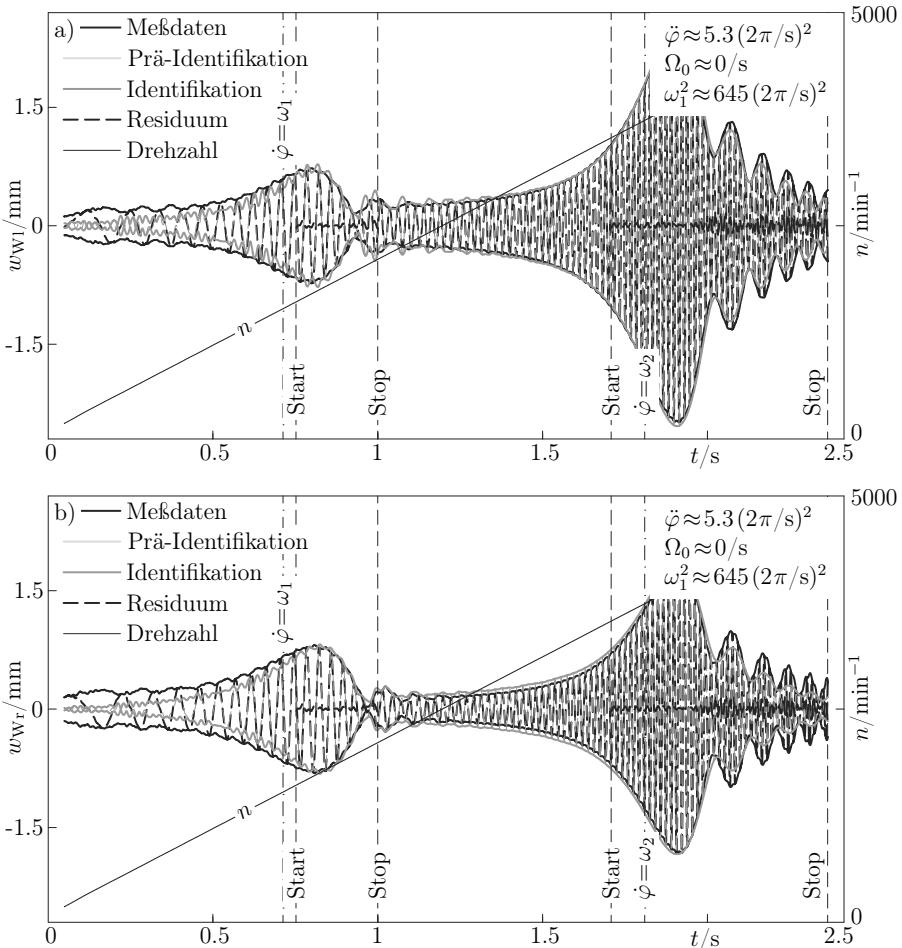
Für die Unwuchtdentifikation gelten im Falle des LTI-Zweischeibenrotors die folgenden Vereinfachungen: Die rückwärtslaufenden und nicht durchfahrenen Moden werden nicht zu Modellierung herangezogen, die Zeitableitung der Rechtsmodalmatrix wird vernachlässigt und die modalen Parameter werden als linear in der Drehzahl zugelassen.

Die zu identifizierenden Zielunwuchten sind je eine Einzelunwucht an der linken und an der rechten Scheibe  $U_l$  bzw.  $U_r$  (siehe Foto 4.17). Diese Vereinfachung wird getroffen, weil die Scheiben sehr schlank sind und rechtwinklig auf die Welle gekeilt sind, so daß die Momentenunwucht pro Scheibe vernachlässigbar ist. Die angebrachten Einzelunwuchten liegen bei  $U_l = 2.14 \cdot 10^{-4} e^{i 267\pi/180} \text{ kg m}$  und  $U_r = 1.57 \cdot 10^{-4} e^{i 256\pi/180} \text{ kg m}^{30}$ .

<sup>29</sup> Dies ist eine extreme Überabtastung im Vergleich zum NYQUIST-Kriterium. Downsampling der gemessenen Daten erfolgt ggf. im *postprocessing*, zunächst wird dies jedoch unterlassen

Die ersten beiden Gleichlaufeigenfrequenzen im Stillstand gehen aus der experimentellen Modalanalyse hervor (vgl. 4.19). Sie liegen bei  $f_1=25.4 \text{ Hz}$  und  $f_2=62.3 \text{ Hz}$ .

Die gemessenen Scheibenauslenkungen beider Scheiben in  $z$ -Richtung ( $\tilde{z}_{W_1}$  und  $\tilde{z}_{W_r}$ ) während eines schnellen Hochlaufs von 0 auf  $5000 \text{ min}^{-1}$  in 2.5 s sind in Bild 4.20 a) und b) in schwarz dargestellt. Diese Kurven stellen die Zielgrößen für das



**Bild 4.20:** Scheibenschwingungen am Zweischeibenrotor; a) Auslenkungen der linken Scheibe  $w_{W1}(t)$  und b) Auslenkungen der rechten Scheibe  $w_{Wr}(t)$ : Meßsignal (schwarz), Resultat des LTI-Identifikationsalgorithmus' (hellgrau) und Resultat des LTV-Identifikationsalgorithmus' (grau) nach dem letzten Iterationsschritt

<sup>30</sup> Die angegebenen Zielunwuchten weisen diese etwas unhandlichen Zahlenwerte aus, da einfach die bei der Vorwuchtung angebrachten Schrauben und das Wuchtkitt entfernt wurden.

Identifikationsverfahren dar. Der Drehzahlverlauf wird durch die dünne schwarze Kurve dargestellt.

Die Startwerte für beide Unwuchten links und rechts  $U_1$  und  $U_r$  sind Nullen. Als Startwerte für die beiden durchfahrenen Gleichlaufeigenfrequenzen werden  $f_{1,\text{ini}} = 30 \text{ Hz}$  und  $f_{1,\text{ini}} = 80 \text{ Hz}$  angesetzt. Die Grenzen für die erste Eigenfrequenz  $f_1$  liegen bei 15 und 40 Hz, für die zweite Eigenfrequenz  $f_2$  bei 25 und 100 Hz. Für die Dämpfungen werden die übliche Grenzen  $0 \leq D_{1,2} \leq 0.2$  gewählt.

In diesem Falle werden zur Identifikation die Intervalle um beide Resonanzzonen herangezogen. Diese sind in Bild 4.20 durch gestrichelte Linien markiert.

Zur Unwuchtidentifikation wird die LTI-Voridentifikation zur Vermeidung lokaler Minima eingesetzt. Die errechneten Scheibenauslenkungen  $w_{W1}$  und  $w_{Wr}$  nach der LTI-Voridentifikation sind in Bild 4.20 a) und b) die hellgrauen Linien. Sie stellen die Schwingungsantwort eines drehzahl- und damit zeitunabhängigen Rotorsystems während des Hochlaufs mit dem gemessenen Drehzahlverlauf dar. Die dabei gefundenen Parameter ergeben sich aus der Anpassung der errechneten an die Schwingungsantworten eines nahezu drehzahlinvarianten realen Rotorsystems. Diese Werte werden nun als Startwerte für eine drehzahlvariable LTV-Modellierung im Algorithmus verwendet. Die resultierenden Ergebnisse sind in Bild 4.20 als graue Linien zu sehen. Dabei sind die Resultate der LTI-Voridentifikation praktisch identisch mit denen der LTV-Identifikation. Die Messung wird also schon mit der Modellierung als drehzahlinvariantes System praktisch ideal abgebildet. Die nach dem  $J_{\text{LTV}}$ -ten Iterationsschritt der Anpassung des LTV-Systems verbleibenden Residuen sind gestrichelt schwarz dargestellt. Für den in Bild 4.20 dargestellten Fall ist  $J_{\text{LTI}} \approx 1250$  und  $J_{\text{LTI}} = 20$ . Dies erklärt, warum nach der Anpassung des LTI-Systems praktisch keine Veränderungen im LTV-Rotormodell vorgenommen wurden, um das Anpassungskriterium weiter zu minimieren.

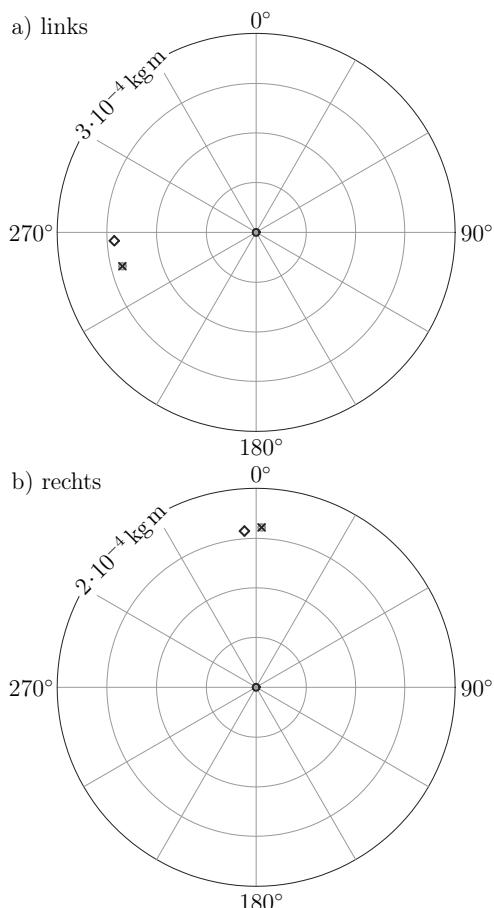
**Tabelle 4.9:** Ergebnis der Unwuchtidentifikation am Zweischeibenrotor

	$U_1$	$U_r$
Anfangswerte Voridentifikation	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$
Ergebnis Voridentifikation	$2.08 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 255.8^\circ$	$1.60 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 2.0^\circ$
Anfangswerte Identifikation	$2.08 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 255.8^\circ$	$1.60 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 2.0^\circ$
Ergebnis Identifikation	$2.08 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 255.8^\circ$	$1.60 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 2.0^\circ$
Zielwerte	$2.14 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 266.6^\circ$	$1.57 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \angle 355.8^\circ$

Die Unwuchten vor und nach den einzelnen Stufen der Identifikationskaskade sind in Tabelle 4.9 numerisch und in Bild 4.21 grafisch den angebrachten Unwuchten an jeder Scheibe gegenübergestellt. Die LTI-Voridentifikation nimmt das Ergebnis der Identifikation am LTV-System vorweg. Die komplizierte drehzahlvariante Modellierung ist also zur Beschreibung des Zweiseibenrotors nicht nötig.

Bei der grafischen Darstellung in Bild 4.21 sind als schwarze Rauten die Zielunwuchten  $U_{l/r,soll}$ , als graue Kreise die Ergebnisse  $U_{l/r,LTI}$  der LTI-Identifikation und als schwarze Kreuze die Endergebnisse  $U_{l/r,LTV}$  der LTV-Identifikation dargestellt. Die schwarzen Kreise im Koordinatenursprung markieren die Startwerte  $U_{l/r,ini}$ . Die Ergebnisse der LTI-Voridentifikation sind mit den Ergebnissen der LTV-Identifikation deckungsgleich. Hinsichtlich der Phase sind die gewählten Startwerte der Unwuchten  $U_l = U_r = 0$  indifferent. Nichtsdestotrotz ist das endgültige Wuchtergebnis sehr gut. Der Rechenzeitbedarf liegt für diese Identifikation bei etwa 125 s. Davon entfallen allerdings mehr als 110 s auf das Laden und Verarbeiten der Meßdaten  $\tilde{x}(t)$ .

Das gerade betrachtete Beispiel war ein schneller Hochlauf mit deutlicher Erregung beider Resonanzen eines Zweiseibenrotors. Dabei konnte die Funktionsfähigkeit des im Zeitbereich arbeitenden Algorithmus' zur modellgestützten Unwuchtentwicklung auf modularer Basis an einem flexiblen Rotor nachgewiesen werden, der durch ein drehzahl- bzw. zeitinvariantes Modell abgebildet werden kann. Zu-



**Bild 4.21:** Polardiagramme der Unwuchten am Zweiseibenrotor an beiden Scheiben:

- ◊ Tatsächliche Unwucht  $U_{l/r,soll}$
- Identifizierte Unwucht (LTI)  $U_{l/r,LTI}$
- × Identifizierte Unwucht (LTV)  $U_{l/r,LTV}$
- Ausgangswert der Identifikation  $U_{l/r,ini}$

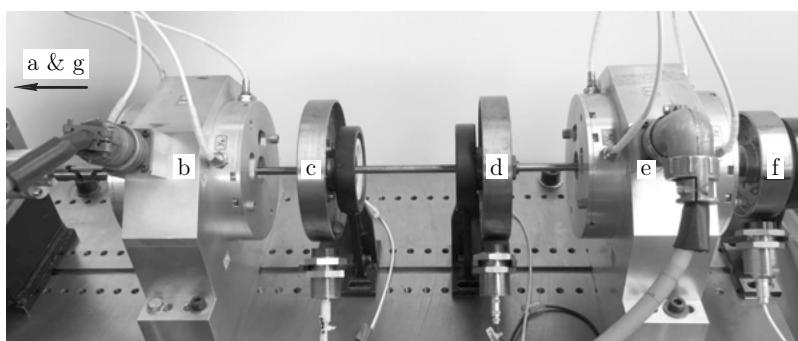
dem wurde das Intervall, in dem das Anpassungskriterium formuliert wurde, auf die Resonanzzonen beschränkt. Die Robustheit der Ergebnisse gegenüber der Vernachlässigung nichtdurchfahrender Moden ist somit für drehzahlvariante Rotorsysteme gegeben.

## 4.4 Rotor in zeitveränderlichen aktiven Magnetlagern (LTV)

Nun wird die Funktionsfähigkeit an stark drehzahlvarianten Beispieltoren nachgewiesen. Das nächste betrachtete Rotorsystem ist ein flexibler fünf-Freiheitsgrad-Rotor, der in aktiven Magnetlagern gelagert ist. In diesem Rotorsystem werden die Steifigkeiten der Lage bewußt mit der Drehzahl verändert. Dadurch sind die modale Eigenarten des Rotorsystems stark drehzahlabhängig. Die Drehzahlabhängigkeit wird hier gezielt linear eingestellt, damit die Annahme im Algorithmus, daß die modalen Parameter als Geraden in der Drehzahl dargestellt werden, im Experiment bereits gegeben ist. Dabei wird der Algorithmus zur Unwuchtdentifikation also an einem stark drehzahlabhängigen (also LTV-)Rotorsystem verifiziert.

### 4.4.1 Systembeschreibung und Modellierung

Der nun untersuchte Rotor ist im Bild 4.22 zu sehen. Der Rotor, der von ZHANG<sup>31</sup> im Rahmen seiner Dissertation am Fachgebiet Strukturdynamik aufgebaut wurde, besteht aus einer sehr schlanken Welle (Durchmesser 8 mm), auf der fünf starre Scheiben befestigt sind. Zwei davon sind die Lagerzapfen für die Magnetlager, welche an der UniBW Hamburg entwickelt wurden<sup>32</sup>. ZHANG hat in seiner Arbeit in Hochläufen die Steifigkeit der Magnetlagerung kontinuierlich so eingestellt, daß sich die Rotordrehzahl immer in einem Tilgerbereich befindet<sup>33</sup>.



**Bild 4.22:** Rotor in aktiven Magnetlagern

Der Lagerabstand beträgt etwa 430 mm, die beiden gleichen Scheiben 2 und 3 (c und d, Masse  $m_{2,3} \approx 1 \text{ kg}$ ) sind etwa mittig zwischen den beiden AMBs (b und e) im Ab-

<sup>31</sup> ZHANG, *Aktive Regel- und Kompensationsstrategien für magnetgelagerte [...] ([71], 2002)*

<sup>32</sup> ABRAHAM; MARKERT; WITFELD, „Experimentelle Untersuchungen zu aktiven [...]“ ([1], 1988)

<sup>33</sup> Zum mindesten an einer bestimmten Stelle

stand von 165 mm zueinander angebracht. Die überkragende Scheibe 5 (f) ist etwas kleiner ( $m_5 \approx 0.8 \text{ kg}$ ) und befindet sich 96 mm außerhalb des Lagers. Die Gesamtlänge der Welle beträgt 615 mm. Alle mitrotierenden Teile sind mit Spannhülsen auf der Stahlwelle aufgespannt. Die Meßflächen der Scheiben befinden sich an den jeweiligen Außenseiten und sind für Wirbelstromsensoren ausgestaltet. Die äußere Dämpfung zur Kompensation der inneren Dämpfung aufgrund Mikroschlupf wird über die Magnetlager eingebracht. Angetrieben wird das magnetgelagerte Rotorsystem von einem bürstenlosen AC-Servomotor (a). Dieser besitzt ein freies Wellenende, auf dem ein Inkrementalgeber g) sitzt, der den Rotordrehwinkel erfaßt.

Der Rotor wird mit klassischen Verfahren<sup>34</sup> ausgewuchtet, um anschließend eine bekannte zu identifizierende Unwucht anzufügen.

Die verwendeten Magnetlager sind aktive Systeme, die – vereinfacht formuliert – aus mehreren Elektromagneten bestehen<sup>35</sup>. Da Elektromagnete auf unmagnetisierte ferromagnetische Materialien ausschließlich anziehende Kräfte erzeugen können, sind zur Realisierung einer Rotorlagerung jeweils zwei gegenüberliegende (üblicherweise gleichartige) Elektromagnete nötig. Die anziehenden Magnetkräfte

$$F_{\text{mag}} = k_{\text{mag}} \frac{I^2}{s^2} \quad (4.7)$$

sind quadratisch im Strom  $I$  und umgekehrt quadratisch zum Abstand  $s$ . Der genähernte Proportionalitätsfaktor  $k_{\text{mag}} \approx 1/4 \mu_L A_L n_{\text{AMB}}^2$  enthält die magnetische Permeabilität von Luft  $\mu_L$ , die Luftpaltquerschnittsfläche  $A_L$  und die Anzahl der Wicklungen für die Elektromagneten  $n_{\text{AMB}}$  im Magnetlager. Da der Rotor im Betrieb nicht anstreifen soll, gibt es einen sogenannten Ruhespalt  $s_0$ . Mit der Aufteilung des Gesamtstroms in einen Vormagnetisierungsstrom  $I_V$  und einen Regelstrom  $I_R$  ergibt sich für zwei gegenüberliegende Magnete die nichtlineare und die linearisierte Gesamtkraft

$$F_{\text{AMB}} = k_{\text{mag}} \left[ \left( \frac{I_V + I_R}{s_0 + r_W} \right)^2 - \left( \frac{I_V - I_R}{s_0 - r_W} \right)^2 \right] \approx 4 k_{\text{mag}} \frac{I_V}{s_0^2} \left( I_R - \frac{I_V}{s_0} r_W \right). \quad (4.8)$$

Der zweite Term dieser linearisierten Gesamtkraft ist proportional zur Rotorauslenkung, allerdings ist der als Steifigkeit auffassbare Proportionalitätsfaktor negativ. Ein positiver Abstand zur Nullage  $r_W$  hätte also eine Kraft zur Folge, die den Zapfen noch weiter von dieser Nullage entfernte. Ein solches System ohne Regelung ist also instabil.

Deshalb wird ständig die jeweilige Position der Lagerzapfen  $\tilde{r}_W$  gemessen und mit der Sollage verglichen. Mit einem PID-Regler<sup>36</sup> wird dann der Regelstrom  $I_R$  so eingestellt, daß die auftretende Regelabweichung  $\Delta r_W = \tilde{r}_W - r_{W,\text{soll}}$  ausgeregelt wird<sup>37 38</sup>.

<sup>34</sup> Auch an diesem Rotor wurde das stationäre Wuchten nach Eigenformen angewendet.

<sup>35</sup> MARKERT, „Gleitlager- und Magnetlagertechnik“ ([39], 1993)

<sup>36</sup> LUNZE, *Regelungstechnik 1* ([37], 2014, S. 398 ff.)

<sup>37</sup> Zum näheren Studium von aktiven Magnetlagern sei auf die einschlägige Literatur, z. B. von SCHWEITZER, verwiesen.

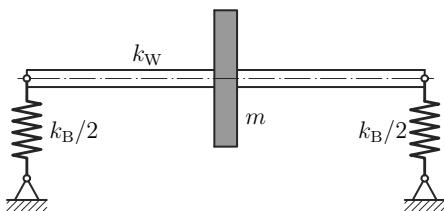
<sup>38</sup> SCHWEITZER U. A., *Magnetic Bearings* ([58], 2009, alle S.)

Dieser PID-Regler muß die Gesamtsteifigkeit des Magnetlagers durch die dem Proportionalanteil zugeordnete Reglerkonstante  $k_P$  insgesamt positiv halten. Durch den I-Anteil werden bleibende Regelabweichungen beseitigt und durch den D-Anteil wird äußere Dämpfung eingebracht. Insgesamt lautet die linearisierte Gesamtkraft des Magnetlagers für eine Richtung

$$F_{\text{AMB},\text{PID}} = k_D \Delta \dot{r}_W + (k_P - k_{\text{AMB}}) \Delta r_W + k_I \int \Delta r_W dt, \quad (4.9)$$

wobei alle Lagerparameter und der Vormagnetisierungsstrom  $I_V$  in den Reglerkonstanten  $k_P$ ,  $k_I$  und  $k_D$  enthalten sind. Die Gesamtsteifigkeit eines Lagers lautet somit  $k_L = k_P - k_{\text{AMB}}$ .

Grund der Verwendung des vorhandenen Rotors in AMBs in dieser Arbeit ist, daß seine modalen Parameter über die Lagersteifigkeiten verändert werden können. Auf welche Art, zeigt folgendes Gedankenexperiment an einem LAVAL-Rotor in nachgiebigen Lagern, dargestellt in Bild 4.23. Dieser Rotor hat eine Scheibe der Masse  $m$ , die auf einer Welle mit der Steifigkeit  $k_W$  sitzt. Diese Welle



**Bild 4.23:** LAVAL-Rotor in nachgiebigen Lagern

wird von zwei Magnetlagern gestützt, welche als zwei Federn dargestellt sind und jeweils die Steifigkeit  $k_B/2$  haben. Die symmetrische Hub-Eigenfrequenz des Rotors ist also aufgrund der Reihenschaltung der Federn

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_W k_B}{m(k_W + k_B)}}. \quad (4.10)$$

Wenn die Lagersteifigkeit deutlich kleiner ist als die Wellensteifigkeit,  $k_B \ll k_W$ , ergibt sich für die symmetrische Hub-Eigenfrequenz näherungsweise

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{k_B}{m}}. \quad (4.11)$$

Dieser Ausdruck ist nur noch von der Lagersteifigkeit abhängig. Die Lagersteifigkeit von Magnetlagern hängt jedoch bei gegebener Konstruktion (Wicklungen, Luftspalt, Material, Konstruktionsgeometrie) und gewähltem Vormagnetisierungsstrom nur noch vom P-Anteil  $k_P$  des Reglers ab [vgl. Gln. (4.8) und (4.9)]. Daher muß für eine lineare Veränderung der Eigenfrequenz mit der (beim Hoch- oder Auslauf zeitabhängigen) Drehzahl

$$\omega_0 \sim n(t) \implies k_P \sim n(t)^2 \quad (4.12)$$

gelten. Wird der P-Anteil des Reglers also quadratisch mit der Drehzahl verändert, wird sich die symmetrische Hub-Eigenfrequenz des Rotors linear mit der Drehzahl

verändern. Dabei ist noch die Einschränkung zu beachten, daß die Lagersteifigkeit  $k_B$  trotz der quadratischen Drehzahlabhängigkeit im durchfahrenen Drehzahlbereich deutlich kleiner als die Wellensteifigkeit  $k_W$  bleiben muß. Dies erfordert Kompromisse beim Vormagnetisierungsstrom  $I_V$ , der maßgeblich für die Vorspannung und damit für die Grundsteifigkeit der AMBs ist. Er darf einerseits nie zu klein werden, damit die Linearität der AMBs erhalten bleibt<sup>39</sup> und andererseits nie so groß werden, daß die Näherung  $k_B \ll k_W$  ihre Gültigkeit verliert.

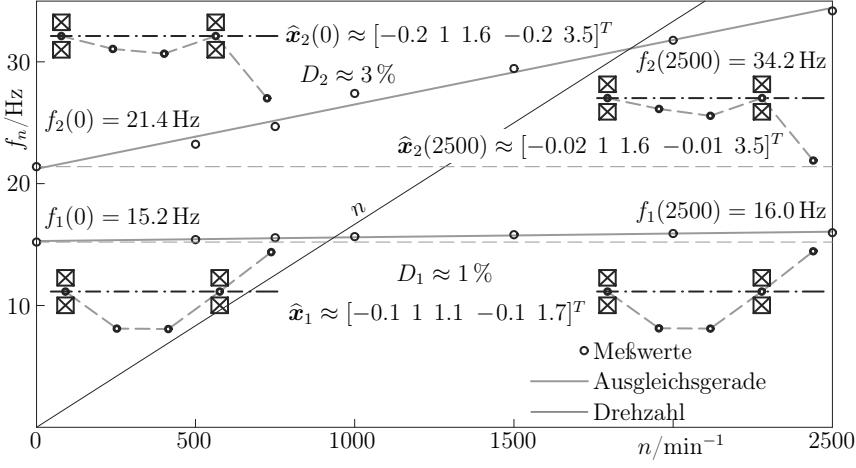


Bild 4.24: Rotor in aktiven Magnetlagern:

Ergebnisse experimenteller Modalanalysen bei verschiedenen Drehzahlen

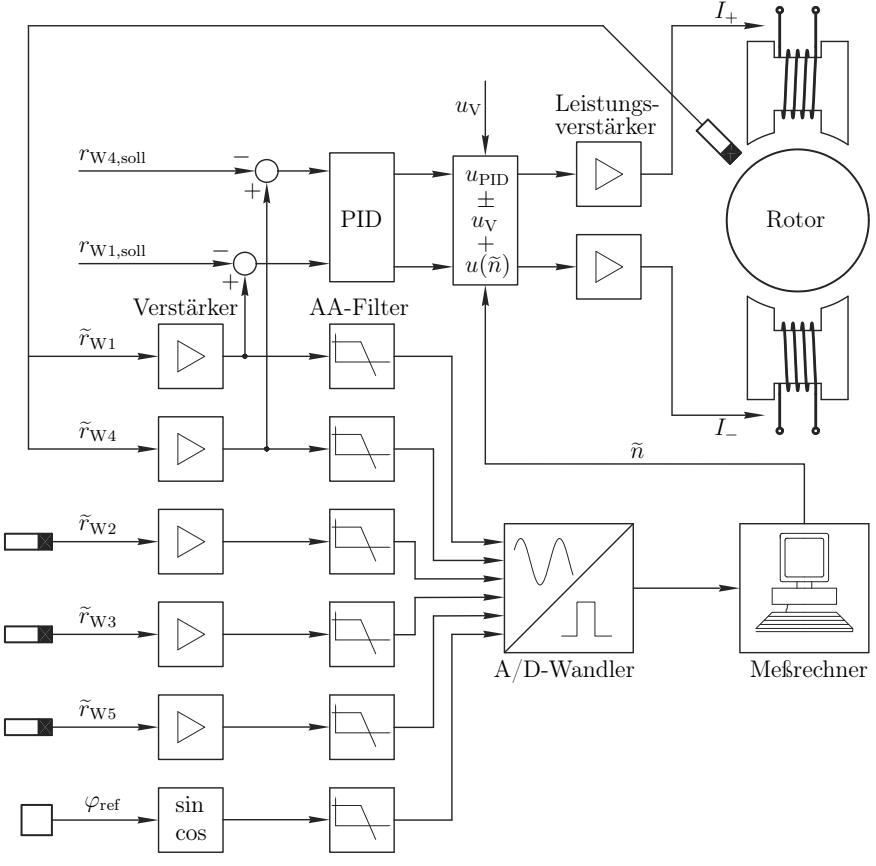
In Bild 4.24 sind die Ergebnisse der experimentellen Modalanalysen des so manipulierten Rotorsystems für verschiedene Drehzahlen als schwarze Kreise dargestellt. Zunächst ist nachgewiesen, daß sich wie geplant die Eigenfrequenzen tatsächlich linear in der Drehzahl ändern. Die dargestellten Eigenvektoren sind ebenfalls drehzahlabhängig. Diese Drehzahlabhängigkeit ist jedoch gering, die prinzipielle Form bleibt erhalten. Aus diesem Grund sind die Eigenvektoren nur für den Stillstand und für die Maximaldrehzahl  $n_{\max} = 2500 \text{ min}^{-1}$  dargestellt. Die im Bild aufgeführten Eigenformpaare sind zwei Ergebnisse aus den bei 7 Drehzahlen durchgeföhrten experimentellen Modalanalysen. Dabei ist die erste Eigenform grundsätzlich dadurch charakterisiert, daß Scheibe 5 gegenphasig zu den Scheiben 2 und 3 schwingt, bei der zweiten Eigenform schwingen alle Scheiben in Phase. Die Amplituden der Lagerzapfen sind nicht null, jedoch im Vergleich zu den Amplituden der Scheiben 2, 3 und 5 sehr klein. Die modalen Dämpfungswerte ändern sich ebenfalls mit der Drehzahl. Angegeben sind mittlere Werte. Die Dämpfung der ersten Mode  $D_1$  liegt bei allen Drehzahlen zwischen 0.9 und 1.3 %, die Dämpfung der zweiten Mode  $D_2$  liegt zwischen 2.1 und

<sup>39</sup> MARKERT, „Gleitlager- und Magnetlagertechnik“ ([39], 1993)

4.0 %. Die Dämpfungsmaße sind ausreichend hoch für einen sicheren überkritischen Betrieb. Zur Amplitudenbegrenzung befinden sich sowohl in den AMBs als auch an den Scheiben 2, 3 und 5 starre Fanglager.

#### 4.4.2 Meßkette

Die Meßkette im Prüfstand mit dem Rotor in aktiven Magnetlagern (AMBs) ist in Bild 4.25 zu sehen. Dadurch, daß AMBs zur Lagerung des Rotors eingesetzt werden, ist die Meßkette ein z. T. geschlossener Regelkreis, bei dem die Lagerzapfenauslenkungen zurückgeführt werden.



**Bild 4.25:** Meßkette des Prüfstands für den Fünfscheibenrotor in aktiven Magnetlagern und abstrahierter Regelkreis für die Magnetlager

Die Verschiebungen aller drei Scheiben in  $z$ - und  $y$ -Richtung (komplex:  $\tilde{r}_{W2}$ ,  $\tilde{r}_{W3}$ ,  $\tilde{r}_{W5}$ ) werden mit Wirbelstromaufnehmern des Typs DORNIER I-W-A/OLIE-K A26

aufgenommen. Die Signale werden auf den Spannungsbereich  $\pm 5$  V transformiert und anschließend mit analogen Tiefpaßfiltern mit der Eckfrequenz  $f_e = 100$  Hz gefiltert. Die Verschiebungen der Lagerzapfen in den Magnetlagern in  $z$ - und  $y$ -Richtung (komplex:  $\tilde{r}_{W1}, \tilde{r}_{W4}$ ) werden ebenfalls aufgenommen. Hier sind Sensoren des Typs VIBRO-METER TQ402 mit Verstärkern (VIBRO-METER IQS 452) eingebaut. Diese Sensoren messen sowohl vor als auch hinter der jeweiligen Zapfenmitte, und können damit auch Verkippungen der Zapfen detektieren. Das Summensignal pro Zapfen und Koordinatenrichtung wird dann für den Soll-Istwert-Vergleich im PID-Regler herangezogen. Letzterer bildet gemäß der Vorschrift (4.9) das Regelsignal. Dazu kommt der Vormagnetisierungsstrom und der in der Drehzahl quadratische Zusatz. Die Summen daraus werden im Leistungsverstärker MECOS PA 8/50 in Stromsignale für die einzelnen Spulen des Magnetlagers gewandelt.

Der Drehwinkel des Rotors wird mit einem Inkrementalgeber gemessen. Dieser hat 2048 Inkremente pro Umdrehung. Dieses Pulssignal enthält also dominant die 2048-fache Drehfrequenz sowie ganzzahlige Vielfache davon. Das Inkrementalgebersignal wird durch eine Auswerteelektronik in ein analoges Sinus- bzw. Cosinussignal gewandelt. Diese Signale enthalten dieselbe Frequenz wie die unwuchterregten Schwingungen und werden somit durch das analoge Anti-Aliasing-Filter (KEMO BenchMaster 21M) um dieselbe Phase verschoben. Relative Phasenverschiebungen durch die Tiefpaßfilter werden somit ausgeschaltet. Die Anti-Aliasing-gefilterten Meßdaten werden

**Tabelle 4.10:** Komponenten am Versuchsstand des Rotors in aktiven Magnetlagern

Komponente	Typ	Eigenschaft
Servomotor (bürstenlos)	ESR POLLMEIER MR 7434.5812-U5-N120	Maximaldrehzahl $12000\text{ min}^{-1}$ Nennmoment $1.7\text{ Nm}$
Drehgeber	HENGSTLER RI58-O	2048 Inkremente
Wirbelstromsensoren Scheiben	TELEMESS I-W-A/OLIE-K A26	Auflösung $4\text{ }\mu\text{m}$ Meßbereich $10\text{ mm}$
Tiefpaßfilter	KEMO BenchMaster 21M 8 Kanäle	Butterworth 8. Ordnung Eckfrequenz $f_e = 100\text{ Hz}$
Wirbelstromsensoren AMB-Hülsen	VIBRO-METER TQ402	Auflösung $2\text{ }\mu\text{m}$ Meßbereich $2\text{ mm}$
Signalaufbereiter	VIBRO-METER IQS 452	Ausgangssignal $\pm 10\text{ V}$
Leistungsverstärker	MECOS PA 8/50	Verstärkungsfaktor $0.8\text{ A/V}$
Echtzeitregelsystem	dSPACE DS1106	Abtastfrequenz $f_s = 2^{12}\text{ Hz}$

nun A/D-gewandelt (Abtastfrequenz  $f_s = 2^{12}$  Hz) und im Meßrechner gespeichert<sup>40</sup>.

Die verwendeten Komponenten zur Messung der Scheibenauslenkungen und drehzahl-abhängigen Regelung der aktiven Magnetlager sind in Tabelle 4.10 kompakt zusammengefaßt.

#### 4.4.3 Aufbereitung der Meßdaten

Die Meßsignale dieses Versuchsstands haben eine ausreichende Genauigkeit, sodaß eine nachträgliche Meßdatenaufbereitung nicht notwendig ist. Aufgrund der im Vergleich zu den bisher betrachteten Rotorsystemen niedrigeren Abtastrate und der kurzen Dauer des Hochlaufs ist Downsampling nicht nötig, da die Meßdaten ausreichend schnell geladen werden.

#### 4.4.4 Identifikationsergebnis

Bei der Unwuchtidentifikation des AMB-Rotorsystems werden (wie stets) die rückwärtslaufenden und die nicht durchfahrenen vorwärtslaufenden Moden sowie die Zeitableitung der Rechts-Modalmatrix vernachlässigt. Die lineare Approximation der modalen Parameter in der Drehzahl trifft jedoch (laut der Ergebnisse der experimentellen Modalanalysen in Bild 4.25) das reale Verhalten.

Die genauen Werte beider Eigenfrequenzen, ermittelt im Stillstand und bei 6 Drehzahlen bis  $2500 \text{ min}^{-1}$ , gehen aus der experimentellen Modalanalyse hervor (vgl. 4.25).  $f_1$  steigt linear von 15.2 Hz im Stillstand auf 16.0 Hz bei  $2500 \text{ min}^{-1}$  an,  $f_2$  verändert sich in diesem Drehzahlbereich ebenfalls linear von 21.4 Hz zu 34.2 Hz.

Als Startwerte für die Identifikation werden wie bisher für alle Unwuchten  $U_1$  bis  $U_5$  Nullen angesetzt. Für die erste Eigenfrequenz  $f_1$  werden die Unter- und Obergrenzen bei 10 und 30 Hz, für die zweite Eigenfrequenz  $f_2$  bei 15 und 100 Hz gesetzt. Als Startwerte für die beiden Eigenfrequenzen werden  $f_{1,\text{ini}} = 20 \text{ Hz}$  und  $f_{2,\text{ini}} = 30 \text{ Hz}$  angesetzt. Für die Dämpfungen werden dieselben physikalisch sinnvollen Grenzen wie bisher gewählt ( $0 \leq D_{1,2} \leq 0.2$ ).

Die gemessenen Scheibenauslenkungen der Scheiben 2, 3 und 5 in  $z$ -Richtung (senkrecht)  $\tilde{z}_2$ ,  $\tilde{z}_3$  und  $\tilde{z}_5$  während eines schnellen Hochlaufs von 0 auf  $2500 \text{ min}^{-1}$  in 0.7 s sind in Bild 4.26 a), b) und c) in schwarz dargestellt. Diese Kurven stellen die Zielgrößen dar. Der Drehzahlverlauf wird in den jeweiligen Plots durch die dünne schwarze Kurve dargestellt. Bei den Kurven ist auffällig, daß die zweite Resonanzüberhöhung praktisch nicht zu sehen ist. Dies resultiert aus der extrem hohen Anfahrbeschleuni-

<sup>40</sup> Dies ist eine extreme Überabtastung im Vergleich zum NYQUIST-Kriterium. Downsampling der gemessenen Daten erfolgt ggf. im *postprocessing*, zunächst wird dies jedoch unterlassen

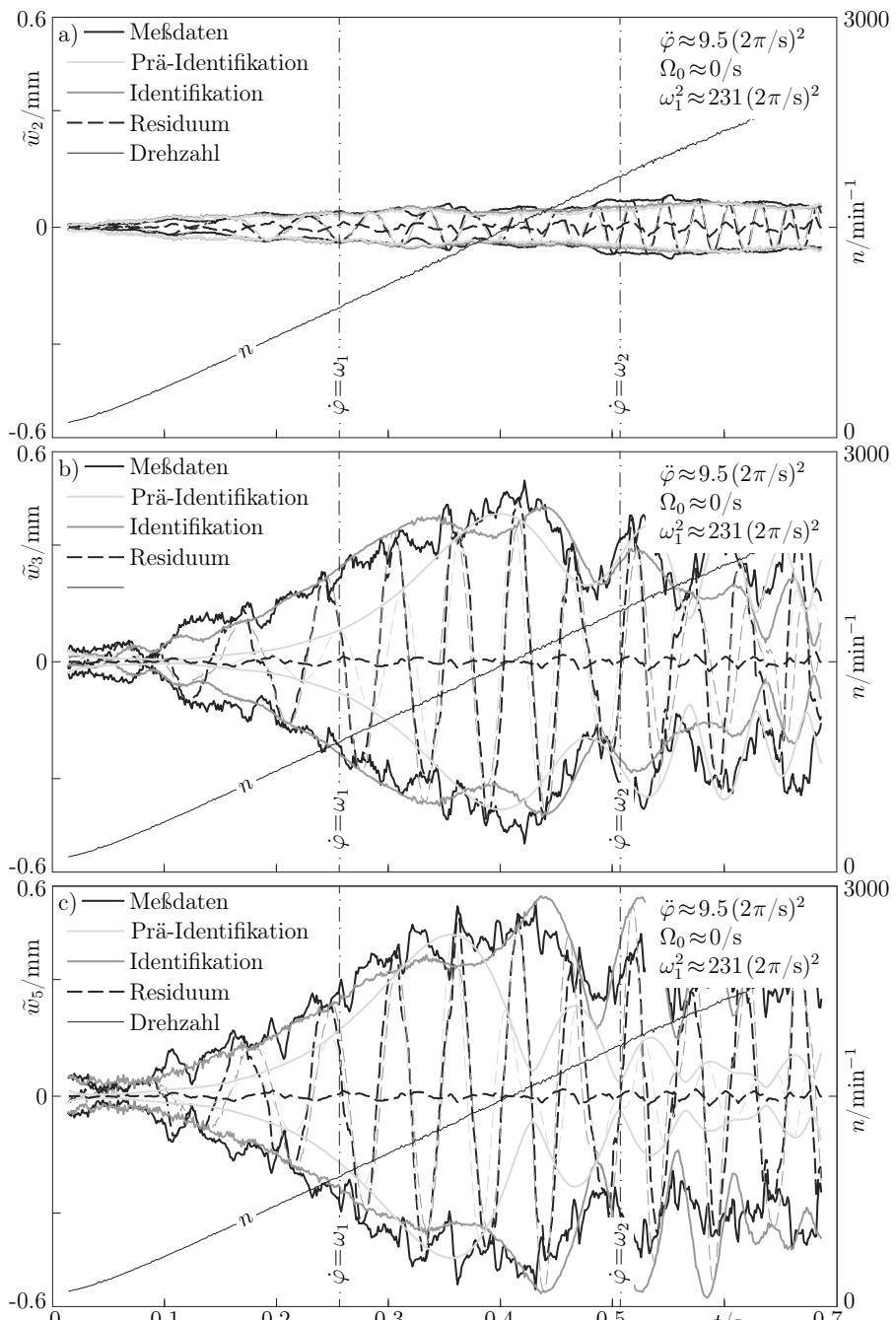
gung und der höheren Dämpfung  $D_2$  im Vergleich zu  $D_1$  sowie dem eher der ersten Eigenform entsprechenden angebrachten Unwuchtsatz.

Zur Unwuchtdentifikation wird das kaskadierende Verfahren eingesetzt. Die letzten Resultate der numerischen Integration für  $w_{W2}$ ,  $w_{W3}$  und  $w_{W5}$  vor Abschluß der linear-zeitinvarianten Voridentifikation sind in Bild 4.26 a), b) und c) hellgrau dargestellt. Dies beschreibt also die Schwingungsantwort eines drehzahl- und damit zeitunabhängig modellierten Rotorsystems während eines Hochlaufs mit dem gemessenen Drehzahlverlauf, bei dem alle Parameter so angepaßt werden, daß es die gemessenen Schwingungsantworten eines in Wirklichkeit linear-drehzahlvariablen Systems optimal abbildet. Diese Werte werden nun als Startwerte in dem Algorithmus verwendet, bei dem das Rotorssystem als linear-zeitinvariant (sprich: drehzahlvariabel) modelliert ist. Das optimale Resultat der numerischen Integration dieses Systems ist als graue Linie in Bild 4.26 zu sehen. Es ist erkennbar, daß das LTI-System die Verschiebungen der Scheiben 3 und 5 in  $z$ -Richtung nur sehr schlecht anpassen kann, insbesondere oberhalb der ersten Resonanz. Dies resultiert aus der starken Drehzahlabhängigkeit der zweiten Eigenfrequenz. Zudem ist Bild 4.26 a) zu entnehmen, daß die Amplituden der Scheibe 2 sehr klein und Überhöhungen in den Resonanzzonen nicht stark ausgeprägt sind.

Die Signale an allen drei Scheiben werden allerdings vom identifizierten LTV-System deutlich besser abgebildet. Die nach der Anpassung des LTV-Systems verbleibenden Residuen sind gestrichelt schwarz dargestellt<sup>41</sup>. In diesem Falle wird zur Formulierung des Anpassungskriteriums der gesamte durchfahrene Drehzahlbereich verwendet, da sich das Rotorssystem aufgrund der hohen Drehbeschleunigung praktisch während der gesamten Messung in Resonanznähe befindet.

Die am Rotor angebrachten und zu identifizierenden Ziel-Unwuchten sind drei Einzelunwuchten an den Scheiben 2, 3 und 5. Da die Lagerzapfenbewegung im Vergleich zu den Scheibenbewegungen 2, 3, und 5 sehr klein sind, werden sie nicht zur Identifikation herangezogen und auch nicht bei der Beurteilung der Identifikationsgüte betrachtet. An den drei Scheiben 2, 3 und 5 (siehe Foto 4.22) werden die Einzelunwuchten  $U_2$ ,  $U_3$  bzw.  $U_5$  angebracht. Diese angebrachten und zu identifizierenden Unwuchten liegen bei  $U_2 = 0 \text{ kg m}$ ,  $U_3 = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}$  und  $U_5 = 2.1 \cdot 10^{-5} e^{i\pi} \text{ kg m}$ . Die aus dem kaskadierenden Identifikationsalgorithmus resultierenden Unwuchten sind in Tabelle 4.9 numerisch und in Bild 4.27 grafisch in der gewohnten Weise den tatsächlich angebrachten Unwuchten gegenübergestellt. Zudem sind die verwendeten Startwerte vermerkt. Die Prä-Identifikation trifft die Phasenlagen der drei Unwuchten zwar einigermaßen, im Vergleich zu allen vorher getesteten Rotorssystemen ist dies jedoch kein gutes Ergebnis. Die Phasenlagen aus der Prä-Identifikation sind also als Startwerte

<sup>41</sup> Für den in Bild 4.26 dargestellten Fall ist  $J_{LTI} = 1500$ , was die Grenze für den Abbruch der LTI-Optimierung darstellt, und  $J_{LTV} \approx 3800$ .



**Bild 4.26:** Scheibenschwingungen am AMB-Rotor; a) Auslenkungen Scheibe 2  $w_2(t)$ , b) Auslenkungen Scheibe 3  $w_3(t)$  und c) Auslenkungen Scheibe 5  $w_5(t)$ : Meßsignal (schwarz), Resultat des LTI-Identifikationsalgorithmus' (hellgrau) und Re-

**Tabelle 4.11:** Ergebnis der Unwuchtidentifikation am AMB-Rotor

	$U_2$	$U_3$	$U_5$
Anfangswerte Voridentifikation	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$
Ergebnis Voridentifikation	$2.4 \cdot 10^{-7} \text{ kg m} \angle 0.0^\circ$	$2.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 36.0^\circ$	$2.9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 216.6^\circ$
Anfangswerte Identifikation	$2.4 \cdot 10^{-7} \text{ kg m} \angle 0.0^\circ$	$2.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 36.0^\circ$	$2.9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 216.6^\circ$
Ergebnis Identifikation	$3.3 \cdot 10^{-9} \text{ kg m} \angle 0.0^\circ$	$1.7 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 359.9^\circ$	$2.4 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 193.7^\circ$
Zielwerte	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$	$1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 0^\circ$	$2.1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m} \angle 180^\circ$

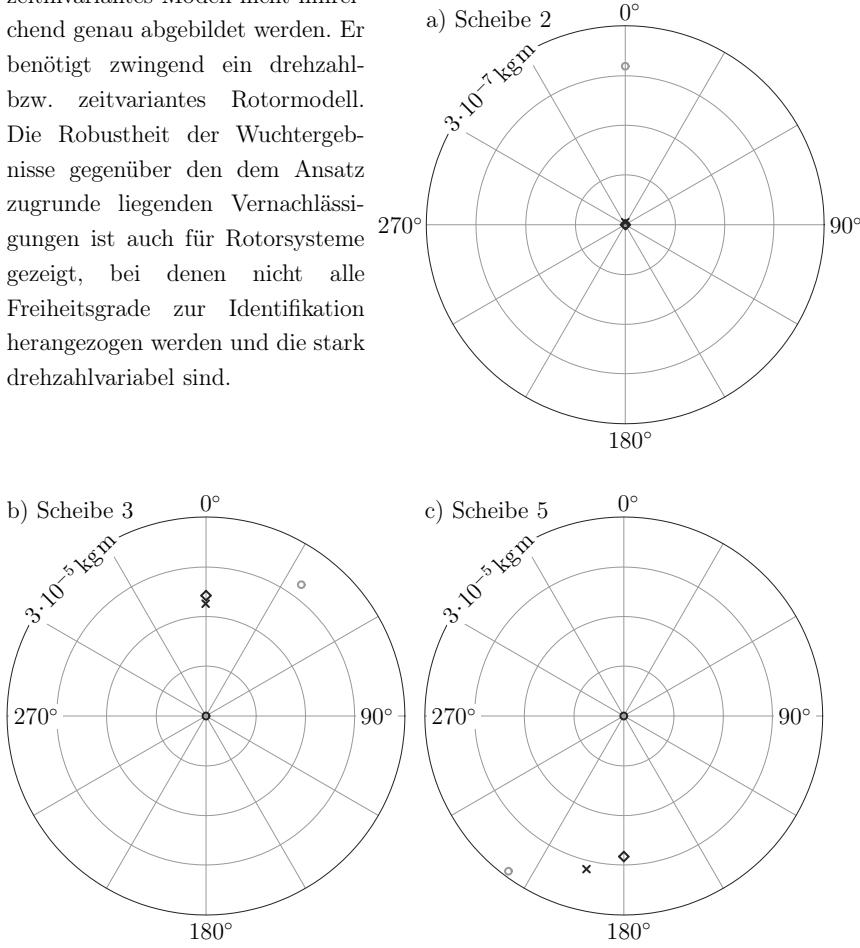
für die LTV-Identifikation zu gebrauchen. Für ein verwertbares Ergebnis eines Wucherverfahrens ist das Ergebnis jedoch viel zu ungenau. Die Unwucht  $|U_2|$  an der Scheibe 2 ist sehr klein (daher ist dort die Phasenlage nicht interpretierbar), an den Scheiben 3 und 5 werden die Beträge zu groß vor-identifiziert, liegen aber zumindest in der richtigen Größenordnung. Erst bei der Voridentifikation zu groß geschätzt, werden bei der Anpassung des drehzahlvariablen (LTV-)Rotormodells die Beträge und Phasen der Unwuchten  $U_2$  und  $U_5$  auch an den Scheiben 3 und 5 passend getroffen.

In den Polardiagrammen in Bild 4.27 sind als schwarze Rauten die Zielunwuchten  $U_{2/3/5,\text{soll}}$ , als graue Kreise die Ergebnisse der LTI-Identifikation  $U_{2/3/5,\text{LTI}}$  und als schwarze Kreuze die Endergebnisse der LTV-Identifikation  $U_{2/3/5,\text{LTV}}$  dargestellt. Die schwarzen Kreise im Koordinatenursprung markieren die Startwerte  $U_{2/3/5,\text{ini}}$  der Voridentifikation. Die Ergebnisse aller Identifikationsschritte an Scheibe 2 überdecken sich, da in allen Schritten Unwuchten nahe 0 identifiziert werden, was auch die Zielunwucht darstellt.

Das endgültige Wuchtergebnis ist auch beim drehzahlvariablen Mehrscheibenmotor in AMBs ausgesprochen gut. Der Rechenzeitbedarf liegt für die Identifikation dieses Rotorsystems auf dem schon genannten Rechner bei etwa 25 s. Davon entfallen moderate 15 s auf das Laden und Verarbeiten der Meßdaten  $\tilde{x}(t)$ . Die Datenmenge ist um mehr als einen Faktor 10 geringer als bei anderen Versuchen.

Wegen des sehr schnellen Hochlaufs ist in den Darstellungen der gemessenen Auslenkungen die Durchfahrt durch die zwei Resonanzen nicht offensichtlich. Trotzdem wurden die Parameter und auch der Unwuchtanteil der zwei Eigenformen richtig geschätzt und die Funktionsfähigkeit des neuen Algorithmus' zur modellgestützten Unwuchtidentifikation inclusive seiner kaskadierenden Routine zur Startwertgenerierung auf modaler Basis nachgewiesen werden. Der Rotor kann durch ein drehzahl- bzw.

zeitinvariantes Modell nicht hinreichend genau abgebildet werden. Er benötigt zwingend ein drehzahl- bzw. zeitvarianter Rotormodell. Die Robustheit der Wuchtergebnisse gegenüber den dem Ansatz zugrunde liegenden Vernachlässigungen ist auch für Rotorsysteme gezeigt, bei denen nicht alle Freiheitsgrade zur Identifikation herangezogen werden und die stark drehzahlvariabel sind.



**Bild 4.27:** Polardiagramme der Unwuchten am AMB-Rotor, Scheiben 2, 3 und 5:

- ◊ Tatsächliche Unwucht  $U_{2/3/5,\text{soll}}$
- Identifizierte Unwucht (LTI)  $U_{2/3/5,\text{LTI}}$
- × Identifizierte Unwucht (LTV)  $U_{2/3/5,\text{LTV}}$
- Ausgangswert der Identifikation  $U_{2/3/5,\text{ini}}$

## 4.5 Abgasturbolader

Zuletzt ist nun die Funktionsfähigkeit an dem realitätsnahen Beispiel eines bekannt drehzahlvariablen Rotorsystems, dem Abgasturbolader, nachzuweisen. Dieser wird am Kaltgasprüfstand betrieben. Er stellt den Lackmustest für das erarbeitete Verfahren dar. Durch die Schwimmbuchsenlagerung weisen die Rotoreigenschaften eines Turboladers signifikante Drehzahlabhängigkeiten auf. Darüber hinaus handelt es sich um ein stark nichtlineares System, das eigentlich nicht einmal um die Mittelachse linearisiert werden darf, da in dieser Stellung die Tragfähigkeit des Ölfilms sehr gering ist<sup>42</sup>.

### 4.5.1 Systembeschreibung und Modellierung

In Bild 4.28 ist der untersuchte Abgasturbolader dargestellt. Der Turbolader im Turbinengehäuse (b) wird mit Kaltgas aus dem hausinternen Druckluftnetz über die Luftzufuhr (a) ( $p_{\text{Luft}} = 5 \text{ bar}$ ) angetrieben. Dabei wird das Turbinenrad ähnlich wie im Fahrzeug angeströmt, allerdings mit dem erwähnten Kaltgas, was einen verringerten Energieinhalt mit sich bringt. Dies hat zur Folge, daß am Prüfstand die Rotor-drehzahlen wie im Fahrzeug nicht ganz erreicht werden können. Zur Minimierung des Verluststroms werden die Messungen mit geschlossenem Wastegate (c) durchgeführt. Damit erreicht man hohe Maximaldrehzahlen und -beschleunigungen. Die Versorgung (e) der Gleitlagersektion (d) mit dem Getriebeöl Essolube X2 20W wird von einer externen Pumpe mit dem Zuführdruck von  $p_{\text{zu}} \geq 4 \text{ bar}$  gewährleistet.

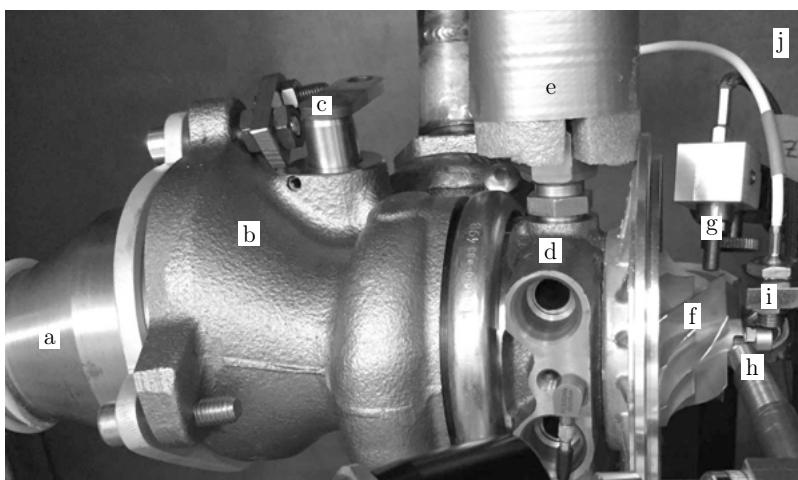


Bild 4.28: Abgasturboladerprüfstand

<sup>42</sup> KÖHL, „Stabilisierung von leichten Rotoren in Schwimmbuchsenlagern [...]“ ([29], 2015)

Die applizierten Sensoren sind ebenfalls in Bild 4.28 zu erkennen. Der Orbit der Wellenmutter wird durch zwei induktive Wegaufnehmer (i) gemessen. Ein baugleicher Sensor (h) detektiert zwei Nuten unterschiedlicher Größe am Verdichterrad (f), die am untersuchten ATL einen relativen Winkel von etwa  $50^\circ$  aufweisen. Aus diesem Signal wird der Drehwinkel berechnet. Ein vierter Wegsensor (g) detektiert die Schaufeln und gibt ein entsprechendes Pulssignal aus. Die Auswerteelektronik gibt dann eine drehzahlproportionale Spannung aus. Als Vorsichtsmaßnahme gegen evtl. umherfliegende Kleinteile befindet sich der ATL unter einer Stahlschutzhülle (j) aus 4 mm starken duktilen Stahlplatten.

#### 4.5.2 Meßkette

In Bild 4.29 ist die Meßkette des ATL-Prüfstandes dargestellt. Gemessen werden die vertikalen und horizontalen Verschiebungen  $w_{WM}$  und  $v_{WM}$  der Wellenmutter am Verdichterrad, sowie die Drehzahl  $n$  des Turboladers. Außerdem wird ein Winkelreferenzsignal  $\varphi_{ref}(t)$  aufgenommen, aus dem zusammen mit der Drehzahl der Drehwinkel des Rotors ermittelt wird. Die Eckfrequenz der Anti-Aliasing-Filter KEMO CardMaster 21.2 wird auf  $f_e = 12.75 \text{ kHz}$  eingestellt. Für die Identifikation ist es notwendig, daß alle gemessenen Signale gegeneinander keine Phasenverschiebungen haben und simultan aufgenommen werden. Zur Kontrolle werden neben den gefilterten Signalen auch die Originalsignale aufgenommen, die nicht durch das AA-Filter verändert wurden. In Bild 4.30 sind ungefilterte und gefilterte Rohdaten, in diesem Fall die gemessene

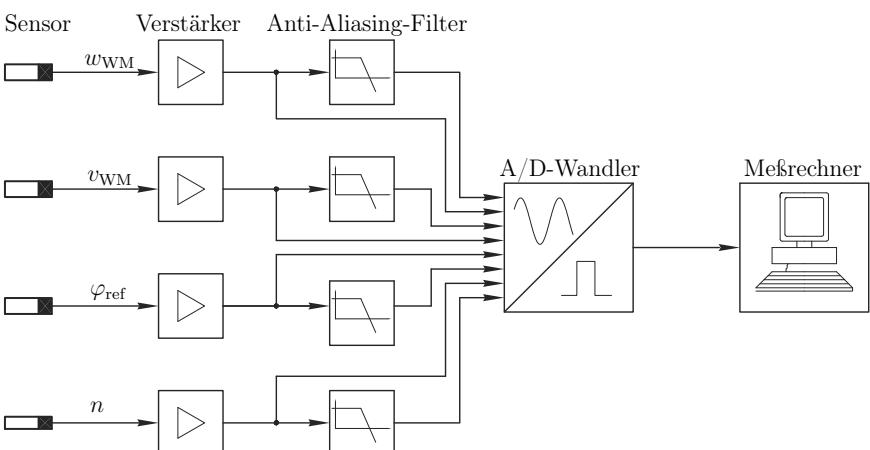
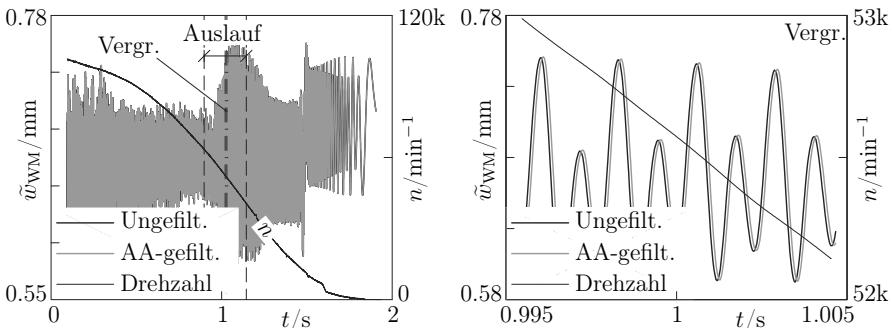


Bild 4.29: Meßkette am Abgasturbolader-Kaltgasprüfstand

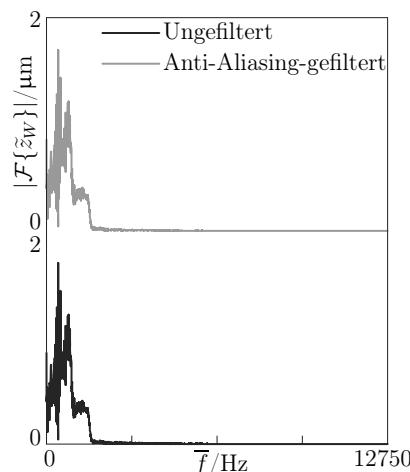
vertikale Verschiebung  $w_{WM}(t)$  der Wellenmutter, einander gegenübergestellt. Insbesondere im rechten (vergrößerten) Bild ist die zeitliche Verschiebung zwischen dem

ungefilterten und dem tiefpaßgefilterten Signal deutlich zu erkennen. Diese zeitliche Verschiebung hat den schon erwähnten Fehler in der Identifikation der Unwuchtposition zur Folge, der sich direkt auf das Wuchtergebnis niederschlägt.



**Bild 4.30:** Rotorauslenkungen zur Darstellung des Phasenverzugs durch das Anti-Aliasing-Filter

Um den systematischen Phasenfehler durch die Analogfilter zu umgehen<sup>43</sup>, werden zur Unwuchtaufklärung die ungefilterten Signale verwendet. Die Zulässigkeit muß jedoch für alle Meßsignale geprüft werden. Die folgende Prozedur wird zur Kontrolle durchgeführt, daß keine in den wahren Meßsignalen enthaltenen Frequenzen in den interessierenden Frequenzbereich per Aliasing hineingespiegelt werden: Jeder einzelne Meßkanal wird sowohl Anti-Aliasing-gefiltert als auch ungefiltert A/D-gewandelt und gespeichert. Anschließend werden die FFTs verglichen. Auf die Anti-Aliasing-Filter kann verzichtet werden, wenn diese gleich sind (beispielhaft dargestellt in Bild 4.31). Bei allen Versuchen war dies gegeben.



**Bild 4.31:** Spektrum des Auslaufs zum Ausschluß von Aliasing

Die zur Datenaufnahme verwendeten Geräte sind in Tabelle 4.12 noch einmal zusammengefaßt.

<sup>43</sup> Diese sind prinzipiell nötig, um das NYQUIST-Kriterium einzuhalten, indem sie den Frequenzinhalt der Meßsignale auf maximal die Hälfte der Abtastrate des A/D-Wandlers begrenzen.

**Tabelle 4.12:** Komponenten am Versuchsstand des Abgasturboladers

Komponente	Typ	Eigenschaft
Abgasturbolader	IHI RHF 4	Wastegate geschlossen ohne Verdichtergehäuse
Drehzahlsensor	MICRO-EPSILON DZ 130-DS05-C6	Meßbereich bis 6.66 kHz
Induktiver Wegsensor 3 Stück	MICRO-EPSILON DZ 110-T-S1-M-C3	Auflösung 0.1 µm Meßbereich 1 mm
Tiefpaßfilter	KEMO CardMaster 21.2 8 Kanäle	Butterworth 8. Ordnung Eckfrequenz $f_e = 12.75$ kHz
Echtzeitregelsystem	dSPACE DS1103	Abtastfrequenz $f_s = 2^{15}$ Hz

### 4.5.3 Aufbereitung der Meßdaten

#### Gleitendes Bandpaßfilter

Der Abgasturbolader ist infolge seiner Lagerung ein nichtlineares Rotorsystem. Als ein solches antwortet er auf eine Erregung mit einer bestimmten Frequenz nicht (nur) mit der Erregerfrequenz, sondern auch mit davon verschiedenen<sup>44</sup>. Zur Identifikation der Unwucht müssen daher die rohen Meßdaten bearbeitet werden, indem in erster Linie alle asynchronen Schwingungsanteile herausgefiltert werden. Die Beseitigung solcher asynchronen Schwingungsanteile und somit die Reduzierung des Meßsignals auf seine drehzahl synchronen Komponenten erfolgt im stationären Betrieb üblicherweise mit einem Bandpaßfilter fester Frequenz. Da jedoch in dieser Arbeit Meßdaten während sehr schneller Hoch- bzw. Ausläufe aufgenommen werden, muß hier das Bandpaßfilter mit der Drehzahl wandern. Dabei ergibt sich das Problem des Einschwingvorgangs bei Filtern. Analog zu den in dieser Arbeit betrachteten drehzahl- und damit zeitabhängigen Rotorsystemen ist also nun ein zeitabhängiges Bandpaßfilter zu realisieren. Ein solches Filter läßt sich im Zeitbereich durch die Differentialgleichung

$$\alpha_P(t) q^{(P)} + \dots + \alpha_1(t) \dot{q} + \alpha_0(t) q = \beta_R(t) u^{(R)} + \dots + \beta_1(t) \dot{u} + \beta_0(t) u \quad (4.13)$$

darstellen. Darin ist  $q(t)$  das gefilterte Ausgangssignal und  $u(t)$  das ungefilterte Eingangssignal. Gleichung (4.13) ist also eine lineare Differentialgleichung für mit zeitabhängigen Koeffizienten  $\alpha_p(t)$  und  $\beta_r(t)$ . Diese Gleichung kann gemäß

$$\alpha_{1,c} q_c + \alpha_{2,c} q_{c-1} + \dots + \alpha_{M,c} q_{c-M+1} = \beta_{1,c} u_c + \beta_{2,c} u_{c-1} + \dots + \beta_{N,c} u_{c-N+1} \quad (4.14)$$

für die Zeitstützstellen  $t_c$  diskretisiert werden, wobei sich je nach Filterordnung unterschiedliche Anzahlen der Koeffizienten  $M$  und  $N$  ergeben. Durch Umstellen dieser

<sup>44</sup> HAGEDORN, *Nichtlineare Schwingungen* ([23], 1978, S. 52)

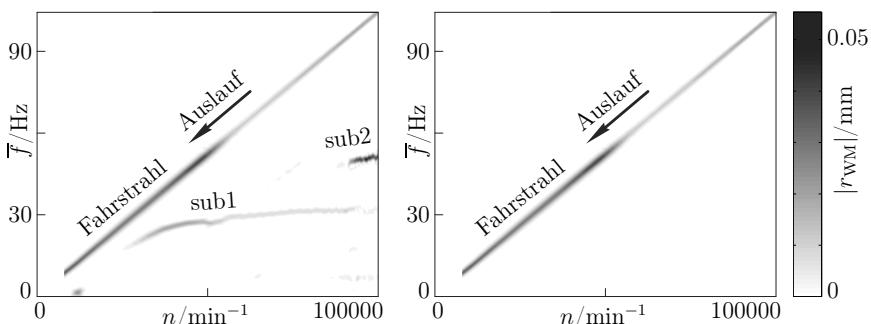
rekursiven Berechnungsvorschrift erhält man den Wert des gefilterten Ausgangssignals  $q_c$  an der Zeitstützstelle  $t_c$

$$q_c = \sum_{n=1}^N \frac{\beta_{n,c}}{\alpha_{1,c}} u_{c-n+1} - \sum_{m=2}^M \frac{\alpha_{m,c}}{\alpha_{1,c}} q_{c-m+1}. \quad (4.15)$$

Die Filterkoeffizienten  $\alpha_{m,c}$  und  $\beta_{n,c}$  sind für jede Zeitstützstelle neu zu ermitteln.

Das vorwärts gefilterte Signal wird anschließend noch einmal mit den jeweiligen zum Zeitschritt gehörigen Koeffizienten rückwärts gefiltert, um die durch die Vorwärtselfilterung entstandene Phasenverschiebung auszugleichen<sup>45</sup>. Bei Nutzung eines LTI-Filters wäre eine ideale Phasenkorrektur möglich. In diesem Falle wird jedoch ein LTV-Filter genutzt. Dadurch ist die Phasenverschiebung nicht vollständig vermeidbar, sondern sie wird nur verringert. Bei dieser Prozedur entstehen nichtkausale Signalanteile im gefilterten Signal<sup>46</sup>. Diese sind allerdings sehr klein und sind bei in der Realität möglichen Meßsignalen vernachlässigbar<sup>47</sup>.

In Bild 4.32 a) ist ein gemessener Auslauf am Turboladerprüfstand im Frequenzbereich in einem sogenannten CAMPBELL-Diagramm dargestellt. Die erwähnten asynchronen Schwingungsanteile sind darin deutlich zu erkennen (sub1, sub2). Die Auswirkung der gerade erläuterten Filterstrategie mit den mitlaufenden Eckfrequenzen bei dem 0.98- und dem 1.02-fachen der aktuellen Rotordrehzahl ist in Bild 4.32 b) zu erkennen. Alle asynchronen – in diesem Falle subsynchronen – Anteile sind aus dem Signal entfernt, ohne daß die drehzahlsynchrone Anteile sichtbar beeinflußt werden.



**Bild 4.32:** CAMPBELL-Diagramme der Rotorschwingungen:  
Effekt des gleitenden Bandpaßfilters im Frequenzbereich

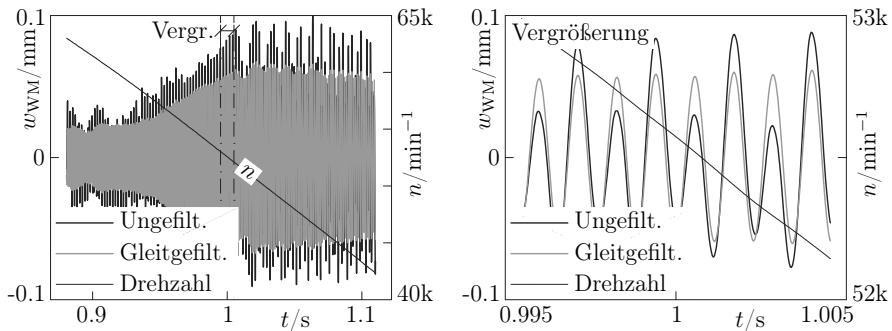
In Bild 4.33 ist dieser Effekt im Zeitsignal dargestellt, links das Zeitsignal der gemessenen Absenkung der Wellenmutter am Verdichterrad in  $z$ -Richtung während des ganzen Auslaufvorgangs, rechts eine vergrößerte Darstellung in Resonanznähe. Eine Phasenverschiebung ist nicht zu erkennen; aus dem offensichtlich multifrequenten

<sup>45</sup> GUSTAFSSON, „Determining the Initial States in Forward-backward Filtering“ ([21], 1996)

<sup>46</sup> ESSER, Bewertung von Auswuchtmethoden für Abgasturbolader ([11], 2016)

<sup>47</sup> Extrem scharfe Sprünge im Signal können beispielsweise solche nichtkausalen Anteile hervorrufen.

Signal ist ein quasi-harmonisches Signal extrahiert worden, welches im Identifikationsalgorithmus verwendet wird.

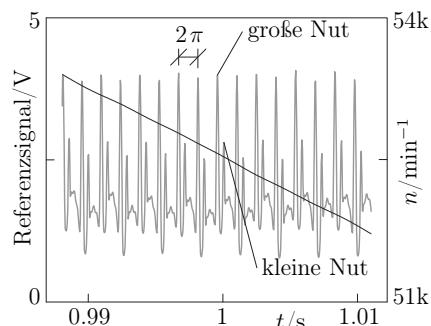


**Bild 4.33:** Rotorschwingung während eines Auslaufs:  
Effekt des gleitenden Bandpaßfilters im Zeitbereich

### Winkelberechnung aus Referenzsignal

Der Rotordrehwinkel kann am Abgasturbolader nicht direkt gemessen werden, da kein kommerziell erhältlicher Drehwinkelgeber montiert werden kann, ohne das Systemverhalten stark zu verändern. Bei industriellen Auswuchtmaschinen für Turbolader<sup>48</sup> ist es üblich, die Wellenmutter zu magnetisieren und anhand des Übergangs zwischen Nord- und Südpol eine Nullmarke für den Rotordrehwinkel definieren zu können. Bei den Versuchen in dieser Arbeit wurde ein anderer Weg eingeschlagen: Aus der Vorrückung stammende Nuten an der Wellenmutter werden zur Detektion einer vollen Rotorumdrehung verwendet. Der Wegsensor, der auf die Fläche mit diesen Nuten gerichtet ist, zeigt dann in Bild 4.34 dargestellte charakteristische Muster. Die größere der beiden etwa  $50^\circ$  zueinander entfernten Nuten wurde als Nullmarke verwendet. Zwischen zwei Detektionen der Nullmarke hat der Rotor eine volle Umdrehung vollzogen. Da sich die Drehzahl dazwischen jedoch nicht unerheblich ändert, wird diese numerisch integriert. Der Drehwinkelverlauf ist nun berechnet, wobei nach einer vollen Umdrehung wieder eine Detektion des Referenzsignals gesichert ist. Dadurch wird der kumulative Fehler („Drift“) vermieden, der beim einfachen Integrieren der Drehzahl entstünde.

<sup>48</sup> Diese arbeiten meist bei konstanten Drehzahlen.



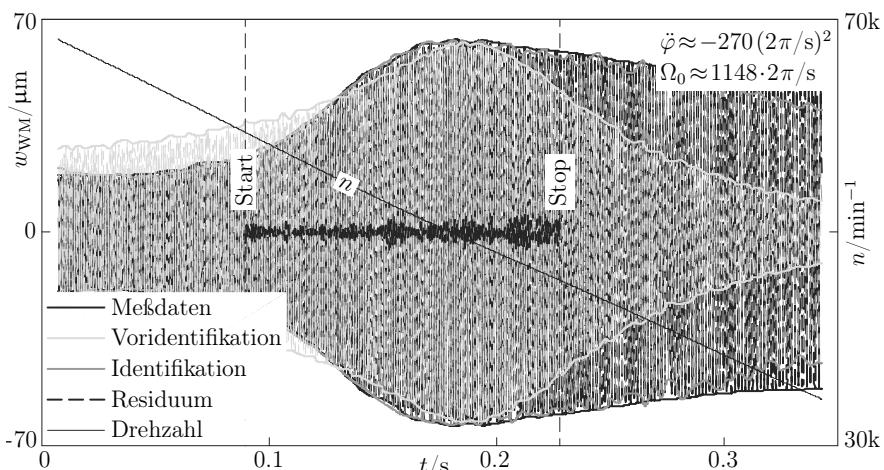
**Bild 4.34:** Abgasturbolader: Winkelreferenzsignal an der Wellenmutter

#### 4.5.4 Identifikationsergebnis

Die bearbeiteten Meßdaten werden nun zur Unwuchtidentifikation herangezogen. Dabei wurden rückwärstlaufende und nicht durchfaherene Moden vernachlässigt. Außerdem wurde die Zeitableitung der Rechtsmodalmatrix bei der LTV-Modellierung vernachlässigt. Die Abhängigkeit der modalen Parameter wurde als linear in der Drehzahl angesetzt.

Der Rotor war ursprünglich nahezu perfekt ausgewuchtet. An ihm wurde eine Unwucht angebracht, die in der Größenordnung der Unwucht aus dem realen Fertigungsprozeß liegt. Diese am Rotor angebrachte und zu identifizierende Zielunwucht  $U_{WM}$  wird durch Abtragen von Material der Masse von  $5.2 \text{ mg}$  in der Wellenmutter an einem Radius von  $4 \text{ mm}$  nach einer Vorwuchtung realisiert. Nach dem Befestigen der Wellenmutter ergibt sich eine Winkellage dieser zu identifizierenden Urunwucht von  $-8^\circ$ . Die Urunwucht liegt somit bei  $U_{WM} = 2.07 \cdot 10^{-8} e^{i352\pi/180} \text{ kg m}$ . Dies entspricht für eine Betriebsdrehzahl von über  $150000 \text{ min}^{-1}$  einer Gütestufe<sup>49</sup> deutlich über 3.

Die gemessene Wellenmutterschiebung während eines schnellen Auslaufs ist in Bild 4.35 in schwarz dargestellt. Es wird offensichtlich eine Resonanz durchfahren.



**Bild 4.35:** Synchroner Anteil der vertikalen Locknutverschiebung  $w_{WM}(t)$  des Abgasturboladers bei einem Auslauf:

Meßsignal (schwarz), Resultat des LTI-Identifikationsalgorithmus' (hellgrau) und Resultat des LTV-Identifikationsalgorithmus' (grau) nach dem letzten Iterationsschritt

<sup>49</sup> DIN ISO 1940-1 ([7], 2004)

Als Startwert der LTI-Identifikation wird für die Unwucht  $U_{WM}$  eine Null angesetzt. Für die einzige offensichtlich durchfahrene Gleichlaufeigenfrequenz  $f_1$  wird die Drehzahl am Hüllkurvenmaximum verwendet. Dieses liegt bei der Drehzahl  $n \approx 53000 \text{ min}^{-1}$  (883 Hz). Dieser Ansatz wurde gewählt, weil die Gleichlaufeigenfrequenz eines Abgasturboladers experimentell nur schwierig ermittelbar ist. Das liegt daran, daß eine Modalanalyse im Stillstand bei einem gleitgelagerten Rotor nur geringe Aussagekraft besitzt. Die Schwimmbuchse dreht sich im Lager erst bei etwa  $n \approx 20000 \text{ min}^{-1}$  nennenswert mit dem Rotor (halb frequent), womit und so die Betriebslagerung hergestellt ist<sup>50</sup>. Die Mode, in der die unwuchterregte Resonanz auftritt, kann hier aufgrund der singulären Mefstelle und der fehlenden experimentellen Modalanalyse nicht ermittelt werden. Aus der einschlägigen Literatur geht allerdings hervor, daß in der ersten unwuchterregten Resonanz Verdichter- und Turbinenrad eine gegenphasige Bewegung ausführen<sup>51</sup>. Daher wird als Startwert im vorgeschalteten LTI-Algorithmus für den Eigenvektor  $[1 \ -1]^T$  angesetzt.

Für die durchfahrene Gleichlaufeigenfrequenz  $f_1$  werden die Unter- und Obergrenzen bei 700 und 1000 Hz gesetzt, um ausreichend weit vom Hüllkurvenmaximum entfernt zu sein. Für die Dämpfung werden dieselben Grenzen  $0 \leq D_1 \leq 0.2$  wie bei allen Testobjekten gewählt.

In Bild 4.35 ist deutlich zu erkennen, daß die Optimierung des LTI-Modells nicht in der Lage ist, den Schwingungsverlauf im gegebenen Identifikationsintervall zwischen 0.09 und 0.22 s wiederzugeben. Auch die Extrapolation über das Identifikationszeitintervall hinaus ist erwartungsgemäß nicht zufriedenstellend. Läßt man jedoch Drehzahl- und damit Zeitvarianz in der Modellierung des Rotors zu, kann der gemessene Schwingungsverlauf innerhalb des definierten Intervalls fast perfekt approximiert werden. Auch eine Extrapolation über diesen Zeitbereich hinaus ist in Grenzen möglich.

Die aus dem kaskadierenden Identifikationsalgorithmus resultierenden Unwuchten sind in Tabelle 4.13 numerisch und in Bild 4.36 grafisch in der gewohnten Weise der tatsächlich angebrachten Unwucht gegenübergestellt. Zudem sind die verwendeten Startwerte für die Unwucht vermerkt. Es ist erkennbar, daß die Prä-Identifikation die Phasenlage der Unwucht zwar trifft, die Größenordnung des Betrags der prä-identifizierten Unwucht  $|U_{WM}|$  jedoch völlig falsch ist. Dennoch ist dieses Resultat, insbesondere wegen der Phasenlage aus der Prä-Identifikation als Startwert für die LTV-Identifikation nutzbar. Bei der LTV-Identifikation wird die Zielunwucht mit einem Fehler im Unwuchtbetrag sehr gut getroffen. Dieser weicht von der Zielgröße um weniger als als 5 %, ab.

<sup>50</sup> KÖHL, „Stabilisierung von leichten Rotoren in Schwimmbuchsenlagern [...]“ ([29], 2015)

<sup>51</sup> SCHWEIZER, „Dynamics and stability of turbocharger rotors“ ([59], 2010)

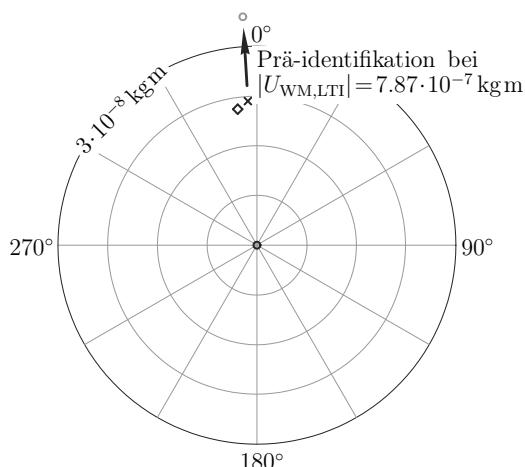
**Tabelle 4.13:** Ergebnis der Unwuchtidentifikation am Abgasturbolader

	$U_{WM}$
Anfangswerte Voridentifikation	$0 \text{ kg m} \angle 0^\circ$
Ergebnis Voridentifikation	$7.87 \cdot 10^{-7} \text{ kg m} \angle 356.5^\circ$
Anfangswerte Identifikation	$7.87 \cdot 10^{-7} \text{ kg m} \angle 356.5^\circ$
Ergebnis Identifikation	$2.17 \cdot 10^{-8} \text{ kg m} \angle 356.5^\circ$
Zielwerte	$2.07 \cdot 10^{-8} \text{ kg m} \angle 352^\circ$

Im Polardiagramm der Unwucht in Bild 4.36 stellt die schwarze Raute die Zielunwucht  $U_{WM,soll}$  dar. Das Ergebnis der LTI-Prä-Identifikation  $U_{WM,LTI}$  ist im Polardiagramm nicht zu sehen, da die Unwucht größer als der Darstellungsbereich ist. Als schwarzes Kreuz ist das Endergebnis  $U_{WM,LTV}$  der LTV-Identifikation eingezeichnet. Der schwarze Kreis im Koordinatenursprung markiert den Startwert der Voridentifikation. Trotz sehr ungünstiger Startwerte findet der Algorithmus den absolut optimalen Wert und das Wuchtergebnis ist sehr gut.

Der Rechenzeitbedarf liegt für diese Identifikation auf dem genannten Rechner bei etwa 450 s. Davon entfallen allerdings mehr als 420 s auf

das Laden und in diesem Fall auch signifikant auf die Verarbeitung der Meßdaten. Der Grund ist die hier extrem hoch angesetzte Abtastfrequenz von  $f_a = 2^{15} \text{ Hz}$ . In einer industriellen Umsetzung könnten die Meßdaten wenn möglich mit einer niedrigeren Abtastfrequenz wiederabgetastet werden. Dadurch kann die Datenmenge deutlich reduziert werden. Außerdem wird der Algorithmus durch die Umsetzung in einer hinsichtlich der Rechenzeit effizienten Programmiersprache (z. B. in C++) deutlich

**Bild 4.36:** Polardiagramm der Unwucht an der Wellenmutter des Abgasturboladers:

- ◊ Tatsächliche Unwucht  $U_{WM,soll}$
- Identifizierte Unwucht (LTI)  $U_{WM,LTI}$
- × Identifizierte Unwucht (LTV)  $U_{WM,LTV}$
- Ausgangswert der Identifikation  $U_{WM,ini}$

schneller als mit dem hier verwendeten MATLAB.

In diesem industrienahen Versuch konnte die Funktionsfähigkeit des neuen Algorithmus' zur modellgestützten Unwuchtidentifikation inclusive seiner kaskadierenden Routine zur Startwertgenerierung nachgewiesen werden. Die Robustheit der Ergebnisse gegenüber der verfahrensimmanenten Vernachlässigung der Zeitableitung der Rechtsmodalmatrix sowie gegen die einfache Näherung der modalen Parameter linear in der Drehzahl scheint auch für solch komplizierte Rotorsysteme wie dem Abgasturbolader gegeben zu sein.

## Kapitel 5

# Zusammenfassung und Ausblick

### 5.1 Zusammenfassung

Thema dieser Arbeit ist das instationäre Auswuchten von Rotoren mit drehzahlveränderlichen Parametern. Ausgehend von einem bekannten arbeitenden Verfahren, das für drehzahlnabhängige Rotoren entwickelt wurde, wurde ein modellgestützter Algorithmus inclusive Startwertgenerierungsroutine entwickelt, der in der Lage ist, Unwuchten von Rotoren mit drehzahlveränderlichen Parametern zu identifizieren. Im Gegensatz zu den gängigen Auswuchtverfahren werden zur Unwuchtermittlung schnelle Hoch- oder Ausläufe ohne Testgewichtsetzungen verwendet. Dies verkürzt die Dauer der Meßprozedur und führt, abhängig von der Drehbeschleunigung, zu verminderten Rotoramplituden während der Resonanzdurchfahrt.

Die Unwuchtentwicklung erfolgt anhand einer modellgestützten Parameteridentifikation im Zeitbereich. Dabei wird ein Rotormodell so angepaßt, daß die errechneten Schwingungsantworten des Modells infolge des im Versuch gemessenen Drehwinkelverlaufs den an denselben Stellen gemessenen Schwingungsantworten des Testrotors entsprechen. Dann ist anzunehmen, daß der so erzeugte optimale Parametersatz die richtigen Uruntwuchten enthält. Dieses Identifikationsverfahren löst ein yielddimensionales nichtlineares Minimierungsproblem mittels iterativer Suchalgorithmen.

Das diesem Vergleich zugrundeliegende Modell ist also hinsichtlich der Anzahl der anzupassenden Parameter möglichst einfach zu halten; zum einen, um den anfallenden Rechenaufwand zu verringern, zum anderen, um die Gefahr des Hängenbleibens in einem lokalen Minimum zu minimieren. Allerdings muß das Modell alle wesentlichen Rotoreigenschaften beinhalten und prinzipiell in der Lage sein, die Systemdynamik des gemessenen drehzahlveränderlichen Rotorsystems während eines Hoch- oder eines Auslaufs abilden zu können.

Die Anforderungen führten zu einem modal reduzierten Rotormodell. Als Anzahl der modalen Freiheitsgrade wird die Anzahl der offensichtlich durchfahrenen Resonanzen gewählt. Da im Gegensatz zu Vorgängerarbeiten auch drehzahlabhängige Rotorsysteme mit unsymmetrischen Systemmatrizen abbildbar sein müssen, sind Rechts- und Linksmatrizen unterschiedlich. Zusätzlich sind auch diese Eigenformen grundsätzlich als drehzahlabhängig zu modellieren. Damit bei solchen Systemen eine modale Entkopplung möglich ist, ist eine Näherung nötig: Das Produkt der zeitlichen

Änderung der Rechtsmodalmatrix und des modalen Zustandsvektors wird als klein gegenüber dem Produkt der Rechtsmodalmatrix und der Zeitableitung des modalen Zustandsvektors angesetzt. Der Nachweis der Richtigkeit dieser Näherung wurde für gängige Rotorsysteme erbracht. Außerdem werden die modalen Parameter des Rotormodells als linear mit der Drehzahl veränderlich angenähert. Auch diese Vereinfachung diente der Reduktion der freien Parameter. Der Fehler infolge dieser Näherung konnte bei allen untersuchten Rotorsystemen ebenfalls als gering abgeschätzt werden.

In dieser Arbeit wurde der eigentlichen Identifikation ein noch stärker reduziertes drehzahlunabhängiges (und damit linear-zeitinvariantes) Rotormodell zur Prä-Identifikation vorgeschaltet. Dessen identifizierte Parameter werden als Startwerte für die Identifikation am LTV-Rotormodell verwendet. Als Startwerte für diese LTI-Voridentifikation wurden grobe Schätzungen für die modalen Parameter gewählt. Diese Schätzungen resultierten beispielsweise für die Eigenfrequenz aus der Drehzahl, bei der die maximalen Schwingungsamplituden beim Hoch- oder Auslauf auftraten. Bessere Schätzungen wären die Resultate von experimentellen oder numerischen Modalanalysen (im Stillstand). Da dieses Wissen jedoch nicht immer vorhanden ist, wurden in dieser Arbeit hierzu an (fast) jedem verwendeten Prüfstand experimentelle Modalanalysen durchgeführt. Diese dienten zum Verständnis des Prüfstandes, wurden jedoch nicht als Startwerte verwendet.

Für das Identifikationsverfahren notwendig ist die Filterung der Meßsignale und eine sinnvolle Gewichtung der berücksichtigten Drehzahlbereiche. Über die obligatorische analoge Tiefpassfilterung zur Vermeidung von Aliasing hinaus ist es insbesondere bei multifrequenten Antwortsignalen nötig, eine mit der Drehzahl gleitende Bandpaßfilterung vorzunehmen. Dadurch werden die synchronen Anteile aus den Meßsignalen extrahiert. Mit drehzahl- bzw. zeitveränderlichen Koeffizienten kann das Einschwingproblem der digitalen Filter bei schnellen Hoch- oder Ausläufen vermieden werden. Da die Daten erst nach der Aufnahme digital gefiltert werden, ist zudem eine Korrektur der Phasenverschiebung des digitalen Filters durch Vorwärts- und Rückwärtsfilterung möglich.

Das Identifikationsverfahren wurde für sehr unterschiedliche Rotorsysteme intensiv und erfolgreich getestet:

An einem numerisch simulierten Einscheibenrotor mit ausgeprägter Kreiselwirkung und *kurzer* Scheibenkonfiguration wurde zunächst die prinzipielle Machbarkeit bei bekannten modalen Parametern und deren Drehzahlabhängigkeit gezeigt. Der erste Test an realen Meßdaten erfolgte dann an einem zum numerischen Rotor baugleichen Prüfstand. Dieser Test lieferte – wie alle – sehr gute Wuchtergebnisse. Als dritter Test wurde das Verfahren an demselben Prüfstand, nun aber mit einer *langen* Scheibenkonfiguration erprobt. Diese lange Scheibenkonfiguration ist ebenfalls für unsymmetrische und drehzahlabhängige Systemmatrizen verantwortlich, die Unwucht kann in dieser

Konfiguration allerdings beide Resonanzen anregen. Auch bei der hier getesteten Unwuchtdentifikation wurden gute Ergebnisse erzielt, sowohl für die statische als auch für die kinetische Unwucht. Eine weitere Erprobung des Verfahrens erfolgte mit zwei drehzahlunabhängigen Rotorsystemen. Die Anwendungen waren dabei schon am Institut vorliegende Prüfstände eines starren Rotors in horizontal beweglichen Lagern und eines Zweiseibenrotors mit flexibler Welle. Die hier ermittelten Wuchtergebnisse waren schon nach der drehzahlunabhängigen Vorentifikation so gut, daß der eigentliche drehzahlabhängige Algorithmus keine Verbesserung mehr bringen konnte. An einem Fünfscheibenrotor in aktiven Magnetlagern wurde überprüft, ob der Algorithmus an Systemen mit linear in der Drehzahl veränderlichen Modaldaten funktioniert. Hier wurden die Meßdaten von nur drei der fünf Scheiben herangezogen. Die ersten beiden Resonanzen wurden sehr genau gewuchtet. Der Lackmustest des in dieser Arbeit vorgestellten Wuchtverfahrens erfolgte anhand eines schnellen Auslaufs eines Abgasturboladers. Hier ist nur eine Ebene zur Messung und auch zur Wuchtung zugänglich. Also konnte nur die erste Resonanz ausgewuchtet werden und auch nur an dieser Stelle. Aber auch bei diesem stark nichtlinearen und drehzahlveränderlichen Rotorsystem war das Wuchtergebnis innerhalb der für Turbolader erforderlichen Wuchtgüte.

## 5.2 Ausblick

Ein Nachteil des entwickelten Verfahrens ist (aus wissenschaftlicher Sicht) seine Black-Box-Charakteristik: Das Rotormodell, das dem nichtlinearen Optimierungsalgorithmus bzw. seiner vorgesetzten Routine zur Anfangswertgenerierung zugrundeliegt, ist die letzte durchschaubare Möglichkeit zur Überwachung. Um ein im Frequenzbereich überprüfbares Verfahren zu erhalten, müßte das Anpassungskriterium für den Suchalgorithmus (in Anlehnung an das Verfahren von SEIDLER<sup>1</sup>) im Frequenzbereich formulierbar sein. Mit der gängigen Definition der frequenz- aber nicht zeitabhängigen Übertragungsfunktion des Rotormodells ist die Modellierung von drehzahl- und damit zeitvarianten Rotorsystemen im Frequenzbereich in der Regel allerdings nicht möglich. Abhilfe schafft die im Anhang A dargelegte Erweiterung der Übertragungsfunktion auf linear-zeitvariante schwingungsfähige Systeme. Die Idee dieser Erweiterung stammt aus der Radiotechnik. Eine Machbarkeitsstudie zur Identifikation von LTV-Systemen mit dieser Technik wurde in einer vom Autor betreuten studentischen Arbeit<sup>2</sup> durchgeführt. Diese Master-Thesis zeigt einen erfolgversprechenden Ansatz zur Realisierung eines im Frequenzbereich arbeitenden äquivalenten Verfahrens. Ein weiterer Vorteil eines Frequenzbereichverfahrens wäre, daß man dieses zur Plausibi-

<sup>1</sup> SEIDLER, *Instationäres Auswuchten elastischer Rotoren* ([60], 2002)

<sup>2</sup> GENTNER, *Analyse von zeitvarianten Systemen im Frequenzbereich* ([19], 2016)

litätsprüfung und Kontrolle der Wuchtergebnisse besser nutzen könnte. Außerdem würde auch die Rechenzeit sinken, weil nur kleine Ausschnitte aus dem Frequenzbereich zur Bildung des Anpassungskriteriums herangezogen werden müßten.

Die Wuchtergebnisse des entwickelten Zeitbereichsverfahrens sind gut. Für eine industrielle Umsetzung kann jedoch die noch immer hohe Rechenzeit eine Hürde sein. Die Umsetzung in einer hinsichtlich der Rechenzeit leistungsfähigeren Programmumgebung als MATLAB wird sicherlich deutlich weiter führen.

---

## Anhang A

# Analyse von zeitvarianten Systemen im Frequenzbereich

Die Dynamik von Systemen, die linear-zeitinvariant (LTI-System) sind, lässt sich mittels (Bewegungs-)Differentialgleichungen der Form

$$a_N \frac{d^N q}{dt^N} + \dots + a_1 \dot{q} + a_0 q = b_M \frac{d^M u}{dt^M} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (\text{A.1})$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_n$  bzw.  $b_m$  beschreiben. Diese Gleichungen lassen sich mit Hilfe der Differentialoperatoren  $A$  und  $B$  kompakter notieren:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n \left( \frac{d}{dt} \right)^n q(t) &= \sum_{m=0}^M b_m \left( \frac{d}{dt} \right)^m u(t) \quad \text{bzw.} \\ A q(t) &= B u(t). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Für die Untersuchung dieser Gleichungen im Frequenzbereich existieren seit vielen Jahren erprobte Methoden<sup>1 2</sup>. Sind nun die Koeffizienten  $a_n(t)$ ,  $b_m(t)$  und somit die Differentialoperatoren  $A(t)$ ,  $B(t)$  zeitabhängig, d. h. das beschriebene System ist linear-zeitvariant (LTV-System), werden Gln. (A.2) zu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n(t) \left( \frac{d}{dt} \right)^n q(t) &= \sum_{m=0}^M b_m(t) \left( \frac{d}{dt} \right)^m u(t) \quad \text{bzw.} \\ A(t) q(t) &= B(t) u(t), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

wofür in der Schwingungstechnik keine gängige Untersuchungsmethode im Frequenzbereich existiert. In der Radiotechnik hingegen gab es Ansätze, LTV-Systeme im Frequenzbereich zu beschreiben<sup>3</sup>. Die Übertragung auf die Schwingungstechnik wird hier im folgenden kurz skizziert.

Für LTI-Systeme gemäß Gl. (A.2) ist die FOURIER-Transformation der Stoßantwort

$$A h(t-\tau) = B \delta(t-\tau) \quad (\text{A.4})$$

infolge eines DIRAC-Stoßes zum Zeitpunkt  $t=\tau$  definiert als

$$H(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-i\Omega(t-\tau)} d\tau \quad (\text{A.5})$$

<sup>1</sup> MARKERT, *Strukturdynamik* ([44], 2013, S. 184, 223ff.)

<sup>2</sup> GASCH; KNOTHE; LIEBICH, *Strukturdynamik* ([16], 2012, S. 183, 207ff., 417ff.)

<sup>3</sup> ZADEH, „Frequency Analysis of Variable Networks“ ([70], 1950)

und stellt die Übertragungsfunktion dar. Beim LTV-System aus Gl. (A.3) ist der Begriff der Übertragungsfunktion weiter zu fassen, da die Zeitdifferenz zwischen dem Stoß  $\delta(t-\tau)$  zum Zeitpunkt  $\tau$  und der *Systemzeit*  $t$  keine feste Größe mehr ist. Vielmehr verändert sich das System während seiner Stoßantwort mit der Zeit  $t$ , siehe Gl. (A.3). Daher muß die feste Zeitdifferenz  $t-\tau$  gelöst werden, und dem System wird die Zeit  $t$  und dem Stoß die Zeit  $\tau$  zugeordnet, die unabhängig voneinander sein können. Daraus folgt eine erweiterte Definition der FOURIER-Transformation von Gl. (A.5), wobei die Übertragungsfunktion infolge der zeitabhängigen Koeffizienten ebenfalls eine Zeitabhängigkeit aufweisen darf:

$$\mathfrak{H}(\Omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{-i\Omega(t-\tau)} d\tau = e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{i\Omega\tau} d\tau. \quad (\text{A.6})$$

Daraus folgt auch eine erweiterte Definition des DUHAMEL-Integrals

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (\text{A.7})$$

mit der Stoßantwort aus

$$A(t) h(t, \tau) = B(t) \delta(t-\tau). \quad (\text{A.8})$$

Nach Einsetzen der Definition der inversen FOURIER-Transformierten des Eingangssignals

$$u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\Omega) e^{i\Omega\tau} d\Omega \quad (\text{A.9})$$

in Gl. (A.7) ergibt sich

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} U(\Omega) e^{i\Omega\tau} d\Omega d\tau. \quad (\text{A.10})$$

Da  $U(\Omega)$  bezüglich der Integration über  $d\tau$  neutral ist, können die Integrale vertauscht werden,

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{i\Omega\tau} d\tau d\Omega, \quad (\text{A.11})$$

was mittels Gl. (A.6) zu

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}(\Omega, t) U(\Omega) e^{i\Omega(t-\tau)} d\Omega, \quad (\text{A.12})$$

umgeformt werden kann. Die FOURIER-Transformation von Gl. (A.12) liefert nun die von LTI-Systemen her bekannte Beziehung

$$Q(\Omega, t) = \mathfrak{H}(\Omega, t) U(\Omega). \quad (\text{A.13})$$

Das mit der als Scharparameter auffaßbaren Zeit  $t$  variierte LTI-System ergibt also offenbar ein LTV-System.

Nun stellt sich die Aufgabe der Bestimmung dieser erweiterten Übertragungsfunktion  $\mathfrak{H}(\Omega, t)$ . Zur Lösung wird Gl. (A.8) zunächst in ein Faltungsintegral geschrieben,

$$A(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{-i\Omega(t-\tau)} d\tau = B(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-i\Omega(t-\tau)} d\tau. \quad (\text{A.14})$$

Einsetzen von Gl. (A.6) und Ausnützen der Ausblendeigenschaft des DIRAC-Stoßes liefern die Gleichung

$$A(t) \mathfrak{H}(\Omega, t) e^{i\Omega t} = B(t) e^{i\Omega t}, \quad (\text{A.15})$$

oder anders geschrieben

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \left( \frac{d}{dt} \right)^n \mathfrak{H}(\Omega, t) e^{i\Omega t} = \sum_{m=0}^M b_m(t) \left( \frac{d}{dt} \right)^m e^{i\Omega t}. \quad (\text{A.16})$$

Der polynomiale Differentialoperator  $A(t)$  auf der linken Seite von Gl. A.15 wird auf ein Produkt angewendet. Da jede Zeitableitungen von  $e^{i\Omega t}$  den Faktor  $i\Omega$  liefert, kann Gl. (A.15) bzw. (A.16) nach einigen Umformungen umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \mathfrak{a}_n(i\Omega, t) \frac{d^n \mathfrak{H}(\Omega, t)}{dt^n} &= \sum_{m=0}^M \mathfrak{b}_m(i\Omega, t) \quad \text{mit} \\ \mathfrak{a}_n(i\Omega, t) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(i\Omega, t)}{\partial(i\Omega)^n} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_m(i\Omega, t) = b_m(t) (i\Omega)^m \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

oder anders

$$\begin{aligned} \frac{1}{N!} \frac{\partial^N A(i\Omega, t)}{\partial(i\Omega)^N} \frac{d^N \mathfrak{H}(\Omega, t)}{dt^N} + \cdots + \frac{\partial A(i\Omega, t)}{\partial(i\Omega)} \frac{d \mathfrak{H}(\Omega, t)}{dt} + \\ + A(i\Omega, t) \mathfrak{H}(\Omega, t) = B(i\Omega, t), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

wobei jede Differentiation  $\frac{d}{dt}$  in den Differentialoperatoren  $A(t)$  und  $B(t)$  durch  $i\Omega$  ersetzt wird und sich dadurch die Polynome  $A(i\Omega, t)$  und  $B(i\Omega, t)$  ergeben.

Nun ist eine lineare Differentialgleichung für die erweiterte Übertragungsfunktion  $\mathfrak{H}(\Omega, t)$  gefunden, die nur von den Koeffizientenfunktionen  $A(\Omega, t)$  und  $B(\Omega, t)$  abhängt. Für unendlich langsam veränderliche Systeme kann eine „eingefrorene“ Übertragungsfunktion mit dem Scharparameter  $t$

$$\mathfrak{H}_f(\Omega, t) = \frac{B(i\Omega, t)}{A(i\Omega, t)} = \frac{\sum_{m=0}^M \mathfrak{b}_m(i\Omega, t)}{\sum_{n=0}^N \mathfrak{a}_n(i\Omega, t)} \quad (\text{A.19})$$

definiert werden. Als Lösungsansatz für Gl. (A.18) kann ein Störungsansatz

$$\mathfrak{H}(\Omega, t) = \mathfrak{H}_1(\Omega, t) + \mathfrak{H}_2(\Omega, t) + \mathfrak{H}_3(\Omega, t) + \dots + \mathfrak{H}_N(\Omega, t), \quad (\text{A.20})$$

sofern dieser konvergiert. Bei dem iterativen Verfahren werden die Terme höherer Ableitungen in Gl. (A.18) in der Perturbation  $\mathfrak{P}\{\mathfrak{H}(\Omega, t)\}$  zusammengefaßt,

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}\{\mathfrak{H}(\Omega, t)\} + \mathfrak{H}(\Omega, t) &= \mathfrak{H}_f(\Omega, t) \\ \text{mit} \quad \mathfrak{P}\{H(\Omega, t)\} &= \frac{1}{A(i\Omega, t)} \sum_{n=1}^N \mathfrak{a}_n(i\Omega, t) \frac{d^n \mathfrak{H}(\Omega, t)}{dt^n}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Im ersten Schritt setzt man

$$\mathfrak{H}_1(\Omega, t) = \mathfrak{H}_f(\Omega, t),$$

alle weiteren Bestandteile des Ansatzes werden dann iterativ gemäß

$$\mathfrak{H}_\kappa(\Omega, t) = -\mathfrak{P}\{\mathfrak{H}_{\kappa-1}(\Omega, t)\} \quad \kappa = 2, 3, \dots$$

ermittelt.

# Literaturverzeichnis

- [1] ABRAHAM, D.; MARKERT, R.; WITFELD, H.: „Experimentelle Untersuchungen zu aktiven und passiven Resonanzdurchlaufhilfen für extrem elastische Rotoren“. In: *VDI-Berichte* 695 (1988), S. 145–169.
- [2] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. 9. Aufl. New York: Dover Publications, 1965. 1046 S.
- [3] BALLO, I.: „On the Balancing of Flexible Rotors Independent on Boundary Conditions“. In: *Ingenieur-Archiv* 50.3 (1981), S. 177–185.
- [4] BELZ, J.: *Modalanalysegestützte Unwuchtidentifikation elastischer Rotoren*. 1. Auflage. Universitätsbibliothek Kassel, Dissertation, 1997.
- [5] BISHOP, R. E. D.; GLADWELL, G. M. L.: „The Vibration and Balancing of an Unbalanced Flexible Rotor“. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 1.1 (1959), S. 66–77.
- [6] COLEMAN, T. F.; LI, Y.: „An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds“. In: *SIAM Journal on Optimization* 6 (1996), S. 418–445.
- [7] DIN ISO 1940-1. 2004.
- [8] EDWARDS, S.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. I.: „Estimating Rotor Unbalance from a Single Run-Down“. In: *Proceedings. Conference on Vibrations in Rotating Machinery (VIRM)*. Nottingham, Großbritannien, 2000, S. 323–333.
- [9] EDWARDS, S.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. I.: „Experimental Identification of Excitation and Support Parameters of a Flexible Rotor-Bearings-Foundation System from a Single Run-Down“. In: *Journal of Sound and Vibration* 232.5 (2000), S. 963–992.
- [10] EDWARDS, S.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. I.: „The Identification of Rotor Unbalance from Measured Foundation Response Data“. In: *Proceedings. 17th International Modal Analysis Conference (IMAC)*. Orlando, FL, USA, 1999, S. 1610–1615.
- [11] ESSER, A.: *Bewertung von Auswuchtmethoden für Abgasturbolader*. Master-Thesis. Darmstadt: TU Darmstadt, 2016, S. 60.
- [12] FEDERN, K.: *Auswuchtechnik: Band 1: Allgemeine Grundlagen, Meßverfahren und Richtlinien*. Springer, 1977. 449 S.

- [13] FEDERN, K.: „Grundlage einer systematischen Schwingungsentstörung wellen-elastischer Rotoren“. In: *VDI-Berichte* 24 (1957), S. 9.
- [14] FELSCHER, P.: *Rückwirkung des Gleitlagermoments auf die Drehbewegung des Rotors*. Darmstadt: Studienbereich Mechanik, TU Darmstadt, Dissertation, 2016.
- [15] GASCH, R.; DRECHSLER, J.: „Modales Auswuchten elastischer Läufer ohne Testgewichtsetzungen“. In: *VDI-Berichte* 320 (1978), S. 45–54.
- [16] GASCH, R.; KNOTHE, K.; LIEBICH, R.: *Strukturdynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. Auflage: 2. Aufl. 2012. Berlin: Springer, 2012. 670 S.
- [17] GASCH, R.; NORDMANN, R.; PFÜTZNER, H.: *Rotordynamik*. 2. Auflage. Berlin: Springer, 2006.
- [18] GASCH, R.; PFÜTZNER, H.: *Rotordynamik – Eine Einführung*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1975.
- [19] GENTNER, L.: *Analyse von zeitvarianten Systemen im Frequenzbereich*. Master-Thesis. Darmstadt: TU Darmstadt, 2016, S. 64.
- [20] GOODMAN, T. P.: „A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections“. In: *Journal of Engineering for Industry* 86.3 (1964), S. 273–277.
- [21] GUSTAFSSON, F.: „Determining the Initial States in Forward-backward Filtering“. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 44.4 (1996), S. 988–992.
- [22] GUTIÉRREZ-WING, E. S.; AGUIRRE-ROMANO, J. E.: „Rotor Balancing Using Vibration Data from Fast Run-ups and Coast-downs“. In: *Proceedings. 17th International Modal Analysis Conference (IMAC)*. Bd. 2. Kissimmee, FL, USA, 1999, S. 1669–1673.
- [23] HAGEDORN, P.: *Nichtlineare Schwingungen*. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft, 1978. 313 S.
- [24] HAGEDORN, P.; HOCHLENERT, D.: *Technische Schwingungslehre*. 1. Auflage. Frankfurt am Main: Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, 2012.
- [25] HÜBNER, E.: „Das Auswuchten elastischer Rotoren, ein Problem der Strukturanalyse“. In: *Ingenieur-Archiv* 30.5 (1961), S. 325–338.
- [26] JUANG, J.-N.: *Applied System Identification*. 1. Auflage. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1994. 394 S.
- [27] KELLENBERGER, W.: „Das Wuchten elastischer Rotoren auf zwei allgemein-elastischen Lagern“. In: *Brown Boveri Mitteilungen* 54, Nr. 9 (1967), S. 603–617.
- [28] KELLENBERGER, W.: *Elastisches Wuchten*. Springer-Verlag, 1987. 512 S.
- [29] KÖHL, W.: „Stabilisierung von leichten Rotoren in Schwimmbuchsenlagern durch statisch unbestimmte Lagerung“. Dissertation. Düsseldorf: VDI-Verlag, 2015.

- [30] KRESCHEL, M.: *Instationäres Verhalten von Abgasturboladern*. Reihe 12: Verkehrstechnik, Fahrzeugtechnik Nr. 731. VDI Verlag, Düsseldorf, Dissertation, 2010.
- [31] KRESCHEL, M.; MARKERT, R.; SEIDLER, M.: „Instationary Balancing of Elastic Rotors with Speed-dependent System Matrices“. In: *Proceedings. IX Diname*. Ouro Preto, Brasilien: IOS Press, 2005.
- [32] KREUZINGER-JANIK, T.; IRRETIER, H.: „Unwuchtidentifikationen an elastischen Rotoren mit Hilfe der experimentellen Modalanalyse“. In: *VDI-Berichte*. VDI-Schwingungstagung. Bd. 1550. Kassel: VDI Verlag, 2000, S. 169–182.
- [33] LAUZI, M.: *Theoretische Untersuchungen an Rotoren mit Kreiselwirkung*. Seminararbeit. Darmstadt: TU Darmstadt, 2012.
- [34] LEES, A. W. u. a.: „The Identification of Foundation Dynamics from Machine Run-Down Data“. In: *Proceedings. 7th ISROMAC – International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*. Honolulu, HI, USA, 1998, S. 715–724.
- [35] LINDEMANN, S.: *Model updating an einem biegeelastischen Rotor*. Berichte des Instituts für Mechanik Nr. 1/2009. Universitätsbibliothek Kassel, Dissertation, 2008. 134 S.
- [36] LJUNG, L.; LJUNG, E. J.: *System Identification: Theory for the User*. 2. Aufl. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999. 672 S.
- [37] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. 728 S.
- [38] MARKERT, R.: „Amplitudenabschätzung bei der instationären Resonanzdurchfahrt“. In: *Technische Mechanik in Forschung und industrieller Praxis: Festschrift zu Ehrenstages von Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Witfeld*. Hamburg: Univ. der Bundeswehr, 1996, S. 19–45.
- [39] MARKERT, R.: „Gleitlager- und Magnetlagertechnik“. SCHENCK-Kolleg. Darmstadt, 1993.
- [40] MARKERT, R.: „Modal Balancing of Flexible Rotors with Data Acquisition from Non-stationary Run-up or Run-down“. In: *Proceedings. VI. International Modal Analysis Conference (IMAC)*. Orlando, FL, USA, 1988, S. 210–216.
- [41] MARKERT, R.: *Resonanzdurchfahrt unwuchtiger biegeelastischer Rotoren*. VDI Verlag, Düsseldorf, Dissertation, 1980. 177 S.
- [42] MARKERT, R.: *Rotordynamik – Skript zur Vorlesung*. 2011.
- [43] MARKERT, R.: *Schwingungsmeßtechnik – Skript zur Vorlesung*. 2005.
- [44] MARKERT, R.: *Strukturdynamik*. 1. Auflage. Aachen: Shaker, 2013.

- [45] MARKERT, R.: „System- und Unwuchtidentifikation von elastischen Rotoren aus Anfahrmessungen“. In: *VDI-Berichte* 536 (1984), S. 121–139.
- [46] MARKERT, R.; GASCH, R.; PFÜTZNER, H.: „Biegeschwingungsverhalten rotierender Wellen beim Durchlaufen der kritischen Drehzahlen“. In: *Konstruktion* 29.9 (1977), S. 355–365.
- [47] MARKERT, R.; PFÜTZNER, H.: „An- und Auslaufvorgänge einfacher Schwinger“. In: *Forschung im Ingenieurwesen A* 47.4 (1981), S. 117–125.
- [48] MARKERT, R.; SEIDLER, M.: „Analytically based estimation of the maximum amplitude during passage through resonance“. In: *International Journal of Solids and Structures* 38.10 (2001), S. 1975–1992.
- [49] MENZ, I.: *Drehzahlvariables Auswuchten starrer Rotoren in einer elastischen Auswuchtmaschine*. Berlin: Dissertation, 1995. 44 S.
- [50] MENZ, I.; GASCH, R.: „Instationäres Auswuchten starrer Rotoren“. In: *Schwingungen in rotierenden Maschinen III (SIRM)*. Vieweg+Teubner Verlag, 1995, S. 165–175.
- [51] MENZ, I.; GASCH, R.: „Instationary Balancing of Rigid Rotors in the Time-domain-theory and Experimental Results“. In: *Proceedings. 6th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*. IMechE, 1996, S. 451–459.
- [52] MICHAELIS, R.: *Untersuchung von Algorithmen zur Unwuchtidentifikation bei Rotoren mit ausgeprägter Kreiselwirkung*. Master-Thesis. Darmstadt: TU Darmstadt, 2013.
- [53] MÜLLER, M.: „Ein neues Verfahren zum Auswuchten elastischer Rotoren“. In: *Ingenieur-Archiv* 54.2 (1984), S. 98–106.
- [54] NORDMANN, R.: „Modal Parameter Identification and Sensitivity Analysis in Rotating Machinery“. In: *Proceedings. IFToMM Int. Conf. Rotordynamic Problems in Power Plants*. Rom, Italien, 1982.
- [55] REGENER, M.: *Modellgestütztes Auswuchten – Unwuchtidentifikation*. TU Darmstadt, Dissertation, 2006.
- [56] Schenck Vibroport. Bedienungsanleitung. Darmstadt: Carl Schenck AG, 1979.
- [57] SCHNEIDER, H.: *Auswuchttechnik*. 8., neu bearb. Aufl. 2013. Springer Vieweg, 2013. 403 S.
- [58] SCHWEITZER, G. u. a.: *Magnetic Bearings: Theory, Design, and Application to Rotating Machinery*. Dordrecht; New York: Springer, 2009. 535 S.
- [59] SCHWEIZER, B.: „Dynamics and stability of turbocharger rotors“. In: *Archive of Applied Mechanics* 80.9 (2010), S. 1017–1043.

- [60] SEIDLER, M.: *Instationäres Auswuchten elastischer Rotoren*. Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 314. VDI Verlag, Düsseldorf, Dissertation, 2002. 99 S.
- [61] SEIDLER, M.; MARKERT, R.: „Time Domain and Frequency Domain Identification for Non-stationary Balancing“. In: *Proceedings. 10th IFToMM Int. Conf. "World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms"*. Bd. 4. Oulu, Finnland, 1999, S. 1740–1745.
- [62] SIEGL, B.; MARKERT, R.: „Model-based Non-stationary Unbalance Identification“. In: *Proceedings. 16th ISROMAC – International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*. Honolulu, HI, USA, 2016, S. 1–6.
- [63] SIEGL, B.; MARKERT, R.: „Modellgestützte instationäre Unwuchtidentifikation“. In: *Proceedings. SIRM – 11. Internationale Tagung Schwingungen in Rotierenden Maschinen*. Magdeburg, 2015, S. 1–8.
- [64] SILVA, R. de: *Auswuchten elastischer Rotoren nach nur einem transienten Messlauf*. Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 143. VDI Verlag, Düsseldorf, Dissertation, 1991. 139 S.
- [65] SINHA, J. K.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. I.: „Estimating the Rotor Unbalance of a Rotating Machine from a Single Run-Down“. In: *Proceedings. 19th International Modal Analysis Conference (IMAC)*. Kissimmee, FL, USA, 2001, S. 109–115.
- [66] SPURK, J.; AKSEL, N.: *Strömungslehre*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [67] „Verfahren und Vorrichtung zum Auswuchten von wellenelastischen Rotoren“. DE 10 2006 060 583 A1 (Darmstadt). ULRICH, S. u. a. 2008.
- [68] WANG, J.-H.: *Untersuchung des Schwingungsverhaltens eines mehrfach gleitgelagerten Rotorsystems*. TU München, Dissertation, 1984. 169 S.
- [69] WEGENER, G.: *Untersuchungen zum Kreiseleinfuß auf den stationären und instationären Betrieb von elastischen Rotoren*. Diplomarbeit. Darmstadt: TU Darmstadt, 1993.
- [70] ZADEH, L. A.: „Frequency Analysis of Variable Networks“. In: *Proceedings of the IRE* 38.3 (1950), S. 291–299.
- [71] ZHANG, X.: *Aktive Regel- und Kompressionsstrategien für magnetgelagerte Mehrfreiheitsgrad-Rotoren*. GCA-Verlag, Dissertation, 2002. 119 S.
- [72] ZORZI, E. S.; GIORDANO, C.; LEE, C.: „A Unified Approach to Balancing with Multiple Constraints“. In: *Proceedings. IFToMM Int. Conf. Rotordynamic Problems in Power Plants*. Rom, Italien, 1982.

## Eigene Veröffentlichungen

SIEGL, B.; MARKERT, R.: „Model-based Non-stationary Unbalance Identification“. In: *Proceedings. 16th ISROMAC – International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*. Honolulu, HI, USA, 2016, S. 1–6

SIEGL, B.; MARKERT, R.: „Modellgestützte instationäre Unwuchtidentifikation“. In: *Proceedings. SIRM – 11. Internationale Tagung Schwingungen in Rotierenden Maschinen*. Magdeburg, 2015, S. 1–8.

NORRICK, N.; SIEGL, B.; ALBER, O.: „Backward Whirl During Rotor-Stator Contact of Gyroscopic Rotors“. In: *Proceedings. ICOVP – 11th International Conference on Vibration Problems*, Lissabon, Portugal, 2013

ALBER, O.; NORRICK, N.; SIEGL, B.: „Multimode Backward Whirl Motion in Rotor-Stator Contact“. In: *Proceedings. ICOVP – 11th International Conference on Vibration Problems*, Lissabon, Portugal, 2013

SIEGL, B.; NORRICK, N.; MARKERT, R.: „Theoretical Investigations on Rotor-Stator-Contact of Rotors with Distinctive Gyroscopic Effects“. In: *Proceedings. DINAME 2013 – XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, Búzios, RJ, Brazil, 2013



# Online-Buchshop für Ingenieure

■■■ VDI nachrichten

Online-Shops



Fachliteratur und mehr -  
jetzt bequem online recher-  
chieren & bestellen unter:  
[www.vdi-nachrichten.com/](http://www.vdi-nachrichten.com/)  
Der-Shop-im-Ueberblick



Täglich aktualisiert:  
Neuerscheinungen  
VDI-Schriftenreihen



## BUCHSHOP

Im Buchshop von vdi-nachrichten.com finden Ingenieure und Techniker ein speziell auf sie zugeschnittenes, umfassendes Literaturangebot.

Mit der komfortablen Schnellsuche werden Sie in den VDI-Schriftenreihen und im Verzeichnis lieferbarer Bücher unter 1.000.000 Titeln garantiert fündig.

Im Buchshop stehen für Sie bereit:

### VDI-Berichte und die Reihe **Kunststofftechnik**:

Berichte nationaler und internationaler technischer Fachtagungen der VDI-Fachgliederungen

### Fortschritt-Berichte VDI:

Dissertationen, Habilitationen und Forschungsberichte aus sämtlichen ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen

### Newsletter „Neuerscheinungen“:

Kostenfreie Infos zu aktuellen Titeln der VDI-Schriftenreihen bequem per E-Mail

### Autoren-Service:

Umfassende Betreuung bei der Veröffentlichung Ihrer Arbeit in der Reihe Fortschritt-Berichte VDI

### Buch- und Medien-Service:

Beschaffung aller am Markt verfügbaren Zeitschriften, Zeitungen, Fortsetzungsreihen, Handbücher, Technische Regelwerke, elektronische Medien und vieles mehr – einzeln oder im Abo und mit weltweitem Lieferservice

## Die Reihen der Fortschritt-Berichte VDI:

- 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
- 2 Fertigungstechnik
- 3 Verfahrenstechnik
- 4 Bauingenieurwesen
- 5 Grund- und Werkstoffe/Kunststoffe
- 6 Energietechnik
- 7 Strömungstechnik
- 8 Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik
- 9 Elektronik/Mikro- und Nanotechnik
- 10 Informatik/Kommunikation
- 11 Schwingungstechnik
- 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
- 13 Fördertechnik/Logistik
- 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
- 15 Umwelttechnik
- 16 Technik und Wirtschaft
- 17 Biotechnik/Medizintechnik
- 18 Mechanik/Bruchmechanik
- 19 Wärmetechnik/Kältetechnik
- 20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE CAQ, CIM ...)
- 21 Elektrotechnik
- 22 Mensch-Maschine-Systeme
- 23 Technische Gebäudeausrüstung

ISBN 978-3-18-335211-1