

## Reihe 8

Mess-,  
Steuerungs- und  
Regelungstechnik

Nr. 1247

Dipl.-Ing. Christoph Hartung,  
München

## Zur algebraischen Unter- suchung der Steuer- barkeit und der Stabili- sierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme



# **Zur algebraischen Untersuchung der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme**

Christoph Hartung

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der  
Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Prüfungsvorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. Matthias Gerdts

1. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

2. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack

Die Dissertation wurde am 15. April 2015 bei der Universität der Bundeswehr München  
eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 7. September 2015  
angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 9. September 2015 statt.



# Fortschritt-Berichte VDI

**Reihe 8**

Mess-, Steuerungs-  
und Regelungstechnik

Dipl.-Ing. Christoph Hartung,  
München

**Nr. 1247**

**Zur algebraischen Unter-  
suchung der Steuer-  
barkeit und der Stabili-  
sierbarkeit linearer  
zeitinvarianter Systeme**

VDI verlag

Hartung, Christoph

## **Zur algebraischen Untersuchung der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme**

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 1247. Düsseldorf: VDI Verlag 2016.

130 Seiten, 8 Bilder, 1 Tabelle.

ISBN 978-3-18-524708-8, ISSN 0178-9546,

€ 52,00/VDI-Mitgliederpreis € 46,80.

**Für die Dokumentation:** Steuerbarkeit – Stabilisierbarkeit – Lineare Systeme – Unsichere Systeme – Strenge Surjektivität – Strukturelle Steuerbarkeit – Strenge strukturelle Steuerbarkeit – Vorzeichen-Steuerbarkeit – Vorzeichen-Stabilität – Vorzeichen-Stabilisierbarkeit

Das Verhalten von den meisten technischen Prozessen lässt sich zumindest in Arbeitspunkten hinreichend genau mit linearen zeitinvarianten Systemen der Form  $dx/dt = A^*x + B^*u$  beschreiben. Zwei wichtige Eigenschaften solcher Systeme sind die Steuerbarkeit und die Stabilisierbarkeit, welche zu den wesentlichen Voraussetzungen modernen Methoden der Steuerungs- und Regelungstechnik zählen. In dieser Arbeit werden algebraische Methoden zum Nachweis der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit dieser Systeme untersucht. Dafür wird der Begriff des unsicheren Systems eingeführt, welcher strukturelle Systeme und Vorzeichen-Systeme vereint. Ein unsicheres System ist streng strukturell steuerbar, vorzeichen-steuerbar, vorzeichen-stabil oder vorzeichen-stabilisierbar, wenn jeweils jedes System der Klasse steuerbar, stabil oder stabilisierbar ist. In dieser Arbeit werden zwei bisher ungelöste Probleme, die Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit, gelöst. Dabei wird eine Methode verwendet, welche sich deutlich zu bisherigen Ansätzen unterscheidet.

### **Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

### **Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek**

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie (German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at <http://dnb.ddb.de>.

Dissertation  
Universität der Bundeswehr München

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 2016

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9546

ISBN 978-3-18-524708-8

## Vorwort

Die folgende Arbeit entstand in den Jahren 2009 bis 2015 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Steuer- und Regelungstechnik an der Universität der Bundeswehr München.

Mein herzlicher Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek für die hervorragende fachliche Betreuung und die sehr schöne und erlebnisreiche Zeit, die er mir an seinem Institut ermöglicht hat. Ebenso danke ich Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack für das entgegengebrachte Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Zweitgutachtens. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Matthias Gerdts danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

All meinen Kollegen an der Universität der Bundeswehr danke ich für die zahlreichen fachlichen Diskussionen und nichtfachlichen Gespräche in den letzten Jahren. Herrn Dr.-Ing. Klaus-Dieter Otto möchte ich darunter besonders hervorheben. Außerdem danke ich im Besonderen Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. Dr. habil. Gunther Reißig für die erfolgreiche Zusammenarbeit.

Meinen Eltern und meiner Familie danke ich von ganzem Herzen für ihre Unterstützung und ihr Interesse an meiner Arbeit. Mein größter Dank gilt Kathleen für ihre Liebe, ihre Geduld und für ihre unermüdliche Unterstützung.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>VII</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>IX</b>
<b>Abstract</b>	<b>X</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Einordnung der Arbeit . . . . .	2
1.2 Zielsetzung, Beiträge und Aufbau der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Mathematische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Notation und grundlegende Zusammenhänge . . . . .	7
2.2 Grundlagen zu linearen zeitinvarianten Systemen . . . . .	9
2.3 Unsichere Zahlen, Matrizen und Vektoren . . . . .	11
2.4 Rechnen mit unsicheren Zahlen . . . . .	13
2.5 Algebraische Bedeutung und weitere Eigenschaften . . . . .	17
<b>3 Lineare Systeme mit unsicheren Matrizen</b>	<b>20</b>
3.1 Strenge Surjektivität von unsicheren Matrizen . . . . .	20
3.2 Strenge Strukturelle Steuerbarkeit . . . . .	24
3.3 Vorzeichen-Steuerbarkeit . . . . .	28
3.4 Vorzeichen-Stabilität . . . . .	32
3.5 Vorzeichen-Stabilisierbarkeit . . . . .	34
3.6 Strenge strukturelle Steuerbarkeit für zeitvariante Systeme . . . . .	38
<b>4 Komplexe Eigenpaare von Vorzeichenmatrizen</b>	<b>46</b>
4.1 Der komplexe Vorzeichenvektor . . . . .	46
4.2 Verschiedene Eigenschaften komplexer Vorzeichenvektoren . . . . .	50
4.3 Der Kokern einer Vorzeichenmatrix . . . . .	57
4.4 Vorzeichenmatrizen mit rein imaginären Eigenwerten . . . . .	62

4.5	Vorzeichenmatrizen mit komplexen Eigenwerten . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Vorzeichen-Steuerbarkeit und -Stabilisierbarkeit</b>	<b>79</b>
5.1	Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und -Stabilisierbarkeit . . . . .	79
5.2	Weitere Eigenschaften komplexer Vorzeichenvektoren . . . . .	81
5.3	Überprüfung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und -Stabilisierbarkeit . . . . .	95
5.4	Zwei weitere Beispiele . . . . .	102
5.4.1	Modell eines F-8 Strahlflugzeugs . . . . .	102
5.4.2	Modell eines unbemannten Helicopters . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>108</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>112</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>113</b>

# Nomenklatur

In der folgenden Auflistung werden die grundlegenden Symbole dieser Arbeit erläutert.

$\mathbb{Z}$	Die Menge aller ganzen Zahlen.
$\mathbb{N}$	Die Menge aller positiven ganzen Zahlen.
$\mathbb{R}$	Die Menge aller reellen Zahlen.
$\mathbb{C}$	Die Menge aller komplexen Zahlen.
$\mathbb{K}^n$	Die Menge aller Vektoren der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ .
$\mathbb{K}^{n \times m}$	Die Menge aller $n \times m$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ .
$a, b, \dots$	Skalare oder Vektoren mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ werden mit kleinen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.
$A, B, \dots$	Matrizen mit reellen Einträgen werden mit großen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.
$X_{i,k}$	Der Eintrag in der $i$ -ten Zeile und der $k$ -ten Spalte von der Matrix $X$ .
$x_i$	Der $i$ -te Eintrag des Vektors $x$ .
$X^T$	Die Transponierte von der Matrix $X$ .
$ X $	Die Determinante einer quadratischen Matrix $X$ .
$ x $	Der absolute Betrag einer Zahl $x \in \mathbb{C}$
$j$	Die imaginäre Einheit.
$\Re(x)$	Der Realteil einer komplexen Zahl oder eines komplexen Vektors $x$ .
$\Im(x)$	Der Imaginärteil einer komplexen Zahl oder eines komplexen Vektors $x$ .
$I_n$	Die Einheitsmatrix der Dimension $n$ .
$0$	Eine Matrix, die nur den Eintrag 0 enthält.

## Symbole zu unsicheren Zahlen, Vektoren und Matrizen

$\circ$	$= \{0\}$ , die Menge, die nur die Null enthält.
$+$	$= \{x \in \mathbb{R}   x > 0\}$ , die Menge aller positiven reellen Zahlen.
$\dashv$	$= \{x \in \mathbb{R}   x < 0\}$ , die Menge aller negativen reellen Zahlen.
$\oplus$	$= \{x \in \mathbb{R}   x \geq 0\}$ , die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen.
$\ominus$	$= \{x \in \mathbb{R}   x \leq 0\}$ , die Menge aller nicht-positiven reellen Zahlen.
$\star$	$= \{x \in \mathbb{R}   x \neq 0\}$ , die Menge aller von Null verschiedenen Zahlen.
$\circledast$	$= \mathbb{R}$ , die Menge aller reellen Zahlen.
$\mathbb{V}$	$= \{\circ, +, \dashv\}$ , die Menge aller Vorzeichen.
$\mathbb{U}$	$= \{\circ, +, \dashv, \oplus, \ominus, \star, \circledast\}$ , die Menge aller unsicheren Zahlen.
$\mathbb{S}$	$= \{\circ, \star\}$ , die Menge aller strukturellen Zahlen.
$\tilde{\mathbb{S}}$	$= \{\circ, \star, \circledast\}$ .

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Zahlen, Vektoren oder Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{U}$ werden mit kaligraphischen Großbuchstaben bezeichnet.
$\mathcal{I}_n$	Eine $n \times n$ Matrix mit (+)-Einträgen auf der Diagonalen und $\circ$ -Einträgen auf allen sonstigen Positionen.
$\mathcal{I}_n^*$	Eine $n \times n$ Matrix mit ( $\star$ )-Einträgen auf der Diagonalen und $\circ$ -Einträgen auf allen sonstigen Positionen.
$\circ$	Eine Matrix mit $\circ$ -Einträgen auf allen Positionen.

## Symbole und Notation zu komplexen Vorzeichenvektoren

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$	Komplexe Vorzeichenvektoren werden mit Frakturbuchstaben bezeichnet.
${}^w\mathcal{D}_v$	Das Vorzeichen von $r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)$ , wenn $q = r \cdot e^{j\varphi} \in \mathfrak{D}$ .
${}^w\mathcal{P}_v$	Das Vorzeichen von $r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w)$ , wenn $q = r \cdot e^{j\varphi} \in \mathfrak{D}$ .
$({}^w\mathcal{D}, {}^w\mathcal{P})$	Das $w$ -te charakteristische Vorzeichenmuster eines komplexen Vorzeichenvektors $\mathfrak{D}$ (siehe Definition 4.3 auf Seite 50).
${}^wq$	$= q/q_w$ , wenn $w$ von Null verschieden in $\mathfrak{D}$ ist ( $q_w \neq 0$ ).
$\varrho_q(v, w)$	$= (\varphi_v - \varphi_w) \bmod \pi/2 \geq 0$ ist der Abstand von $w$ zu $v$ in $q$ .
$\varrho_q(w)$	Der geringste Abstand von $w$ in $q$ .
${}^w\mathcal{D}_v$	Das Vorzeichen von $r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w - \epsilon)$ mit $\varrho_q(w) > \epsilon > 0$ .
${}^w\mathcal{P}_v$	Das Vorzeichen von $r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w - \epsilon)$ mit $\varrho_q(w) > \epsilon > 0$ .
$({}^w\mathcal{D}, {}^w\mathcal{P})$	Vorzeichen des verdrehten $w$ -ten charakteristischen Vorzeichenmusters.
$U^*$	$= U \cup \{i^*   i \in U\}$ für eine Menge $U \subseteq \{1, \dots, n\}$ .
$R$	Die Menge der Vorzeichenrotationsmatrizen (siehe (4.4) auf Seite 54).
$\overline{\mathfrak{D}}$	Der konjugiert komplexe Vorzeichenvektoren von $\mathfrak{D}$ .
$\nu$	Eine Funktion zur Beschreibung eines komplexen Vorzeichenvektors (siehe Satz 5.3 auf Seite 82).
$\kappa(n)$	Die Anzahl aller komplexen Vorzeichenvektoren der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ .

## Kurzfassung

Das Verhalten von den meisten technischen Prozessen lässt sich zumindest in Arbeitspunkten hinreichend genau mit linearen zeitinvarianten Systemen der Form  $dx/dt = A \cdot x + B \cdot u$  beschreiben. Zwei wichtige Eigenschaften solcher Systeme sind die Steuerbarkeit und die Stabilisierbarkeit, welche zu den wesentlichen Voraussetzungen modernen Methoden der Steuerungs- und Regelungstechnik zählen. Beide Eigenschaften können anhand der Matrizen  $A$  und  $B$  numerisch untersucht werden. In den Modellen zur Beschreibung eines technischen Prozesses basieren die Matrizen oft auf experimentell ermittelten Daten, sodass die Einträge nur mit einer gewissen Genauigkeit bekannt und die numerischen Nachweise nicht mehr anwendbar sind.

In dieser Arbeit werden algebraische Methoden zum Nachweis der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme unabhängig von konkreten numerischen Parametern untersucht. Dafür werden sieben Symbole zur Beschreibung verschiedener Teilmengen der reellen Zahlen definiert und es wird der Begriff des unsicheren Systems als Klasse linearer zeitinvarianter Systeme eingeführt. Allgemein bekannte Spezialfälle von unsicheren Systemen sind strukturelle Systeme, bei denen die Einträge der Matrizen entweder identisch Null oder von Null verschieden sind, und Vorzeichen-Systeme, bei denen nur das Vorzeichen der Einträge bekannt ist. Durch diesen Ansatz wird daher der strukturelle Ansatz mit dem Ansatz über Vorzeichenmuster vereint. In einem unsicheren System ist es z.B. im Gegensatz zum strukturellen Ansatz möglich, dass manche Systemparameter sowohl den Wert Null als auch einen von Null verschiedenen Wert annehmen können. Ein unsicheres System ist streng strukturell steuerbar, vorzeichen-steuerbar, vorzeichen-stabil oder vorzeichen-stabilisierbar, wenn jeweils jedes System der Klasse steuerbar, stabil oder stabilisierbar ist. In dieser Arbeit werden verschiedene bekannte Resultate zu diesen Eigenschaften auf unsichere Systeme verallgemeinert und es werden zwei bisher ungelöste Probleme, die Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit, gelöst.

Neben zahlreichen akademischen Beispielen werden die Resultate der Arbeit an bekannten Modellen verschiedener technischer Systeme vorgeführt. Dabei werden z.B. jeweils die Steuerbarkeit, die Stabilität und die Stabilisierbarkeit der Wankdynamik von Zweirädern, der Bewegung eines Satelliten, der Längsdynamik eines F-8 Strahlflugzeugs und der Dynamik eines unbemannten Helikopters im Schwebeflug untersucht.

## Abstract

The behavior of most technical processes can be described with sufficient precision with linear time-invariant systems of the form  $dx/dt = A \cdot x + B \cdot u$ . Two important properties of such systems are the controllability and stabilizability which are the preconditions of most methods in modern control engineering. Both properties can be analyzed with the matrices  $A$  and  $B$  by numerical tests. In the models used to describe a technical process, the entries of the matrices are often known only with a certain accuracy, so that the numerical tests are no longer applicable.

Hence, algebraic methods for the analysis of the controllability and the stabilizability of linear time-invariant systems independent of numerical values are investigated in this work. Therefore, seven symbols to describe different subsets of the real numbers are defined and the notion of the uncertain system as a class of linear time-invariant systems is introduced. Common special cases of uncertain systems are structural systems, where the entries are either zero or nonzero and signed systems, where the entries are positive, negative or zero. Thus, this new approach combines the structural and the signed approach to describe uncertainties in linear time-invariant systems. Moreover, in contrast to structural systems, it is possible, that some entries can be zero as well as nonzero in an uncertain system. An uncertain system is strong structural controllable, sign controllable, sign stable or sign stabilizable if every system in the class is controllable, stable or stabilizable, respectively. In this work, different known results to these properties are generalized to uncertain systems and two unsolved problems, the characterization of sign controllability and sign stabilizability are solved.

In addition to numerous academic examples, the results of this work are demonstrated to known models of various technical systems. Therefore, the controllability, the stability and the stabilizability of the roll dynamic of bicycles, the motion of a satellite, the dynamic of an F-8 jet airplane and the dynamic of an unmanned helicopter are analyzed.

# 1 Einleitung

Eine typische Aufgabenstellung im Fachbereich der Steuerungs- und Regelungstechnik beinhaltet einen technischen Prozess, der verschiedene physikalische Größen (z.B. Temperaturen, Geschwindigkeiten, Winkel oder elektrische Spannungen) und ein oder mehrere Stellgrößen enthält. Jede physikalische Größe folgt bestimmten Naturgesetzen und eine Änderung ihres Zahlenwerts kann meist mit einer Differentialgleichung beschrieben werden. Dadurch entstehen Systeme von Differentialgleichungen, *dynamische Systeme*, welche den technischen Prozess beschreiben.

Wenn die physikalischen Größen, deren Ableitungen und die Stellgrößen linear in die Differentialgleichungen eines dynamischen Systems eingehen und sich kein Parameter des Systems über den betrachteten Zeitraum verändert, dann kann der technische Prozess mit einem System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, d.h. einem *linearen zeitinvarianten System* der Form

$$\frac{d}{dt}x = A \cdot x + B \cdot u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

beschrieben werden.  $x$  ist dabei der *Zustandsgrößenvektor* der Dimension  $n$ ,  $u$  ist der *Eingangsgrößenvektor* der Dimension  $r$  und  $x_0$  ist der Anfangszustand des Systems zum Zeitpunkt  $t_0$ .  $A$  und  $B$  sind jeweils  $n \times n$  und  $n \times r$  Matrizen mit reellen Einträgen.

Es existiert eine etablierte Theorie zu linearen zeitinvarianten Systemen der Form (1.1) und viele Eigenschaften eines gegebenen linearen zeitinvarianten Systems lassen sich gut mit Algorithmen der linearen Algebra ermitteln. Außerdem hat sich herausgestellt, dass viele Eigenschaften nichtlinearer Systeme durch Approximationen mit linearen Systemen bestimmt werden können, und dass der Reglerentwurf für nichtlineare Systeme auf den Reglerentwurf für lineare Systeme reduziert werden kann (siehe [Hes09, S. 11]).

Der technische Prozess, den das lineare zeitinvariante System der Form (1.1) beschreibt, soll in einer typischen Aufgabenstellung mithilfe der Stellgrößen  $u$  von einem Anfangszustand  $x_0$  zu einem gewünschten Zustand überführt und dort gehalten werden. Die erste der beiden Teilaufgaben ist ein *Steuerungsproblem* und die zweite ist ein *Stabilisierungsproblem*. Die allgemeine Lösbarkeit beider Problemstellungen wird jeweils mit dem Begriff der *Steuerbarkeit* und der *Stabilisierbarkeit* beschrieben. Beide Eigenschaften können anhand der Matrizen  $A$  und  $B$  für ein konkretes lineares zeitinvariantes System der Form (1.1) numerisch bestimmt werden.

## 1.1 Einordnung der Arbeit

In vielen Systemen der Form (1.1) basieren die Einträge der Matrizen  $A$  und  $B$  auf experimentell ermittelten Daten und sind nicht mit absoluter Sicherheit bekannt. ALBERT EINSTEIN äußerte sich 1921 auch wie folgt über die Sicherheit mathematischer Ergebnisse:

„*Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit*“ [Ein21].

Daher empfiehlt es sich in vielen Situationen, ein unsicheres System anstelle des konkreten numerischen Systems zu untersuchen. Der wohl bekannteste Ansatz dafür ist der *strukturelle Ansatz*, bei dem angenommen wird, dass lediglich die Position aller Parameter in den Matrizen  $A$  und  $B$  bekannt ist und jeder Parameter kann einen beliebigen von Null verschiedenen Wert annehmen. Jede numerische Matrix hat dann ein bestimmtes *strukturelles Muster* und eine Klasse von Systemen der Form (1.1), welche durch die strukturellen Muster der Matrizen  $A$  und  $B$  beschrieben ist, wird als *strukturelles System* bezeichnet.

Wenn mindestens ein Element eines strukturellen Systems steuerbar ist, dann ist das strukturelle System *strukturell steuerbar* [Lin74] und wenn jedes Element steuerbar ist, dann ist das strukturelle System *strengh strukturell steuerbar* [MY79]. Die strukturelle Steuerbarkeit und die strenge strukturelle Steuerbarkeit sind daher jeweils notwendig und hinreichend für die Steuerbarkeit der linearen zeitinvarianten Systeme der Klasse.

Der strukturelle Ansatz zur Analyse linearer Systeme der Form (1.1) ist weit verbreitet und wird in vielen Fach- und Lehrbüchern behandelt (siehe z.B. [Cas87], [Rei88], [Sil91], [Son98], [Mur10], [Lun10]). Eine Google Scholar Suche nach dem Begriff „structural controllability“ (engl. für strukturelle Steuerbarkeit) liefert z.B. Verweise auf 1710 Veröffentlichungen<sup>1</sup>, wovon 770 innerhalb der letzten sechs Jahre veröffentlicht wurden<sup>2</sup>. Obwohl der Begriff der strukturellen Steuerbarkeit also schon seit mehr als 40 Jahren existiert [Lin74] und allgemein charakterisiert ist (siehe [SP76, GS76]), ist er nach wie vor Gegenstand der aktuellen Forschung. Dabei werden nicht nur technische Systeme, sondern auch biologische, informatische oder soziale Netzwerke auf Steuerbarkeit untersucht (siehe [LSB11]).

<sup>1</sup> <http://scholar.google.de/scholar?q=%22structural+controllability%22>, Stand 14.04.2015

<sup>2</sup> [http://scholar.google.de/scholar?q=%22structural+controllability%22&as\\_ylo=2010](http://scholar.google.de/scholar?q=%22structural+controllability%22&as_ylo=2010)

Neben der Untersuchung der Steuerbarkeit von linearen zeitinvarianten Systemen der Form (1.1) kann mit dem strukturellen Ansatz auch die Steuerbarkeit von Deskriptorsystemen (siehe [RW97, RR00]), die Steuerbarkeit von zeitvarianten zeitdiskreten Systemen [Pol92, HRS12] und die Steuerbarkeit von zeitvarianten zeitkontinuierlichen Systemen [HRS13b, HRS13c] untersucht werden. Außerdem lassen sich verschiedene weitere Eigenschaften, wie z.B. die Struktur der unendlichen Nullstellen [VDW91] oder die Eingangs-Ausgangs Entkoppelbarkeit [Lin81], ermitteln. In [DCW03] ist eine Übersicht zu verschiedenen Eigenschaften struktureller Systeme zu finden.

Eine Eigenschaft, welche nicht mit dem strukturellen Ansatz untersucht werden kann, ist die Stabilität eines linearen zeitinvarianten Systems (siehe [DCW03, S. 1129]). Dafür hat sich ein anderer Ansatz zur Beschreibung unsicherer Systeme als geeignet erwiesen, in dem Vorzeichenmuster anstelle von strukturellen Mustern verwendet werden. Dann sind zusätzlich die Vorzeichen aller von Null verschiedenen Einträge der Matrizen  $A$  und  $B$  festgelegt und eine solche Klasse von Systemen der Form (1.1) wird als *Vorzeichen-System* bezeichnet. Ein Vorzeichen-System ist *vorzeichen-stabil* [QR65], *vorzeichen-steuerbar* [JMO93] oder *vorzeichen-stabilisierbar* [HS14], wenn jeweils jedes Element des Vorzeichen-Systems stabil, steuerbar oder stabilisierbar ist. Diese Eigenschaften sind daher jeweils hinreichend für die Stabilität, die Steuerbarkeit und die Stabilisierbarkeit eines konkreten linearen zeitinvarianten Systems.

Die strukturelle Steuerbarkeit, die strenge strukturelle Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilität sind vollständig charakterisiert und es existieren effiziente Algorithmen, um ein System auf diese Eigenschaften zu untersuchen. Für die Vorzeichen-Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit sind dagegen bisher lediglich hinreichende oder notwendige Bedingungen bekannt.

Die Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften sind in Abbildung 1.1 dargestellt, wobei angenommen wird, dass ein lineares zeitinvariantes System der Form (1.1) eine Eigenschaft  $P$  besitzt, wenn es zu einer Klasse von Systemen gehört, welche die Eigenschaft  $P$  besitzt.

Viele der Beziehungen aus Abbildung 1.1 ergeben sich direkt aus den Definitionen der jeweiligen Eigenschaften. Es ist daher offensichtlich,

- dass jedes streng strukturell steuerbare System auch vorzeichen-steuerbar ist,
- dass jedes vorzeichen-steuerbare System auch strukturell steuerbar ist,
- dass jedes vorzeichen-steuerbare System auch vorzeichen-stabilisierbar ist und
- dass jedes vorzeichen-stabile System auch vorzeichen-stabilisierbar ist.

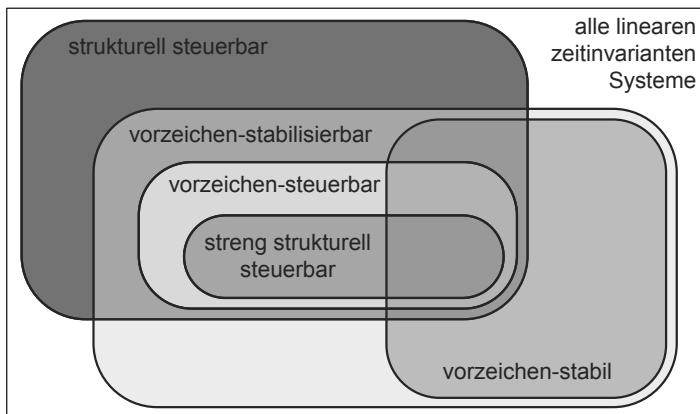


Abbildung 1.1: Mengendiagramm zu verschiedenen Eigenschaften von Systemen der Form (1.1) (siehe [HS14]).

Alle anderen Beziehungen, wie beispielsweise,

- dass es strukturell steuerbare Systeme gibt, die nicht stabilisierbar sind,
- dass es vorzeichen-stabilisierbare Systeme gibt, die nicht steuerbar sind oder,
- dass es vorzeichen-stabilisierbare Systeme gibt, die nicht stabil sind,

lassen sich leicht mit einfachen Beispielen zeigen (siehe z.B. [HRS13a], [HS14]).

Die Analyse eines strukturellen Systems bzw. eines Vorzeichen-Systems basiert auf der kombinatorischen Untersuchung der zugehörigen Matrizen des Systems. Eine notwendige Bedingung für die strukturelle Steuerbarkeit eines Systems ist beispielsweise, dass jede Zustandsgröße durch mindestens eine Eingangsgröße beeinflusst werden kann. Wenn dies nicht der Fall ist, dann lassen sich die System-Matrizen in die sogenannte *Form I* permutieren. Die zweite Bedingung für die Überprüfung der strukturelle Steuerbarkeit ist, dass der maximale Rang einer bestimmten strukturellen Matrix gleich der Systemordnung  $n$  ist. Wenn dieser kleiner ist, dann besitzt die strukturelle Matrix die sogenannte *Form II* (siehe [GS76, S. 535]). Für die strenge strukturelle Steuerbarkeit muss dagegen der minimale Rang bestimmter struktureller Matrizen ermittelt werden. Wenn dieser gleich  $n$  ist, dann besitzt die Matrix die *Form III* (siehe [RSW92, S. 207]). Es existieren effiziente Algorithmen zum Überprüfung jeder dieser drei Formen.

Analog zur Form III bei strukturellen Matrizen kann auch überprüft werden, ob alle Matrizen von einem bestimmten Vorzeichenmuster vollen Rang besitzen. Ein solches Vorzeichenmuster wird dann als *L-Matrix* bezeichnet (siehe [BS09]). L-Matrizen sind

besonders für die Überprüfung der Lösbarkeit von Gleichungssystemen interessant. Dies wurde zuerst 1962 durch LANCASTER in [Lan62] untersucht (siehe [KLM84]).

Für die Vorzeichen-Stabilität eines Vorzeichen-Systems muss jeder Eigenwert in jeder Matrix des zugehörigen Vorzeichenmusters einen negativen Realteil besitzen. Diese Eigenschaft ist charakterisiert (siehe [Jef74]) und es existieren effiziente Algorithmen für die Überprüfung (siehe [KD77]). Generell existieren bereits die verschiedensten Resultate zur Untersuchung des Spektrums aller Matrizen von einem quadratischen Vorzeichenmuster. In [EJ91] werden beispielsweise die Vorzeichenmatrizen charakterisiert, die jeweils nur reelle, nur komplexe oder nur rein imaginäre Eigenwerte erlauben, in [KMT96] werden Vorzeichenmuster untersucht, welche einen positiven Eigenwert besitzen und in [SG03] werden Vorzeichenmuster untersucht, welche Diagonalisierbarkeit erlauben. Eine Übersicht weiterer spektraler Eigenschaften von Vorzeichenmustern ist in [COD09] zu finden.

## 1.2 Zielsetzung, Beiträge und Aufbau der Arbeit

In bisherigen Arbeiten existieren lediglich hinreichende oder notwendige Bedingungen für die Vorzeichen-Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit. In dieser Arbeit wird erstmals eine vollständige Charakterisierung dieser beiden Eigenschaften vorgestellt und ein Algorithmus für die Überprüfung beschrieben.

Im Gegensatz zu vielen bisherigen Arbeiten im Bereich der Analyse von strukturellen Systemen bzw. von Vorzeichen-Systemen werden in dieser Arbeit ausschließlich algebraische und nicht graphentheoretische Methoden verwendet. Dafür werden im nächsten Abschnitt sieben Symbole definiert, welche verschiedene Teilmengen der reellen Zahlen repräsentieren und die Menge der *unsicheren Zahlen* bilden. Außerdem werden in Abschnitt 2 eine Addition, eine Multiplikation und eine Matrixmultiplikation für unsichere Zahlen und Matrizen definiert und verschiedene Eigenschaften des daraus entstehenden kommutativen Halbringes werden ermittelt.

Anschließend wird in Abschnitt 3 das *unsichere System* als eine Klasse linearer Systeme der Form (1.1) eingeführt. Ein unsicheres System wird mit zwei unsicheren Matrizen beschrieben und da strukturelle Matrizen und Vorzeichenmatrizen Spezialfälle von unsicheren Matrizen sind, wird durch diese Methode der strukturelle Ansatz mit dem Ansatz über Vorzeichenmuster vereint. In einem unsicheren System ist es im Gegensatz zum strukturellen Ansatz möglich, dass manche Systemparameter sowohl den Wert Null als auch einen von Null verschiedenen Wert annehmen können. Außerdem werden

in diesem Abschnitt bereits bekannte Resultate zur strengen Surjektivität, strengen strukturellen Steuerbarkeit sowie Vorzeichen-Stabilität, Vorzeichen-Steuerbarkeit und Vorzeichen-Stabilisierbarkeit auf diesen Ansatz übertragen. Die daraus entstandenen Bedingungen basieren auf der Multiplikation von unsicheren Vektoren mit der zu untersuchenden unsicheren Matrix oder dem unsicheren System, sodass diese Bedingungen eine Interpretation über die Eigenvektoren und die Elemente des Kokerns von unsicheren Matrizen zulassen. Zudem wird in diesem Abschnitt neben verschiedenen akademischen Beispielen auch die strenge strukturelle Steuerbarkeit der Bewegung eines Satelliten in einer erdnahen Umlaufbahn und die Vorzeichen-Steuerbarkeit, die Vorzeichen-Stabilität sowie die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit der Wankdynamik von Fahrrädern untersucht.

Im darauffolgenden Abschnitt 4 wird der *komplexe Vorzeichenvektor* als eine Äquivalenzklasse von komplexen Vektoren definiert und es wird gezeigt, dass dieser neue Ansatz für die Untersuchung von Vorzeichenmatrizen geeignet ist. Wenn beispielsweise ein komplexer Vektor im Kokern einer Matrix  $X$  ist, dann ist jeder Vektor derselben Äquivalenzklasse im Kokern eine Matrix vom selben Vorzeichenmuster wie  $X$  und wenn ein komplexer Vektor ein Eigenvektor zu einem rein komplexen Eigenwert von einer quadratischen Matrix  $A$  ist, dann ist jeder Vektor derselben Äquivalenzklasse auch ein Eigenvektor zu einem rein komplexen Eigenwert für eine Matrix vom selben Vorzeichenmuster wie  $A$ . Außerdem werden in diesem Abschnitt mehrere neue Bedingungen vorgestellt, mit denen überprüft werden kann, ob ein komplexer Vorzeichenvektor einen Eigenvektor zu einem Element einer unsicheren Matrix enthält. Dabei werden auch verschiedene bisher ungelöste Entscheidungsprobleme gelöst, wie z.B. ob es eine Matrix mit einem vorgegebenen Vorzeichenmuster gibt, welche einen komplexen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt.

Diese Resultate werden in Abschnitt 5 genutzt, um die Vorzeichen-Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit zu charakterisieren. Außerdem wird gezeigt, dass beide Entscheidungsprobleme NP-vollständig sind und es wird ein rekursiver Algorithmus zur Untersuchung der Vorzeichen-Steuerbarkeit beschrieben. Dabei wird eine Eigenschaft genutzt, welche den Aufwand der Untersuchung deutlich reduzieren kann. Abschließend werden zwei lineare zeitinvariante System der Form (1.1) auf strenge strukturelle Steuerbarkeit, Vorzeichen-Steuerbarkeit und Vorzeichen-Stabilisierbarkeit untersucht. Dabei handelt es sich um ein Modell der Längsdynamik eines F-8 Strahlenflugzeugs und ein Modell für die Dynamik eines unbemannten Helikopters im Schwebeflug.

## 2 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Zusammenhänge für die Resultate der folgenden Abschnitte zusammengestellt. Dafür wird in Abschnitt 2.1 die verwendete Notation beschrieben und es werden grundlegende mathematische Zusammenhänge angegeben, bevor in Abschnitt 2.2 wichtige Sätze zur Stabilität, Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit von linearen zeitinvarianten Systemen der Form (1.1) zusammengefasst werden.

Anschließend werden in Abschnitt 2.3 sieben Symbole für verschiedene Teilmengen reeller Zahlen eingeführt und es werden die Begriffe *unsichere Zahl*, *strukturelle Zahl* und *Vorzeichen* sowie *unsicheren Matrix*, *strukturelle Matrix* und *Vorzeichenmatrix* definiert. In Abschnitt 2.4 wird die Addition und die Multiplikation für diese Symbole festgelegt und in Abschnitt 2.5 werden abschließend grundlegenden Eigenschaften der sich daraus ergebenden Halbgruppe ermittelt.

### 2.1 Notation und grundlegende Zusammenhänge

Die Mengen aller ganzen Zahlen; aller positiven, ganzen Zahlen; aller reellen Zahlen und aller komplexen Zahlen werden mit  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  bezeichnet. Für zwei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $b > a$  bezeichnen die Ausdrücke  $[a, b]$ ,  $]a, b[$ ,  $[a, b[$  und  $]a, b]$  jeweils geschlossene, offene und halb-offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ . Die Ausdrücke  $[a; b]$ ,  $]a; b[$ ,  $[a; b[$  und  $]a; b]$  bezeichnen jeweils diskrete Intervalle, d.h.  $[a; b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ . Für zwei Mengen  $N, M$  bezeichnet jeweils  $N \subset M$ ,  $N \subseteq M$ ,  $N \supset M$  und  $N \supseteq M$ , dass  $N$  eine echte Teilmenge, eine Teilmenge, eine echte Obermenge und ein Obermenge von  $M$  ist. Der Ausdruck  $|N|$  beschreibt die Mächtigkeit der Menge  $N$ . Die imaginäre Einheit, der Realteil und der Imaginärteil einer komplexen Zahl  $x \in \mathbb{C}$  wird jeweils mit  $j$ ,  $\Re(x)$  und  $\Im(x)$  bezeichnet, sodass  $x = \Re(x) + j\Im(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{C}$  gilt.

Für zwei  $n, m \in \mathbb{N}$  wird die Menge aller  $n \times m$  Matrizen mit Einträgen aus einer Menge  $\mathbb{K}$  mit  $\mathbb{K}^{n \times m}$  bezeichnet. Für eine  $n \times m$  Matrix  $X$ , bezeichnet  $X_{k,i}$  den Eintrag in der  $k$ -ten Zeile und der  $i$ -ten Spalte von  $X$ . Mit  $X^T$  wird die Transponierte von  $X$  beschrieben, d.h.  $X^T$  ist eine  $m \times n$  Matrix und es gilt  $(X^T)_{i,k} := X_{k,i}$ . Eine Matrix aus  $\mathbb{C}^{n \times m}$  wird in dieser Arbeit mit einem großen lateinischen Buchstaben und ein Skalar aus  $\mathbb{C}$ , oder ein Vektor aus  $\mathbb{C}^n$  mit einem kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Die  $n \times n$  Einheitsmatrix wird mit  $I_n$  und eine Matrix, die nur Null-Einträge enthält, wird mit 0 bezeichnet, wobei die Dimension der Matrix 0 stets aus dem Zusammenhang ersichtlich ist. Der Ausdruck  $|a|$  beschreibt den absoluten Betrag einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  und der Ausdruck  $|A|$ ,

oder  $\det(A)$  bezeichnet die Determinante einer quadratischen Matrix  $A$ . Die Determinante einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  kann mit der Formel von LEIBNIZ ermittelt werden, sodass  $n!$  Summanden die Determinante von  $A$  beschreiben [Fis10, S. 192]. Ein solcher Summand wird als *Term der Expansion* von  $\det(A)$  bezeichnet. Der Rang einer Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  wird mit  $\text{rang}(X)$  bezeichnet.

Wenn eine Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  zeilenregulär ist, d.h.  $\text{rang}(X) = n$  gilt, dann ist die lineare Abbildung  $X: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  surjektiv [Fis10, S. 134] und die Matrix  $X$  wird dann als *surjektiv* bezeichnet. Wenn  $X$  nicht surjektiv ist, dann gibt es einen Vektor  $q \in \mathbb{C}^n$  mit  $q \neq 0$ , sodass  $q^T X = 0$  gilt. Der Vektor  $q$  ist dann im *Kokern* von der Matrix  $X$ .

Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein *Eigenwert* von  $A$ , wenn es einen Vektor  $q \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  gibt, für den

$$q^T A = \lambda q^T \quad (2.1)$$

gilt. Die Menge aller Vektoren  $q \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , welche Gleichung (2.1) für einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $A$  erfüllen, wird als *Eigenraum* von  $A$  bezüglich  $\lambda$  bezeichnet und ein Element des Eigenraums von  $A$  bezüglich  $\lambda$  ist ein *Eigenvektor von  $A$  bezüglich  $\lambda$* . Ein Paar  $(\lambda, q)$ , welches (2.1) erfüllt ist ein *Eigenpaar* von  $A$ . Die Menge aller Eigenwerte von  $A$  wird als *Spektrum* von  $A$  bezeichnet.

**Satz 2.1 :** Gegeben ist eine reelle Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und es wird angenommen, dass  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $q \in \mathbb{C}^n$  ein Eigenpaar von  $A$  ist. Die folgenden Eigenschaften sind erfüllt.

- (i)  $\bar{\lambda} = \Re(\lambda) - j \cdot \Im(\lambda)$  ist ein Eigenwert von  $A$  und  
 $\bar{q} = \Re(q) - j \cdot \Im(q)$  ist ein Eigenvektor von  $A$  bezüglich  $\bar{\lambda}$ .
- (ii) Für jedes  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist  $\alpha \cdot q$  ein Eigenvektor von  $A$  bezüglich  $\lambda$ .

*Beweis.* Beide Eigenschaften sind allgemein bekannt. (i) wird beispielsweise in [HJ13, S. 145] als Aufgabe 2.5.P46 gestellt, oder in [Wat07, S. 44] und [Mey00, S. 492] beschrieben. Die Eigenschaft (ii) folgt unmittelbar aus Gleichung (2.1).  $\square$

Für jede reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}$  und jede Zahl  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind  $a \text{ div } b = c \in \mathbb{Z}$  und  $a \text{ mod } b = d \in [0, |b|[$  jeweils der *Ganzzahlquotient* und der *Rest* der Division, sodass

$$a = b \cdot (a \text{ div } b) + (a \text{ mod } b) \quad (2.2)$$

gilt. Nach EUCLID's Theorem gibt es für jedes Paar  $(a, b)$  genau ein eindeutiges Paar  $(c, d)$  mit den genannten Eigenschaften [Bou92, S. 132]. Wenn  $a$  kein Vielfaches von  $b$  ist und

$b > 0$  gilt (siehe [Bou92, S. 133]), dann gilt

$$(-a) \bmod b = b - (a \bmod b). \quad (2.3)$$

Die Sinus- und Kosinus-Funktionen werden jeweils mit  $\sin$  und  $\cos$  bezeichnet. Für zwei reelle Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gelten die *Additionstheoreme* (siehe [FB06], S. 7, 1.6),

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \quad \text{und} \quad (2.4a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \quad \text{sowie} \quad (2.4b)$$

$$\cos(-a) = \cos(a) \quad \text{und} \quad \sin(-a) = -\sin(a). \quad (2.4c)$$

Mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  wird der Grenzwert der Funktion  $f(t)$  für  $t$  gegen  $\infty$  bezeichnet, wobei das Symbol  $\infty$  das Unendlichzeichen ist.

## 2.2 Grundlagen zu linearen zeitinvarianten Systemen

Lineare zeitinvariante Systeme der Form (1.1) bilden die Basis für viele Methoden der „Modernen Regelungstechnik“ und sie werden seit der Mitte des 20. Jahrhunderts in diesem Fachbereich verwendet. Bei der Analyse dieser Systeme spielen die Begriffe der Stabilität, der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit eine entscheidende Rolle. All diese Eigenschaften sind heutzutage genau untersucht und werden in den meisten Regelungstechnischen Grundlagenwerken behandelt (siehe z.B. [Kai80, CF03, Dat04, WL07, HJS08, Hes09]). Dieser Abschnitt fasst die in dieser Arbeit benötigten Definitionen und Sätze über lineare zeitinvariante Systeme der Form (1.1) zusammen.

Die Lösung eines linearen zeitinvarianten Systems (1.1) zum Zeitpunkt  $t \geq t_0$  ist durch

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

beschrieben, wobei  $e^{At}$  die Matrix-Exponentialfunktion ist.

**Definition 2.2 (Stabilität):** Das lineare zeitinvariante System (1.1) ist asymptotisch stabil, wenn für jeden Anfangszustand  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  bei  $u = 0$  gilt.

Die Eigenwerte der Matrix  $A$  sind für das asymptotische Verhalten der Matrix-Exponentialfunktion  $e^{At}$  verantwortlich, sodass die Stabilität eines linearen Systems der Form (1.1) mit dem folgenden Satz untersucht werden kann.

**Satz 2.3 :** Gegeben sind zwei Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ .

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Das lineare zeitinvariante System (1.1) mit  $A$  und  $B$  ist asymptotisch stabil.
- (ii) Alle Eigenwerte von  $A$  haben einen negativen Realteil.

Eine weitere, wichtige Eigenschaft von einem linearen zeitinvarianten System der Form (1.1) ist die Steuerbarkeit, welche 1960 von KALMAN [Kal60] eingeführt wurde. Die Steuerbarkeit eines Systems der Form (1.1) ist wie folgt definiert.

**Definition 2.4 (Steuerbarkeit):** Das lineare zeitinvariante System (1.1) ist steuerbar, wenn es für jeden Anfangszustand  $x_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  und jeden Zustandspunkt  $x_1$  zu einem Zeitpunkt  $t_1 > t_0$  eine Steuerfunktion  $u: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^r$  gibt, sodass  $x(t_1) = x_1$  gilt.

Die Steuerbarkeit von einem linearen zeitinvarianten System der Form (1.1) lässt sich mit dem folgenden Satz untersuchen.

**Satz 2.5 :** Gegeben sind zwei Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ .

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Das lineare zeitinvariante System der Form (1.1) mit  $A$  und  $B$  ist steuerbar.
- (ii) Es gilt  $\text{rang}(K(A, B)) = n$  mit  $K(A, B) := (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ .
- (iii) Es gilt  $\text{rang}(\tilde{K}(A, B)) = n^2$  mit

$$\tilde{K}(A, B) := \begin{pmatrix} I_n & 0 & B & 0 \\ A & \ddots & B & \\ & \ddots & I_n & \ddots \\ 0 & A & 0 & B \end{pmatrix}.$$

- (iv) Für jeden Wert  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt  $\text{rang}(A - \lambda \cdot I_n, B) = n$ .
- (v) Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  gilt  $\text{rang}(A - \lambda \cdot I_n, B) = n$ .

Die Bedingung (ii) in Satz 2.5 wird als *Kalman-Kriterium* und die Bedingung (v) als *Popov-Belevitch-Hautus Kriterium* bezeichnet. Die Popov-Belevitch-Hautus Bedingung liefert neben der Ja/Nein Aussage zur Steuerbarkeit eines Systems noch die Informationen über die Werte  $\lambda \in \mathbb{C}$ , bei denen die Matrix  $(A - \lambda \cdot I_n, B)$  im Falle der Nicht-Steuerbarkeit einen Rangverlust besitzt.

Ein Wert  $\lambda \in \mathbb{C}$  wird als  $(A, B)$ -steuerbar bezeichnet, wenn  $\text{rang}(A - \lambda \cdot I_n, B) = n$  gilt. Nach Satz 2.5.(iv) ist das System (1.1) mit  $A$  und  $B$  genau dann steuerbar, wenn alle Werte  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $(A, B)$ -steuerbar sind.

**Satz 2.6 :** *Gegeben sind zwei Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$  und eine komplexe Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Wenn der Wert  $\lambda$  ist nicht  $(A, B)$ -steuerbar ist, dann ist der Wert  $\bar{\lambda} = \Re(\lambda) - j\Im(\lambda)$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar.*

*Beweis.* Da  $\lambda$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar ist, gibt es ein  $q \in \mathbb{C}^n$ , sodass  $q^T A = \lambda q^T$  und  $q^T B = 0$  gilt. Aufgrund von Satz 2.1 gilt  $\bar{q}^T A = \bar{\lambda} \cdot \bar{q}^T$  mit  $\bar{q} = \Re(q) - j\Im(q)$ . Außerdem gilt  $\Re(q^T)B = \Im(q^T)B = 0$ , sodass  $\bar{q}^T B = 0$  gilt und  $\bar{\lambda}$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar ist.  $\square$

Ein schwächerer Begriff als die Steuerbarkeit ist die Stabilisierbarkeit (auch asymptotische Steuerbarkeit genannt), welche u.a. in [Hau70, S. 453, Theorem 4] untersucht wurde.

**Definition 2.7 (Stabilisierbarkeit):** *Das lineare zeitinvariante System der Form (1.1) ist stabilisierbar, wenn es für jeden Anfangszustand  $x_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  eine Steuerfunktion  $u: [t_0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^r$  gibt, sodass  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  gilt.*

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass ein lineares zeitinvariantes System der Form (1.1) stabilisierbar ist, wenn es steuerbar, oder wenn es stabil ist. Die Stabilisierbarkeit eines System (1.1) lässt sich mit dem folgenden Satz untersuchen.

**Satz 2.8 :** *Gegeben sind zwei Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

- (i) *Das lineare zeitinvariante System der Form (1.1) mit  $A$  und  $B$  ist stabilisierbar.*
- (ii) *Es existiert eine Matrix  $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , sodass jeder Eigenwert der Matrix  $A + BK$  einen negativen Realteil besitzt.*
- (iii) *Jeder Wert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) \geq 0$  ist  $(A, B)$ -steuerbar.*

## 2.3 Unsichere Zahlen, Matrizen und Vektoren

Die sign-Funktion für eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  wird wie folgt definiert

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} +1, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \text{ und} \\ -1, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Die sign-Funktion teilt den Raum  $\mathbb{R}$  auf natürliche Weise in drei Bereiche auf, die Zahl 0, die positiven und die negativen reellen Zahlen. Die Menge aller positiven, reellen Zahlen wird in dieser Arbeit mit dem Symbol  $+$  und die Menge aller negativen, reellen Zahlen mit dem Symbol  $\neg$  bezeichnet, d.h. es gilt

$$+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \quad \text{und} \\ \neg := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Zusätzlich wird die einelementige Menge  $\circ := \{0\}$  definiert.

Die Symbole  $+$ ,  $\neg$  und  $\circ$  werden als Vorzeichen bezeichnet und die Menge aller Vorzeichen wird mit  $\mathbb{V}$  symbolisiert, d.h. es gilt  $\mathbb{V} := \{+, \circ, \neg\}$ . Eine  $n \times m$  Matrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  ist eine Vorzeichenmatrix. Analog zu einem Vorzeichen beschreibt eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{n \times m}$  eine Menge von reellen  $n \times m$  Matrizen, wobei für eine reelle Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  genau dann  $X \in \mathcal{X}$  gilt, wenn für jedes  $a \in \{1, \dots, n\}$  und jedes  $b \in \{1, \dots, m\}$ ,  $X_{a,b} \in \mathcal{X}_{a,b}$  gilt. Ein Spaltenvektor mit Einträgen aus  $\mathbb{V}$  ist ein Spezialfall einer Vorzeichenmatrix und wird als Vorzeichenvektor bezeichnet.

**Beispiel 2.1 :** Die reelle  $2 \times 3$  Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 5.3 & 0 & -1.6 \\ \pi & -17 & 4 \end{pmatrix} \text{ ist ein Element der Vorzeichenmatrix } \mathcal{X} = \begin{pmatrix} + & \circ & \neg \\ + & \neg & + \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt  $X \in \mathcal{X} \in \mathbb{V}^{2 \times 3}$ , da u.a.  $X_{1,2} = 0 \in \circ = \mathcal{X}_{1,2}$ ;  $X_{2,2} = -17 \in \neg = \mathcal{X}_{2,2}$  und  $X_{2,3} = 4 \in + = \mathcal{X}_{2,3}$  gilt.

Neben den Vorzeichen  $+$ ,  $\neg$  und  $\circ$  werden in dieser Arbeit die folgenden Mengen definiert:

$$\begin{aligned} \oplus &:= + \cup \circ \quad \text{als die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen,} \\ \ominus &:= \neg \cup \circ \quad \text{als die Menge aller nicht-positiven reellen Zahlen,} \\ \star &:= + \cup \neg \quad \text{als die Menge aller von Null verschiedenen reellen Zahlen und} \\ \circledast &:= + \cup \neg \cup \circ = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obwohl die Definition von dem Symbol  $\circledast$  durch die Existenz von  $\mathbb{R}$  redundant ist, wurde das Symbol  $\circledast$  für eine optische Darstellung des Zusammenhangs  $\circledast = \star \cup \circ$  eingeführt.

Ein Element von der Menge  $\mathbb{S} := \{\circ, \star\}$  ist eine *strukturelle Zahl* und ein Element von der Menge  $\mathbb{U} := \{\circ, +, \neg, \oplus, \ominus, \star, \circledast\}$  ist eine *unsichere Zahl*. Analog zu Vorzeichenmatrizen wird eine Matrix mit Einträgen aus  $\mathbb{S}$  als *strukturelle Matrix* und eine Matrix mit Einträgen aus  $\mathbb{U}$  als *unsichere Matrix* bezeichnet. Strukturelle und unsichere Matrizen

sind ebenfalls Mengen von reellen Matrizen, aber während es für eine reelle Matrix  $X$  genau eine zugehörige Vorzeichenmatrix und genau eine zugehörige strukturelle Matrix gibt, gibt es mehrere unsichere Matrizen, zu denen  $X$  gehört, da jede Vorzeichenmatrix und jede strukturelle Matrix gleichzeitig auch eine unsichere Matrix ist.

**Beispiel 2.2 :**  $X$  aus Beispiel 2.1 ist Element von der strukturellen Matrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{S}^{2 \times 3}$  und den unsicheren Matrizen  $\mathcal{X}', \mathcal{X}'', \mathcal{X}''' \in \mathbb{U}^{2 \times 3}$  mit

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \star & \circ & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}, \mathcal{X}' = \begin{pmatrix} \oplus & \circ & \dashv \\ + & \star & \circledast \end{pmatrix}, \mathcal{X}'' = \begin{pmatrix} + & \oplus & \star \\ \star & \dashv & + \end{pmatrix} \text{ und } \mathcal{X}''' = \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \circledast & \circledast & \circledast \end{pmatrix}.$$

Eine unsichere Matrix  $\mathcal{X}$  ist von Null verschieden, wenn es ein  $a$  und ein  $b$  gibt, sodass  $\mathcal{X}_{a,b} \neq \circ$  gilt. Eine unsichere Matrix, die nur  $\circ$ -Einträge enthält, wird mit einem  $\circ$ -Symbol dargestellt. Die Dimension einer solchen Matrix ist stets anhand des Zusammenhangs ersichtlich.  $\mathcal{I}_n$  bezeichnet eine  $n \times n$  Matrix mit (+)-Einträgen auf der Diagonalen und  $\circ$ -Einträgen auf allen sonstigen Positionen. Analog bezeichnet  $\mathcal{I}_n^{\star}$  eine  $n \times n$  Matrix mit ( $\star$ )-Einträgen auf der Diagonalen. Unsichere Zahlen und Matrizen werden in dieser Arbeit mit kaligraphischen Großbuchstaben bezeichnet.

## 2.4 Rechnen mit unsicheren Zahlen

In dieser Arbeit werden unsichere Matrizen ausschließlich algebraisch untersucht und nicht wie in vielen anderen Arbeiten mit graphen-theoretischen Methoden. Dafür werden hier zwei Verknüpfungen, die Addition und die Multiplikation, für die Menge der unsicheren Zahlen  $\mathbb{U}$  in natürlicher Analogie zu den entsprechenden Verknüpfungen bei reelle Zahlen definiert. Die Regeln der zweistelligen Verknüpfungen sind in den zwei Cayley-Tafeln in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Multiplikation hat dabei die höhere Priorität. Diese beiden Verknüpfungen werden in [CF12] auf ähnlich Weise definiert (siehe auch [LHE94] oder [Liu07]).

**Beispiel 2.3 :** Es gilt  $++\oplus=+$ , da in der linken Tabelle in Abbildung 2.2,  $+$  die zweite Zeile und  $\oplus$  die fünfte Spalte repräsentiert und der Eintrag in der zweiten Zeile und fünften Spalte ein  $+$  ist. Weiterhin gilt  $\dashv + + = \circledast$ ;  $\dashv \cdot + = \dashv$  und  $\dashv \cdot \star = \star$ . Außerdem gilt  $\dashv \cdot (++\oplus + \circ) = \dashv \cdot + = \dashv$  und  $\dashv \cdot (\dashv + \oplus) + \dashv = + + \dashv = \circledast$ .

Beide Verknüpfungen sind assoziativ und kommutativ und sind genau so definiert, dass der folgende Satz Gültigkeit hat.

$+$	$\circ$	$+$	$-$	$\star$	$\oplus$	$\ominus$	$\circledast$
$\circ$	$\circ$	$+$	$-$	$\star$	$\oplus$	$\ominus$	$\circledast$
$+$	$+$	$+$	$\circledast$	$\circledast$	$+$	$\circledast$	$\circledast$
$-$	$-$	$\circledast$	$-$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$
$\star$	$\star$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$
$\oplus$	$\oplus$	$+$	$\circledast$	$\circledast$	$\oplus$	$\circledast$	$\circledast$
$\ominus$	$\ominus$	$\circledast$	$-$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$
$\circledast$							

$\cdot$	$\circ$	$+$	$-$	$\star$	$\oplus$	$\ominus$	$\circledast$
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$+$	$+$	$+$	$-$	$\star$	$\oplus$	$\ominus$	$\circledast$
$-$	$-$	$-$	$+$	$\star$	$\ominus$	$+$	$\circledast$
$\star$	$\circ$	$\star$	$\star$	$\star$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$
$\oplus$	$\circ$	$\oplus$	$\ominus$	$\circledast$	$\oplus$	$\ominus$	$\circledast$
$\ominus$	$\circ$	$\ominus$	$+$	$\circledast$	$\ominus$	$+$	$\circledast$
$\circledast$	$\circ$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$	$\circledast$

Abbildung 2.2: Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation der unsicheren Zahlen

**Satz 2.9 :** Gegeben sind zwei unsichere Zahlen  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{U}$ .

Für jedes  $x \in \mathcal{X}$  und jedes  $y \in \mathcal{Y}$  gilt

- (i)  $x + y \in \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  und
- (ii)  $x \cdot y \in \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}$ .

Zudem sind die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt.

- (iii) Für jedes  $z \in \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  gibt es ein  $x \in \mathcal{X}$  und ein  $y \in \mathcal{Y}$ , sodass  $z = x + y$  gilt.
- (iv) Für jedes  $z \in \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}$  gibt es ein  $x \in \mathcal{X}$  und ein  $y \in \mathcal{Y}$ , sodass  $z = x \cdot y$  gilt.

**Beweis.** Wenn  $\mathcal{X} = \circ$ , dann ist  $x = 0$  das einzige Element in  $\mathcal{X}$  und es gilt  $\mathcal{Z} := \mathcal{X} + \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$  und  $\mathcal{Z}' := \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} = \circ$ . Für jedes  $y \in \mathcal{Y}$  gilt  $x + y = y \in \mathcal{Z}$  und  $x \cdot y = 0 \in \mathcal{Z}'$ , sodass (i) und (ii) erfüllt sind. Analog gilt für jedes  $z \in \mathcal{Z}$  und  $z' := 0 \in \mathcal{Z}'$  mit  $x := 0 \in \mathcal{X}$  und  $y := z \in \mathcal{Y}$ , dass  $z = x + y$  und  $z' = x \cdot y$  gilt, sodass auch (iii) und (iv) erfüllt ist.

Wenn  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = +$ , dann gilt  $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} = + =: \mathcal{Z}$ . Für jedes  $x \in \mathcal{X}$  und jedes  $y \in \mathcal{Y}$  gilt  $x + y \in + = \mathcal{Z}$  und  $x \cdot y \in \mathcal{Z}$ , sodass (i) und (ii) erfüllt sind. Mit  $x := z/2 =: y \in \mathcal{X} = \mathcal{Y}$  gilt  $z = x + y$  für jedes  $z \in \mathcal{Z}$  und mit  $y' := 2 \in \mathcal{Y}$  gilt  $z = x \cdot y'$ , sodass (iii) und (iv) erfüllt sind. Alle anderen Fälle lassen sich auf vergleichbare Art zeigen.  $\square$

Mit dem folgenden Satz wird eine weitere Eigenschaft für die Multiplikation von einem Vorzeichen mit einer unsicheren Zahl beschrieben.

**Satz 2.10 :** Gegeben ist ein Vorzeichen  $\mathcal{X} \in \mathbb{V}$  und eine unsichere Zahl  $\mathcal{Y} \in \mathbb{U}$ .

Für jedes  $x \in \mathcal{X}$  und jedes  $z \in \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}$  gibt es ein  $y \in \mathcal{Y}$ , sodass  $z = x \cdot y$  gilt.

*Beweis.* Wenn  $\mathcal{X} = \circ$  gilt, dann ist  $x = 0$  und  $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} = \circ$  erfüllt. Dann gilt  $z = 0 \cdot y \in \circ$  und die Aussage ist erfüllt. Andernfalls gilt  $\mathcal{X} \in \{+, -\}$ ;  $z \in \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} =: \mathcal{Z}$ ;  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^2 \cdot \mathcal{Y} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{Z}$  und  $x \neq 0$ . Mit  $y := z/x \in \mathcal{Z} \cdot \mathcal{X}$  gilt  $y \in \mathcal{Y}$  und die Aussage erfüllt ist.  $\square$

Satz 2.10 gilt für die Multiplikation von einem Vorzeichen mit einer unsicheren Zahl, kann aber nicht allgemein auf die Multiplikation von zwei unsicheren Zahlen erweitert werden, wie das folgende Beispiel 2.4 zeigt.

**Beispiel 2.4 :** Angenommen, es gilt  $\mathcal{X} = - \in \mathbb{V}$  und  $\mathcal{Y} = \oplus \in \mathbb{U}$ , dann ist  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} = \oplus$ . Nach Satz 2.10 gibt es für jedes  $x < 0$  ( $x \in \mathcal{X}$ ) und jedes  $z \geq 0$  ( $z \in \mathcal{Z}$ ) ein  $y \leq 0$  ( $y \in \mathcal{Y}$ ), welches  $x \cdot y = z$  genügt. Dies ist mit  $y := z/x \in \mathcal{Y}$  gegeben.

Wenn dagegen  $\mathcal{X}' = -\oplus = \mathcal{Y} \notin \mathbb{V}$  gilt, dann gilt ebenfalls  $\mathcal{Z} = \mathcal{X}' \cdot \mathcal{Y} = \oplus$ . Nach Satz 2.9.(iv) gibt es für jedes  $z \geq 0$  ( $z \in \mathcal{Z}$ ) ein  $x' \leq 0$  ( $x' \in \mathcal{X}'$ ) und ein  $y \leq 0$  ( $y \in \mathcal{Y}$ ), sodass  $z = x' \cdot y$  erfüllt ist, aber beispielsweise für  $x' = 0 \in \mathcal{X}'$  und  $z = 1 \in \mathcal{Z}$  gibt es kein  $y \in \mathcal{Y}$ , sodass  $z = x' \cdot y$  erfüllt ist.

Bei der Multiplikation von zwei unsicheren Zahlen  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{U}$  kann auf das Verknüpfungssymbol verzichtet werden, d.h.  $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}$  kann mit  $\mathcal{X}\mathcal{Y}$  beschrieben werden. Zudem gilt  $-\mathcal{X} := (-) \cdot \mathcal{X}$  für jede unsichere Zahl  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}$ . Damit lässt sich die Subtraktion für zwei unsichere Zahlen  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{U}$  wie folgt durchführen

$$\mathcal{X} - \mathcal{Y} = \mathcal{X} + (-\mathcal{Y}) = \mathcal{X} + (-\mathcal{Y}).$$

Die Addition und die Multiplikation von unsicheren Matrizen wird analog zu den entsprechenden Operationen bei reellen Matrizen definiert. Für zwei unsichere Matrizen  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  ist  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  eine  $n \times m$  unsichere Matrix und es gilt  $\mathcal{Z}_{a,b} := \mathcal{X}_{a,b} + \mathcal{Y}_{a,b}$  für jedes  $a \in \{1, \dots, n\}$  und jedes  $b \in \{1, \dots, m\}$ . Die Multiplikation von einer unsicheren Zahl  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}$  mit einer unsicheren Matrix  $\mathcal{Y} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  ergibt eine  $n \times m$  unsichere Matrix  $\mathcal{Z} = \mathcal{X}\mathcal{Y}$  und es gilt  $\mathcal{Z}_{a,b} := \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}_{a,b}$  für jedes  $a \in \{1, \dots, n\}$  und jedes  $b \in \{1, \dots, m\}$ . Die Multiplikation von zwei unsicheren Matrizen  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}^{a \times b}$  und  $\mathcal{Y} \in \mathbb{U}^{b \times c}$  ergibt eine  $a \times c$  unsichere Matrix  $\mathcal{Z} = \mathcal{X}\mathcal{Y}$  und es gilt  $\mathcal{Z}_{x,y} := \sum_{k=1}^b (\mathcal{X}_{x,k} \mathcal{Y}_{k,y})$  für jedes  $x \in \{1, \dots, a\}$  und jedes  $y \in \{1, \dots, c\}$ .

**Beispiel 2.5 :** Gegeben sind die unsicheren Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{3 \times 3}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^3$  mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \oplus & + & \circ \\ + & \circ & \circ \\ \star & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} + \\ \circ \\ \star \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\mathcal{C}^T = \mathcal{B}^T \mathcal{A} = (\otimes, +, \circ)$ , da beispielsweise

$$\mathcal{C}_1 = \sum_{k=1}^3 \mathcal{B}_k \mathcal{A}_{k,1} = (+ \cdot \oplus) + (\circ \cdot +) + (\star \cdot \otimes) = \oplus + \circ + \otimes = \otimes$$

gilt. Außerdem ergibt sich

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} + & \oplus & \circ \\ \oplus & + & \circ \\ \star & \otimes & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{A}^2\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} + & \oplus & + \\ \circ & + & \oplus \\ \star & \otimes & \otimes \end{pmatrix}.$$

Für die Multiplikation von einem Vorzeichenvektor mit einer unsicheren Matrix ergibt sich analog zu Satz 2.10 der folgende, interessante Zusammenhang.

**Satz 2.11 :** Gegeben sind ein Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  und eine unsichere Matrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ . Für jedes  $q \in \mathcal{Q}$  und jedes  $y^T \in \mathcal{Q}^T \cdot \mathcal{X}$  gibt es eine Matrix  $X \in \mathcal{X}$ , sodass  $y^T = q^T \cdot X$  erfüllt ist.

*Beweis.* Wir definieren  $\mathcal{Y}^T := \mathcal{Q}^T \cdot \mathcal{X}$  und wir fixieren ein  $s \in \{1, \dots, m\}$ . Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  definieren wir  $\mathcal{Z}_i := \mathcal{Q}_i \mathcal{X}_{i,s}$ , sodass  $\mathcal{Y}_s = \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_i \mathcal{X}_{i,s} = \sum_{i=1}^n \mathcal{Z}_i$  gilt. Aufgrund von Satz 2.9 gibt es für jedes  $y_s \in \mathcal{Y}_s$  und jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein  $z_i \in \mathcal{Z}_i$ , sodass  $y_s = \sum_{i=1}^n z_i$  gilt. Mithilfe von Satz 2.10 gibt es dann für jedes  $q_i \in \mathcal{Q}_i$  ein  $X_{i,s} \in \mathcal{X}_{i,s}$ , sodass  $z_i = q_i X_{i,s}$  gilt und die Aussage ist erfüllt.  $\square$

**Beispiel 2.6 :** Gegeben sind drei unsichere Vektoren  $\mathcal{X} = (+ \oplus \dashv \circ)^T$ ,  $\mathcal{Y} = (+ + \dashv \otimes)^T$  und  $\mathcal{Z} = (\dashv \circ + +)^T$ . Es gilt

$$\mathcal{X}^T \mathcal{Y} = (+ \cdot +) + (\oplus \cdot +) + (\dashv \cdot \dashv) + (\circ \cdot \otimes) = + + \oplus + + \circ = +,$$

$$\mathcal{X}^T \mathcal{Z} = (+ \cdot \dashv) + (\oplus \cdot \circ) + (\dashv \cdot +) + (\circ \cdot +) = \dashv + \circ + \dashv + \circ = \dashv \quad \text{und}$$

$$\mathcal{Z}^T \mathcal{Y} = (\dashv \cdot +) + (\circ \cdot +) + (+ \cdot \dashv) + (+ \cdot \otimes) = \dashv + \circ + \dashv + \otimes = \otimes.$$

Der unsichere Vektor  $\mathcal{Z}$  ist ein Vorzeichenvektor und es gilt  $0 \in \mathcal{Z}^T \mathcal{Y}$ . Für jedes  $z = \begin{pmatrix} -z_1 & 0 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}^T \in \mathcal{Z} \in \mathbb{V}^4$  mit  $z_i > 0$  für  $i \in \{1, 3, 4\}$  gibt es nach Satz 2.11 ein  $y \in \mathcal{Y} \in \mathbb{U}^4$ , sodass  $z^T y = 0$  gilt. Dies ist beispielsweise mit  $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & 1 & -\frac{1}{z_3} & \frac{2}{z_4} \end{pmatrix}^T$  erfüllt.

## 2.5 Algebraische Bedeutung und weitere Eigenschaften

Die algebraischen Objekte  $(\mathbb{U}, +)$  und  $(\mathbb{U}, \cdot)$  sind Halbgruppen, da beide Verknüpfungen assoziativ sind. Außerdem sind beide Verknüpfungen kommutativ und besitzen ein neutrales Element, sodass beide Halbgruppen abelsche Monoide sind. Die algebraischen Objekte  $(\mathbb{U}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{S} \cup \{\oplus\}, +, \cdot)$  und  $(\mathbb{V} \cup \{\otimes\}, +, \cdot)$  sind kommutative Halbringe. Für Grundlagen und Hintergrundinformationen zu Halbgruppen und Halbringe wird auf [HW93] und [Haz09] verwiesen.

Die Relation  $\subseteq$  auf der Menge der unsicheren Zahlen  $\mathbb{U}$  ist eine Halbordnung und per Definition (siehe Abschnitt 2.3) gibt es für jede unsichere Zahl  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}$  ein Vorzeichen  $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$ , sodass  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  gilt. Die Vorzeichen  $\mathbb{V}$  sind daher die minimalen Elemente und die unsichere Zahl  $\otimes$  ist das maximale Element der Halbordnung, welche in Abbildung 2.3 in einem Hasse-Diagramm dargestellt ist.

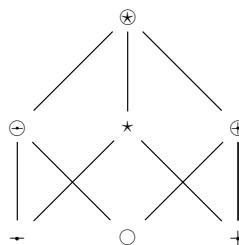


Abbildung 2.3: Hasse-Diagramm zur Darstellung der Relation  $\subseteq$  auf der Menge  $\mathbb{U}$ .

Wird die Matrix  $\mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}$  mit einer Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  aus  $\mathbb{V}^{n \times m}$  multipliziert, d.h.  $\mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} \cdot \mathcal{X} := \mathcal{S}$ , dann ist das Ergebnis der Multiplikation eine strukturelle Matrix aus  $\mathbb{S}^{n \times m}$  und  $\mathcal{S}$  beschreibt die Struktur von  $\mathcal{X}$ . Im allgemeineren Fall, wenn  $\mathcal{X}$  ein Element von  $\mathbb{U}^{n \times m}$  ist, dann ist  $\mathcal{S} = \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} \cdot \mathcal{X}$  eine Matrix aus  $\tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$ , wobei  $\tilde{\mathbb{S}} := \{\circ, \star, \otimes\} = \mathbb{S} \cup \{\otimes\}$  gilt. Mit dem folgenden Satz wird gezeigt, dass  $\mathcal{S}$  dann das „kleinsten“ Element aus  $\tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$  ist, welches  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$  genügt.

**Satz 2.12 :** Gegeben ist eine unsichere Matrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ .  
Es gilt  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$  für jedes  $\mathcal{S} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$  mit  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$ .

*Beweis.* Wir definieren  $\hat{\mathcal{S}} := \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} \cdot \mathcal{X}$  und wir fixieren ein  $a \in \{1, \dots, n\}$ , ein  $b \in \{1, \dots, m\}$  und ein  $\mathcal{S} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$  mit  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$ . Wenn  $\mathcal{X}_{a,b} = \circ$  gilt, dann gilt  $\hat{\mathcal{S}}_{a,b} = \star \cdot \mathcal{X}_{a,b} = \circ = \mathcal{X}_{a,b} \subseteq \mathcal{S}_{a,b} \in \{\circ, \otimes\}$  und die Aussage ist erfüllt. Wenn andernfalls

$\mathcal{X}_{a,b} \in \{+, -, \star\}$  gilt, dann gilt  $\hat{\mathcal{S}}_{a,b} = \star \cdot \mathcal{X}_{a,b} = \star$  und  $\mathcal{S}_{a,b} \in \{\star, \circledast\}$ . Dann gilt  $\mathcal{X}_{a,b} \subseteq \hat{\mathcal{S}}_{a,b} \subseteq \mathcal{S}_{a,b}$  und die Aussage ist erfüllt. Im verbleibenden Fall  $\mathcal{X}_{a,b} \in \{\oplus, \ominus, \circledast\}$  gilt  $\mathcal{X}_{a,b} \subseteq \hat{\mathcal{S}}_{a,b} = \star \cdot \mathcal{X}_{a,b} = \circledast$  und  $\mathcal{S}_{a,b} = \circledast$ , sodass die Aussage ebenfalls erfüllt ist.  $\square$

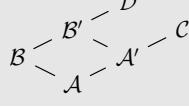
**Beispiel 2.7 :** Gegeben sind vier unsichere Matrizen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{U}^{3 \times 2}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} + & \circ \\ - & + \\ \circ & + \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \oplus & \circ \\ - & \circledast \\ \ominus & + \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \star & \circ \\ \circledast & \star \\ \circ & \circledast \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \circledast & \circ \\ \circledast & \circledast \\ \circledast & \star \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{A}$  ist eine Vorzeichenmatrix und es gilt  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \tilde{\mathbb{S}}^{3 \times 2}$  sowie  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$  und  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ . Außerdem gilt  $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{C}$  und  $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{D}$ , da z.B.  $\mathcal{B}_{1,1} \not\subseteq \mathcal{C}_{1,1}$  und  $\mathcal{C}_{3,2} \not\subseteq \mathcal{D}_{3,2}$  gilt. Es ergibt sich

$$\mathcal{I}_3^{\mathbb{S}} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \star & \circ & \circ \\ \circ & \star & \circ \\ \circ & \circ & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & \circ \\ - & + \\ \circ & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \circ \\ \star & \star \\ \circ & \star \end{pmatrix} =: \mathcal{A}' \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_3^{\mathbb{S}} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \circledast & \circ \\ \star & \circledast \\ \circledast & \star \end{pmatrix} =: \mathcal{B}'$$

sowie  $\mathcal{I}_3^{\mathbb{S}} \mathcal{C} = \mathcal{C}$  und  $\mathcal{I}_3^{\mathbb{S}} \mathcal{D} = \mathcal{D}$ .  $\mathcal{A}'$  ist eine strukturelle Matrix, d.h.  $\mathcal{A}' \in \mathbb{S}^{3 \times 2}$  und es gilt  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \subset \mathcal{C}$  und  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{D}$ . Es ergibt sich das folgende Hasse-Diagramm:



Abschließend werden in dem folgenden Satz einige grundlegende Eigenschaften der beiden Verknüpfungen auf der Menge der unsicheren Zahlen aufgelistet.

**Satz 2.13 :** Für jede unsichere Zahl  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}$  und jedes Vorzeichen  $\mathcal{Y} \in \mathbb{V}$  gilt

- (i)  $\mathcal{X} + \circ = \circ + \mathcal{X} = \mathcal{X}$ .
- (ii)  $\mathcal{X} + \circledast = \circledast + \mathcal{X} = \circledast$ .
- (iii)  $\mathcal{X} \cdot \circ = \circ \cdot \mathcal{X} = \circ$ .
- (iv)  $\mathcal{X} \cdot + = + \cdot \mathcal{X} = \mathcal{X}$ .
- (v)  $(\mathcal{X} -) - = - \mathcal{X} - = - (\mathcal{X} -) = \mathcal{X}$ .
- (vi)  $\mathcal{X} \subseteq (\star) \cdot \mathcal{X}$ .
- (vii)  $\circ \subseteq \mathcal{Y} - \mathcal{X} \iff \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ .

*Beweis.* Die Beziehungen (i) bis (vi) ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Addition und Multiplikation. Es wird daher nur die Aussage (vii) bewiesen. Wenn  $\mathcal{Y} = +$

und  $\circ \subseteq \mathcal{Y} - \mathcal{X}$  erfüllt ist, dann gilt  $\mathcal{X} \in \{+, \oplus, \star, \circledast\}$ , wenn andernfalls  $\mathcal{Y} = \circ$ , dann gilt  $\mathcal{X} \in \{\circ, \ominus, \oplus, \circledast\}$  und wenn  $\mathcal{Y} = \dashv$ , dann gilt  $\mathcal{X} \in \{\dashv, \ominus, \star, \circledast\}$ . In all diesen Fällen gilt genau dann  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$  und die Aussage ist erfüllt.  $\square$

### 3 Lineare Systeme mit unsicheren Matrizen

In diesem Abschnitt wird der Begriff des unsicheren Systems definiert und es werden verschiedene Eigenschaften unsicherer Matrizen und unsicherer Systeme untersucht. Dazu gehören die strenge strukturelle Surjektivität und die strenge Surjektivität in Abschnitt 3.1, die strenge strukturelle Steuerbarkeit in Abschnitt 3.2, die Vorzeichen-Steuerbarkeit in Abschnitt 3.3, die Vorzeichen-Stabilität in Abschnitt 3.4 und die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit in Abschnitt 3.5. Die meisten Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind Verallgemeinerungen bekannter Ergebnisse von den Spezialfällen, bei denen die unsichere Matrix oder das unsichere System nur aus Vorzeichen oder strukturellen Zahlen besteht.

Abgeschlossen wird dieser Abschnitt mit einer kurzen Zusammenfassung von Ergebnissen zur strengen strukturellen Steuerbarkeit von zeitvarianten Systemen sowie dem Bezug zum Kalman Kriterium in Abschnitt 3.6.

#### 3.1 Strenge Surjektivität von unsicheren Matrizen

Die Steuerbarkeit und die Stabilisierbarkeit eines linearen Systems der Form (1.1) kann nach Satz 2.5.(iv) und 2.8.(iii) über die Surjektivität von bestimmten Matrizen ermittelt werden. Daher wird in diesem Abschnitt zunächst die Surjektivität von unsicheren Matrizen untersucht.

**Definition 3.1 (Strenge Strukturelle Surjektivität):** Eine Matrix  $\mathcal{S} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  ist streng strukturell surjektiv (engl. strongly structurally surjective), wenn jede reelle Matrix  $S \in \mathcal{S}$  surjektiv ist. Eine unsichere Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  ist streng strukturell surjektiv, wenn es eine streng strukturell surjektive Matrix  $\mathcal{S} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$  mit  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$  gibt.

Eine Matrix  $\mathcal{S} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}, m \geq n$  ist daher streng strukturell surjektiv, wenn der minimale Rang von allen Matrizen  $X \in \mathcal{S}$  gleich  $n$  ist. Diese Eigenschaft lässt sich mit der sogenannten *Form III* überprüfen (siehe z.B. [RSW92, S. 207, Def. 2], [SJA11, S. 336, Def. 8], oder [HRS12, S. 2191, (3)]).

**Definition 3.2 (Form III):** Eine unsichere Matrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  besitzt die Form III, wenn zwei strukturelle Permutationsmatrizen  $\mathcal{P} \in \mathbb{S}^{n \times n}$  und  $\mathcal{P}' \in \mathbb{S}^{m \times m}$  derart existieren, sodass

$$\mathcal{P}\mathcal{X}\mathcal{P}' \subseteq \begin{pmatrix} \star & \cdots & \star & \star & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ \\ \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \circ & \circ & \circ \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \circ & \circ \\ \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

Neben der Form III existieren die Formen I und II, mit denen jeweils überprüft werden kann, ob alle Zustandsgrößen mit dem Eingang eines Systems verbunden sind und ob der maximale Rang von allen Elementen einer strukturellen Matrix gleich  $n$  ist (siehe [GS76, S. 535]). Eine Matrix  $\mathcal{X} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$  kann mit dem folgenden Satz auf strenge strukturelle Surjektivität überprüft werden.

**Satz 3.3 :** Gegeben ist eine Matrix  $\mathcal{X} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Die Matrix  $\mathcal{X}$  ist streng strukturell surjektiv.
- (ii) Für jeden strukturellen Vektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{S}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  gilt  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{X}$ .
- (iii) Die Matrix  $\mathcal{X}$  besitzt die Form III.

**Beweis.** Die Äquivalenz zwischen (i) und (iii) wurde bereits in [Bru66, S. 473, Th. 2.1] (siehe auch [HS93, S. 11, Th. 4.4.(iii)]) für  $n = m$  und in [HRS12, S. 2191, Prop. III.1] für  $\mathcal{X} \in \mathbb{S}^{n \times m}$  bewiesen. Der Beweis hier verläuft ähnlich zu dem von [HRS12].

Für (i)  $\implies$  (ii) nehmen wir an, dass (ii) nicht erfüllt ist. Dann gibt es einen strukturellen Vektor  $\circ \neq \mathcal{Q} \in \mathbb{S}^n$ , sodass  $\circ \subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{X}$  gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gilt  $\mathcal{Q}_i = \star$  für die ersten  $k > 0$  Einträge von  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{Q}_i = \circ$  für die letzten  $(n - k)$  Einträge von  $\mathcal{Q}$ . Aufgrund der Annahme  $\circ \subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{X}$  kann eine Matrix  $X \in \mathcal{X}$  derart gewählt werden, dass die Summe der ersten  $k$  Zeilen in jeder Spalte Null ergibt. Mit  $q := (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathcal{Q}$  gilt  $q^T X = 0$  und  $\mathcal{X}$  ist nicht streng strukturell surjektiv.

Für den Beweis (ii)  $\implies$  (iii) wählen wir  $\mathcal{Q} = (\star, \dots, \star)^T$  und aufgrund der Annahme gilt  $\circ \not\subseteq \mathcal{Y}^T = \mathcal{Q}^T \mathcal{X}$ , sodass für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\circ \not\subseteq \mathcal{Y}_i = \sum_{l=1}^n \mathcal{X}_{l,i}$  gilt. Spalte  $i$  von  $\mathcal{X}$  besitzt dann keinen  $\circ$ -Eintrag und genau einen  $\star$ -Eintrag in Zeile  $k$ . Ohne Einschränkungen der Allgemeinheit gilt  $i = m$  und  $k = n$  und wir entfernen die letzte

Zeile und Spalte von  $\mathcal{X}$ . Die Eigenschaft (iii) folgt dann aus einem Induktionsargument. Die Beziehung (iii)  $\implies$  (i) ist abschließend offensichtlich.  $\square$

Um eine unsichere Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  auf strenge strukturelle Surjektivität zu untersuchen kann der folgende Satz verwendet werden.

**Satz 3.4 :** *Gegeben ist eine unsichere Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

*Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

- (i) *Die unsichere Matrix  $\mathcal{U}$  ist streng strukturell surjektiv.*
- (ii) *Die Matrix  $\mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} \mathcal{U} \in \mathbb{S}^{n \times m}$  ist streng strukturell surjektiv.*
- (iii) *Für jeden strukturellen Vektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{S}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  gilt  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{U}$ .*

*Beweis.* Der Äquivalenz von (i) und (ii) folgt unmittelbar aus Definition 3.1 und Satz 2.12. (ii)  $\iff$  (iii) folgt aus Satz 3.3, da  $\mathcal{Q}^T \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} \mathcal{U} = \mathcal{Q}^T \mathcal{U}$  gilt.  $\square$

Die strenge strukturelle Surjektivität von einer unsicheren Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  ist hinreichend, aber nicht notwendig für die Surjektivität aller Matrizen  $U \in \mathcal{U}$ . Daher kann es unsichere Matrizen  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  geben, die nicht streng strukturell surjektiv sind, aber dennoch sind alle reellen Matrizen  $U \in \mathcal{U}$  surjektiv (siehe z.B.  $\mathcal{X}'$  in Beispiel 3.1 unten). Für diese unsicheren Matrizen gibt es dann nicht surjektive Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$  gleicher Struktur, d.h. eine Matrix  $U \in \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} \mathcal{U}$  ist nicht surjektiv, aber es gilt  $U \notin \mathcal{U}$ .

Nachfolgend wird die strenge Surjektivität für unsichere Matrizen definiert<sup>3</sup>.

**Definition 3.5 (Strenge Surjektivität):** *Eine unsichere Matrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  ist streng surjektiv, wenn jede reelle Matrix  $X \in \mathcal{X}$  surjektiv ist.*

Wenn  $\mathcal{X}$  streng strukturell surjektiv ist, dann ist nach Definition 3.1 jedes  $X \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} \mathcal{X}$  surjektiv und  $\mathcal{X}$  ist streng surjektiv. Dies wird in dem folgenden Satz festhalten.

**Satz 3.6 :** *Gegeben ist eine unsichere Matrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

*Wenn  $\mathcal{X}$  streng strukturell surjektiv ist, dann ist  $\mathcal{X}$  streng surjektiv.*

Mit dem folgenden Satz lässt sich eine Matrix auf strenge Surjektivität untersuchen.

<sup>3</sup> Eine streng surjective Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{n \times m}$  wird auch als L-Matrix bezeichnet (siehe [BS09]).

**Satz 3.7 :** Gegeben ist eine unsichere Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Die unsichere Matrix  $\mathcal{U}$  ist streng surjektiv.
- (ii) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  gilt  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{U}$ .

*Beweis.* Für den Spezialfall von Vorzeichenmatrizen,  $\mathcal{U} \in \mathbb{V}^{n \times m}$ , ergibt sich der Satz aus [KLM84, S. 133, Remark 1.1]. Im Folgenden wird ein kurzer Beweis für unsichere Matrizen  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  dargestellt.

Wir nehmen zunächst an, dass  $\circ \subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{U}$  für einen Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  gilt. Aus Satz 2.11 folgt, dass es dann für jeden Vektor  $q \in \mathcal{Q}$  ein  $U \in \mathcal{U}$  gibt, sodass  $q^T U = 0$  gilt. Die Matrix  $U$  ist dann nicht surjektiv und  $\mathcal{U}$  ist nicht streng surjektiv.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass  $\mathcal{U}$  nicht streng surjektiv ist. Dann gibt es eine Matrix  $U \in \mathcal{U}$  und einen Vektor  $q \in \mathbb{R}^n$  mit  $q \neq 0$ , sodass  $q^T U = 0$  gilt. Der Vektor  $q$  ist Element des Vorzeichenvektors  $\mathcal{Q} \neq \circ$  und aufgrund von Satz 2.9 gilt dann  $\circ \subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{U}$ , sodass (ii) nicht erfüllt ist.  $\square$

Vergleicht man die Bedingung (iii) aus Satz 3.4 mit der Bedingung (ii) aus Satz 3.7, so kann man erkennen, dass eine unsichere Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  nicht streng (strukturell) surjektiv ist, wenn es einen Vorzeichenvektor (bzw. einen strukturellen Vektor)  $\mathcal{Q}$  gibt, für den  $\circ \subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{U}$  gilt. Dieser Vektor  $\mathcal{Q}$  enthält dann reelle Vektoren  $q \in \mathbb{R}^n$  mit  $q \neq 0$ , die im Kokern von Matrizen  $U \in \mathcal{U}$  (bzw.  $U \in \mathcal{I}_n^S \mathcal{U}$ ) sind, sodass genau diese Vektoren  $q \in \mathcal{Q}$  für den Verlust der Surjektivität verantwortlich sind.

**Beispiel 3.1 :** Gegeben sind drei unsichere Matrizen  $\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{X}''$  und eine Matrix  $X$  mit

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} + & \circ \\ \circ & + \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}' = \begin{pmatrix} + & \oplus \\ \circ & + \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}'' = \begin{pmatrix} + & \circ \\ \circ & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ -x_3 & x_2 \end{pmatrix}$$

und es wird im Folgenden angenommen, dass  $x_1, x_2, x_3 > 0$  gilt. Es gilt  $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}' \subset \mathcal{X}''$ ;  $X \in \mathcal{X}''$ ,  $X \in \mathcal{X}'$ , wenn  $x_4 \geq 0$  gilt und  $X \in \mathcal{X}$ , wenn  $x_4 = 0$  gilt. Zudem gilt

$$\mathcal{I}_2^S \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \star & \circ \\ \star & \star \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_2^S \mathcal{X}' = \mathcal{I}_2^S \mathcal{X}'' = \begin{pmatrix} \star & \circ \\ \star & \star \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $\mathcal{I}_2^S \mathcal{X}$  besitzt Form III und ist daher nach Satz 3.3 streng strukturell surjektiv. Mit Satz 3.4 ist  $\mathcal{X}$  streng strukturell surjektiv und mit Satz 3.6 auch streng surjektiv. Die unsicheren Matrizen  $\mathcal{I}_2^S \mathcal{X}'$  und  $\mathcal{I}_2^S \mathcal{X}''$  besitzen nicht die Form III und sind aufgrund von Satz 3.4 nicht streng strukturell surjektiv.

Mit  $\mathcal{Q} = (+, +)^T$  gilt  $\circ \subset \mathcal{Q}^T \mathcal{X}'' = (\circledast, \circledast)$ , sodass  $\mathcal{X}''$  nach Satz 3.7 nicht streng surjektiv ist. Dagegen ist  $\circ \not\subset \mathcal{Q}^T \mathcal{X}' = (\circledast, +)$  erfüllt und für jeden Vorzeichenvektor  $\tilde{\mathcal{Q}} \neq \circ$  gilt ebenso  $\circ \not\subset \tilde{\mathcal{Q}}^T \mathcal{X}'$ . Daher folgt aus Satz 3.7, dass  $\mathcal{X}'$  streng surjektiv ist und alle Matrizen  $X \in \mathcal{X}'$  sind surjektiv.

Dasselbe Resultat lässt sich in diesem Fall leicht mithilfe der Determinante von  $X$  überprüfen. Diese ergibt sich zu  $\det(X) = x_1x_2 + x_3x_4$  und wenn  $x_4 \geq 0$  und  $x_i > 0$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  gilt, dann ist  $\det(X) > 0$  erfüllt und  $X$  ist surjektiv.

Wenn andernfalls  $x_4 \in \leftarrow$  erlaubt ist, dann gilt  $\det(X) = 0$  für  $x_4 = -x_1x_2/x_3$  und  $X$  ist nicht surjektiv. Mit  $q = (x_3, x_1)^T \in (+, +)^T = \mathcal{Q}$  gilt dann  $q^T X = 0$ .

## 3.2 Strenge Strukturelle Steuerbarkeit

Die strenge strukturelle Steuerbarkeit wurde von MAYEDA und YAMADA im Jahr 1979 als hinreichende Bedingung für die Steuerbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme der Form (1.1) anhand des Belegtheitsmusters der Matrizen  $A$  und  $B$  eingeführt. Außerdem wurde eine graphentheoretische Charakterisierung für Eingrößensysteme ( $r = 1$ ) vorgestellt (siehe [MY79]). Dieses Konzept wurde in [RSW92] aufgegriffen und es wurde u.a. eine algebraische Charakterisierung für Mehrgrößensysteme präsentiert, bei der für zwei strukturelle Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^{n \times r}$  die Surjektivität der Matrizen  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  und  $(\mathcal{A} - \mathcal{I}_n^S, \mathcal{B})$  untersucht wird.

In diesem Abschnitt werden der Begriff der strengen strukturellen Steuerbarkeit und die allgemeine Charakterisierung auf die Notation dieser Arbeit übertragen. Es wird mit der Definition von unsicheren Systemen, Vorzeichen-Systemen und strukturellen Systemen begonnen.

**Definition 3.8 (Unsicheres System, Vorzeichen-System, strukturelles System):**  
*Gegeben sind zwei unsichere Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist die Menge aller linearer zeitinvarianter Systeme der Form (1.1) für die  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  gilt. Wenn  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{V}^{n \times n+r}$  gilt, dann wird das unsichere System als Vorzeichen-System (engl. signed system) bezeichnet und wenn  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times n+r}$  gilt, dann wird das unsichere System als strukturelles System (engl. structured system) bezeichnet.*

Diese Definition des strukturellen Systems unterscheidet sich wesentlich zu der Definition der strukturellen Systeme aus bisherigen Arbeiten, in denen die Matrizen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$

nur Einträge aus der Menge  $\mathbb{S} = \{\circ, \star\}$  enthalten. In dieser Arbeit sind zusätzlich  $\circledast$ -Einträge in den Matrizen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  erlaubt. Dadurch lässt sich für jedes unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{U}^{n \times n+r}$  ein „größeres“ strukturelles System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  finden, für das  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq (\mathcal{A}', \mathcal{B}') \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times n+r}$  gilt. Bei einer Definition des strukturellen Systems mit der Menge  $\mathbb{S}$  wäre dies nur für die unsicheren Systeme möglich, da nur Einträge aus der Menge  $\{\circ, \star, +, \star\}$  enthalten. Ein strukturelles System nach der herkömmlichen Definition ist ein Spezialfall eines strukturellen Systems nach der Definition in dieser Arbeit.

Im Folgenden wird gezeigt, dass sich die Eigenschaften von strukturellen Systemen nach der ursprünglichen Definition problemlos auf die strukturellen Systeme dieser Arbeit erweitern lassen.

**Definition 3.9 (Strenge strukturelle Steuerbarkeit):** Ein strukturelles System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit  $\mathcal{A} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times r}$  und  $n, r \in \mathbb{N}$  ist streng strukturell steuerbar (engl. *strongly structurally controllable*), wenn jedes lineare zeitinvariante System (1.1) mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  steuerbar ist. Ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  ist streng strukturell steuerbar, wenn es ein streng strukturell steuerbares System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  mit  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq (\mathcal{A}', \mathcal{B}') \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times n+r}$  gibt.

Für die Charakterisierung der strengen strukturellen Steuerbarkeit wird der folgende Satz zur  $(A, B)$ -Steuerbarkeit aller von Null verschiedenen Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  eines strukturellen Systems benötigt.

**Satz 3.10 :** Gegeben sind die Matrizen  $\mathcal{A} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Die Matrix  $(A - \lambda I_n, B)$  ist surjektiv für jedes  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  und  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (ii) Für jeden strukturellen Vektor  $Q \in \mathbb{S}^n$  mit  $Q \neq \circ$  gilt  $\circ \not\subseteq Q^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$ .
- (iii) Die Matrix  $(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$  besitzt die Form III.

**Beweis.** Für strukturelle Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^{n \times r}$  wurde die Äquivalenz zwischen (i) und (iii) bereits in [RSW92] besprochen und in [HRS12, S. 2191, Prop. III.2] bewiesen. Hier folgt ein allgemeiner Beweis für  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times n+r}$ .

Für den Beweis (i)  $\implies$  (ii) nehmen wir an, dass (ii) nicht erfüllt ist. Dann gibt es einen strukturellen Vektor  $Q \neq \circ$ , sodass  $\circ \subseteq Q^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$  gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gilt  $Q_i = \star$  für die ersten  $k > 0$  Einträge und  $Q_i = \circ$  für die letzten  $(n - k)$  Einträge von  $Q$ . Wir definieren  $\mathcal{M} := (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  und  $\tilde{\mathcal{M}} := (\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$ .

Für jede Spalte von  $\mathcal{M}$  mit dem Index  $s > k$  gilt aufgrund der Annahme  $\bigcirc \subseteq \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_i \tilde{\mathcal{M}}_{i,s} = \sum_{i=1}^k \mathcal{M}_{i,s}$ , sodass wir eine zulässige Realisierung  $M$  von  $\mathcal{M}$  in Spalte  $s$  definieren können, für die  $\sum_{i=1}^k M_{i,s} = 0$  erfüllt ist. Für jede Spalte  $s \leq k$  mit  $\mathcal{M}_{s,s} = \bigcirc$  gilt  $\tilde{\mathcal{M}}_{s,s} = \star$  und es gibt aufgrund der Annahme ein  $i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{s\}$  mit  $\mathcal{M}_{i,s} \in \{\star, \otimes\}$ . Für jede andere Spalte  $s \leq k$  vom  $\mathcal{M}$  gilt  $\mathcal{M}_{s,s} \in \{\star, \otimes\}$ . Daher können wir eine zulässige Realisierung  $M$  von  $\mathcal{M}$  in Spalte  $s \leq k$  wählen, für die  $\sum_{l=1}^k M_{l,s} = 1$  gilt.

Wir definieren  $A \in \mathcal{A}$  als die linke  $n \times n$  Untermatrix von  $M$  und  $B$  als die rechte  $n \times r$  Untermatrix von  $M$ . Mit  $q := (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathcal{Q}$  gilt  $q^T(A - I_n, B) = 0$  und (i) ist für  $A, B$  und  $\lambda = 1$  nicht erfüllt. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz 3.3 mit  $\mathcal{X} = (\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^S, \mathcal{B})$  und (iii)  $\implies$  (i) ist offensichtlich.  $\square$

Mit dem folgenden Satz lässt sich die strenge strukturelle Steuerbarkeit für strukturelle Systeme charakterisieren.

**Satz 3.11 :** *Gegeben ist ein strukturelles System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times n+r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ .*

*Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

- (i) *Das strukturelle System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist streng strukturell steuerbar.*
- (ii) *Die folgenden zwei Eigenschaften sind erfüllt.*
  - (a) *Die Matrix  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  besitzt die Form III und*
  - (b) *die Matrix  $(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^S, \mathcal{B})$  besitzt die Form III.*
- (iii) *Für jeden strukturellen Vektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{S}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \bigcirc$  gilt*
  - (a)  $\bigcirc \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  *und*
  - (b)  $\bigcirc \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^S, \mathcal{B})$ .

*Beweis.* In [RSW92, S. 207, Theorem 2] und in [HRS12, S. 2192, Corollary III.3] wurde die Äquivalenz von (i) und (ii) unter der Annahme  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{S}^{n \times n+r}$  gezeigt. Für den allgemeineren Fall  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \tilde{\mathbb{S}}^{n \times n+r}$  folgt die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) unmittelbar aus Satz 3.10 und Satz 3.4 mit  $\mathcal{X} = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , da die Matrix  $(A - \lambda I_n, B)$  genau dann für alle  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  surjektiv ist, wenn die Bedingung (a) und (b) erfüllt sind. Nach Satz 2.5.(iv) ist genau dann jedes System mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  steuerbar und das strukturelle System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist nach Definition 3.9 streng strukturell steuerbar.  $\square$

In Bezug auf Eigenschaft (iii) in Satz 3.11 wird an dieser Stelle betont, dass die Matrizen von einem strukturellen System zwar Einträge aus  $\tilde{\mathbb{S}} = \{\bigcirc, \star, \otimes\}$  enthalten dürfen, strukturelle Vektoren oder Matrizen dürfen dagegen aber nur Einträge aus  $\mathbb{S} = \{\bigcirc, \star\}$

besitzen. Ein unsicheres System kann mit dem folgenden Satz auf strenge strukturelle Steuerbarkeit untersucht werden.

**Satz 3.12 :** *Gegeben ist ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{U}^{n \times n+r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ .*

*Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

- (i) *Das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist streng strukturell steuerbar.*
- (ii) *Das strukturelle System  $\mathcal{I}_n^S(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist streng strukturell steuerbar.*
- (iii) *Für jeden strukturellen Vektor  $Q \in \mathbb{S}^n$  mit  $Q \neq \circ$  gilt*
  - (a)  $\circ \not\subseteq Q^T(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  *und*
  - (b)  $\circ \not\subseteq Q^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^S, \mathcal{B})$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus Definition 3.8 und Satz 2.12. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz 3.11 mit der Tatsache, dass  $Q^T \mathcal{I}_n^S \mathcal{M} = Q^T \mathcal{M}$  für  $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  oder  $\mathcal{M} = (\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^S, \mathcal{B})$  gilt.  $\square$

Genau wie die strenge strukturelle Surjektivität ist die strenge strukturelle Steuerbarkeit hinreichend aber nicht notwendig für die Steuerbarkeit aller Elemente eines unsicheren Systems. Wenn ein unsicheres System nicht streng strukturell steuerbar ist, dann können dennoch alle linearen zeitinvarianten Systeme des unsicheren Systems steuerbar sein. Für solche Systeme gibt es dann lediglich nicht steuerbare Systeme der Form (1.1) vom selben strukturellen Muster.

**Beispiel 3.2** ([Bro70], S. 15; [FH77], S. 67, [HP05], S. 94): Die Bewegung eines Satelliten in einer erdnahen Umlaufbahn kann mit einem System der Form (1.1) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \circ & + & \circ & \circ \\ + & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & + \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \mathcal{A} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ + & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & + \end{pmatrix} = \mathcal{B}$$

beschrieben werden, wobei angenommen wurde, dass  $\omega \in \mathbb{R}$  für die Winkelgeschwindigkeit gilt. Das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist Teil des strukturellen Systems  $\mathcal{I}_4^S(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  und es gilt

$$\mathcal{I}_4^S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \circ & \star & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \star & \circ & \circ & \star & \star & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \star & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \star \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_4^S(\mathcal{A} + \mathcal{I}_4^S, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \star & \star & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \star & \star & \circ & \star & \star & \circ \\ \circ & \circ & \star & \star & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \star & \circ & \star \end{pmatrix}.$$

Die zwei Permutationen  $\sigma = (1, 3, 2, 4)$  und  $\sigma' = (1, 3, 2, 4, 5, 6)$  sind mit den zwei strukturellen Permutationsmatrizen

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \star & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \star & \circ \\ \circ & \star & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \star \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}' = \begin{pmatrix} \star & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \star & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \star & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \star & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \star & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \star \end{pmatrix}$$

beschrieben und es gilt

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\mathcal{P}' = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \star & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \star & \circ & \circ \\ \star & \circ & \circ & \star & \star & \circ \\ \circ & \circ & \star & \circ & \circ & \star \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}(\mathcal{A} + \mathcal{I}_4^S, \mathcal{B})\mathcal{P}' = \begin{pmatrix} \star & \circ & \star & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \star & \circ & \star & \circ & \circ \\ \star & \circ & \star & \star & \star & \circ \\ \circ & \circ & \star & \star & \circ & \star \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Matrizen besitzen daher die Form III. Aus den Sätzen 3.12 und 3.11 folgt, dass das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  streng strukturell steuerbar ist. Daher sind nicht nur alle linearen zeitinvarianten Systeme der Form (1.1) mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  steuerbar, sondern es sind auch alle Systeme der Form (1.1) mit  $A \in \mathcal{I}_4^S \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{I}_4^S \mathcal{B}$  steuerbar.

### 3.3 Vorzeichen-Steuerbarkeit

Die Vorzeichen-Steuerbarkeit wurde 1993 von JOHNSON, MEHRMANN und OLESKY als eine hinreichende Bedingung für die Steuerbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme der Form (1.1) anhand des Vorzeichenmusters der Matrizen  $A$  und  $B$  eingeführt und für nicht-negative Vorzeichenmatrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  und positive Vorzeichenvektoren  $\mathcal{B} = (+, +, \dots, +)^T \in \mathbb{V}^n$  charakterisiert (siehe [JMO93]). Diese Eigenschaft wurde 1998 von TSATSOMEROS in [Tsa98] weiter untersucht und es wurden Bedingungen vorgestellt, welche entweder hinreichend oder notwendig für die Vorzeichen-Steuerbarkeit sind. In [HRS13a] wurde schließlich eine Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit für Vorzeichen-Systeme vorgestellt, deren Systemmatrix  $\mathcal{A}$  nur reelle Eigenwerte erlaubt. Eine allgemeine Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit ist bisher nicht bekannt.

In diesem Abschnitt werden Teile der bereits bekannten Ergebnisse zur Vorzeichen-Steuerbarkeit auf unsichere Systeme übertragen.

**Definition 3.13 (Vorzeichen-Steuerbarkeit):** Ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  und  $n, r \in \mathbb{N}$  ist vorzeichen-steuerbar (engl. sign controllable), wenn jedes lineare zeitinvariante System (1.1) mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  steuerbar ist.

Die Vorzeichen-Steuerbarkeit nach der Definition in dieser Arbeit bezieht sich auf unsichere Systeme und ist daher allgemeiner als sie ursprünglich in [JMO93] für Vorzeichen-Systeme definiert wurde. Jede unsichere Zahl ist über die Vereinigung von Elementen aus  $\mathbb{V}$  definiert (siehe Abschnitt 2.3). Daher lässt sich jede unsichere Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times m}$  als Vereinigung von endlich vielen Vorzeichenmatrizen  ${}^1\mathcal{V}, \dots, {}^k\mathcal{V}$  darstellen, sodass  $\mathcal{U} = {}^1\mathcal{V} \cup \dots \cup {}^k\mathcal{V}$  gilt. Die Erweiterung einer Eigenschaft  $P$  von einer Vorzeichenmatrix (oder einem Vorzeichen-System) auf eine unsichere Matrix  $\mathcal{M}$  (oder ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ) ist daher eine natürliche Erweiterung der ursprünglichen Eigenschaft auf jede Vorzeichenmatrix  $\mathcal{M}'$  mit  $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$  (oder jedes Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  mit  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \subseteq (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ).

Mit dem folgenden Satz kann die  $(A, B)$ -Steuerbarkeit aller positiven, reellen Werte  $\lambda$  für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$  eines unsicheren Systems  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  überprüft werden.

**Satz 3.14 :** Gegeben sind die unsicheren Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Die Matrix  $(A - \lambda I_n, B)$  ist surjektiv für jedes  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  und  $\lambda \in +$ .
- (ii) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  gilt  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} - \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$ .
- (iii) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  gilt  $\mathcal{Q}^T \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$  oder  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{B}$ .
- (iv) Die Matrix  $(\mathcal{A} - \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$  ist streng surjektiv.

*Beweis.* Die Aussage (i)  $\iff$  (ii) wird in einer ähnlichen Form für Vorzeichen-Systeme in [HS14, S. 148, Prop. 8] bewiesen. Es folgt ein allgemeiner Beweis für unsichere Systeme. Für (i)  $\implies$  (ii) nehmen wir zunächst an, dass (ii) nicht erfüllt ist. Dann gibt es einen Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \neq \circ$ , sodass  $\circ \subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} - \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$  gilt. Ohne Einschränkungen der Allgemeinheit gilt  $\mathcal{Q}_i \in \{+, -\}$  für die ersten  $k > 0$  Einträge von  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{Q}_i = \circ$  für die letzten  $n - k$  Einträge von  $\mathcal{Q}$ . Wir wählen ein beliebiges  $q \in \mathcal{Q}$ , fixieren ein  $s \in \{1, \dots, n+r\}$  und definieren die Matrizen  $\mathcal{M} := (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  und  $\tilde{\mathcal{M}} := (\mathcal{A} - \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$  sowie die Vorzeichenvektoren  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Z}$  mit  $\mathcal{X}_i := \mathcal{M}_{i,s}$  und  $\mathcal{Z}_i := \mathcal{Q}_i \mathcal{X}_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Wenn  $s > k$ , dann gilt aufgrund der Annahme  $\circ \subseteq \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_i \tilde{\mathcal{M}}_{i,s} = \sum_{i=1}^k \mathcal{Q}_i \mathcal{X}_i$  und mit Satz 2.11 wählen wir ein  $x \in \mathcal{X}$ , sodass  $q^T x = 0$  gilt. Wenn  $s \leq k$  und  $\mathcal{M}_{s,s} \in \{\circ, \oplus, -\}$ , dann gilt  $\tilde{\mathcal{M}}_{s,s} = -$  und  $\circ \subseteq \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_i \tilde{\mathcal{M}}_{i,s} = \sum_{i \in N} \mathcal{Q}_i \mathcal{X}_i - \mathcal{Q}_s = \sum_{i \in N} \mathcal{Z}_i - \mathcal{Q}_s$  mit

$N = \{1, \dots, k\} \setminus \{s\}$ . Aufgrund von Satz 2.13.(vii) gibt es dann ein  $i \in N$ , sodass  $\mathcal{Q}_s \subseteq \mathcal{Z}_i$  gilt und es kann ein  $z \in \mathcal{Z}$  mit  $\sum_{l=1}^k z_l = q_s$  festgelegt werden. Wenn andernfalls  $s \leq k$  und  $\mathcal{M}_{s,s} \in \{+, \oplus, \star, \otimes\}$  gilt, dann kann ebenfalls ein  $z \in \mathcal{Z}$  festgelegt werden, sodass  $\sum_{l=1}^k z_l = q_s$  gilt. In beiden Fällen ist  $x \in \mathcal{X}$  und  $q^T x = q_s$  mit  $x_l := z_l/q_l$  für  $l \leq k$  und  $|x_l| := 1$  für  $l > k$  und  $\mathcal{X}_l \neq \emptyset$  erfüllt.

Wir definieren  $M_{i,s} := x_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A$  als die linke  $n \times n$  Untermatrix und  $B$  als die rechte  $n \times r$  Untermatrix von  $M$ . Dann gilt  $q^T A = q^T$  und  $q^T B = 0$ , sodass die Aussage in (i) für  $\lambda = 1$  nicht erfüllt ist. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz 2.13.(vii), die Äquivalenz von (ii) und (iv) aus Satz 3.7 und die Beziehung (iv)  $\implies$  (i) ist offensichtlich.  $\square$

Werden die Ausdrücke  $A$ ,  $\mathcal{A}$  und  $\lambda$  jeweils durch  $-A$ ,  $-\mathcal{A}$  und  $-\lambda$  in Satz 3.14 ersetzt, so ergibt sich unmittelbar der folgende Zusammenhang.

**Satz 3.15 :** Gegeben sind die unsichere Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Die Matrix  $(A - \lambda I_n, B)$  ist surjektiv für jedes  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
- (ii) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \emptyset$  gilt  $\emptyset \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$ .
- (iii) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \emptyset$  gilt  $-\mathcal{Q}^T \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$  oder  $\emptyset \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{B}$ .
- (iv) Die Matrix  $(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$  ist streng surjektiv.

Wenn die unsichere Matrix  $\mathcal{A}$  nur reelle Eigenwerte erlaubt, dann lässt sich die Vorzeichen-Steuerbarkeit mit dem folgenden Satz 3.16 charakterisieren.

**Satz 3.16 :** Gegeben sind zwei unsichere Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Jeder Wert  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $(A, B)$ -steuerbar für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$ .
- (ii) Die folgenden Eigenschaften sind erfüllt.
  - (a) Die unsichere Matrix  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist streng surjektiv.
  - (b) Die unsichere Matrix  $(\mathcal{A} - \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$  ist streng surjektiv.
  - (c) Die unsichere Matrix  $(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$  ist streng surjektiv.
- (iii) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  gilt
  - (a)  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ,
  - (b)  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} - \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$  und
  - (c)  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$ .
- (iv) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  und  $\circ \subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{B}$  gilt
  - (a)  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$ ,
  - (b)  $\mathcal{Q}^T \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$  und
  - (c)  $-\mathcal{Q}^T \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$

*Beweis.* Die Äquivalenz von (i), (ii), (iii) und (iv) folgt unmittelbar aus den Sätzen 3.7, 3.14 und 3.15, da genau dann alle Werte  $\lambda \in \mathbb{R} = \circ \cup + \cup -$  für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$ ,  $(A, B)$ -steuerbar sind.  $\square$

**Beispiel 3.3 :** Gegeben sind die unsicheren Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{3 \times 3}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^3$  und mit  $x_1, x_2 \geq 0$ ;  $x_3, x_4, x_5, |x_6| > 0$  und  $x_7 \in \mathbb{R}$  gilt

$$A = \begin{pmatrix} -2x_1 & x_3 & 0 \\ x_4 & 2x_2 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \oplus & + & \circ \\ + & \oplus & \circ \\ \star & \circ & \circ \end{pmatrix} = \mathcal{A} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} x_5 \\ 0 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} + \\ \circ \\ \star \end{pmatrix} = \mathcal{B}.$$

Mit  $\mathcal{Q} = (\star, \star, \star)^T$  gilt  $\circ \subset \mathcal{Q}^T(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\star, \star, \circ, \star)$ , sodass das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 3.12 nicht streng strukturell steuerbar ist.

Die Eigenwerte von  $A$  sind  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_{2/3} = (x_2 - x_1) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + x_3 x_4}$ , sodass für alle erlaubten Parameter,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  gilt und die unsichere Matrix  $\mathcal{A}$  nur reelle Eigenwerte erlaubt. Es gilt

$$(\mathcal{A} - \mathcal{I}_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} - & + & \circ & + \\ + & \star & \circ & \circ \\ \star & \circ & - & \star \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\mathcal{A} + \mathcal{I}_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \star & + & \circ & + \\ + & + & \circ & \circ \\ \star & \circ & + & \star \end{pmatrix}$$

und für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \circ$  gilt  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ;  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} - \mathcal{I}_3, \mathcal{B})$  und  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_3, \mathcal{B})$ . Jeder Wert  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist daher nach Satz 3.16 für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$ ,  $(A, B)$ -steuerbar und da  $\mathcal{A}$  nur reelle Eigenwerte erlaubt ist das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  vorzeichen-steuerbar.

Die Bedingungen in Satz 3.16 sind notwendig für die Vorzeichen-Steuerbarkeit von jedem unsicheren System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Wenn Bedingung (iii) aus Satz 3.16 für einen Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q}$  nicht erfüllt ist, dann gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ein  $A \in \mathcal{A}$  und ein  $B \in \mathcal{B}$ , sodass  $\lambda$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar ist. Genau genommen folgt aus dem Beweis von Satz 3.14, dass es für jedes  $q \in \mathcal{Q}$  und jedes  $\lambda \in +$  mindestens ein  $A \in \mathcal{A}$  und ein  $B \in \mathcal{B}$  mit  $q^T(A - \lambda I_n, B) = 0$  gibt, wenn Bedingung (iii.b) aus Satz 3.16 für einen  $\mathcal{Q} \neq \circ$  nicht erfüllt ist.

**Beispiel 3.4 :** Gegeben sind die unsicheren Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{3 \times 3}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^3$  mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & + \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & + & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \circ \\ + \\ + \end{pmatrix}, \quad \text{sodass} \quad (\mathcal{A} - \mathcal{I}_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} + & \circ & + & \circ \\ \circ & - & \circ & + \\ \circ & + & - & + \end{pmatrix}$$

gilt. Mit  $\mathcal{Q} = (+, +, +)^T$  gilt  $\circ \subset \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} - \mathcal{I}_3, \mathcal{B}) = (\circ, \circ, \circ, \circ)$ . Das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist daher nach Satz 3.16 nicht vorzeichen-steuerbar.

Für beliebige  $p_1, p_2, p_3, \lambda > 0$  und  $\rho \geq 0$  gilt mit  $q = (p_1, -p_2, p_3)^T \in \mathcal{Q}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda + \rho) \frac{p_3}{p_1} \\ -\lambda \frac{p_1}{p_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda \frac{p_2}{p_3} & -\rho \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \circ \\ p_3 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{B},$$

$q^T(A - \lambda I_3, B) = 0$ . Für jedes  $q \in \mathcal{Q}$  und jedes  $\lambda > 0$  gibt es daher ein nicht-steuerbares System  $(A, B) \in (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  und das Eigenpaar  $(q, \lambda)$  der Matrix  $A$  ist dabei jeweils für den Verlust der Steuerbarkeit verantwortlich.

### 3.4 Vorzeichen-Stabilität

Die Frage nach der Stabilität einer Klasse von Systemen der Form (1.1) unabhängig von konkreten Zahlenwerten wurde zuerst von dem Wirtschaftswissenschaftler SAMUELSON in seinem Buch [Sam47] aus dem Jahr 1947 gestellt, da die konkreten Zahlenwerte der in diesem Fachgebiet verwendeten Systeme der Form (1.1) sehr ungewiss und wenn überhaupt nur schwer ermittelbar sind. Diese Fragestellung wurde 1965 von

QUIRK und RUPPERT in [QR65] aufgegriffen und der Begriff der Vorzeichen-Stabilität wurde eingeführt. Außerdem wurde eine Charakterisierung für Vorzeichenmatrizen vorgestellt, deren Diagonalelemente alle von Null verschieden sind. In [Jef74] wurde 1974 schließlich eine allgemeine graphentheoretische Charakterisierung der Vorzeichen-Stabilität präsentiert.

In diesem Abschnitt wird eine algebraische Charakterisierung der Vorzeichen-Stabilität basierend auf den Ergebnissen aus [Qui81] vorgestellt. Für einen historischen Überblick zu den zahlreichen Resultaten zum Thema Vorzeichen-Stabilität sowie verschiedenen, ähnlichen Stabilitäts-Definitionen und deren algebraische Untersuchung wird auf den Übersichtsaufsatz [Qui81] verwiesen.

**Definition 3.17 (Vorzeichen-Stabilität):** Ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  und  $n, r \in \mathbb{N}$  ist vorzeichen-stabil (engl. sign stable), wenn jedes lineare zeitinvariante System (1.1) mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  stabil ist.

Ein Vorzeichen-System kann mit den folgenden Bedingungen auf Vorzeichen-Stabilität untersucht werden. Diese Bedingungen sind äquivalent zu den graphentheoretischen Bedingungen in [Jef74, JKD77] (siehe auch [Qui81, S. 121f, Prop. 3.5]).

**Satz 3.18 :** Gegeben ist eine Vorzeichenmatrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und es sei  $Z := \{1, \dots, n\}$ . Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \cdot)$  ist genau dann vorzeichen-stabil, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (a) Es gilt  $\mathcal{A}_{i,i} \subset \oplus$  für jedes  $i \in Z$ .
- (b) Es gilt  $\mathcal{A}_{i,k} \mathcal{A}_{k,i} \subset \oplus$  für jedes  $i, k \in Z$  mit  $i \neq k$ .
- (c) Es gilt  $\mathcal{A}_{k_1, k_2} \mathcal{A}_{k_2, k_3} \dots \mathcal{A}_{k_l, k_1} = \circlearrowleft$  für jede Folge  $k_1, k_2, \dots, k_l$  verschiedener Elemente aus  $Z$  mit  $l > 2$ .
- (d) Wenn die Menge  $Z$  in zwei Mengen  $B$  und  $W$  aufgeteilt wird, sodass
  - (i)  $\mathcal{A}_{i,i} \neq \circlearrowleft \implies i \in B$ ;
  - (ii)  $i \in B \implies$  es gibt nicht genau ein  $k \in W$  mit  $\mathcal{A}_{k,i} \neq \circlearrowleft \neq \mathcal{A}_{i,k}$  und
  - (iii)  $i \in W \implies$  es gibt ein  $k \in W \setminus \{i\}$  mit  $\mathcal{A}_{k,i} \neq \circlearrowleft \neq \mathcal{A}_{i,k}$  gilt, dann ist  $B = Z$  erfüllt.
- (e) Es gibt einen Term  $\mathcal{T} \neq \circlearrowleft$  in der Expansion von  $\det(\mathcal{A})$ .

Die Eigenschaft Vorzeichen-Stabilität wurde analog zur Vorzeichen-Steuerbarkeit ursprünglich nur für Vorzeichen-Systeme definiert. Ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \cdot)$  ist nach der Definition hier genau dann vorzeichen-stabil, wenn jedes Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}', \cdot)$

mit  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  vorzeichen-stabil ist. Daher folgt aus Satz 3.18 unmittelbar der folgende Satz zur Charakterisierung der Vorzeichen-Stabilität unsicherer Systeme.

**Satz 3.19 :** *Gegeben ist eine unsichere Matrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und es sei  $Z := \{1, \dots, n\}$ . Das unsichere System  $(\mathcal{A}, \cdot)$  ist genau dann vorzeichen-stabil, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- (a) *Es gilt  $\mathcal{A}_{i,i} \subseteq \oplus$  für jedes  $i \in Z$ .*
- (b) *Es gilt  $\mathcal{A}_{i,k}\mathcal{A}_{k,i} \subseteq \oplus$  für jedes  $i, k \in Z$  mit  $i \neq k$ .*
- (c) *Es gilt  $\mathcal{A}_{k_1, k_2}\mathcal{A}_{k_2, k_3} \dots \mathcal{A}_{k_l, k_1} = \circlearrowleft$  für jede Folge  $k_1, k_2, \dots, k_l$  verschiedener Elemente aus  $Z$  mit der Länge  $l > 2$ .*
- (d) *Wenn die Menge  $Z$  in zwei Mengen  $B$  und  $W$  aufgeteilt wird, sodass*
  - (i)  $\circlearrowleft \not\subseteq \mathcal{A}_{i,i} \implies i \in B$ ;
  - (ii)  $i \in B \implies$  es gibt nicht genau ein  $k \in W$  mit  $\mathcal{A}_{k,i} \neq \circlearrowleft \neq \mathcal{A}_{i,k}$  und
  - (iii)  $i \in W \implies$  es gibt ein  $k \in W \setminus \{i\}$  mit  $\mathcal{A}_{k,i} \neq \circlearrowleft \neq \mathcal{A}_{i,k}$*gilt, dann ist  $B = Z$  erfüllt.*
- (e) *Es gibt einen Term  $\circlearrowleft \not\subseteq \mathcal{T}$  in der Expansion von  $\det(\mathcal{A})$ .*

### 3.5 Vorzeichen-Stabilisierbarkeit

In [Wei94] wird die Stabilisierbarkeit von Klassen linearer Systeme der Form (1.1) untersucht, deren Matrizen durch Intervalle beschrieben werden. Dabei wird ein zur strukturellen Analyse ähnlicher Ansatz gewählt und es wird gezeigt, dass alle Systeme einer besonderen Klasse stabilisierbar sind. Die Matrizen dieser Klasse besitzen die Form III (siehe [Wei94, S. 24, Theorem 3.1]), sodass diese Systeme gleichzeitig streng strukturell steuerbar sind. Generell scheint der strukturelle Ansatz für die Untersuchung der Stabilität oder der Stabilisierbarkeit eher ungeeignet zu sein, da beispielsweise für die Vorzeichen-Stabilität nach Satz 3.19 für die meisten Parameter das Vorzeichen und nicht die bloße Existenz eines von Null verschiedenen Parameters entscheidend ist. Wenn eine unsichere Matrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  beispielsweise einen Diagonaleintrag  $\mathcal{A}_{i,i} = \star$  besitzt, dann ist nach Satz 3.19.(a) jedes unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  nicht vorzeichen-stabil.

In [HS14] wird von HARTUNG und SVARICEK der Begriff der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit für Vorzeichen-Systeme eingeführt. Außerdem wird eine Charakterisierung der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit für die Vorzeichen-Systeme  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  vorgestellt, deren Systemmatrix  $\mathcal{A}$  nur reelle Eigenwerte erlaubt. Diese Charakterisierung wird in diesem Abschnitt auf unsichere Systeme erweitert.

**Definition 3.20 (Vorzeichen-Stabilisierbarkeit):** Ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  und  $n, r \in \mathbb{N}$  ist vorzeichen-stabilisierbar (engl. sign stabilizable), wenn jedes lineare zeitinvariante System (1.1) mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  stabilisierbar ist.

Für die Stabilisierbarkeit eines Systems der Form (1.1) müssen im Gegensatz zur Steuerbarkeit nach Satz 2.8.(iii) lediglich alle Werte  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) \geq 0$   $(A, B)$ -steuerbar sein. Wenn die unsichere Matrix  $\mathcal{A}$  nur reelle Eigenwerte erlaubt, dann lässt sich die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit wie folgt charakterisieren.

**Satz 3.21 :** Gegeben sind zwei unsichere Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Punkte sind äquivalent.

- (i) Jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq 0$  ist  $(A, B)$ -steuerbar für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$ .
- (ii) Die folgenden Eigenschaften sind erfüllt.
  - (a) Die unsichere Matrix  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist streng surjektiv.
  - (b) Die unsichere Matrix  $(\mathcal{A} - \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$  ist streng surjektiv.
- (iii) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{S}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \mathcal{O}$  gilt
  - (a)  $\mathcal{O} \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  und
  - (b)  $\mathcal{O} \not\subseteq \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} - \mathcal{I}_n, \mathcal{B})$ .
- (iv) Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \mathcal{O}$  und  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{B}$  gilt
  - (a)  $\mathcal{O} \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$  und
  - (b)  $\mathcal{Q}^T \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz von (i), (ii), (iii) und (iv) folgt unmittelbar aus den Sätzen 3.7 und 3.14, da genau dann alle Werte  $\lambda \in \mathbb{R} = \mathcal{O} \cup +$  für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$ ,  $(A, B)$ -steuerbar sind.  $\square$

In dem folgenden Beispiel wird ein Modell der Fahrrad-Wankdynamik auf Vorzeichen-Steuerbarkeit, -Stabilität und -Stabilisierbarkeit untersucht.

**Beispiel 3.5 (Wankdynamik eines Fahrradmodells, siehe [HS14], S. 149-150):** In [LM82] wird die Stabilität von Fahrrädern untersucht und es wird ein einfaches dynamisches Modell der Wankdynamik für Fahrräder vorgestellt. Dabei wird u.a. angenommen, dass das Fahrrad mit Fahrer ein starrer Körper ist, dass sich dieser Körper auf einer horizontalen Ebene bewegt und dass das Fahrrad eine konstante Längsgeschwindigkeit hat. In Abbildung 3.4 ist das Fahrrad mit dem Wankwinkel  $\theta$  und Lenkwinkel  $\beta$  dargestellt.

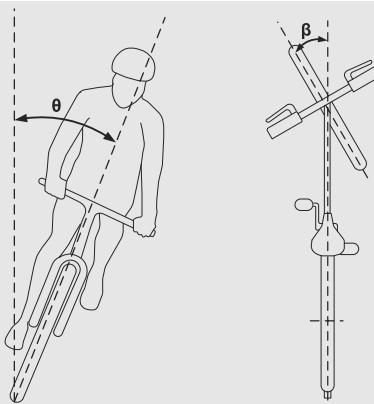


Abbildung 3.4: Die Wankdynamik eines Fahrrad-Modells

Für kleine Wankwinkel  $\theta$  und kleine Lenkwinkel  $\beta$  sowie vereinfachenden Annahmen zur Fahrrad-Geometrie lässt sich das Momentengleichgewicht wie folgt beschreiben

$$\ddot{\theta} = p_1\theta + p_2\beta + p_3\dot{\beta}. \quad (3.1)$$

Die drei Parameter  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  in (3.1) hängen von der Geschwindigkeit, dem Gewicht und den geometrischen Daten des Fahrrades ab (siehe [LM82], oder [AKL05]) und alle drei Parameter  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  sind positiv.

Die Gleichung (3.1) kann mit dem folgenden System der Form (1.1) beschrieben werden

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} p_3 \\ p_2 \end{pmatrix}}_B u, \quad (3.2)$$

wobei  $x = (\theta, \dot{\theta} - p_3\beta)^T$  und  $u = \beta$  gilt. Daher gilt für jedes  $p_1, p_2, p_3 > 0$ ,

$$A \in \mathcal{A} := \begin{pmatrix} \circ & + \\ + & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \in \mathcal{B} := \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\mathcal{A}_{1,2} \cdot \mathcal{A}_{2,1} = +$ , sodass Bedingung (b) aus Satz 3.18 nicht erfüllt ist. Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist daher nicht vorzeichen-stabil. Die Eigenwerte von jedem  $A' \in \mathcal{A}$  sind  $\lambda_{1/2} = \pm \sqrt{A'_{12}A'_{21}} \in \mathbb{R}$ , sodass  $\mathcal{A}$  nur reelle Eigenwerte erlaubt und einer der Eigenwerte von jedem  $A' \in \mathcal{A}$  hat einen positiv Realteil. Daher ist jedes lineare zeitinvariante System mit  $A' \in \mathcal{A}$  instabil. Es gilt

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \circ & + & + \\ + & \circ & + \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{A} - \mathcal{I}_2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} - & + & + \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\mathcal{A} + \mathcal{I}_2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}.$$

Für  $\mathcal{Q} = (+, -)^T$  gilt  $\circ \subset \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_2, \mathcal{B}) = (\circledast, \circledast, \circledast)$ , sodass das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 3.16 nicht vorzeichen-steuerbar ist.

Die Vorzeichenmatrizen  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  und  $(\mathcal{A} - \mathcal{I}_2, \mathcal{B})$  sind dagegen beide streng surjektiv, sodass das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 3.21 vorzeichen-stabilisierbar ist. Jedes lineare zeitinvariante System  $(A', B')$  mit  $A' \in \mathcal{A}$  und  $B' \in \mathcal{B}$  ist daher stabilisierbar.

Das lineare zeitinvariante System (3.2) mit  $p_1 = p_2^2/p_3^2$  ist beispielsweise nicht steuerbar. Unter Verwendung der Notation von [AKL05], ist dies der Fall, wenn das Fahrrad die Geschwindigkeit  $v = a\sqrt{g/h}$  hat, wobei  $a$  und  $h$  Parameter des Fahrrades und  $g$  die Gravitationskonstante ist. Demnach gibt es für jedes Fahrrad eine Geschwindigkeit, sodass das System (3.2) nicht steuerbar ist. Mit  $q = (p_2, -p_3)^T \in \mathcal{Q}$  ist dann der Wert  $\lambda = -p_2/p_3 = -v/a$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar. Da aber  $\lambda < 0$  gilt, ist das lineare zeitinvariante System (3.2) dennoch stabilisierbar.

Die Bedingungen (ii) und (iii) von den Sätzen 3.16 und 3.21 sind notwendig für die Vorzeichen-Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit von einem unsicheren System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , aber nicht hinreichend, wenn die unsichere Matrix  $\mathcal{A}$  komplexe Eigenwerte erlaubt. Dies wird anhand des folgenden Beispiels veranschaulicht.

**Beispiel 3.6 :** Gegeben sind die unsicheren Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{3 \times 3}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^3$  mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \circ & + & \circ \\ + & \circ & + \\ \circ & \circ & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}.$$

Die Bedingungen (ii), (iii) und (iv) von Satz 3.16 sind erfüllt, sodass jeder reelle Wert  $\lambda$  in jedem linearen zeitinvarianten System  $(A, B)$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$   $(A, B)$ -steuerbar ist. Dennoch ist das lineare zeitinvariante System der Form (1.1) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$$

nicht steuerbar, da die Werte  $\lambda_{1/2} = \pm j$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar sind. Für den Wert  $\lambda = j$  gilt beispielsweise mit  $q = (1 - j, -1 - j, 1)^T$ ,  $q^T(A - \lambda I_3, B) = 0$ .

Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  wird in den Beispielen 4.4, 4.5 und 5.1 weiter untersucht.

Wenn in einem linearen zeitinvarianten System  $(A, B)$  ein komplexer Wert  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar ist, dann gibt es einen komplexen Vektoren  $q \in \mathbb{C}^n$ , für den  $q^T(A - \lambda I_n, B) = 0$  gilt. Da dieser Vektor  $q$  komplexwertige Einträge besitzt, ist er kein Element von einem Vorzeichenvektor aus  $\mathbb{V}^n$ . Die Bedingung (iii) von Satz 3.16 oder 3.21 ist daher nicht ausreichend für eine allgemeingültige Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit bzw. Vorzeichen-Stabilisierbarkeit, da in diesen Sätzen ein unsicheres System nur mit reellen Vektoren untersucht wird.

Aus diesem Grund wird im Abschnitt 4 der *komplexe Vorzeichenvektor* eingeführt. Mithilfe von diesem neuen Ansatz kann das gesamte Spektrum aller Elementer einer Vorzeichenmatrix untersucht werden. Zuvor werden jedoch im nächsten Unterabschnitt Ergebnisse zur strengen strukturellen Steuerbarkeit für zeitvariante Systeme vorgestellt.

### 3.6 Strenge strukturelle Steuerbarkeit für zeitvariante Systeme

In diesem Abschnitt werden zwei aktuelle Ergebnisse zur strengen strukturellen Steuerbarkeit von *linearen zeitvarianten zeitdiskreten Systemen* der Form

$$x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + B(k) \cdot u(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad (3.3)$$

und *linearen zeitvarianten zeitkontinuierlichen Systemen* der Form

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.4)$$

vorgestellt. Dabei gilt jeweils  $A: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  mit  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$  für (3.3) und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  für (3.4). Ein lineares zeitinvariantes System der Form (1.1) ist ein Spezialfall von einem linearen zeitvarianten zeitkontinuierlichen System der Form (3.4).

**Definition 3.22 (Steuerbarkeit zeitvarianter zeitdiskreter Systeme):** Das lineare zeitvariante zeitdiskrete System der Form (3.3) ist steuerbar im Intervall  $[k_0; k_1]$ , wenn es für jeden Anfangszustand  $x_0$  zum Zeitpunkt  $k_0$  und jeden Zustandspunkt  $x_1$  zum Zeitpunkt  $k_1 > k_0$  eine Steuerfunktion  $u: [k_0; k_1] \rightarrow \mathbb{R}^r$  gibt, sodass  $x(k_1) = x_1$  gilt. Das lineare zeitvariante zeitdiskrete System der Form (3.3) ist steuerbar, wenn es ein  $k_1 > k_0$  gibt, sodass das System steuerbar im Intervall  $[k_0; k_1]$  ist.

**Definition 3.23 (Steuerbarkeit zeitvarianter zeitkontinuierlicher Systeme):** Das lineare zeitvariante zeitkontinuierliche System der Form (3.4) ist vollständig steuerbar im Intervall  $\mathbb{T} = [t_0, t_1]$ , wenn es für jeden Anfangszustand  $x_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  und jeden Zustandspunkt  $x_1$  zum Zeitpunkt  $t_1 > t_0$  eine Steuerfunktion  $u: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^r$  gibt, sodass  $x(t_1) = x_1$  gilt. Das lineare zeitvariante zeitkontinuierliche System der Form (3.3) ist steuerbar im Intervall  $\mathbb{T}$ , wenn es vollständig steuerbar in jedem Teilintervall von  $\mathbb{T}$  ist.

Die Steuerbarkeit eines linearen zeitvarianten zeitdiskreten Systems der Form (3.3) lässt sich mit dem folgenden Satz untersuchen.

**Satz 3.24 ([HRS12], S. 2190):** Gegeben sind  $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$  mit  $k_1 > k_0$  sowie  $A: [k_0; k_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B: [k_0; k_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ .

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

(i) Das System  $(A, B)$  der Form (3.3) ist steuerbar im Intervall  $[k_0; k_1]$ .

(ii) Es gilt  $\text{rang}(K^d(A, B, k_0, k_1)) = n$  mit  $K^d(A, B, k_0, k_1) :=$

$$(B(k_1 - 1), A(k_1 - 1)B(k_1 - 2), \dots, A(k_1 - 1) \dots A(k_0 + 1)B(k_0)).$$

(iii) Es gilt  $\text{rang}(\tilde{K}^d(A, B, k_0, k_1)) = n \cdot (k_1 - k_0)$  mit  $\tilde{K}^d(A, B, k_0, k_1) :=$

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 & B(k_0) & 0 \\ A(k_0 + 1) & \ddots & B(k_0 + 1) & \ddots \\ & \ddots & I_n & \\ 0 & A(k_1 - 1) & 0 & B(k_1 - 1) \end{pmatrix}.$$

Die Steuerbarkeit eines linearen zeitvarianten zeitkontinuierlichen Systems der Form (3.4) kann mit dem folgenden Satz untersuchen werden.

**Satz 3.25 ([SM67]; [HRS13c], S. 5896):** Gegeben sind zwei  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  mit  $t_1 > t_0$  sowie  $A: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Außerdem wird angenommen, dass die Einträge von  $A$  und  $B$   $(n-1)$ -fach differenzierbar sind.

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i) Das System  $(A, B)$  der Form (3.4) ist steuerbar im Intervall  $\mathbb{T} = [t_0, t_1]$ .
- (ii) Die Matrix  $K^c(A, B, t)$  hat auf jedem Teilintervall von  $\mathbb{T}$  den Rang  $n$ . Dabei gilt

$$K^c(A, B, t) := (P_0(t), P_1(t), \dots, P_{n-1}(t)) \quad \text{mit}$$

$$P_0(t) := B(t) \quad \text{und} \quad P_{k+1}(t) := A(t) \cdot P_k(t) - \dot{P}_k(t).$$

- (iii) Die Matrix  $\tilde{K}^c(A, B, t)$  hat auf jedem Teilintervall von  $\mathbb{T}$  den Rang  $n^2$ . Dabei gilt

$$\tilde{K}^c(A, B, t) :=$$

$$\begin{pmatrix} I_n & & & \binom{n-1}{0} B \\ \binom{n-2}{0} A & I_n & & \binom{n-1}{1} \dot{B} & \binom{n-2}{0} B \\ \binom{n-2}{1} \dot{A} & \binom{n-3}{0} A & \ddots & \binom{n-1}{2} \ddot{B} & \binom{n-2}{1} \dot{B} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \binom{n-2}{n-2} A & \binom{n-3}{n-3} A & \dots & I_n & \binom{n-1}{n-1} B & \binom{n-2}{n-2} B \\ \binom{n-2}{n-2} A & \binom{n-3}{n-3} A & \dots & \binom{0}{0} A & \binom{n-1}{n-1} B & \binom{n-2}{n-2} B \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \binom{0}{0} B & \end{pmatrix}$$

und  $\binom{a}{b}$  beschreibt den Binomialkoeffizient für  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Wenn die zeitvarianten Matrizen  $A$  und  $B$  in (3.3) und (3.4) konstant sind, d.h. es gilt  $A(t) = A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B(t) = B_0 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , dann vereinfachen sich die Matrizen  $K^d(A, B, k_0, k_0 + n)$  aus Satz 3.24.(ii) und  $K^c(A, B, t)$  aus Satz 3.25.(ii) zu  $K(A_0, B_0)$  aus Satz 2.5.(ii) und die Matrizen  $\tilde{K}^d(A, B, k_0, k_0 + n)$  aus Satz 3.24.(iii) und  $\tilde{K}^c(A, B, t)$  aus Satz 3.25.(iii) zu  $\tilde{K}(A_0, B_0)$  aus Satz 2.5.(iii). Die Bedingungen aus den Sätzen 3.24 und 3.25 sind daher vergleichbar mit dem Kalman-Kriterium für lineare zeitinvariante Systeme. Für die Untersuchung der Steuerbarkeit von zeitvarianten Systemen gibt es alternativ auch Methoden, welche ähnlich dem Popov-Belevitch-Hautus Kriterium sind (siehe z.B. [Zhu97, PI99]) oder Methoden, welche die Lösung von (3.3) bzw. (3.4) verwenden (siehe [RHS14, Prop. III.2, S. 3088]).

Wenn ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  streng strukturell steuerbar ist, dann ist die Matrix  $(A - \lambda I_n, B)$  für jedes  $A \in \mathcal{A}$ , jedes  $B \in \mathcal{B}$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  surjektiv. Aus Satz 2.5 folgt, dass dann die Steuerbarkeitsmatrix

$$K(A, B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in \mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B}) \quad (3.5)$$

für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$  surjektiv ist. Es könnte daher vermutet werden, dass

die unsichere Matrix  $\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , die alle Matrizen  $K(A, B)$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  enthält, dann streng strukturell surjektiv ist und aufgrund von Satz 3.4 die Form III besitzt. Im Allgemeinen ist die unsichere Matrix  $\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  eines streng strukturell steuerbaren Systems  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  aber weder streng strukturell surjektiv noch streng surjektiv (siehe Beispiel 3.7 unten). In [HRS12] wird dagegen der folgende Zusammenhang gezeigt.

**Satz 3.26 ([HRS12], S. 2193, Prop. IV.1):** *Gegeben ist ein strukturelles System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit  $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^{n \times r}$  und  $n, r \in \mathbb{N}$ . Wenn das System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  streng strukturell steuerbar ist, dann ist die strukturelle Matrix*

$$\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \begin{pmatrix} \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} & \circ & \mathcal{B} & \circ \\ \mathcal{A} & \ddots & & \mathcal{B} \\ & \ddots & \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} & \ddots \\ \circ & & \mathcal{A} & \circ \end{pmatrix} \in \mathbb{U}^{n^2 \times n(n+r-1)} \quad (3.6)$$

streng strukturell surjektiv.

Wenn  $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  aus (3.6) streng strukturell surjektiv ist, dann hat die Matrix  $\tilde{K}^d(A, B, k_0, k_0 + n) \in \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  für jedes  $A: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ , jedes  $B: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{B}$  und jedes  $k_0 \in \mathbb{Z}$  den Rang  $n^2$  und das lineare zeitvariante zeitdiskrete System  $(A, B)$  der Form (3.3) ist nach Satz 3.24.(iii) steuerbar. Es ergibt sich daher das folgende Resultat.

**Satz 3.27 ([HRS12], S. 2193, Theorem IV.2):** *Gegeben sind zwei strukturelle Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Punkte sind äquivalent.*

- (i) *Das strukturelle System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist streng strukturell steuerbar.*
- (ii) *Die strukturelle Matrix  $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  in (3.6) ist streng strukturell surjektiv.*
- (iii) *Jedes System der Form (3.3) mit  $A: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $B: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{B}$  ist steuerbar.*

Im Jahr 2012 haben HARTUNG, REISSIG und SVARICEK in [HRS12] daher erstmalig gezeigt, dass sich der Begriff der strengen strukturellen Steuerbarkeit auf zeitvariante zeitdiskrete Systeme der Form (3.3) erweitern lässt und dass die Bedingungen für die strenge strukturelle Steuerbarkeit zeitinvarianter Systeme der Form (1.1) sowohl hinreichend als auch notwendig für die strenge strukturelle Steuerbarkeit zeitvarianter zeitdiskreter Systeme der Form (3.3) ist.

**Beispiel 3.7 :** Gegeben sind die Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{3 \times 3}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^3$  (siehe Beispiel 2.5),

$$A = \begin{pmatrix} -p_5 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \\ p_6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \oplus & + & \circ \\ + & \circ & \circ \\ \circledast & \circ & \circ \end{pmatrix} = \mathcal{A} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} p_3 \\ 0 \\ p_4 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} + \\ \circ \\ \star \end{pmatrix} = \mathcal{B}$$

mit  $p_1, p_2, p_3 > 0$ ;  $p_4 \neq 0$ ;  $p_5 \geq 0$  und  $p_6 \in \mathbb{R}$ . Die Matrizen

$$\mathcal{I}_3^S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \circledast & \star & \circ & \star \\ \star & \circ & \circ & \circ \\ \circledast & \circ & \circ & \star \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_3^S(\mathcal{A} + \mathcal{I}_3^S, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \circledast & \star & \circ & \star \\ \star & \star & \circ & \circ \\ \circledast & \circ & \star & \star \end{pmatrix}$$

sind streng strukturell surjektiv, sodass das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 3.12 bzw. Satz 3.11 streng strukturell steuerbar ist. Daher sind alle linearen zeitinvarianten Systeme der Form (1.1) mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  steuerbar. Die Steuerbarkeitsmatrix  $K(A, B)$  aus Satz 2.5.(ii) ergibt sich zu

$$K(A, B) = \begin{pmatrix} p_3 & -p_3p_5 & p_3(p_1p_2 + p_5^2) \\ 0 & p_2p_3 & -p_2p_3p_5 \\ p_4 & p_3p_6 & -p_3p_5p_6 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} + & \oplus & + \\ \circ & + & \oplus \\ \star & \circledast & \circledast \end{pmatrix} = \mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

(siehe auch Beispiel 2.5). Mit  $\mathcal{Q} = (+, +, +)^T$  gilt  $\circ \subset \mathcal{Q}^T \mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\circledast, \circledast, \circledast)$ , sodass die unsichere Matrix  $\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 3.7 nicht streng surjektiv ist. Die Determinante der Matrix  $K(A, B)$  ergibt sich zu  $\det(K(A, B)) = -p_1 p_2^2 p_3^2 p_4 \neq 0$ . Daher ist  $K(A, B)$  für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  surjektiv, obwohl die unsichere Matrix  $\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nicht streng surjektiv ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass die unsichere Matrix

$$\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \leftarrow & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & + & \circ & \circ \\ \circ & \leftarrow & \circ \\ \circ & \circ & \leftarrow & \circ & \circ & \circ & \circ & \star & \circ & \circ \\ \oplus & + & \circ & \leftarrow & \circ & \circ & \circ & \circ & + & \circ \\ + & \circ & \circ & \circ & \circ & \leftarrow & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circledast & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \leftarrow & \circ & \star & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \oplus & + & \circ & \circ & \circ & \circ & + \\ \circ & \circ & \circ & + & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circledast & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \star \end{pmatrix}$$

streng strukturell surjektiv ist. Alle zeitdiskreten Systeme der Form (3.3) mit  $A: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $B: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{B}$  sind daher steuerbar.

Bei linearen zeitvarianten zeitkontinuierlichen Systemen dürfen sich die Parameter dagegen nicht zeitlich verändern, ohne dass die Steuerbarkeit verloren geht. Wenn das Systems  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  streng strukturell steuerbar ist, dann ist im Allgemeinen nicht jedes lineare zeitvariante zeitkontinuierliche Systemen der Form (3.4) mit  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$  steuerbar. Dies wird mit dem folgenden Beispiel aus [HRS13c] gezeigt.

**Beispiel 3.8** (siehe [HRS13c], S. 5895 f.): Gegeben sind die strukturellen Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^{2 \times 2}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^2$  mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \star & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \end{pmatrix}.$$

Die beiden Matrizen

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \star & \circ & \star \\ \circ & \circ & \star \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\mathcal{A} + \mathcal{I}_2^{\mathbb{S}}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \star & \circ & \star \\ \circ & \star & \star \end{pmatrix}$$

sind jeweils streng strukturell surjektiv, sodass das strukturelle System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 3.11 streng strukturell steuerbar ist. Für die zeitvarianten Matrizen

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

ist  $A(t) \in \mathcal{A}$  und  $B(t) \in \mathcal{B}$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt. Außerdem gilt

$$K^c(A, B, t) = \begin{pmatrix} B, A \cdot B - \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}^c(A, B, t) = \begin{pmatrix} I_2 & B & 0 \\ A & \dot{B} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

und  $\det(K^c(A, B, t)) = \det(\tilde{K}^c(A, B, t)) = 0$ . Das lineare zeitvariante zeitkontinuierliche System (3.4) ist daher nach Satz 3.25 nicht steuerbar, obwohl lediglich ein Eintrag in den Matrizen des streng strukturell steuerbaren Systems  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  zeitvariant ist.

Außerdem wird in [HRS13c] das folgende Ergebnis vorgestellt.

**Satz 3.28 ([HRS13c], S. 5898, Prop. 12):** *Gegeben sind zwei strukturelle Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Wenn das System  $(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$  streng strukturell steuerbar ist, dann ist die strukturelle Matrix*

$$\tilde{\mathcal{K}}^c(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \begin{pmatrix} \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} & \circ & \mathcal{B} & & \circ \\ \mathcal{A} & \ddots & & \mathcal{B}^* & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}^* & \mathcal{A} & \ddots & \mathcal{B}^* & \mathcal{B}^* & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}} & \vdots & \vdots & \ddots & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}^* & \mathcal{A}^* & \cdots & \mathcal{A} & \mathcal{B}^* & \mathcal{B}^* & \cdots & \mathcal{B}^* & \mathcal{B} \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{S}}^{n^2 \times n(n+r-1)} \quad (3.7)$$

mit  $\mathcal{A}^* := \circledast \cdot \mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}^* := \circledast \cdot \mathcal{B}$  streng strukturell surjektiv.

Wenn  $\tilde{\mathcal{K}}^c(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  aus (3.7) streng strukturell surjektiv ist, dann hat die Matrix  $\tilde{\mathcal{K}}^c(\mathcal{A}, \mathcal{B}, t) \in \tilde{\mathcal{K}}^c(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  für jedes  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ , jedes  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$  und jedes  $t \in \mathbb{R}$  den Rang  $n^2$  und das lineare zeitvariante zeitkontinuierliche System  $(A, B)$  der Form (3.4) ist nach Satz 3.25.(iii) steuerbar in jedem Zeitintervall<sup>4</sup>. Die strenge strukturelle Steuerbarkeit des Systems  $(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$  ist daher hinreichend für die Steuerbarkeit aller zeitvarianten zeitkontinuierlichen Systeme  $(A, B)$  der Form (3.4) mit  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ . In [HRS13b] wird anschließend gezeigt, dass die hinreichende Bedingung aus Satz 3.28 auch notwendig ist.

Im Jahr 2013 haben HARTUNG, REISSIG und SVARICEK daher die strenge strukturelle Steuerbarkeit für lineare zeitvariante zeitkontinuierliche Systeme charakterisiert. Die Resultate aus [HRS12], [HRS13c] und [HRS13b] sind in [RHS14] zusammengefasst und es wird ein allgemeiner Beweis, in dem die  $(n-1)$ -fache Differenzierbarkeit der zeitvarianten Einträge nicht gefordert wird, vorgestellt.

**Satz 3.29 ([RHS14], S. 3091, Theorem III.9):** *Gegeben sind zwei strukturelle Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Punkte sind äquivalent.*

- (i) *Das strukturelle System  $(\mathcal{A} + \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$  ist streng strukturell steuerbar.*
- (ii) *Die unsichere Matrix  $(\mathcal{A} + \circledast \cdot \mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$  ist streng strukturell surjektiv.*
- (iii) *Jedes System der Form (3.4) mit  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$  ist steuerbar, wobei die Elemente von  $A$  und  $B$  jeweils stückweise stetig sind.*

Das folgende Beispiel orientiert sich an Beispiel 3.2.

<sup>4</sup> Es wird dabei angenommen, dass alle Einträge von  $A$  und  $B$  jeweils  $(n-1)$ -fach differenzierbar sind.

**Beispiel 3.9 :** Gegeben sind die strukturellen Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^{4 \times 4}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^4$  mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \circ & \star & \circ & \circ \\ \star & \circ & \circ & \star \\ \circ & \circ & \circ & \star \\ \circ & \star & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \star & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \star \end{pmatrix}.$$

Das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist streng strukturell steuerbar, sodass alle linearen zeitinvarianten Systeme der Form (1.1) mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  und nach Satz 3.27 auch alle zeitdiskreten Systeme der Form (3.3) mit  $A: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $B: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{B}$  steuerbar sind. Mit den Permutationsmatrizen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$  aus Beispiel 3.2 gilt

$$\mathcal{P}(\mathcal{A} + \circledast \cdot \mathcal{I}_4^{\mathbb{S}}, \mathcal{B}) \mathcal{P}' = \begin{pmatrix} \circledast & \circ & \star & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circledast & \circ & \star & \circ & \circ \\ \star & \circ & \circledast & \star & \star & \circ \\ \circ & \circ & \star & \circledast & \circ & \star \end{pmatrix},$$

sodass die Matrix  $(\mathcal{A} + \circledast \cdot \mathcal{I}_4^{\mathbb{S}}, \mathcal{B})$  die Form III besitzt und nach Satz 3.3 streng strukturell surjektiv ist. Aufgrund von Satz 3.29 ist daher jedes lineare zeitvariante zeitkontinuierliche System der Form (3.4) mit  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$  steuerbar.

## 4 Komplexe Eigenpaare von Vorzeichenmatrizen

In Abschnitt 3 wurde gezeigt, dass die Steuerbarkeit aller reellen Eigenwerte eines unsicheren Systems mithilfe von Vorzeichenvektoren untersucht werden kann. Ein Vorzeichenvektor ist eine Menge reeller Vektoren und wenn in einem unsicheren System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  Bedingung (iii) von Satz 3.16 für einen Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q}$  nicht erfüllt ist, dann gibt es für jeden Vektor  $q \in \mathcal{Q}$ , ein  $A \in \mathcal{A}$ , ein  $B \in \mathcal{B}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sodass  $q^T(A - \lambda I_n, B) = 0$  gilt. Das lineare zeitinvariante System der Form (1.1) mit  $A$  und  $B$  ist dann nicht steuerbar und das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist nicht vorzeichen-steuerbar.

Eine quadratische Matrix besitzt im Allgemeinen komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren und wie in Beispiel 3.6 dargestellt ist, sind Vorzeichenvektoren für die Untersuchung der Vorzeichen-Steuerbarkeit oder der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit nicht ausreichend. Daher wird in Abschnitt 4.1 der *komplexe Vorzeichenvektor* als eine Klasse komplexer Vektoren eingeführt und in Abschnitt 4.2 werden verschiedene Eigenschaften komplexer Vorzeichenvektoren ermittelt. In Abschnitt 4.3 wird anschließend der Kokern von Vorzeichenmatrizen mithilfe von komplexen Vorzeichenvektoren untersucht und es wird u.a. gezeigt, dass, wenn ein Vektor im Kokern einer Matrix  $X \in \mathcal{X}$  ist, dann ist jedes Element desselben komplexen Vorzeichenvektors im Kokern eines Elements von  $\mathcal{X}$ . In den Abschnitten 4.4 und 4.5 werden abschließend Bedingungen angegeben, mit denen untersucht werden kann, ob eine Vorzeichenmatrix jeweils komplexe Eigenwerte mit positivem, mit negativem oder ohne Realteil erlaubt.

Die Sätze dieses Abschnittes bilden die Basis für die Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit in Abschnitt 5.

### 4.1 Der komplexe Vorzeichenvektor

Der naheliegendste Ansatz einen Vorzeichenvektor mit komplexen Einträgen zu definieren, ist über das Vorzeichenmuster der Real- und Imaginärteile eines komplexen Vektors. Dabei wird jeder Eintrag eines Vektors mit zwei Vorzeichen beschrieben und die sich ergebenden Paare von Vorzeichenvektoren werden als *komplexe Vorzeichenmuster* (engl. *complex sign pattern*) bezeichnet (siehe [LSH08, S. 2700], [LS14, S. 31]). In [EHL98] wird dieser Ansatz beispielsweise für die Untersuchung komplexer Matrizen benutzt.

Ein anderer Ansatz zur Beschreibung komplexer Vektoren oder Matrizen sind sogenannte *Strahlen-Muster* (engl. *ray pattern*) (siehe [LSH08]). Dabei wird zu jedem von Null verschiedenen Eintrag ein numerischer Parameter festgelegt, welcher dem Argument des

komplexen Eintrags entspricht. Der Ansatz der Stahlen-Muster scheint für die Ziele dieser Arbeit nicht geeignet zu sein, da die Anzahl der Strahlen-Muster zur Beschreibung aller Vektoren  $q \in \mathbb{C}^n$  einer bestimmten Dimension  $n$  nicht endlich ist. Eine Überprüfung einer Vorzeichenmatrix mit jedem Stahlen-Muster wäre daher nicht durchführbar.

Bei komplexen Vorzeichenmustern gibt es dagegen genau neun verschiedene Möglichkeiten für jeden Eintrag eines komplexen Vektors. Ein Überprüfung mit allen Vektoren einer Ordnung wäre daher mit einer endlichen Anzahl von Tests durchführbar. Wenn der Vektor  $q \in \mathbb{C}^n$  ein Eigenvektor von einer Matrix  $A$  bezüglich dem Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist, dann ist nach Satz 2.1.(ii) jeder Vektor  $\tilde{q} = \alpha \cdot q \in \mathbb{C}^n$  mit  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ebenfalls ein Element des Eigenraums von  $A$  bezüglich  $\lambda$ . Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von einer Matrix  $A$  gibt es daher eine Vielzahl verschiedener komplexer Vorzeichenmuster, welche alle Eigenvektoren zu demselben Eigenwert enthalten.

Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz zur Beschreibung einer Klasse von komplexen Vektoren eingeführt. Dafür wird zunächst die Relation  $\sim$  zwischen zwei komplexen Vektoren  $x = (r_1 e^{j\varphi_1}, r_2 e^{j\varphi_2}, \dots, r_n e^{j\varphi_n})^T \in \mathbb{C}^n$  und  $y = (p_1 e^{j\vartheta_1}, p_2 e^{j\vartheta_2}, \dots, p_n e^{j\vartheta_n})^T \in \mathbb{C}^n$  wie folgt definiert

$$x \sim y \iff \begin{cases} \forall v, w \in \{1, \dots, n\} \text{ gilt} \\ \text{sign}(r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)) = \text{sign}(p_v p_w \cos(\vartheta_v - \vartheta_w)) \quad \text{und} \\ \text{sign}(r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w)) = \text{sign}(p_v p_w \sin(\vartheta_v - \vartheta_w)). \end{cases} \quad (4.1)$$

Die Relation  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation, da Reflexivität ( $x \sim x$ ), Symmetrie ( $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ ) und Transitivität ( $x \sim y$  und  $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ ) gegeben ist. Eine wichtige Eigenschaft dieser Äquivalenzrelation wird in dem folgenden Satz festgehalten.

**Satz 4.1 :** *Gegeben ist ein komplexer Vektor  $q \in \mathbb{C}^n$  und eine komplexe Zahl  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Es gilt  $q \sim \alpha \cdot q$ .*

*Beweis.* Die Vektoren  $r \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen jeweils den Betrag und das Argument von  $q$  und es gilt  $\alpha = \alpha_0 e^{j\theta}$  mit  $\alpha_0 \neq 0$ . Wir definieren  $\tilde{q} = \alpha \cdot q$ , sodass der  $i$ -te Eintrag von  $\tilde{q}$  den Betrag  $p_i = \alpha_0 r_i$  und das Argument  $\vartheta_i = \varphi_i + \theta$  besitzt. Für zwei  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  gilt dann  $\vartheta_v - \vartheta_w = \varphi_v + \theta - \varphi_w - \theta = \varphi_v - \varphi_w$ . Daher gilt  $p_v p_w f(\vartheta_v - \vartheta_w) = \alpha_0^2 r_v r_w f(\varphi_v - \varphi_w)$ , wobei  $f$  für den Sinus oder den Cosinus steht. Da  $\alpha_0 \neq 0$  gilt, ist  $q \sim \tilde{q} = \alpha \cdot q$  aufgrund von (4.1) erfüllt.  $\square$

Die Eigenschaft aus Satz 4.1 ist für die Untersuchung des Eigenraums einer Matrix geeignet, da nach Satz 2.1.(ii) viele Eigenvektoren zu einem bestimmten Eigenwert in einer Äquivalenzklasse vereint sind.

**Definition 4.2 (komplexer Vorzeichenvektor):** Ein komplexer Vorzeichenvektor der Ordnung  $n$  ist eine Äquivalenzklasse  $[q]_{\sim} \in \mathbb{C}^n / \sim$  der Relation  $\sim$ . Diese ist nach (4.1) durch die Ausdrücke  $\text{sign}(r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w))$  und  $\text{sign}(r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w))$  mit  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  bestimmt.

Für einen komplexen Vektor  $q = (r_1 e^{j\varphi_1}, \dots, r_n e^{j\varphi_n})^T \in \mathbb{C}^n$  und je zwei  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  wird im Folgenden jeweils das Vorzeichen von  $r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)$  und  $r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w)$  mit  ${}^w\mathcal{D}_v$  und  ${}^w\mathcal{P}_v$  bezeichnet, d.h.

$$r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w) \in {}^w\mathcal{D}_v \quad \text{und} \quad r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w) \in {}^w\mathcal{P}_v$$

Aufgrund von (2.4c) gilt  ${}^w\mathcal{D}_v = {}^v\mathcal{D}_w$ ,  ${}^w\mathcal{P}_v = -{}^v\mathcal{P}_w$  und  ${}^v\mathcal{P}_v = \circ$ . Von den  $2n^2$  Ausdrücken zur Beschreibung eines komplexen Vorzeichenvektors der Ordnung  $n$  in Definition 4.2 sind daher mindestens  $n^2$  der Ausdrücke redundant und maximal  $n^2$  Ausdrücke notwendig. Deshalb lässt sich ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n$  mit einer Vorzeichenmatrix aus  $\mathbb{V}^{n \times n}$  wie folgt darstellen<sup>5</sup>

$$\mathfrak{D}_{v,w} := \begin{cases} {}^w\mathcal{D}_v, & \text{wenn } w \geq v \\ {}^w\mathcal{P}_v, & \text{wenn } w < v. \end{cases} \quad (4.2)$$

In dieser Arbeit wird ein komplexer Vorzeichenvektor stets mit einem Frakturbuchstaben gekennzeichnet. Ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung 4 wird nach (4.2) z.B. wie folgt beschrieben

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} {}^1\mathcal{D}_1 & {}^2\mathcal{D}_1 & {}^3\mathcal{D}_1 & {}^4\mathcal{D}_1 \\ {}^1\mathcal{P}_2 & {}^2\mathcal{D}_2 & {}^3\mathcal{D}_2 & {}^4\mathcal{D}_2 \\ {}^1\mathcal{P}_3 & {}^2\mathcal{P}_3 & {}^3\mathcal{D}_3 & {}^4\mathcal{D}_3 \\ {}^1\mathcal{P}_4 & {}^2\mathcal{P}_4 & {}^3\mathcal{P}_4 & {}^4\mathcal{D}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1\mathcal{D}_1 & {}^1\mathcal{D}_2 & {}^1\mathcal{D}_3 & {}^1\mathcal{D}_4 \\ -{}^2\mathcal{P}_1 & {}^2\mathcal{D}_2 & {}^2\mathcal{D}_3 & {}^2\mathcal{D}_4 \\ -{}^3\mathcal{P}_1 & -{}^3\mathcal{P}_2 & {}^3\mathcal{D}_3 & {}^3\mathcal{D}_4 \\ -{}^4\mathcal{P}_1 & -{}^4\mathcal{P}_2 & -{}^4\mathcal{P}_3 & {}^4\mathcal{D}_4 \end{pmatrix}.$$

Der konkrete Betrag eines Elements von einem komplexen Vektor hat keine Bedeutung für die Zugehörigkeit zu einem komplexen Vorzeichenvektor, sofern der Betrag von Null verschieden ist. Die Zugehörigkeit wird dagegen nur durch das Verhältnis der Argumente der von Null verschiedenen Elemente eines Vektors bestimmt. Die Zuordnung eines komplexen Vektors zu seiner Äquivalenzklasse ist daher nicht besonders intuitiv und kann

<sup>5</sup> Ein komplexer Vorzeichenvektor ist eine Äquivalenzklasse auf der Menge der komplexen Vektoren und keine Vorzeichenmatrix aus  $\mathbb{V}^{n \times n}$ . Um die Notation einfacher zu halten, wird die Vorzeichenmatrix, die einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  beschreibt mit dem komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  gleichgesetzt. In Abschnitt 5 wird noch eine weitere Darstellung eines komplexen Vorzeichenvektors vorgestellt.

erst nach einer genauen Untersuchung des Vektors erfolgen. Wie in dem folgenden Beispiel gezeigt wird, können zwei Vektoren auch dasselbe komplexe Vorzeichenmuster besitzen und zu unterschiedlichen komplexen Vorzeichenvektoren gehören.

**Beispiel 4.1 :** Gegeben sind drei komplexe Vektoren  $a = (2, 3e^{j\frac{\pi}{12}})^T$ ,  $b = (3e^{j\frac{\pi}{6}}, 2e^{j\frac{\pi}{4}})^T$  und  $c = (2e^{j\frac{4\pi}{9}}, 2e^{j\frac{\pi}{3}})^T$  bzw.

$$a \approx \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.9 + 0.8j \end{pmatrix}, \quad b \approx \begin{pmatrix} 2.6 + 1.5j \\ 1.4 + 1.4j \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c \approx \begin{pmatrix} 0.3 + 2.0j \\ 1.0 + 1.7j \end{pmatrix}.$$

Die Real- und Imaginärteile der Elemente der Vektoren sind in Abbildung 4.5 dargestellt.

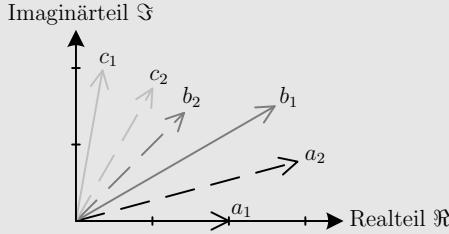


Abbildung 4.5: Real- und Imaginärteile der komplexen Vektoren aus Beispiel 4.1.

Es gilt  $\Re(a), \Re(b), \Re(c), \Im(b), \Im(c) \in (+, +)^T$  und  $\Im(a) \in (\circ, +)^T$ , sodass die Vektoren  $a$  und  $b$  unterschiedliche komplexe Vorzeichenmuster und die Vektoren  $b$  und  $c$  dasselbe komplexe Vorzeichenmuster haben. Der Betrag von jedem Element von jedem dieser Vektoren ist von Null verschieden und die Winkeldifferenzen der Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  ergeben sich zu  ${}^a\varphi_2 - {}^a\varphi_1 = {}^b\varphi_2 - {}^c\varphi_1 = \frac{\pi}{12}$  und  ${}^c\varphi_2 - {}^c\varphi_1 = -\frac{\pi}{9}$ . Daher gilt

$$[a]_{\sim} = \mathfrak{A} = [b]_{\sim} = \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [c]_{\sim} = \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} + & + \\ - & + \end{pmatrix},$$

da z.B.  ${}^a r_1 {}^a r_2 \cos({}^a\varphi_1 - {}^a\varphi_2) = 2 \cdot 3 \cdot \cos(\frac{\pi}{12}) \in + = \mathfrak{A}_{1,2}$  und  ${}^c r_1 {}^c r_2 \sin({}^c\varphi_2 - {}^c\varphi_1) = 2 \cdot 2 \cdot \sin(-\frac{\pi}{9}) \in - = \mathfrak{C}_{2,1}$  gilt. Die beiden Vektoren  $a$  und  $b$  sind in derselben Äquivalenzklasse  $a \sim b$  und haben verschiedene komplexe Vorzeichenmuster. Die Vektoren  $b$  und  $c$  haben das gleiche komplexe Vorzeichenmuster, gehören aber zu verschiedenen Äquivalenzklassen  $b \not\sim c$ .

## 4.2 Verschiedene Eigenschaften komplexer Vorzeichenvektoren

In diesem Abschnitt werden verschiedene Begriffe und Eigenschaften für komplexen Vorzeichenvektoren definiert und ermittelt. Dafür wird angenommen, dass ein komplexer Vektor  $q = (r_1 e^{j\varphi_1}, r_2 e^{j\varphi_2}, \dots, r_n e^{j\varphi_n})^T$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gegeben ist, welcher ein Element des komplexen Vorzeichenvektors  $\mathfrak{D} := [q]_{\sim}$  ist. Für zwei  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  werden dann jeweils die Vorzeichen von  $r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)$  und  $r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w)$  mit  ${}^w\mathcal{D}_v$  und  ${}^w\mathcal{P}_v$  bezeichnet.  ${}^w\mathcal{D}$  und  ${}^w\mathcal{P}$  können daher als Vorzeichenvektoren aus  $\mathbb{V}^n$  mit den Einträgen  ${}^w\mathcal{D}_v$  und  ${}^w\mathcal{P}_v$  betrachtet werden.

Wenn für ein  $w \in \{1, \dots, n\}$ ,  $r_w \neq 0$  gilt, dann ist das Element  $w$  von Null verschieden in  $\mathfrak{D}$  und es gilt  ${}^w\mathcal{D}_w = \mathfrak{D}_{w,w} = +$ . Wenn andererseits  $w$  nicht von Null verschieden ist, dann gilt  ${}^w\mathcal{D}_i = {}^w\mathcal{P}_i = \circ$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  und die Zeile und Spalte  $w$  in  $\mathfrak{D}$  hat nur  $\circ$ -Einträge. Für jedes von Null verschiedene  $w \in \{1, \dots, n\}$  in  $\mathfrak{D}$  wird der Vektor  ${}^wq := q/q_w$  definiert, sodass für den Eintag  $v \in \{1, \dots, n\}$  von  ${}^wq$ ,

$${}^wq_v = \frac{q_v}{q_w} = \frac{r_v}{r_w} e^{j(\varphi_v - \varphi_w)} = \frac{r_v}{r_w} \cos(\varphi_v - \varphi_w) + j \frac{r_v}{r_w} \sin(\varphi_v - \varphi_w)$$

gilt. Aus Satz 4.1 folgt, dass  ${}^wq \in \mathfrak{D}$  gilt und es ist offensichtlich, dass  ${}^wq_w = 1$  für den  $w$ -ten Eintrag von  ${}^wq$  gilt. Außerdem gilt  $\Re({}^wq_v) \in {}^w\mathcal{D}_v$  und  $\Im({}^wq_v) \in {}^w\mathcal{P}_v$  bzw.  $\Re({}^wq) \in {}^w\mathcal{D}$  und  $\Im({}^wq) \in {}^w\mathcal{P}$ .

**Definition 4.3 (charakteristisches Vorzeichenmuster):** Das Paar von Vorzeichenvektoren  ${}^w\mathcal{D} \in \mathbb{V}^n$  und  ${}^w\mathcal{P} \in \mathbb{V}^n$  ist das  $w$ -te charakteristische Vorzeichenmuster des komplexen Vorzeichenvektors  $\mathfrak{D}$ . Die Funktion

$$V: \mathbb{V}^{n \times n} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n, \quad (\mathfrak{D}, w) \mapsto ({}^w\mathcal{D}, {}^w\mathcal{P}),$$

bestimmt die charakteristischen Vorzeichenmuster eines komplexen Vorzeichenvektors  $\mathfrak{D}$ .

Das  $w$ -te charakteristische Vorzeichenmuster ist durch die Einträge in der  $w$ -ten Zeile und Spalte des komplexen Vorzeichenvektors  $\mathfrak{D}$  (siehe Gleichung (4.2)) bestimmt. Daher lässt sich der  $v$ -te Eintrag des  $w$ -ten charakteristischen Vorzeichenmusters wie folgt ermitteln

$$\begin{aligned} {}^w\mathcal{D}_v &= V(\mathfrak{D}, w)_{v,1} := \begin{cases} \mathfrak{D}_{v,w}, & \text{wenn } w \geq v \quad \text{und} \\ \mathfrak{D}_{w,v}, & \text{wenn } w < v, \end{cases} \\ {}^w\mathcal{P}_v &= V(\mathfrak{D}, w)_{v,2} := \begin{cases} -\mathfrak{D}_{w,v}, & \text{wenn } w > v, \\ \circ, & \text{wenn } w = v \quad \text{und} \\ \mathfrak{D}_{v,w}, & \text{wenn } w < v. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die in (4.3) beschriebene Beziehung zur Bestimmung eines charakteristischen Vorzeichenmusters basiert auf der quadratischen Vorzeichenmatrix, welche den komplexen Vorzeichenvektor darstellt. Nicht jede quadratische Vorzeichenmatrix beschreibt einen komplexen Vorzeichenvektor (siehe Satz 4.5), aber die in (4.3) beschriebene Funktion kann für jede quadratische Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  benutzt werden, auch wenn die Matrix  $\mathcal{X}$  keinen komplexen Vorzeichenvektor beschreibt.

Das  $w$ -te charakteristische Vorzeichenmuster beschreibt das komplexe Vorzeichenmuster eines nach dem  $w$ -ten Eintrag normierten Elements von  $\mathfrak{D}$ .

**Beispiel 4.2 :** Gegeben ist der komplexe Vektor  $q = (1+j, -1+2j, 5, 1-j)^T \in \mathbb{C}^4$ , dessen Elemente in Abbildung 4.6 dargestellt sind.

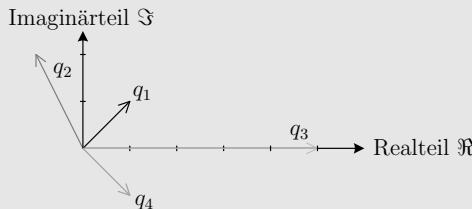


Abbildung 4.6: Real- und Imaginärteile des Vektors aus Beispiel 4.2.

Da  $q_3 \in +$  und  ${}^3q = q/q_3$  gilt, hat  ${}^3q$  das gleiche Vorzeichenmuster wie  $q$  und es gilt

$$\Re({}^3q) \in {}^3\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix}, \quad \Im({}^3q) \in {}^3\mathcal{P} = \begin{pmatrix} + \\ + \\ \circ \\ - \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q \in \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} {}^1\mathcal{D}_1 & {}^2\mathcal{D}_1 & + & {}^4\mathcal{D}_1 \\ {}^1\mathcal{P}_2 & {}^2\mathcal{D}_2 & - & {}^4\mathcal{D}_2 \\ - & - & + & + \\ {}^1\mathcal{P}_4 & {}^2\mathcal{P}_4 & - & {}^4\mathcal{D}_4 \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt  ${}^1q = q/q_1 = (1, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}j, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}j, -j)$  bzw.

$$\Re({}^1q) \in {}^1\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ \circ \end{pmatrix}, \quad \Im({}^1q) \in {}^1\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \circ \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q \in \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & + & + & \circ \\ + & {}^2\mathcal{D}_2 & - & {}^4\mathcal{D}_2 \\ - & - & + & + \\ - & {}^2\mathcal{P}_4 & - & {}^4\mathcal{D}_4 \end{pmatrix}.$$

Mit  ${}^2q = q/q_2 = (\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j, 1, -1 - 2j, -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}j)$  folgt schließlich

$$\Re({}^2q) \in {}^2\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \quad \Im({}^2q) \in {}^2\mathcal{P} = \begin{pmatrix} - \\ \circ \\ - \\ - \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & + & + & \circ \\ + & + & - & - \\ - & - & + & + \\ - & - & - & + \end{pmatrix},$$

sodass  ${}^4\mathcal{D} = (\circ, \dashv, +, +)^T$  und  ${}^4\mathcal{P} = (+, +, +, \circ)^T$  gilt. Die Vorzeichenmatrix zur Beschreibung von  $\mathfrak{D}$  kann auch über die Argumente von  $q$  nach Gleichung (4.1) ermittelt werden. Es gilt beispielsweise  $\sin(\varphi_3 - \varphi_1) = \sin(0 - \frac{\pi}{4}) = -1/\sqrt{2} \in \dashv = \mathfrak{D}_{3,1}$ , oder  $\cos(\varphi_4 - \varphi_1) = \cos(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = 0 \in \circ = \mathfrak{D}_{1,4}$ .

Für zwei von Null verschiedene  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  in  $\mathfrak{D}$  berechnet sich der Abstand  $\varrho_q(v, w)$  von  $w$  zu  $v$  in  $q$  mit  $\varrho_q(v, w) := (\varphi_v - \varphi_w) \bmod \frac{\pi}{2} \geq 0$ . Wenn für zwei von Null verschiedene  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  und ein  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi_v = \varphi_w + k\frac{\pi}{2}$  gilt, dann ist  $v$  abhängig von  $w$  in  $\mathfrak{D}$  und es gilt  $\varrho_q(v, w) = 0$ . Zudem gilt genau dann  ${}^w\mathcal{D}_v = \circ$  oder  ${}^w\mathcal{P}_v = \circ$ . Wenn  $v$  und  $w$  von Null verschieden sind und  $v$  nicht abhängig von  $w$  in  $\mathfrak{D}$  ist, dann ist  $v$  unabhängig von  $w$  in  $\mathfrak{D}$  und es gilt  ${}^w\mathcal{D}_v \neq \circ \neq {}^w\mathcal{P}_v$  sowie  $\varrho_q(v, w) > 0$ . Wenn  $v$  von allen zu  $w$  unabhängigen  $i \in \{1, \dots, n\}$  den kleinsten Abstand hat, d.h.  $\varrho_q(i, w) \geq \varrho_q(v, w) > 0$ , dann ist  $v$  ein Nachfolger von  $w$  und  $\varrho_q(w) := \varrho_q(v, w) > 0$  ist der geringste Abstand von  $w$  in  $q$ . Wenn es kein zu  $w$  unabhängiges  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt, dann gilt  $\varrho_q(w) := \frac{\pi}{2}$ . Es kann mehrere Nachfolger von einem von Null verschiedenen  $w$  geben. Diese sind dann aber abhängig voneinander.

Wird der Vektor  ${}^wq$  für ein von Null verschiedenes  $w$  in  $\mathfrak{D}$  um einen Winkel  $\theta_w$  „verdreht“, d.h.  ${}^w\tilde{q} = {}^wq \cdot e^{-j\theta_w}$ , dann gilt für den  $v$ -ten Eintrag von  ${}^w\tilde{q}$ ,

$${}^w\tilde{q}_v = \frac{r_v}{r_w} e^{j(\varphi_v - \varphi_w - \theta_w)} = \frac{r_v}{r_w} \cos(\varphi_v - \varphi_w - \theta_w) + j \frac{r_v}{r_w} \sin(\varphi_v - \varphi_w - \theta_w).$$

Wenn der Winkel  $\theta_w$  positiv und hinreichend klein ist, d.h.  $\varrho_q(w) > \theta_w > 0$ , dann gilt für jedes von Null verschiedene  $v$  in  $\mathfrak{D}$   $\Re({}^w\tilde{q}_v) \neq 0 \neq \Im({}^w\tilde{q}_v)$ . Für zwei  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  und ein  $\theta_w$  mit  $\varrho_q(w) > \theta_w > 0$  werden die Vorzeichen von  $r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w - \theta_w)$  und  $r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w - \theta_w)$  mit  ${}^w\mathcal{D}_v$  und  ${}^w\mathcal{P}_v$  bezeichnet. Für jedes  $\epsilon$  mit  $\varrho_q(w) > \epsilon > 0$  sind dann jeweils die Vorzeichen von  $r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w - \epsilon)$  und  $r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w - \epsilon)$  identisch zu  ${}^w\mathcal{D}_v$  und  ${}^w\mathcal{P}_v$ . Analog zu den charakteristischen Vorzeichenmustern und der Funktion  $V$  wird die Funktion  $V^* : \mathbb{V}^{n \times n} \times \{1, \dots, n, 1^*, \dots, n^*\} \rightarrow \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n$  definiert, welche neben den charakteristischen Vorzeichenmustern auch die Vorzeichenmuster

$$({}^w\mathcal{D}, {}^w\mathcal{P}) = V^*(\mathfrak{D}, w^*)$$

ermittelt, wenn  $w^* \in \{1^*, \dots, n^*\}$  gilt. Für ein  $w^* \in \{1^*, \dots, n^*\}$  bezeichnet  $|w^*|$  das zu  $w^*$  gehörige  $w \in \{1, \dots, n\}$  und für eine Menge  $U \subseteq \{1, \dots, n\}$  ist  $U^* := U \cup \{i^* | i \in U\}$ .

**Beispiel 4.3 (Fortsetzung von Beispiel 4.2):** Gegeben ist der komplexe Vektor  $p = re^{j\varphi}$  mit  $r = (\sqrt{2}, 2, 5, \sqrt{2})^T$  und  $\varphi = (\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, 0, -\frac{\pi}{4})^T$ . Die Einträge  $p_1, p_3$  und  $p_4$  sind identisch mit den Einträgen  $q_1, q_3$  und  $q_4$  aus Beispiel 4.2 und lediglich der Imaginärteil von  $p_2$  ist etwas kleiner als der Imaginärteil von  $q_2$ . Dennoch gehören  $p$  und  $q$  zum selben komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ .

Jedes Element  $i \in \{1, \dots, 4\}$  ist in  $\mathfrak{D}$  von Null verschieden und es gilt  $\varphi_4 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ , sodass 4 abhängig von 1 in  $\mathfrak{D}$  ist. Alle anderen Paare  $v, w \in \{1, \dots, 4\}$ ,  $v \neq w$  sind unabhängig voneinander in  $\mathfrak{D}$ . Die Abstände und geringsten Abstände ergeben sich wie folgt

$$\begin{aligned} \varrho_p(1, 2) &= \frac{1}{12}\pi, & \varrho_p(1, 3) &= \frac{1}{4}\pi, & \varrho_p(1, 4) &= 0, \\ \varrho_p(2, 1) &= \frac{5}{12}\pi, & \varrho_p(2, 3) &= \frac{1}{6}\pi, & \varrho_p(2, 4) &= \frac{5}{12}\pi, \\ \varrho_p(3, 1) &= \frac{1}{4}\pi, & \varrho_p(3, 2) &= \frac{1}{3}\pi, & \varrho_p(3, 4) &= \frac{1}{4}\pi, \\ \varrho_p(4, 1) &= 0, & \varrho_p(4, 2) &= \frac{1}{12}\pi, & \varrho_p(4, 3) &= \frac{1}{4}\pi, \\ \hline \varrho_p(1) &= \frac{1}{4}\pi, & \varrho_p(2) &= \frac{1}{12}\pi, & \varrho_p(3) &= \frac{1}{6}\pi, & \varrho_p(4) &= \frac{1}{4}\pi, \end{aligned}$$

da beispielsweise  $\varrho_p(2, 1) = (\varphi_2 - \varphi_1) \bmod \frac{\pi}{2} = (\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi) \bmod \frac{\pi}{2} = \frac{5}{12}\pi$  gilt. 3 hat von 1 den geringsten Abstand in  $\mathfrak{D}$ , sodass 3 der Nachfolger von 1 in  $\mathfrak{D}$  ist. Außerdem ist 2 der Nachfolger von 3 in  $\mathfrak{D}$  und 1 und 4 sind die Nachfolger von 2 in  $\mathfrak{D}$  (siehe Beispiel 5.3).

Für jedes  $\epsilon$  mit  $\varrho_p(1) = \frac{\pi}{4} > \epsilon > 0$  gilt mit  ${}^{1^*}p = {}^1p \cdot e^{-j\epsilon}$  und  ${}^1p = p/p_1$ ,

$$\Re({}^{1^*}p) = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_1 - \epsilon) \\ \frac{r_2}{r_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \epsilon) \\ \frac{r_3}{r_1} \cos(\varphi_3 - \varphi_1 - \epsilon) \\ \frac{r_4}{r_1} \cos(\varphi_4 - \varphi_1 - \epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\epsilon) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{5\pi}{12} - \epsilon) \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \cos(-\frac{\pi}{4} - \epsilon) \\ \cos(-\frac{\pi}{2} - \epsilon) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix} = {}^{1^*}\mathcal{D} \quad \text{und}$$

$$\Im({}^{1^*}p) = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r_1} \sin(\varphi_1 - \varphi_1 - \epsilon) \\ \frac{r_2}{r_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \epsilon) \\ \frac{r_3}{r_1} \sin(\varphi_3 - \varphi_1 - \epsilon) \\ \frac{r_4}{r_1} \sin(\varphi_4 - \varphi_1 - \epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(-\epsilon) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{5\pi}{12} - \epsilon) \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \sin(-\frac{\pi}{4} - \epsilon) \\ \sin(-\frac{\pi}{2} - \epsilon) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} = {}^{1^*}\mathcal{P}.$$

Für  $\epsilon = \frac{\pi}{6}$  gilt beispielsweise  $\frac{\pi}{4} > \epsilon > 0$ ,

$${}^1p \approx \begin{pmatrix} 0.86 - 0.50j \\ 1.00 + 1.00j \\ 0.92 - 3.42j \\ -0.50 - 0.86j \end{pmatrix}, \quad \Re({}^{1^*}p) \in {}^{1^*}\mathcal{D} \quad \text{und} \quad \Im({}^{1^*}p) \in {}^{1^*}\mathcal{P}.$$

Analog ergibt sich

$${}^2\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \quad {}^2\mathcal{P} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}, \quad {}^3\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix}, \quad {}^3\mathcal{P} = \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \quad {}^4\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix} \text{ und } {}^4\mathcal{P} = \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}.$$

Für jedes  $i \in \{1, \dots, 4\}$  sind alle Einträge von  ${}^i\mathcal{D}$  und  ${}^i\mathcal{P}$  von  $\circ$  verschieden. Beim Vergleich von  ${}^i\mathcal{D}$  und  ${}^i\mathcal{P}$  mit  ${}^i\mathcal{D}$  und  ${}^i\mathcal{P}$  (siehe Beispiel 4.2) ist ersichtlich, dass sich ausschließlich die  $\circ$ -Einträge verändert haben.

Mit dem folgenden Satz wird gezeigt, dass sich das komplexe Vorzeichenmuster von jedem Element  $q \in \mathbb{C}^n$  eines komplexen Vorzeichenvektors  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n$  mithilfe der Vorzeichenmuster von  $V^*$  und einer Vorzeichen-Rotationsmatrix beschreiben lässt, wobei die Menge der Vorzeichen-Rotationsmatrizen  $R$  wie folgt definiert wird

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} + & \circ \\ \circ & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \circ & + \\ - & \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & \circ \\ \circ & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \circ & - \\ + & \circ \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.4)$$

**Satz 4.4 :** Gegeben ist ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  und  $R$  nach (4.4). Für jeden Vektor  $q \in \mathfrak{D}$  gibt es ein  $k \in \{1, \dots, n, 1^*, \dots, n^*\}$  und eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{R} \in R$ , sodass

$$({}^k\mathcal{D}, {}^k\mathcal{P}) = V^*(\mathfrak{D}, k) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \Re(q^T) \\ \Im(q^T) \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \begin{pmatrix} {}^k\mathcal{D}^T \\ {}^k\mathcal{P}^T \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

**Beweis.** 1) Wir bezeichnen die Menge aller von Null verschiedenen Einträge in  $\mathfrak{D}$  mit  $Z$  und wir nehmen zunächst an, dass es ein  $k \in Z$  mit  $\Re(q_k) = 0$  oder  $\Im(q_k) = 0$  gibt. Wenn  $\Im(q_k) = 0$ , dann gilt  $q_k = \alpha \neq 0$  und wenn  $\Re(q_k) = 0$ , dann gilt  $q_k = j\alpha \neq 0$ . In beiden Fällen gilt  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und wir definieren  $\mathcal{S}$  als das Vorzeichen von  $\alpha$ . Weiterhin definieren wir  ${}^k q := q/q_k$ . Es gilt  $\Re({}^k q) \in {}^k \mathcal{D}$  und  $\Im({}^k q) \in {}^k \mathcal{P}$  sowie  ${}^k q = \Re({}^k q) + j \cdot \Im({}^k q)$ . Wenn  $\Im(q_k) = 0$ , dann gilt  $q = {}^k q \cdot q_k = \alpha \cdot \Re({}^k q) + j \cdot \alpha \cdot \Im({}^k q)$ , sodass  $\Re(q) = \alpha \cdot \Re({}^k q) \in \mathcal{S} {}^k \mathcal{D}$  und  $\Im(q) = \alpha \cdot \Im({}^k q) \in \mathcal{S} {}^k \mathcal{P}$  gilt. Wenn andernfalls  $\Re(q_k) = 0$ , dann gilt  $q = -\alpha \cdot \Im({}^k q) + j \cdot \alpha \cdot \Re({}^k q)$ , sodass  $\Re(q) = -\alpha \cdot \Im({}^k q) \in -\mathcal{S} {}^k \mathcal{P}$  und  $\Im(q) = \alpha \cdot \Re({}^k q) \in \mathcal{S} {}^k \mathcal{D}$  gilt. In beiden Fällen ist die Aussage erfüllt.

2) Wir nehmen nun an, dass es kein  $k \in Z$  mit  $\Re(q_k) = 0$  oder  $\Im(q_k) = 0$  gibt. Wenn der Vektor  $\varphi$  die Argumente von dem Vektor  $q$  bezeichnet, dann gilt

$$\rho_i := (-\varphi_i) \bmod \frac{\pi}{2} > 0 \quad \text{für jedes } i \in Z. \quad (4.5)$$

Wir wählen  $k \in Z$  derart, dass  $\min_{i \in Z} \rho_i \geq \rho_k$  gilt und wir bezeichnen die Menge aller von  $k$  unabhängigen  $i \in Z$  mit  $Z'$ . Wenn  $Z' = \emptyset$ , dann gilt  $\varrho_q(k) = \frac{\pi}{2} > \rho_k$ .

Andernfalls gilt  $Z' \neq \emptyset$  und aus der Wahl von  $k$  und  $Z'$  folgt

$$\rho_i > \rho_k \quad \text{für jedes } i \in Z'. \quad (4.6)$$

Aufgrund von (4.5) gilt  $(\varphi_i \bmod \frac{\pi}{2}) > 0$  bzw.  $(\varphi_i \bmod \frac{\pi}{2}) + \rho_k > \rho_k$  für jedes  $i \in Z'$ . Mit der Eigenschaft (2.3) ergibt sich daraus  $\frac{\pi}{2} - (\rho_i - \rho_k) > \rho_k$  und zusammen mit (4.6) folgt  $\frac{\pi}{2} - (\varphi_k - \varphi_i) \bmod \frac{\pi}{2} > \rho_k$ . Aufgrund von (2.3) gilt dann  $(\varphi_i - \varphi_k) \bmod \frac{\pi}{2} = \varrho_q(i, k) \geq \varrho_q(k) > \rho_k$ .

Wir definieren  ${}^k q = q/q_k \cdot e^{-j\rho_k}$ , sodass für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$${}^k q_i = r_i/r_k \cos(\varphi_i - \varphi_k - \rho_k) + j r_i/r_v \cos(\varphi_i - \varphi_k - \rho_k)$$

gilt. Da  $\varrho_q(k) > \rho_k$  erfüllt ist, gilt  $\Re({}^k q) \in {}^k \mathcal{D}$  und  $\Im({}^k q) \in {}^k \mathcal{P}$ . Aufgrund von (2.2) mit  $a = \varphi_k$ , (2.3) und (4.5) gilt  $\varphi_k + \rho_k = \frac{\pi}{2} \cdot (\varphi_k \bmod \frac{\pi}{2} + 1) =: \alpha$ , wobei  $\alpha$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\frac{\pi}{2}$  ist. Dann gilt  $q = {}^k q \cdot q_k \cdot e^{j\rho_k} = {}^k q \cdot r_k \cdot e^{j\alpha}$ . Wenn  $\alpha$  ein gerade Vielfaches von  $\frac{\pi}{2}$  ist, dann wählen wir  $\mathcal{S}$  nach dem Vorzeichen von  $\cos(\alpha)$  und es gilt  $q = {}^k q \cdot r_k \cos(\alpha)$  sowie  $\Re(q) \in {}^k \mathcal{D}$  und  $\Im(q) \in {}^k \mathcal{P}$ . Wenn  $\alpha$  andernfalls ein ungerades Vielfaches von  $\frac{\pi}{2}$  ist, dann wählen wir  $\mathcal{S}$  nach dem Vorzeichen von  $\sin(\alpha)$  und es gilt  $q = j {}^k q \cdot r_k \sin(\alpha)$  sowie  $\Re(q) \in -{}^k \mathcal{P}$  und  $\Im(q) \in -{}^k \mathcal{D}$ .  $\square$

Ein komplexer Vorzeichenvektor der Ordnung  $n$  kann mit einer Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  beschrieben werden, aber nicht jede Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  beschreibt einen komplexen Vorzeichenvektor. Mit dem folgenden Satz werden notwendige Bedingungen für die Beschreibung eines komplexen Vorzeichenvektors mit einer Vorzeichenmatrix vorgestellt. In Abschnitt 5.2 wird auf Seite 82 mit Satz 5.3 gezeigt, dass diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind.

**Satz 4.5 :** Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und es gilt  $({}^k \mathcal{D}, {}^k \mathcal{P}) = V(\mathcal{X}, k)$  für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  nach (4.3). Wenn die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  einen komplexen Vorzeichenvektor beschreibt, dann gilt für jedes  $x, y, z \in \{1, \dots, n\}$ ,  ${}^z \mathcal{D}_z \in \{\circ, +\}$  und

$${}^z \mathcal{D}_z \begin{pmatrix} {}^x \mathcal{P}_y \\ {}^x \mathcal{D}_y \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} {}^z \mathcal{D}_y & {}^z \mathcal{P}_y \\ -{}^z \mathcal{P}_y & {}^z \mathcal{D}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^x \mathcal{P}_z \\ {}^x \mathcal{D}_z \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

*Beweis.* Da die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  beschreibt, wählen wir einen Vektor  $q \in \mathfrak{D}$ , wobei die Vektoren  $r$  und  $\varphi$  jeweils die Beträge und die

Argumente von  $q$  beschreiben. Dann gilt  $r_x r_y \cos(\varphi_y - \varphi_x) \in {}^x \mathcal{D}_y$  und  $r_x r_y \sin(\varphi_y - \varphi_x) \in {}^x \mathcal{P}_y$  sowie  $r_z^2 \in {}^z \mathcal{D}_z \in \{\circlearrowleft, +\}$ . Aus den Additionstheoremen in (2.4) folgt

$$\begin{aligned} r_z^2 r_x r_y \cos(\varphi_y - \varphi_x) &= r_z^2 r_x r_y \cos((\varphi_y - \varphi_z) + (\varphi_z - \varphi_x)) \\ &= r_y r_z \cos(\varphi_y - \varphi_z) r_z r_x \cos(\varphi_z - \varphi_x) - r_y r_z \sin(\varphi_y - \varphi_z) r_z r_x \sin(\varphi_z - \varphi_x) \text{ und} \\ r_z^2 r_x r_y \sin(\varphi_y - \varphi_x) &= r_z^2 r_x r_y \sin((\varphi_y - \varphi_z) + (\varphi_z - \varphi_x)) \\ &= r_y r_z \sin(\varphi_y - \varphi_z) r_z r_x \cos(\varphi_z - \varphi_x) + r_y r_z \cos(\varphi_y - \varphi_z) r_z r_x \sin(\varphi_z - \varphi_x). \end{aligned}$$

Daher gilt  ${}^z \mathcal{D}_z {}^x \mathcal{D}_y \subseteq {}^z \mathcal{D}_y {}^x \mathcal{D}_z - {}^z \mathcal{P}_y {}^x \mathcal{P}_z$  und  ${}^z \mathcal{D}_z {}^x \mathcal{P}_y \subseteq {}^z \mathcal{P}_y {}^x \mathcal{D}_z + {}^z \mathcal{D}_y {}^x \mathcal{P}_z$ . Gleichung (4.7) ist daher für jedes  $x, y, z \in \{1, \dots, n\}$  erfüllt.  $\square$

Jeder Vektor  $q \in \mathbb{C}^n$  ist ein Element von genau einem komplexen Vorzeichenvektor der Ordnung  $n$ . Der Sonderfall  $q \in \mathbb{R}^n$  ist dabei auch enthalten, wobei der zugehörige komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  dann durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben ist, da  $\sin(\varphi_v - \varphi_w) = 0 \in {}^w \mathcal{P}_v = \mathfrak{D}_{v,w} = \circlearrowleft$  für jedes  $v > w$  gilt. Aus Satz 4.5 folgt, dass dann für jedes  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  der Eintrag  ${}^w \mathcal{D}_v$  durch die Einträge in der ersten von Null verschiedenen Zeile  $p$  von  $\mathfrak{D}$  bestimmt ist, da  ${}^w \mathcal{D}_v = {}^p \mathcal{D}_v {}^p \mathcal{D}_w$  gilt, wenn  ${}^p \mathcal{D}_p \neq \circlearrowleft$ . Ein derartiger komplexer Vorzeichenvektor wird dann als *reell darstellbar* bezeichnet und ist durch den Vorzeichenvektor  ${}^p \mathcal{D}$  bestimmt.

Wenn  $\mathfrak{D}$  ein komplexer Vorzeichenvektor ist, der durch die Ausdrücke  ${}^w \mathcal{D}_v$  und  ${}^w \mathcal{P}_v$  nach (4.3) beschrieben werden kann, dann wird  $\overline{\mathfrak{D}}$  analog zu (4.2) wie folgt definiert

$$\overline{\mathfrak{D}}_{v,w} := \begin{cases} {}^w \mathcal{D}_v, & \text{wenn } w \geq v \\ -{}^w \mathcal{P}_v, & \text{wenn } w < v. \end{cases} \quad (4.8)$$

**Satz 4.6 :** Gegeben ist ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $q \in \mathfrak{D}$ . Es gilt  $\overline{q} = \Re(q) - j \cdot \Im(q) \in \overline{\mathfrak{D}}$ .

*Beweis.* Die Vektoren  $q$  und  $\overline{q}$  haben dieselben Beträge, sodass wir jeweils nur die Argumente  $\varphi$  und  $\vartheta$  von  $q$  und  $\overline{q}$  betrachten müssen. Es gilt  $\vartheta = -\varphi$ . Für zwei  $v, w \in \{1, \dots, n\}$  ergibt sich daher  $\vartheta_v - \vartheta_w = -(\varphi_v - \varphi_w)$ . Der Cosinus ist eine gerade Funktion, sodass  $\cos(\vartheta_v - \vartheta_w) = \cos(\varphi_v - \varphi_w)$  gilt und der Sinus ist eine ungerade Funktion, sodass  $\sin(\vartheta_v - \vartheta_w) = -\sin(\varphi_v - \varphi_w)$  gilt. Wenn  $q$  ein Element von  $\mathfrak{D}$  nach Gleichung (4.2) ist, dann ist  $\overline{q}$  ein Element von  $\overline{\mathfrak{D}}$  nach Gleichung (4.8).  $\square$

### 4.3 Der Kokern einer Vorzeichenmatrix

In Abschnitt 3.1 wurde die strenge Surjektivität von unsicheren Matrizen untersucht und in Satz 3.7 wurde festgestellt, dass eine unsichere Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{V}^{n \times m}$  nicht streng surjektiv ist, wenn es einen Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  mit  $\mathcal{Q} \neq \mathbb{O}$  gibt, sodass  $\mathbb{O} \subset \mathcal{Q}^T \mathcal{U}$  gilt. Aus dem Beweis des Satzes folgt, dass dann jeder reelle Vektor  $q \in \mathcal{Q}$  im Kokern von einer Matrix  $U \in \mathcal{U}$  ist. Wenn  $\mathcal{U}$  andererseits streng surjektiv ist, dann enthält der Kokern von jeder Matrix  $U \in \mathcal{U}$  ausschließlich den Nullvektor  $0 \in \mathbb{C}^n$ .

In diesem Abschnitt wird für eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{V} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  und einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  untersucht, ob ein  $q \in \mathfrak{D}$  im Kokern von einem  $V \in \mathcal{V}$  ist. Dafür wird zunächst der Kokern einer unsicheren Matrix wie folgt definiert.

**Definition 4.7 (Kokern von unsicheren Matrizen):** Ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  ist im Kokern von einer unsicheren Matrix  $\mathcal{U} \in \mathbb{U}^{n \times n}$ , wenn es einen Vektor  $q \in \mathfrak{D}$  und eine Matrix  $U \in \mathcal{U}$  gibt, sodass  $q^T U = 0$  gilt.

Mit dem folgenden Satz lässt sich bestimmen, ob ein komplexer Vorzeichenvektor im Kokern von einer Vorzeichenmatrix  $\mathcal{V}$  ist und zugleich wird gezeigt, dass dann jedes Element des komplexen Vorzeichenvektors im Kokern von einer Matrix  $V \in \mathcal{V}$  ist.

**Satz 4.8 :** Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{V} \in \mathbb{V}^{n \times m}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n$ . Die Vorzeichenvektoren  $(^k \mathcal{D}, ^k \mathcal{P}) = V(\mathfrak{D}, k)$  bezeichnen das  $k$ -te charakteristische Vorzeichenmuster von  $\mathfrak{D}$  und  $Z$  ist die Menge aller  $k \in \{1, \dots, n\}$ , welche in  $\mathfrak{D}$  von Null verschiedenen sind.

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i)  $\mathfrak{D}$  ist im Kokern von  $\mathcal{V}$ .
- (ii) Für jedes  $k \in Z$  gilt  $\mathbb{O} \subseteq {}^k \mathcal{D}^T \mathcal{V}$  und  $\mathbb{O} \subseteq {}^k \mathcal{P}^T \mathcal{V}$ .
- (iii) Für jeden Vektor  $q \in \mathfrak{D}$  gibt es eine Matrix  $V \in \mathcal{V}$ , sodass  $q^T V = 0$  gilt.

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii) Wenn  $\mathfrak{D}$  im Kokern von  $\mathcal{V}$  ist, dann gibt es ein  $q \in \mathfrak{D}$  und ein  $V \in \mathcal{V}$ , sodass  $q^T V = 0$  gilt. Wir definieren  ${}^k q = q/q_k$  für jedes  $k \in Z$ , sodass  $\Re({}^k q) = {}^k d \in {}^k \mathcal{D}$  und  $\Im({}^k q) = {}^k p \in {}^k \mathcal{P}$  gilt. Aufgrund der Annahme gilt  $q^T V = 0$ , sodass für alle  $k \in Z$ ,  ${}^k q^T V = 0$  bzw.  ${}^k d^T V = {}^k p^T V = 0$  gilt. (ii) ist daher offensichtlich.

(ii)  $\implies$  (iii) : Wir wählen ein  $q \in \mathfrak{D}$ , wobei die Vektoren  $r$  und  $\varphi$  jeweils die Beträge und die Argumente des Vektors  $q$  beschreiben und für jedes  $i \in Z$  definieren wir  ${}^i q := q/q_i$ , sodass  ${}^i q_k = \frac{r_k}{r_i} \cos(\varphi_k - \varphi_i) + j \frac{r_k}{r_i} \sin(\varphi_k - \varphi_i)$  für den Eintrag  $k \in Z$  von  ${}^i q$  gilt. Zusätzlich

gilt  ${}^i q \in \mathfrak{D}$ ,  $\Re({}^i q_k) = \frac{r_k}{r_i} \cos(\varphi_k - \varphi_i) \in {}^i \mathcal{D}_k$  und  $\Im({}^i q_k) = \frac{r_k}{r_i} \sin(\varphi_k - \varphi_i) \in {}^i \mathcal{P}_k$ . Wir fixieren ein  $s \in \{1, \dots, m\}$  und der Vorzeichenvektor  $\mathcal{X}$  bezeichnet die Spalte  $s$  von  $\mathcal{V}$ , d.h.  $\mathcal{X}_k := \mathcal{V}_{k,s}$  für jede Zeile  $k$  von  $\mathcal{V}$ .

Im Folgenden werden mehrfach die Beziehungen

$${}^a \mathcal{P}_c \subseteq {}^a \mathcal{P}_b {}^b \mathcal{D}_c + {}^a \mathcal{D}_b {}^b \mathcal{P}_c \quad \text{und} \quad (4.9a)$$

$${}^a \mathcal{D}_c \subseteq {}^a \mathcal{D}_b {}^b \mathcal{D}_c - {}^a \mathcal{P}_b {}^b \mathcal{P}_c \quad (4.9b)$$

für drei beliebige  $a, b, c \in Z$  verwendet, welche sich direkt aus Satz 4.5 ergeben, da dann  ${}^b \mathcal{D}_b = +$  gilt. Aufgrund der Bedingung in (ii) gilt für alle  $i \in Z$

$$\bigcirc \subseteq \sum_{l \in Z} {}^i \mathcal{D}_l \mathcal{X}_l \quad \text{und} \quad (4.10a)$$

$$\bigcirc \subseteq \sum_{l \in Z} {}^i \mathcal{P}_l \mathcal{X}_l. \quad (4.10b)$$

Wir werden in den folgenden fünf Schritten ein  $x \in \mathcal{X}$  wählen, sodass für ein  $i \in Z$

$$\sum_{l \in Z} r_l \cos(\varphi_l - \varphi_i) x_l = 0 \quad \text{und} \quad (4.11a)$$

$$\sum_{l \in Z} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_i) x_l = 0 \quad \text{gilt.} \quad (4.11b)$$

- 1) Wenn  ${}^k \mathcal{D}_k \mathcal{X}_k = \bigcirc$  für jedes  $k \in Z$ , dann gilt  $\mathcal{X}_k = \bigcirc$  für jedes  $k \in Z$  und (4.11) ist für jedes  $i \in Z$  mit jedem  $x \in \mathcal{X}$  erfüllt. Der Beweis wird in Schritt 6) fortgeführt.
- 2) Wir nehmen nun an, dass es ein  $v \in Z$  gibt, sodass  ${}^v \mathcal{D}_v \mathcal{X}_v \neq \bigcirc$  bzw.  $\mathcal{X}_v \neq \bigcirc$  gilt. Ohne Einschränkungen der Allgemeinheit gilt  $v = 1$  und aufgrund der Bedingung (4.10a) mit  $i = 1$  gibt es ein  $w \in Z \setminus \{1\}$ , o.E.d.A.  $w = 2$ , sodass

$${}^1 \mathcal{D}_2 \mathcal{X}_2 = -{}^1 \mathcal{D}_1 \mathcal{X}_1 = -\mathcal{X}_1 \neq \bigcirc \quad (4.12)$$

gilt.

- 3) Wir nehmen zunächst an, dass  ${}^1 \mathcal{P}_2 = \bigcirc$  gilt. Dann können aufgrund von (4.10b) mit  $i = 1$  und  ${}^1 \mathcal{P}_1 = \bigcirc$  alle Einträge  $x_i$  mit  $i \in Z' = Z \setminus \{1, 2\}$  so gewählt werden, dass  $x_i \in \mathcal{X}_i$  und

$$\sum_{l \in Z'} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_1) x_l = \sum_{l \in Z} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_1) x_l = 0 \quad (4.13)$$

gilt. Wir definieren  $\zeta = \sum_{l \in Z'} r_l \cos(\varphi_l - \varphi_1) x_l \in \mathbb{R}$  und wir wählen ein  $x_1 \in \mathcal{X}_1$  für das  $|x_1| > |\zeta|/r_1 \geq 0$  erfüllt ist. Aufgrund von (4.12) gilt  $\mathcal{X}_2 = -{}^1 \mathcal{D}_2 \mathcal{X}_1$ , sodass mit

$x_2 = -\frac{r_1 x_1 + \zeta}{r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ ,  $x \in \mathcal{X}$  und  $\sum_{l \in Z} r_l \cos(\varphi_l - \varphi_1) x_l = 0$  gilt. Zusammen mit (4.13) sind beide Gleichungen in (4.11) für  $i = 1$  erfüllt. Der Beweis wird in Schritt 6) fortgeführt.

4) Wir nehmen nun an, dass es keine zwei  $v, w \in Z$  mit  ${}^v \mathcal{D}_w \mathcal{X}_w = -\mathcal{X}_v \neq \bigcirc$  und  ${}^v \mathcal{P}_w = \bigcirc$  gibt. Dann gilt

$${}^v \mathcal{P}_w \neq \bigcirc, \text{ wenn } {}^v \mathcal{D}_w \mathcal{X}_w = -\mathcal{X}_v \neq \bigcirc \text{ gilt.} \quad (4.14)$$

In den Schritten 4.1) bis 4.5) wird über eine Rekursion gezeigt, dass es dann drei verschiedene  $u, v, w \in Z$  gibt, sodass

$$\mathcal{X}_w = -{}^v \mathcal{P}_w {}^v \mathcal{P}_u \mathcal{X}_u \neq \bigcirc \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_v = -{}^w \mathcal{P}_v {}^w \mathcal{P}_u \mathcal{X}_u \neq \bigcirc \quad (4.15)$$

erfüllt ist. Wir definieren  $k = 2$ .

4.1) Es gilt

$${}^1 \mathcal{D}_i \mathcal{X}_i = -\mathcal{X}_1 \neq \bigcirc \quad \text{für jedes } i \in \{2, \dots, k\}, \quad (4.16a)$$

$${}^1 \mathcal{P}_i \mathcal{X}_i = {}^1 \mathcal{P}_k \mathcal{X}_k \neq \bigcirc \quad \text{für jedes } i \in \{2, \dots, k\} \text{ und} \quad (4.16b)$$

$${}^k \mathcal{P}_i \mathcal{X}_i = {}^k \mathcal{P}_1 \mathcal{X}_1 \neq \bigcirc \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k-1\}. \quad (4.16c)$$

Für  $k = 2$  folgt (4.16a) aus (4.12) und (4.16b) sowie (4.16c) aus (4.14); und für  $k > 2$  folgt (4.16a) aus (4.16i), (4.16b) aus (4.16h) und (4.16c) aus (4.16k) bzw. (4.16g) wenn  $k = 3$ . Wenn  $k > 2$ , dann gilt zusätzlich aufgrund von (4.16j)

$$\mathcal{X}_k = {}^k \mathcal{D}_i \mathcal{X}_i \neq \bigcirc \quad \text{für jedes } i \in \{2, \dots, k-1\}. \quad (4.16d)$$

4.2) Aus der Bedingung (4.10b) für  $i = k$  folgt mithilfe von (4.16c) und  ${}^k \mathcal{P}_k = \bigcirc$ , dass es ein  $v \in Z \setminus \{1, \dots, k\}$ , ohne Einschränkungen der Allgemeinheit gilt  $v = k+1$ , mit

$${}^k \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{X}_{k+1} = -{}^k \mathcal{P}_1 \mathcal{X}_1 \neq \bigcirc \quad (4.16e)$$

gibt.

4.3) Wir nehmen zunächst an, dass  ${}^{k+1} \mathcal{P}_1 = \bigcirc$  gilt. Aus (4.9a) mit  $a = k$ ,  $b = 1$  und  $c = k+1$  ergibt sich dann  ${}^k \mathcal{P}_{k+1} = {}^k \mathcal{P}_1 {}^1 \mathcal{D}_{k+1}$ . Zusammen mit (4.16e) gilt  ${}^1 \mathcal{D}_{k+1} \mathcal{X}_{k+1} = -\mathcal{X}_1$  und die Annahme in (4.14) ist für  $v = k+1$  und  $w = 1$  nicht erfüllt. Es muss daher

$${}^{k+1} \mathcal{P}_1 \neq \bigcirc \quad (4.16f)$$

gelten.

4.4) Wir nehmen nun an, dass

$${}^{k+1} \mathcal{P}_k \mathcal{X}_k = {}^{k+1} \mathcal{P}_1 \mathcal{X}_1 \neq \bigcirc \quad (4.16g)$$

gilt. Zusammen mit (4.16e) gilt  ${}^1\mathcal{P}_k\mathcal{X}_k = {}^1\mathcal{P}_{k+1}\mathcal{X}_{k+1}$  und mit (4.16b) ergibt sich dann

$${}^1\mathcal{P}_i\mathcal{X}_i = {}^1\mathcal{P}_{k+1}\mathcal{X}_{k+1} \quad \text{für jedes } i \in \{2, \dots, k+1\}. \quad (4.16h)$$

Aus (4.9a) mit  $a = k+1$ ,  $b = 1$  und  $c = k$ , (4.16a) für  $i = k$  und (4.16g) ergibt sich  ${}^{k+1}\mathcal{P}_k \subseteq -{}^{k+1}\mathcal{P}_k + {}^{k+1}\mathcal{D}_1 {}^1\mathcal{P}_k$ . Daher gilt  ${}^{k+1}\mathcal{P}_k = {}^{k+1}\mathcal{D}_1 {}^1\mathcal{P}_k$  und zusammen mit (4.16e) ergibt sich

$${}^1\mathcal{D}_{k+1}\mathcal{X}_{k+1} = -\mathcal{X}_1. \quad (4.16i)$$

Für jedes  $i \in \{2, \dots, k\}$  ergibt sich aus (4.9b) mit  $a = k+1$ ,  $b = 1$  und  $c = i$ , (4.16a) und (4.16h),  ${}^{k+1}\mathcal{D}_i \subseteq -{}^{k+1}\mathcal{D}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_i + \mathcal{X}_{k+1} \mathcal{X}_i$ . Mit (4.16i) folgt daher

$${}^{k+1}\mathcal{D}_i \mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{k+1} \quad \text{für jedes } i \in \{2, \dots, k\}. \quad (4.16j)$$

Wenn  $k > 2$  gilt, dann folgt für jedes  $i \in \{2, \dots, k-1\}$  aus (4.9a) mit  $a = k+1$ ,  $b = k$  und  $c = i$ , (4.16c), (4.16d), (4.16e) und (4.16j) für  $k$ ,  ${}^{k+1}\mathcal{P}_i = {}^{k+1}\mathcal{P}_k \mathcal{X}_k \mathcal{X}_i$ . Zusammen mit (4.16g) ergibt sich schließlich

$${}^{k+1}\mathcal{P}_i \mathcal{X}_i = {}^{k+1}\mathcal{P}_1 \mathcal{X}_1 \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k\}. \quad (4.16k)$$

Wir führen den Beweis in Schritt 4.1) mit  $k+1$  fort.

4.5) Abschließend wir der Fall  ${}^{k+1}\mathcal{P}_k \mathcal{X}_k = -{}^{k+1}\mathcal{P}_1 \mathcal{X}_1 \neq \bigcirc$  untersucht. Dann gilt  $\mathcal{X}_k = -{}^{k+1}\mathcal{P}_k {}^{k+1}\mathcal{P}_1 \mathcal{X}_1 \neq \bigcirc$  und aufgrund von (4.16e) auch  $\mathcal{X}_{k+1} = -{}^k\mathcal{P}_{k+1} {}^k\mathcal{P}_1 \mathcal{X}_1 \neq \bigcirc$ . (4.15) ist mit  $w = k$ ,  $u = 1$  und  $v = k+1$  erfüllt und wir führen den Beweis im 5) fort.

5) Wir wählen drei verschiedene  $v, w, u \in Z$  aus, sodass die beiden Gleichungen in (4.15) erfüllt sind. Für alle  $k \in Z' = Z \setminus \{u, v, w\}$  definieren wir  $|x_k| := 1$  und wir definieren  $\zeta_1 := \sum_{k \in Z'} r_k \sin(\varphi_k - \varphi_w) x_k$  und  $\zeta_2 := \sum_{k \in Z'} r_k \sin(\varphi_k - \varphi_v) x_k$ . Außerdem wählen wir ein  $x_u \in \mathcal{X}_u$ , sodass

$$|x_u| > \left| \frac{\zeta_1}{r_u \sin(\varphi_u - \varphi_w)} \right| \quad \text{und} \quad |x_u| > \left| \frac{\zeta_2}{r_u \sin(\varphi_u - \varphi_v)} \right|$$

gilt. Des Weiteren definieren wir

$$x_v := -\frac{r_u \sin(\varphi_u - \varphi_w) x_u + \zeta_1}{r_v \sin(\varphi_v - \varphi_w)} \quad \text{und} \quad x_w := -\frac{r_u \sin(\varphi_u - \varphi_v) x_u + \zeta_2}{r_w \sin(\varphi_w - \varphi_v)}.$$

Aufgrund von (4.15) gilt  $\mathcal{X}_v = -{}^w\mathcal{P}_u {}^w\mathcal{P}_v \mathcal{X}_u$  und  $\mathcal{X}_w = -{}^v\mathcal{P}_u {}^v\mathcal{P}_w \mathcal{X}_u$ , sodass  $x \in \mathcal{X}$  gilt.

Zudem gilt

$$\sum_{l \in Z} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_v) x_l = 0 \quad \text{und} \quad (4.17a)$$

$$\sum_{l \in Z} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_w) x_l = 0. \quad (4.17b)$$

Wird (4.17b) von  $\cos(\varphi_v - \varphi_w)$  multipliziert mit (4.17a) subtrahiert, so ergibt sich

$$\sum_{l \in Z} r_l (\sin(\varphi_l - \varphi_v) \cos(\varphi_v - \varphi_w) - \sin(\varphi_l - \varphi_w)) x_l = 0.$$

Mithilfe von (2.4a) und  $\sin(\varphi_w - \varphi_v) \neq 0$  gilt

$$\sum_{l \in Z} r_l \cos(\varphi_l - \varphi_w) x_l = 0. \quad (4.17c)$$

Aus (4.17b) und (4.17c) folgt, dass die beiden Gleichungen in (4.11) für  $i = w$  erfüllt sind.

6) Da die beiden Gleichungen in (4.11) für ein  $i \in Z$  erfüllt sind, gilt  ${}^i q^T x = 0$  bzw.  $q^T x = 0$ . Wir definieren  $V_{k,s} = x_k$  für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ , sodass

$$\sum_{l=1}^n q_l V_{l,s} = 0$$

gilt und (iii) erfüllt ist. Die Beziehung (iii)  $\Rightarrow$  (i) ist offensichtlich.  $\square$

**Beispiel 4.4 :** Gegeben ist der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung 3 und die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{B} \in \mathbb{V}^{3 \times 3}$  mit

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & \circ & + \\ - & + & - \\ + & + & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} - & \circ & + \\ + & \circ & - \\ + & \circ & - \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Vorzeichenmuster von  $\mathfrak{D}$  sind

$${}^1 \mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ \circ \\ + \end{pmatrix}, \quad {}^1 \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \circ \\ - \\ + \end{pmatrix}, \quad {}^2 \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \circ \\ + \\ - \end{pmatrix}, \quad {}^2 \mathcal{P} = \begin{pmatrix} + \\ \circ \\ - \end{pmatrix}, \quad {}^3 \mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}^3 \mathcal{P} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ \circ \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\circ \subset {}^i \mathcal{D}^T \mathcal{B} = {}^i \mathcal{P}^T \mathcal{B} = (\circledast, \circ, \circledast)$  für jedes  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sodass nach Satz 4.8  $\mathfrak{D}$  im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist. 2 ist abhängig von 1 und 3 ist unabhängig von 1 und 2 in  $\mathfrak{D}$ . Für jedes  $q = (r_1 e^{j\varphi_1}, r_2 e^{j\varphi_2}, r_3 e^{j\varphi_3})^T \in \mathfrak{D}$  gilt  $r_1, r_2, r_3 > 0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  und  $0 < \varphi_3 - \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ . Mit

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{r_3}{r_1} \cos(\varphi_3 - \varphi_1) & 0 & \frac{r_3}{r_1} \cos(\varphi_3 - \varphi_1) \\ \frac{r_3}{r_2} \sin(\varphi_3 - \varphi_1) & 0 & -\frac{r_3}{r_2} \sin(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt z.B.  $B \in \mathcal{B}$  und  $q^T B = 0$ . Für den Vektor  $q = (5, -3j, 2 + 2j)^T$  gilt beispielsweise  $q \in \mathfrak{D}$  und mit

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & \frac{2}{5} \\ 10 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 15 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B} \quad \text{gilt } q^T B = 0.$$

#### 4.4 Vorzeichenmatrizen mit rein imaginären Eigenwerten

In diesem Abschnitt wird eine Bedingung vorgestellt, mit der untersucht werden kann, ob eine quadratische Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  einen rein imaginären Eigenwert erlaubt. Zusätzlich lässt sich damit der komplexe Vorzeichenvektor bestimmen, in dem sich ein zugehöriger Eigenvektor befindet.

**Definition 4.9 (Vorzeichen-Eigenvektor):** Ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D} \neq \mathbb{0}$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Vorzeichen-Eigenvektor von einer Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$ , wenn es eine Matrix  $A \in \mathcal{A}$ , einen Vektor  $q \in \mathfrak{D}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  gibt, sodass  $q^T A = \lambda q^T$  gilt. Ein Vorzeichen-Eigenvektor  $\mathfrak{D}$  von einer Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  wird

- in den ersten Quadranten verdreht, wenn  $\Re(\lambda) > 0$  und  $\Im(\lambda) > 0$  gilt,
- um 90 Grad verdreht, wenn  $\Re(\lambda) = 0$  und  $\Im(\lambda) > 0$  gilt und
- in den dritten Quadranten verdreht, wenn  $\Re(\lambda) < 0$  und  $\Im(\lambda) < 0$  gilt.

Mit dem folgenden Satz lässt sich bestimmen, ob ein komplexer Vorzeichenvektor ein Vorzeichen-Eigenvektor von einer quadratischen Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  ist, der um 90 Grad verdreht wird.

**Satz 4.10 :** Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ . Die Vorzeichenvektoren  $(^k\mathcal{D}, ^k\mathcal{P}) = V(\mathfrak{D}, k)$  bezeichnen die charakteristischen Vorzeichenmuster und  $Z$  ist die Menge aller  $k \in \{1, \dots, n\}$ , welche in  $\mathfrak{D}$  von Null verschiedenen sind. Die folgenden Punkte sind äquivalent.

- (i)  $\mathfrak{D}$  ist ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  und  $\mathfrak{D}$  wird um 90 Grad verdreht.
- (ii) Für jedes  $k \in Z$  gilt  $-^k\mathcal{P}^T \subseteq ^k\mathcal{D}^T \mathcal{A}$  und  $^k\mathcal{D}^T \subseteq ^k\mathcal{P}^T \mathcal{A}$ .
- (iii) Für jedes  $q \in \mathfrak{D}$  und jedes  $\lambda_I > 0$  gibt es ein  $A \in \mathcal{A}$ , sodass  $q^T A = j\lambda_I q^T$  gilt.

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Da  $\mathfrak{D}$  um 90 Grad verdreht wird, gibt es nach Definition 4.9 ein  $A' \in \mathcal{A}$ , ein  $q \in \mathfrak{D}$  und ein  $\lambda_I \in +$ , sodass  $q^T A' = j\lambda_I q^T$  gilt. Wir definieren  $^k q = q/q_k$  für jedes  $k \in Z$ , sodass  $\Re(^k q) = ^k d \in ^k \mathcal{D}$  und  $\Im(^k q) = ^k p \in ^k \mathcal{P}$  gilt. Mit  $A'/\lambda_I =: A \in \mathcal{A}$  gilt aufgrund der Annahme  $q^T A = jq^T$  bzw.  $^k q^T A = j^k q^T$  für alle  $k \in Z$ . Daraus folgt, dass  $^k d^T A + j^k p^T A = -^k p^T + j^k d^T$  bzw.  $-^k p^T = ^k d^T A$  und  $^k d^T = ^k p^T A$  gilt. (ii) ist daher erfüllt.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Wir definieren die Mengen  $\hat{Z} = \{1, \dots, n\}$  und  $\bar{Z} = \hat{Z} \setminus Z$  und wir wählen ein beliebiges  $q \in \mathfrak{D}$ , wobei die Vektoren  $r \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi \in \mathbb{R}^n$  jeweils die Beträge und die

Argumente des Vektors  $q$  enthalten. Für jedes  $i \in Z$  definieren wir den Vektor  ${}^i q = q/q_i$ , d.h.  ${}^i q_k = \frac{r_k}{r_i} \cos(\varphi_k - \varphi_i) + j \frac{r_k}{r_i} \sin(\varphi_k - \varphi_i)$  beschreibt das  $k$ -te Element von  ${}^i q$ .

Wir fixieren ein  $s \in \hat{Z}$  und der Vorzeichenvektor  $\mathcal{X}$  bezeichnet die Spalte  $s$  von  $\mathcal{A}$ , d.h.  $\mathcal{X}_k := \mathcal{A}_{k,s}$  für alle  $k \in \hat{Z}$ . In den Schritten 1)-4) des Beweises wird der Fall  $s \in Z$  und im Schritt 5) wird der Fall  $s \in \bar{Z}$  betrachtet.

0) Aufgrund der Annahme in (ii) gilt für alle  $i \in Z$

$${}^i \mathcal{P}_s \subseteq \sum_{l \in Z} {}^i \mathcal{D}_l \mathcal{X}_l, \quad (4.18a)$$

$${}^i \mathcal{D}_s \subseteq \sum_{l \in Z} {}^i \mathcal{P}_l \mathcal{X}_l \quad (4.18b)$$

und im Folgenden wird für  $q$  und ein beliebiges  $\lambda_I \in +$ , ein  $x \in \mathcal{X}$  derart gewählt, sodass

$$-\lambda_I r_s \sin(\varphi_s - \varphi_i) = \sum_{l=1}^n r_l \cos(\varphi_l - \varphi_i) x_l, \quad (4.19a)$$

$$\lambda_I r_s \cos(\varphi_s - \varphi_i) = \sum_{l=1}^n r_l \sin(\varphi_l - \varphi_i) x_l \quad (4.19b)$$

für ein  $i \in Z$  gilt. Dabei werden für  $a, b, c \in Z$  die folgenden Beziehungen verwendet

$${}^a \mathcal{P}_c \subseteq {}^a \mathcal{P}_b {}^b \mathcal{D}_c + {}^a \mathcal{D}_b {}^b \mathcal{P}_c, \quad (4.20a)$$

$${}^a \mathcal{D}_c \subseteq {}^a \mathcal{D}_b {}^b \mathcal{D}_c - {}^a \mathcal{P}_b {}^b \mathcal{P}_c, \quad (4.20b)$$

welche sich unmittelbar aus Satz 4.5 ergeben.

1) Zunächst wird der Fall  $s \in Z$  bzw.  ${}^s \mathcal{D}_s = +$  betrachtet. Dann gibt es aufgrund von (4.18b) mit  $i = s$  ein  $v \in Z \setminus \{s\}$ , o. E. d. A. gilt  $v = 1$ , mit  ${}^s \mathcal{P}_1 \mathcal{X}_1 = +$  bzw.

$$\mathcal{X}_1 = {}^s \mathcal{P}_1 \neq \circ. \quad (4.21)$$

2) Wir nehmen zunächst an, dass  ${}^s \mathcal{D}_1 = \circ$  gilt. Dann definieren wir die Mengen  $Z_+ = \{i \in Z | \mathcal{X}_i = {}^s \mathcal{D}_i \neq \circ\}$ ,  $Z_- = \{i \in Z | \mathcal{X}_i = -{}^s \mathcal{D}_i \neq \circ\}$  und  $Z_0 = \{i \in \hat{Z} | \mathcal{X}_i \neq \circ, i \notin Z_+ \cup Z_- \cup \{1\}\}$ . Aufgrund von (4.18a) mit  $i = s$  und  ${}^s \mathcal{P}_s = \circ$  gilt entweder  $Z_+ = Z_- = \emptyset$ , oder  $Z_+ \neq \emptyset \neq Z_-$ . Wir definieren  $x_i = \frac{\epsilon}{|Z_+| r_i \cos(\varphi_i - \varphi_s)}$  für alle  $i \in Z_+$  und  $x_i = \frac{-\epsilon}{|Z_-| r_i \cos(\varphi_i - \varphi_s)}$  für alle  $i \in Z_-$ . Dann gilt

$$\sum_{l=1}^n r_l \cos(\varphi_l - \varphi_s) x_l = \sum_{l \in Z_+ \cup Z_-} r_l \cos(\varphi_l - \varphi_s) x_l = \epsilon - \epsilon = 0 \quad (4.22)$$

für jedes  $\epsilon > 0$ . Zusätzlich wählen wir  $x_i = \pm \epsilon$  abhängig vom Vorzeichen  $\mathcal{X}_i$  für alle  $i \in Z_0$ . Damit hängen die von Null verschiedenen Einträge  $x_i$ ,  $i \neq 1$  linear von  $\epsilon$  ab und  $\epsilon > 0$

kann hinreichend klein gewählt werden, sodass

$$\zeta = \sum_{l \in Z \setminus \{v\}} \frac{r_l \sin(\varphi_l - \varphi_s)}{\lambda_I r_s} x_l < 1$$

erfüllt ist. Wir definieren  $x_1 = \frac{\lambda_I r_s}{r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_s)} (1 - \zeta) \in {}^s \mathcal{P}_1 = \mathcal{X}_1$ . Dann gilt  $\sum_{l=1}^n r_l \sin(\varphi_l - \varphi_s) x_l = \lambda_I r_s$  und zusammen mit (4.22) sind beide Gleichungen in (4.19) für  $k = s$  erfüllt. Der Beweis wird in Punkt 6) fortgeführt.

3) Es wird nun angenommen, dass es kein  $v \in Z$  mit  $\mathcal{X}_v = {}^s \mathcal{P}_v \neq \circ$  und  ${}^s \mathcal{D}_v = \circ$  gibt. Im Folgenden wird gezeigt, dass es dann zwei verschiedene  $v, w \in Z$  mit

$$\mathcal{X}_v = {}^w \mathcal{P}_v {}^w \mathcal{D}_s \neq \circ \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_w = {}^v \mathcal{P}_w {}^v \mathcal{D}_s \neq \circ \quad (4.23)$$

gibt. Wir definieren  $k := 1$ .

3.1) Es gilt

$${}^s \mathcal{P}_i = \mathcal{X}_i \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k\} \text{ und} \quad (4.24a)$$

$${}^i \mathcal{D}_s \mathcal{X}_i = {}^k \mathcal{D}_s \mathcal{X}_k \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k\}. \quad (4.24b)$$

Für  $k = 1$  folgt die Gleichung (4.24a) aus (4.21) und (4.24b) aus den Annahmen in 3); und für  $k > 1$  ergibt sich (4.24a) aus (4.24i) und (4.24b) aus (4.24f). Wenn  $k > 1$  gilt, dann ergibt sich zusätzlich aus (4.24k)

$${}^k \mathcal{D}_s = -{}^k \mathcal{P}_i \mathcal{X}_i \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k-1\}. \quad (4.24c)$$

3.2) Aufgrund der Annahme in (4.18b) mit  $i = k$  zusammen mit (4.24c) und  ${}^k \mathcal{P}_k = \circ$ , gibt es ein  $v \in Z \setminus \{1, \dots, k\}$ , o.E.d.A. gilt  $v = k+1$ , sodass

$${}^k \mathcal{D}_s = {}^k \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{X}_{k+1} \neq \circ \quad (4.24d)$$

gilt.

3.3) Wir nehmen zunächst an, dass  ${}^{k+1} \mathcal{D}_s = \circ$  gilt. Dann gilt  ${}^k \mathcal{D}_s = -{}^k \mathcal{P}_{k+1} {}^{k+1} \mathcal{P}_s$  aufgrund von (4.20b) mit  $a = k$ ,  $b = k+1$  und  $c = s$ . Zusammen mit (4.24d) gilt daher  $\mathcal{X}_{k+1} = {}^s \mathcal{P}_{k+1}$ , sodass die Annahme in 3) nicht erfüllt ist und  ${}^{k+1} \mathcal{D}_s \neq \circ$  gelten muss.

3.4) Wir nehmen nun an, dass

$${}^{k+1} \mathcal{D}_s = -{}^{k+1} \mathcal{P}_k \mathcal{X}_k \neq \circ \quad (4.24e)$$

gilt. Zusammen mit (4.24d) gilt  ${}^k\mathcal{D}_s\mathcal{X}_k = {}^{k+1}\mathcal{D}_s\mathcal{X}_{k+1}$  und aus (4.24b) ergibt sich

$${}^i\mathcal{D}_s\mathcal{X}_i = {}^{k+1}\mathcal{D}_s\mathcal{X}_{k+1} \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k+1\}. \quad (4.24f)$$

Aus (4.20a) mit  $a = s$ ,  $b = k+1$  und  $c = k$  zusammen mit (4.24e) und (4.24a) mit  $i = k$  ergibt sich  $\mathcal{X}_k \subseteq {}^s\mathcal{P}_{k+1} {}^{k+1}\mathcal{D}_k - \mathcal{X}_k$ . Daher gilt

$${}^s\mathcal{P}_{k+1} = {}^{k+1}\mathcal{D}_k\mathcal{X}_k. \quad (4.24g)$$

Aus (4.20b) mit  $a = s$ ,  $b = k+1$  und  $c = k$  zusammen mit (4.24g) und (4.24e) ergibt sich

${}^s\mathcal{D}_k = {}^s\mathcal{D}_{k+1} {}^{k+1}\mathcal{D}_k$ . Mithilfe von (4.24f) für  $i = k$  folgt daher

$$\mathcal{X}_{k+1} = {}^{k+1}\mathcal{D}_k\mathcal{X}_k. \quad (4.24h)$$

Zusammen mit (4.24g) und (4.24a) ergibt sich

$${}^s\mathcal{P}_i = \mathcal{X}_i \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k+1\}. \quad (4.24i)$$

Aus (4.20b) mit  $a = k+1$ ,  $b = s$  und  $c = i$  für  $i \in \{1, \dots, k+1\}$  zusammen mit (4.24f) und (4.24i) ergibt sich

$${}^{k+1}\mathcal{D}_i = \mathcal{X}_{k+1}\mathcal{X}_i \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k+1\}. \quad (4.24j)$$

Wenn  $k > 1$ , dann folgt aus (4.20a) mit  $a = k$ ,  $b = k+1$  und  $c = i$  für  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  zusammen mit (4.24j), (4.24d) und (4.24c),  ${}^{-k}\mathcal{D}_s\mathcal{X}_i \subseteq {}^k\mathcal{D}_s\mathcal{X}_i + {}^k\mathcal{D}_{k+1} {}^{k+1}\mathcal{P}_i$ . Daher gilt  ${}^k\mathcal{D}_s\mathcal{X}_i = {}^{-k}\mathcal{D}_{k+1} {}^{k+1}\mathcal{P}_i$ . Zusammen mit (4.24h) und (4.24f) für  $i = k$  ergibt sich  ${}^{k+1}\mathcal{D}_s = {}^{-k+1}\mathcal{P}_i\mathcal{X}_i$  für  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Mit (4.24e) folgt schließlich

$${}^{k+1}\mathcal{D}_s = {}^{-k+1}\mathcal{P}_i\mathcal{X}_i \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k\}. \quad (4.24k)$$

Der Beweis wird in Punkt 3.1) mit  $k+1$  fortgeführt.

3.5) Abschließend nehmen wir an, dass  ${}^{k+1}\mathcal{D}_s = {}^{k+1}\mathcal{P}_k\mathcal{X}_k$  gilt. Dann sind zusammen mit (4.24d) die beiden Beziehungen in (4.23) für  $v = k$  und  $w = k+1$  erfüllt.

4) Wir wählen zwei  $v, w \in Z$  für die (4.23) erfüllt ist und für  $i \in \hat{Z} \setminus \{v, w\}$  definieren wir  $x_i \in \{-\epsilon, 0, \epsilon\}$  abhängig vom Vorzeichen  $\mathcal{X}_i$ . Dabei wählen wir  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, sodass

$$\zeta_1 = \sum_{l \in Z \setminus \{v, w\}} \frac{r_l \sin(\varphi_l - \varphi_w)}{\lambda_I r_s \cos(\varphi_s - \varphi_w)} x_l < 1 \quad \text{und} \quad \zeta_2 = \sum_{l \in Z \setminus \{v, w\}} \frac{r_l \sin(\varphi_l - \varphi_v)}{\lambda_I r_s \cos(\varphi_s - \varphi_v)} x_l < 1$$

erfüllt ist. Aufgrund von (4.23) gilt mit

$$x_v = \frac{\lambda_I r_s \cos(\varphi_s - \varphi_w)}{r_v \sin(\varphi_v - \varphi_w)} (1 - \zeta_1) \quad \text{und} \quad x_w = \frac{\lambda_I r_s \cos(\varphi_s - \varphi_v)}{r_w \sin(\varphi_w - \varphi_v)} (1 - \zeta_2),$$

$x \in \mathcal{X}$ . Zudem ist

$$\sum_{l \in Z} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_v) x_l = \lambda_I r_s \cos(\varphi_s - \varphi_v) \quad \text{und} \quad (4.25a)$$

$$\sum_{l \in Z} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_w) x_l = \lambda_I r_s \cos(\varphi_s - \varphi_w) \quad (4.25b)$$

erfüllt. Wird (4.25b) von (4.25a) multipliziert mit  $\cos(\varphi_v - \varphi_w)$  subtrahiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{l \in Z} r_l (\sin(\varphi_l - \varphi_v) \cos(\varphi_v - \varphi_w) - \sin(\varphi_l - \varphi_w)) x_l \\ = \lambda_I r_s (\cos(\varphi_s - \varphi_v) \cos(\varphi_v - \varphi_w) - \cos(\varphi_s - \varphi_w)). \end{aligned}$$

Mithilfe von (2.4) und  $\sin(\varphi_w - \varphi_v) \neq 0$  gilt

$$\sum_{l \in Z} r_l \cos(\varphi_l - \varphi_w) x_l = -\lambda_I r_s \sin(\varphi_s - \varphi_w). \quad (4.25c)$$

Aus (4.25b) und (4.25c) folgt, dass die beiden Gleichungen in (4.19) für  $k = w$  erfüllt sind. Der Beweis wird in Schritt 6) fortgeführt.

5) Es wird nun der Fall  $s \in \bar{Z}$  betrachtet. Dann gilt  $\circ \subseteq {}^k \mathcal{D}^T \mathcal{X}$  und  $\circ \subseteq {}^k \mathcal{P}^T \mathcal{X}$  für jedes  $k \in Z$ . Aus Satz 4.8 folgt, dass es für jedes  $q \in \mathfrak{D}$  ein  $x \in \mathcal{X}$  mit  $q^T x = 0$  gibt. Die beiden Gleichungen in (4.19) sind für jedes  $i \in Z$  erfüllt.

6) Die beiden Gleichungen (4.19) sind für ein  $i \in Z$  erfüllt, sodass  ${}^i q^T x = j \lambda_I {}^i q^T$  bzw.  $q^T x = j \lambda_I q^T$  gilt. Wir definieren  $A_{i,s} := x_i$  für jedes  $i \in \hat{Z}$ , sodass

$$\sum_{l=1}^n q_l A_{l,s} = j \lambda_I q_s \quad (4.26)$$

gilt. Da (4.26) für jedes  $s \in \hat{Z}$  erfüllt ist, gilt  $q^T A = j \lambda_I q^T$  und (iii) ist erfüllt.

Die Beziehung (iii)  $\rightarrow$  (i) ist offensichtlich.  $\square$

Die Eigenschaft (iii) in Satz 4.10 ist bemerkenswert, da es für jeden Wert  $\lambda = j \lambda_I$  mit  $\lambda_I > 0$  und jedes  $q \in \mathfrak{D}$  eine Matrix  $A \in \mathcal{A}$  gibt, sodass  $q$  ein Eigenvektor von  $A$  bezüglich  $\lambda$  ist, wenn ein  $\tilde{q} \in \mathfrak{D}$  ein Eigenvektor von einem  $\tilde{A} \in \mathcal{A}$  bezüglich  $\tilde{\lambda} = j \tilde{\lambda}_I$  mit  $\tilde{\lambda}_I > 0$  ist. Mit der Bedingung (ii) lässt sich leicht überprüfen, ob es einen solchen Eigenvektor  $q \in \mathfrak{D}$  für gegebene  $\mathcal{A}$  und  $\mathfrak{D}$  gibt.

Mithilfe von Satz 4.10 lassen sich Vorzeichenmatrizen charakterisieren, welche einen reinen imaginären Eigenwert erlauben.

**Satz 4.11 :** Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Die folgenden Punkte sind äquivalent.

- (i)  $\mathcal{A}$  erlaubt einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) = 0$  und  $\Im(\lambda) \neq 0$ .
- (ii) Es gibt einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ , der Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist und um 90 Grad verdreht wird.
- (iii) Es gibt einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ , sodass für jedes von Null verschiedene  $k$  in  $\mathfrak{D}$ ,  ${}^k\mathcal{P}^T \subseteq {}^k\mathcal{D}^T \mathcal{A}$  und  ${}^k\mathcal{D}^T \subseteq {}^k\mathcal{P}^T \mathcal{A}$  mit  $({}^k\mathcal{D}, {}^k\mathcal{P}) = V(\mathfrak{D}, k)$  gilt.

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii) :  $\mathcal{A}$  erlaubt einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) = 0$  und  $\Im(\lambda) \neq 0$ , sodass es ein  $A \in \mathcal{A}$  mit dem Eigenwert  $\lambda = j\lambda_I$  mit  $\lambda_I \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt. Aufgrund von Satz 2.1 gibt o.E.d.A.  $\lambda_I > 0$ . Dann gibt es ein  $q \in \mathbb{C}^n$  mit  $q \neq 0$ , sodass  $q^T A = j\lambda_I q^T$  gilt und  $q$  ist ein Element von einem komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ , welcher Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist und um 90 Grad verdreht wird. (ii)  $\implies$  (i) ist offensichtlich und die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz 4.10.  $\square$

**Beispiel 4.5 (Fortsetzung von Beispiel 4.4):** Gegeben ist der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  aus Beispiel 4.4 und die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{3 \times 3}$  mit

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & \circ & + \\ - & + & - \\ + & + & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \circ & + & \circ \\ - & \circ & - \\ \circ & \circ & - \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Vorzeichenmuster von  $\mathfrak{D}$  sind

$${}^1\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ \circ \\ + \end{pmatrix}, \quad {}^1\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \circ \\ - \\ + \end{pmatrix}, \quad {}^2\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \circ \\ + \\ - \end{pmatrix}, \quad {}^2\mathcal{P} = \begin{pmatrix} + \\ \circ \\ + \end{pmatrix}, \quad {}^3\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}^3\mathcal{P} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ \circ \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} {}^{-1}\mathcal{P}^T &= {}^1\mathcal{D}^T \mathcal{A} = (\circ, +, -), & {}^1\mathcal{D}^T &\subset {}^1\mathcal{P}^T \mathcal{A} = (+, \circ, \star), \\ {}^{-2}\mathcal{P}^T &\subset {}^2\mathcal{D}^T \mathcal{A} = (-, \circ, \star), & {}^2\mathcal{D}^T &= {}^2\mathcal{P}^T \mathcal{A} = (\circ, +, -), \\ {}^{-3}\mathcal{P}^T &\subset {}^3\mathcal{D}^T \mathcal{A} = (+, +, \star) & \text{und} & {}^3\mathcal{D}^T = {}^3\mathcal{P}^T \mathcal{A} = (+, -, +), \end{aligned}$$

sodass die Bedingung (ii) von Satz 4.10 erfüllt ist.  $\mathfrak{D}$  ist daher ein komplexer Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ , der um 90 Grad verdreht wird. Für jedes  $q = (r_1 e^{j\varphi_1}, r_2 e^{j\varphi_2}, r_3 e^{j\varphi_3})^T \in \mathfrak{D}$  gilt  $r_1, r_2, r_3 > 0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2} < \varphi_3 - \varphi_2 < \pi$ .

Für ein  $\lambda_I \in +$  und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_2}{r_1} \lambda_I & 0 \\ -\frac{r_1}{r_2} \lambda_I & 0 & \frac{r_3}{r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \lambda_I \\ 0 & 0 & \frac{\cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \lambda_I \end{pmatrix}$$

gilt beispielsweise  $A \in \mathcal{A}$  und  $q^T A = j\lambda_I q^T$ . Für  $q = (5, -3j, 2 + 2j)^T \in \mathfrak{D}$ ,  $\lambda_I = 15$  und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -25 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \quad \text{gilt z.B.} \quad q^T A = j\lambda_I q^T.$$

## 4.5 Vorzeichenmatrizen mit komplexen Eigenwerten

In diesem Abschnitt werden Bedingungen vorgestellt, mit denen jeweils untersucht werden kann, ob eine quadratische Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  komplexe Eigenwerte mit positivem oder mit negativem Realteil erlaubt. Außerdem lassen sich mit diesen Bedingungen die komplexen Vorzeichenvektoren bestimmen, die Elemente des zugehörigen Eigenraums enthalten. Dafür werden Drehungen benötigt, welche wie folgt definiert sind.

**Definition 4.12 (Drehung von einem komplexen Vorzeichenvektor):** Gegeben ist ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ . Die Menge aller von Null verschiedenen  $k \in \{1, \dots, n\}$  in  $\mathfrak{D}$  wird mit  $Z$  bezeichnet. Eine Funktion  $\Psi_{\mathfrak{D}}: Z \rightarrow \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n$ ,  $k \mapsto ({}^k\mathcal{V}, {}^k\mathcal{W})$  ist eine Drehung von  $\mathfrak{D}$ , wenn es ein einen Vektor  $q \in \mathfrak{D}$  und eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda), \Im(\lambda) \neq 0$  gibt, sodass für jedes  $k \in Z$ ,

- $\Re(\lambda \cdot q/q_k) \in {}^k\mathcal{V}$  und
- $\Im(\lambda \cdot q/q_k) \in {}^k\mathcal{W}$  gilt.

Eine Drehung  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  von einem komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  beschreibt das komplexe Vorzeichenmuster von dem Ergebnis der Multiplikation von einer komplexen Zahl  $\lambda$  mit einem Vektor  $q \in \mathfrak{D}$ . Für jeden komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D} \neq \circ$  gibt es eine Vielzahl von Drehungen, da aber nach Satz 4.4 alle komplexen Vorzeichenvektoren eines komplexen Vorzeichenvektors mit einer Vorzeichen-Rotationsmatrix  $\mathcal{R}$  und den Vorzeichenvektoren von  $V^*$  beschrieben werden können, ist die Anzahl aller möglichen Drehungen von einem komplexen Vorzeichenvektor endlich. Drehungen werden in Abschnitt 5.2 weiter untersucht.

Mit dem folgenden Satz kann untersucht werden, ob ein komplexer Vorzeichenvektor ein Vorzeichen-Eigenvektor ist, der in den ersten Quadranten verdreht wird.

**Satz 4.13 :** *Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ . Die folgenden Punkte sind äquivalent.*

- (i)  *$\mathfrak{D}$  ist ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  und  $\mathfrak{D}$  wird in den ersten Quadranten verdreht.*
  - (ii) *Für jedes von Null verschiedene  $k \in \{1, \dots, n\}$  in  $\mathfrak{D}$  gilt*
    - (a)  ${}^k\mathcal{V}^T \subseteq {}^k\mathcal{D}^T \mathcal{A}$ ,
    - (b)  ${}^k\mathcal{W}^T \subseteq {}^k\mathcal{P}^T \mathcal{A}$ ,
    - (c)  ${}^k\mathcal{V}_k = {}^k\mathcal{W}_k = +$
- mit  $({}^k\mathcal{D}, {}^k\mathcal{P}) = V(\mathfrak{D}, k)$  und  $({}^k\mathcal{V}, {}^k\mathcal{W}) = \Psi_{\mathfrak{D}}(k)$  ist eine Drehung von  $\mathfrak{D}$ .*

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii) : Die Menge  $Z$  bezeichnet im Folgenden die Menge aller von Null verschiedenen  $k \in \{1, \dots, n\}$  in  $\mathfrak{D}$ . Da  $\mathfrak{D}$  ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist und  $\mathfrak{D}$  in den ersten Quadranten verdreht wird, gibt es nach Definition 4.9 ein  $A \in \mathcal{A}$ , ein  $q \in \mathfrak{D}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) > 0$  und  $\Im(\lambda) > 0$  und es gilt  $q^T A = \lambda q^T$ . Wir definieren  ${}^k q := q/q_k$  für jedes  $k \in Z$ , sodass  $\Re({}^k q) = {}^k d \in {}^k \mathcal{D}$  und  $\Im({}^k q) = {}^k p \in {}^k \mathcal{P}$  gilt.

Aufgrund der Annahme ist

$${}^k q^T A = {}^k d^T A + j {}^k p^T A = \lambda q^T / q_k =: {}^k z^T \quad \text{für jedes } k \in Z \quad (4.27)$$

erfüllt und wir definieren die Drehung  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  jeweils nach den Vorzeichen von  $\Re({}^k z) = \Re(\lambda q/q_k)$  und  $\Im({}^k z) = \Im(\lambda q/q_k)$  für jedes  $k \in Z$ .

Für zwei  $i, k \in Z$  gilt  ${}^k z_i = \lambda q_i/q_k$  und im Besonderen  ${}^k z_k = \lambda$ . Aufgrund der Annahme gilt  $\Re(\lambda) = \Re({}^k z_k) > 0$  und  $\Im(\lambda) = \Im({}^k z_k) > 0$ , sodass  ${}^k \mathcal{V}_k = {}^k \mathcal{W}_k = +$  bzw. (ii.c) erfüllt ist. Aufgrund von (4.27) gilt  $\Re({}^k z) = {}^k d^T A$  und  $\Im({}^k z) = {}^k p^T A$ , sodass  ${}^k \mathcal{V}^T \subseteq {}^k \mathcal{D}^T \mathcal{A}$  und  ${}^k \mathcal{W}^T \subseteq {}^k \mathcal{P}^T \mathcal{A}$  bzw. (ii.a) und (ii.b) erfüllt sind.

(ii)  $\implies$  (i) : Wir definieren die Mengen  $\hat{Z} := \{1, \dots, n\}$  und  $\bar{Z} := \hat{Z} \setminus Z$ . Aufgrund der Annahme gibt es ein  $q \in \mathfrak{D}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sodass für jedes  $k \in Z$ ,  $\Re(\lambda \cdot q/q_k) \in {}^k \mathcal{V}$  und  $\Im(\lambda \cdot q/q_k) \in {}^k \mathcal{W}$  gilt. Die Vektoren  $r \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen dabei jeweils die Beträge und die Argumente der Elemente von  $q$  und es gilt  $\lambda = \lambda_0 e^{j\varphi_\lambda}$ . Für jedes  $i \in Z$  definieren wir den Vektor  ${}^i q := q/q_i$ , d.h.  ${}^i q_k = \frac{r_k}{r_i} \cos(\varphi_k - \varphi_i) + j \frac{r_k}{r_i} \sin(\varphi_k - \varphi_i)$  beschreibt das  $k$ -te Element von  ${}^i q$ .

Wir fixieren ein  $s \in \hat{Z}$  und der Vorzeichenvektor  $\mathcal{X}$  bezeichnet im Folgenden die Spalte  $s$  von  $\mathcal{A}$ , d.h.  $\mathcal{X}_k := \mathcal{A}_{k,s}$  für alle  $k \in \hat{Z}$ . In den Schritten 1)-4) des Beweises wird der Fall

$s \in Z$  und anschließend im Schritt 5) wird der Fall  $s \in \overline{Z}$  untersucht.

0) Aufgrund der Annahmen in (ii.a) und (ii.b) gilt für jedes  $i \in Z$

$${}^i\mathcal{V}_s \subseteq \sum_{l \in Z} {}^i\mathcal{D}_l \mathcal{X}_l \quad \text{und} \quad (4.28a)$$

$${}^i\mathcal{W}_s \subseteq \sum_{l \in Z} {}^i\mathcal{P}_l \mathcal{X}_l \quad (4.28b)$$

und aus (ii.c) folgt  ${}^i\mathcal{V}_i = {}^i\mathcal{W}_i = +$ . Wir werden im Folgenden einen Vektor  $x \in \mathcal{X}$  wählen, sodass

$$\lambda_0 \cdot r_s \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_i) = \sum_{l=1}^n r_l \cos(\varphi_l - \varphi_i) x_l \quad \text{und} \quad (4.29a)$$

$$\lambda_0 \cdot r_s \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_i) = \sum_{l=1}^n r_l \sin(\varphi_l - \varphi_i) x_l \quad (4.29b)$$

jeweils für ein  $i \in Z$  erfüllt ist. Dabei werden für drei  $a, b, c \in Z$  die folgenden Beziehungen verwendet

$${}^a\mathcal{P}_c \subseteq {}^a\mathcal{P}_b {}^b\mathcal{D}_c + {}^a\mathcal{D}_b {}^b\mathcal{P}_c, \quad (4.30a)$$

$${}^a\mathcal{D}_c \subseteq {}^a\mathcal{D}_b {}^b\mathcal{D}_c - {}^a\mathcal{P}_b {}^b\mathcal{P}_c, \quad (4.30b)$$

$${}^a\mathcal{W}_s \subseteq {}^a\mathcal{P}_b {}^b\mathcal{V}_s + {}^a\mathcal{D}_b {}^b\mathcal{W}_s, \quad (4.30c)$$

$${}^a\mathcal{V}_s \subseteq {}^a\mathcal{D}_b {}^b\mathcal{V}_s - {}^a\mathcal{P}_b {}^b\mathcal{W}_s, \quad (4.30d)$$

$${}^a\mathcal{P}_b \subseteq {}^a\mathcal{W}_s {}^b\mathcal{V}_s - {}^a\mathcal{V}_s {}^b\mathcal{W}_s, \quad (4.30e)$$

$${}^a\mathcal{D}_b \subseteq {}^a\mathcal{V}_s {}^b\mathcal{V}_s + {}^a\mathcal{W}_s {}^b\mathcal{W}_s. \quad (4.30f)$$

Die Gleichungen (4.30a) und (4.30b) folgen unmittelbar aus Satz 4.5. Da  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  eine Drehung von  $\mathfrak{D}$  ist, gilt für jedes  $a \in Z$ ,  $\Re({}^a z_s) = \lambda_0 r_s / r_a \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) \in {}^a \mathcal{V}_s$  und  $\Im({}^a z_s) = \lambda_0 r_s / r_a \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) \in {}^a \mathcal{W}_s$ . Aufgrund von (2.4) ergibt sich für ein  $b \in Z$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) &= \sin((\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b) + (\varphi_b - \varphi_a)) \\ &= \sin(\varphi_b - \varphi_a) \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b) + \cos(\varphi_b - \varphi_a) \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b) \quad \text{und} \\ \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) &= \cos((\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b) + (\varphi_b - \varphi_a)) \\ &= \cos(\varphi_b - \varphi_a) \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b) - \sin(\varphi_b - \varphi_a) \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b). \end{aligned}$$

Die Beziehungen (4.30c) und (4.30d) sind daher offensichtlich. Analog gilt

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_b - \varphi_a) &= \sin((\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) - (\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b)) \\ &= \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b) - \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b), \\ \cos(\varphi_b - \varphi_a) &= \cos((\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) - (\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b)) \\ &= \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b) + \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_a) \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_b), \end{aligned}$$

sodass die Beziehungen (4.30e) und (4.30f) ebenfalls erfüllt sind.

1) Zunächst wird der Fall  $s \in Z$  bzw.  ${}^s\mathcal{D}_s = +$  betrachtet. Aufgrund von (4.28a) mit  $i = s$  gilt  $+ \subseteq \sum_{l \in Z} {}^s\mathcal{P}_l \mathcal{X}_l$  und es gibt ein  $v \in Z \setminus \{s\}$ , o.E.d.A.  $v = 1$ , mit

$${}^s\mathcal{P}_1 = \mathcal{X}_1 \neq \circ. \quad (4.31)$$

2) Wir nehmen zunächst an, dass  ${}^1\mathcal{W}_s = \circ$  und somit  $\sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_1) = 0$  gilt. Aus (4.30e) mit  $a = s$  und  $b = 1$  folgt  ${}^s\mathcal{P}_1 = {}^1\mathcal{V}_s$  bzw.

$$\mathcal{X}_1 = {}^1\mathcal{V}_s. \quad (4.32a)$$

Wir definieren die Mengen  $Z_+ = \{i \in Z | \mathcal{X}_i = {}^1\mathcal{P}_i \neq \circ\}$ ,  $Z_- = \{i \in Z | \mathcal{X}_i = {}^{-1}\mathcal{P}_i \neq \circ\}$  und  $Z_0 = \left\{i \in \hat{Z} | \mathcal{X}_i \neq \circ, i \notin Z_+ \cup Z_- \cup \{1\}\right\}$ . Aufgrund von (4.28a) mit  $i = 1$  gilt  ${}^1\mathcal{W}_s = \circ \subseteq \sum_{l \in Z} {}^1\mathcal{P}_l \mathcal{X}_l$ , sodass entweder  $Z_+ = Z_- = \emptyset$ , oder  $Z_+ \neq \emptyset \neq Z_-$  gilt. Wir definieren  $x_i := \frac{\epsilon}{|Z_+|r_i \sin(\varphi_i - \varphi_1)}$  für alle  $i \in Z_+$  und  $x_i := \frac{-\epsilon}{|Z_-|r_i \sin(\varphi_i - \varphi_1)}$  für alle  $i \in Z_-$ . Damit gilt für jedes  $\epsilon$

$$\sum_{l=1}^n r_l \sin(\varphi_l - \varphi_1) x_l = \epsilon - \epsilon = 0 = \lambda_0 r_s \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_1). \quad (4.32b)$$

Abhängig von dem Vorzeichen  $\mathcal{X}_i$  definieren wir zusätzlich  $x_i := \pm \epsilon$  für jedes  $i \in Z_0$ . Damit hängen die von Null verschiedenen Einträge  $x_i$ ,  $i \neq 1$  linear von  $\epsilon$  ab und  $\epsilon$  kann hinreichend klein gewählt werden, sodass

$$\zeta = \sum_{l \in Z \setminus \{1\}} \frac{r_l \cos(\varphi_l - \varphi_1)}{\lambda_0 r_s \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_1)} x_l < 1$$

gilt. Wir definieren  $x_1 := \frac{\lambda_0 r_s}{r_1} \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_1)(1 - \zeta)$ , sodass  $x_1 \in {}^1\mathcal{V}_s = \mathcal{X}_1$  gilt und

$$\sum_{l=1}^n r_l \cos(\varphi_l - \varphi_1) x_l = \lambda_0 r_s \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_1) \quad (4.32c)$$

erfüllt ist. Aufgrund von (4.32b) und (4.32c) sind die beiden Gleichungen in (4.29) für  $i = 1$  erfüllt und der Beweis wird in Schritt 6) fortgeführt.

3) Wir nehmen nun an, dass es kein  $k \in Z$  mit  $\mathcal{X}_k = {}^s\mathcal{P}_k \neq \circ$  und  ${}^k\mathcal{W}_s = \circ$  gibt und wir werden im Folgenden mithilfe von einer Rekursion zeigen, dass es zwei verschiedene  $v, w \in Z$  gibt für die dann

$$\mathcal{X}_v = {}^w\mathcal{P}_v {}^w\mathcal{W}_s \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_w = {}^v\mathcal{P}_w {}^v\mathcal{W}_s \quad (4.33)$$

gilt. Wir definieren  $k := 1$ .

3.1) Aufgrund von (4.31) mit der Annahme in 3) sowie (4.34f) gilt

$${}^i\mathcal{W}_s \mathcal{X}_i = {}^k\mathcal{W}_s \mathcal{X}_k \neq \circ \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, k\} \quad (4.34a)$$

und wenn  $k > 1$  dann folgt aus (4.34m) (oder (4.34e), wenn  $k = 2$ ) zusätzlich

$${}^k\mathcal{W}_s = -{}^k\mathcal{P}_i \mathcal{X}_i \neq \circ \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, k-1\}. \quad (4.34b)$$

3.2) Aus (4.28a) mit  $i = k$  folgt mit (4.34a), (4.34b) und  ${}^k\mathcal{P}_k = \circ$ , dass es ein  $v \in Z$  gibt, o.E.d.A.  $v = k+1$ , mit

$${}^k\mathcal{W}_s = {}^k\mathcal{P}_{k+1} \mathcal{X}_{k+1} \neq \circ. \quad (4.34c)$$

3.3) Wir nehmen zunächst an, dass  ${}^{k+1}\mathcal{W}_s = \circ$  gilt. Dann folgt  ${}^s\mathcal{P}_{k+1} = {}^{k+1}\mathcal{V}_s$  aus (4.30e) mit  $a = s$  und  $b = k+1$  sowie  ${}^k\mathcal{W}_s = {}^k\mathcal{P}_{k+1} {}^{k+1}\mathcal{V}_s$  aus (4.30c) mit  $a = k$  und  $b = k+1$ . Aus diesen beiden Beziehungen zusammen mit (4.34c) folgt  $\mathcal{X}_{k+1} = {}^s\mathcal{P}_{k+1}$  und die Annahmen in 3) ist nicht erfüllt. Es gilt daher

$${}^{k+1}\mathcal{W}_s \neq \circ. \quad (4.34d)$$

3.4) Im Folgenden nehmen wir an, dass

$${}^{k+1}\mathcal{W}_s = -{}^{k+1}\mathcal{P}_k \mathcal{X}_k \neq \circ \quad (4.34e)$$

gilt. Aus (4.34e) zusammen mit (4.34c) folgt

$${}^{k+1}\mathcal{W}_s \mathcal{X}_{k+1} = {}^k\mathcal{W}_s \mathcal{X}_k \neq \circ. \quad (4.34f)$$

3.4.0) Wenn  $k = 1$ , dann führen wir den Beweis mit  $k = 2$  in Schritt 3.1) fort. Andernfalls gilt  $k > 1$  und wir zeigen im Folgenden, dass

$${}^{k+1}\mathcal{W}_s = -{}^{k+1}\mathcal{P}_i \mathcal{X}_i \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k-1\} \quad (4.34g)$$

erfüllt ist.

3.4.1) Zunächst betrachten wir den Fall  ${}^i\mathcal{V}_s = \mathcal{X}_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Aus (4.30c) mit  $a = k$  und  $b = i$  und (4.34b) ergibt sich  ${}^k\mathcal{W}_s \subseteq -{}^k\mathcal{W}_s + {}^k\mathcal{D}_i {}^i\mathcal{W}_s$ . Daher gilt  ${}^k\mathcal{W}_s = {}^k\mathcal{D}_i {}^i\mathcal{W}_s$  und aus (4.34a) folgt

$$\mathcal{X}_k = {}^k\mathcal{D}_i \mathcal{X}_i. \quad (4.34h)$$

Aus (4.30d) mit  $a = k$  und  $b = i$  und (4.34h) folgt  ${}^k\mathcal{V}_s \subseteq \mathcal{X}_k - {}^k\mathcal{P}_i {}^i\mathcal{W}_s$ . Zusammen mit (4.34b) und (4.34a) ergibt sich

$${}^k\mathcal{V}_s = \mathcal{X}_k. \quad (4.34i)$$

Aus (4.30c) mit  $a = k + 1$  und  $b = k$ , (4.34i) und (4.34e) ergibt sich  ${}^{k+1}\mathcal{W}_s \subseteq -{}^{k+1}\mathcal{W}_s + {}^{k+1}\mathcal{D}_k{}^k\mathcal{W}_s$ . Daher gilt  ${}^{k+1}\mathcal{W}_s = {}^{k+1}\mathcal{D}_k{}^k\mathcal{W}_s$  und mit (4.34f) folgt

$$\mathcal{X}_{k+1} = {}^{k+1}\mathcal{D}_k\mathcal{X}_k. \quad (4.34j)$$

Aus (4.30a) mit  $a = k + 1$ ,  $b = k$  und  $c = i$ , (4.34j) und (4.34h) ergibt sich  ${}^{k+1}\mathcal{P}_i \subseteq {}^{k+1}\mathcal{P}_k\mathcal{X}_k\mathcal{X}_i + {}^k\mathcal{P}_i\mathcal{X}_{k+1}\mathcal{X}_k$ . Zusammen mit (4.34e), (4.34b) und (4.34f) gilt schließlich  ${}^{k+1}\mathcal{P}_i = -{}^{k+1}\mathcal{W}_s\mathcal{X}_i$  und Gleichung (4.34g) ist erfüllt.

3.4.2) Im Falle von  ${}^i\mathcal{V}_s = \circ$  lässt sich die Beziehung (4.34g) ähnlich zu 3.4.1) zeigen. Dann ergibt sich Gleichung (4.34h) direkt aus (4.30c) mit (4.34a), und Gleichung (4.34i) aus (4.30d), (4.34b) und (4.34a). Die verbleibenden Schritte zu (4.34g) sind identisch mit denen in 3.4.1).

3.4.3) Es wird nun der verbleibende Fall  ${}^i\mathcal{V}_s = -\mathcal{X}_i$  untersucht.

3.4.3.a) Wir nehmen zunächst an, dass  ${}^{k+1}\mathcal{V}_s = \mathcal{X}_{k+1}$  gilt. Aus (4.30e) mit  $a = k + 1$  und  $b = i$  folgt dann  ${}^{k+1}\mathcal{P}_i \subseteq -{}^{k+1}\mathcal{W}_s\mathcal{X}_i - {}^i\mathcal{W}_s\mathcal{X}_{k+1}$ . Zusammen mit (4.34a) und (4.34f) ergibt sich  ${}^{k+1}\mathcal{W}_s = -{}^{k+1}\mathcal{P}_i\mathcal{X}_i$ , sodass Gleichung (4.34g) erfüllt ist.

3.4.3.b) Wenn  ${}^{k+1}\mathcal{V}_s = \circ$ , dann folgt die Beziehung (4.34g) direkt aus Gleichung (4.30e) mit  $a = k + 1$  und  $b = i$ .

3.4.3.c) Abschließend nehmen wir an, dass  ${}^{k+1}\mathcal{V}_s = -\mathcal{X}_{k+1}$  gilt. Aus (4.30f) mit  $a = k + 1$  und  $b = i$ , (4.34f) und (4.34a) ergibt sich

$${}^{k+1}\mathcal{D}_i = \mathcal{X}_{k+1}\mathcal{X}_i. \quad (4.34k)$$

Aus (4.30c) mit  $a = k$  und  $b = k + 1$  und (4.34c) ergibt sich  ${}^k\mathcal{W}_s \subseteq -{}^k\mathcal{W}_s + {}^k\mathcal{D}_{k+1}{}^{k+1}\mathcal{W}_s$ . Daher gilt  ${}^k\mathcal{W}_s = {}^k\mathcal{D}_{k+1}{}^{k+1}\mathcal{W}_s$  und mit (4.34f) ergibt sich

$${}^k\mathcal{D}_{k+1} = \mathcal{X}_k\mathcal{X}_{k+1}. \quad (4.34l)$$

Aus (4.30a) mit  $a = k$ ,  $b = k + 1$  und  $c = i$ , (4.34k) und (4.34l) ergibt sich  ${}^k\mathcal{P}_i \subseteq {}^k\mathcal{P}_{k+1}\mathcal{X}_{k+1}\mathcal{X}_i + \mathcal{X}_k\mathcal{X}_{k+1}{}^{k+1}\mathcal{P}_i$ . Zusammen mit (4.34c) und (4.34b) gilt  $-{}^k\mathcal{W}_s\mathcal{X}_i \subseteq {}^k\mathcal{W}_s\mathcal{X}_i + \mathcal{X}_k\mathcal{X}_{k+1}{}^{k+1}\mathcal{P}_i$  bzw.  $-{}^k\mathcal{W}_s\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_k\mathcal{X}_{k+1}{}^{k+1}\mathcal{P}_i$ . Zusammen mit (4.34f) ergibt sich Gleichung (4.34g).

3.4.4.) In jedem dieser Fälle ist (4.34g) erfüllt. Zusammen mit Gleichungen (4.34e) ergibt sich dann

$${}^{k+1}\mathcal{W}_s = -{}^{k+1}\mathcal{P}_i\mathcal{X}_i \neq \circ \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k\} \quad (4.34m)$$

und wir führen den Beweis in Schritt 3.1) mit  $k + 1$  fort.

3.5) Abschließend betrachten wir den Fall, dass  ${}^{k+1}\mathcal{W}_s = {}^{k+1}\mathcal{P}_k\mathcal{X}_k$  gilt. Zusammen mit (4.34c) ist dann (4.33) mit  $v = k$  und  $w = k + 1$  erfüllt und wir führen den Beweis in Punkt 4) fort.

4) Wir wählen zwei  $v, w \in Z$  für die (4.33) erfüllt ist und für  $i \in \hat{Z} \setminus \{v, w\}$  definieren wir  $x_i \in \{-\epsilon, 0, \epsilon\}$  abhängig vom Vorzeichen  $\mathcal{X}_i$ . Dabei wird  $\epsilon > 0$  hinreichend klein gewählt, sodass

$$\zeta_1 = \sum_{l \in Z \setminus \{v, w\}} \frac{r_l \sin(\varphi_l - \varphi_w)}{r_s \lambda_0 \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_w)} x_l = \left( \sum_{l \in Z \setminus \{v, w\}} \frac{r_l \sin(\varphi_l - \varphi_w)}{r_s \lambda_0 \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_w)} \right) \epsilon < 1,$$

$$\zeta_2 = \sum_{l \in Z \setminus \{v, w\}} \frac{r_l \sin(\varphi_l - \varphi_v)}{r_s \lambda_0 \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_v)} x_l = \left( \sum_{l \in Z \setminus \{v, w\}} \frac{r_l \sin(\varphi_l - \varphi_v)}{r_s \lambda_0 \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_v)} \right) \epsilon < 1$$

erfüllt ist. Mit

$$x_v := \frac{r_s \lambda_0 \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_w)}{r_v \sin(\varphi_v - \varphi_w)} (1 - \zeta_1) \quad \text{und}$$

$$x_w := \frac{r_s \lambda_0 \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_v)}{r_w \sin(\varphi_w - \varphi_v)} (1 - \zeta_2)$$

gilt dann  $x_v \in {}^w\mathcal{P}_v{}^w\mathcal{W}_s = \mathcal{X}_v$  und  $x_w \in {}^v\mathcal{P}_w{}^v\mathcal{W}_s = \mathcal{X}_w$ . Zudem gilt

$$\sum_{l \in Z} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_v) x_l = r_s \lambda_0 \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_v) \quad \text{und} \quad (4.35a)$$

$$\sum_{l \in Z} r_l \sin(\varphi_l - \varphi_w) x_l = r_s \lambda_0 \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_w). \quad (4.35b)$$

Wird (4.35b) von (4.35a) multipliziert mit  $\cos(\varphi_v - \varphi_w)$  subtrahiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{l \in Z} r_l (\sin(\varphi_l - \varphi_v) \cos(\varphi_v - \varphi_w) - \sin(\varphi_l - \varphi_w)) x_l \\ = r_s \lambda_0 (\sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_v) \cos(\varphi_v - \varphi_w) - \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_w)). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mithilfe von (2.4a) und  $\sin(\varphi_w - \varphi_v) \neq 0$

$$\sum_{l \in Z} r_l \cos(\varphi_l - \varphi_w) v_{l,s} = r_s \lambda_0 \cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_v). \quad (4.35c)$$

Aus (4.35a) und (4.35c) folgt, dass die beiden Gleichungen in (4.29) für  $i = v$  erfüllt sind. Der Beweis wird in Schritt 6) fortgeführt.

5) Wir betrachten nun den Fall, dass  $s \notin Z$  bzw.  ${}^s\mathcal{D}_s = \mathbb{O}$  gilt. Dann ist  $q_s = 0$  und für jedes  $i \in Z$  folgt  ${}^i z_s = 0$ . Die Gleichungen in (4.28) vereinfachen sich zu

$$\mathbb{O} \subseteq {}^i\mathcal{P}^T\mathcal{X} \text{ und } \mathbb{O} \subseteq {}^i\mathcal{D}^T\mathcal{X} \quad \text{für jedes } i \in Z. \quad (4.36)$$

Mithilfe von Satz 4.8 gibt es ein  $x \in \mathcal{X}$  für jedes  $q \in \mathfrak{D}$ , sodass  $q^T x = 0 = {}^i z_s$  gilt. (4.29) ist daher für ein beliebiges  $i \in Z$  erfüllt.

6) Die beiden Gleichungen (4.29) sind für ein  $i \in Z$  erfüllt. Daher gilt

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n r_l (\cos(\varphi_l - \varphi_i) + j \sin(\varphi_l - \varphi_i)) x_l \\ = \lambda_0 r_s (\cos(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_i) + j \sin(\varphi_s + \varphi_\lambda - \varphi_i)) \text{ bzw.} \end{aligned}$$

$\sum_{l=1}^n {}^i q_l x_l = {}^i z_s = \lambda {}^i q_s$  oder  $q^T x = \lambda q^T$ . Wir definieren  $A_{i,s} := x_i$  für jedes  $i \in \hat{Z}$ , sodass  $q^T A = \lambda q^T$  gilt und (i) ist erfüllt.  $\square$

**Beispiel 4.6 :** Gegeben ist die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{3 \times 3}$  und der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \circ & + & \circ \\ \circ & \circ & + \\ + & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Vorzeichenmuster von  $\mathfrak{D}$  sind

$${}^1\mathcal{D} = \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix}, {}^1\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \circ \\ + \\ - \end{pmatrix}, {}^2\mathcal{D} = \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \end{pmatrix}, {}^2\mathcal{P} = \begin{pmatrix} - \\ \circ \\ - \end{pmatrix}, {}^3\mathcal{D} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix} \text{ und } {}^3\mathcal{P} = \begin{pmatrix} + \\ - \\ \circ \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} {}^1\mathcal{V}^T = {}^1\mathcal{D}^T \mathcal{A} = (+, -, +) &= -{}^2\mathcal{D}^T, & {}^1\mathcal{W}^T = {}^1\mathcal{P}^T \mathcal{A} = (+, \circ, -) &= -{}^2\mathcal{P}^T, \\ {}^2\mathcal{V}^T = {}^2\mathcal{D}^T \mathcal{A} = (+, +, -) &= -{}^3\mathcal{D}^T, & {}^2\mathcal{W}^T = {}^2\mathcal{P}^T \mathcal{A} = (-, +, \circ) &= -{}^3\mathcal{P}^T, \\ {}^3\mathcal{V}^T = {}^3\mathcal{D}^T \mathcal{A} = (-, +, +) &= -{}^1\mathcal{D}^T \quad \text{und} \quad {}^3\mathcal{W}^T = {}^3\mathcal{P}^T \mathcal{A} = (\circ, -, +) &= -{}^1\mathcal{P}^T. \end{aligned}$$

Für jedes  $k \in Z := \{1, 2, 3\}$  gilt  ${}^k\mathcal{W}_k = {}^k\mathcal{V}_k = +$  und mit  $q := (r_1, r_2 e^{j\frac{2\pi}{3}}, r_3 e^{-j\frac{2\pi}{3}})^T$ ,  $\lambda := r_\lambda e^{j\frac{\pi}{3}}$  und  $r_1, r_2, r_3, r_\lambda \in +$  kann gezeigt werden, dass  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  eine Drehung ist, da  $q \in \mathfrak{D}$  und für jedes  $k \in Z$  gilt  $\Re(\lambda q/q_k) \in {}^k\mathcal{V}$  sowie  $\Im(\lambda q/q_k) \in {}^k\mathcal{W}$  (siehe Satz 5.4 in Abschnitt 5.2 für die Untersuchung von Drehungen).

Aufgrund von Satz 4.13 ist  $\mathfrak{D}$  daher ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ , der in den ersten Quadranten verdreht wird. Der Vektor  $q$  ist ein Eigenvektor von der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r_2}{r_1} r_\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_3}{r_2} r_\lambda \\ -\frac{r_1}{r_3} r_\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \quad \text{bezüglich } \lambda.$$

Neben  $\mathfrak{D}$  gibt es genau zwei weitere komplexe Vorzeichenvektoren  $\mathfrak{D}'$  und  $\mathfrak{D}''$  mit

$$\mathfrak{D}' = \overline{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} + & + & + \\ - & + & + \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}'' = \begin{pmatrix} + & + & + \\ \circ & + & + \\ \circ & \circ & + \end{pmatrix},$$

welche Vorzeichen-Eigenvektoren von  $\mathcal{A}$  sind.  $\mathfrak{D}''$  ist reell darstellbar und wird z.B. mit  $\mathcal{D}'' = (+, +, +)^T$  beschrieben. Die komplexen Vorzeichenvektoren  $\mathfrak{D}'$  und  $\mathfrak{D}''$  enthalten jeweils die Eigenvektoren von  $A$  bezüglich  $\lambda' = \bar{\lambda} = r_\lambda e^{-j\frac{\pi}{3}}$  und  $\lambda'' = -r_\lambda$ .

Wenn  $\mathfrak{D}$  ein Vorzeichen-Eigenvektor von einer Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  ist und  $\mathfrak{D}$  in den ersten Quadranten verdreht wird, dann sind im Allgemeinen im Gegensatz zu Satz 4.10 nicht alle Elemente von  $\mathfrak{D}$  auch Eigenvektoren einer Matrix  $A \in \mathcal{A}$ . Eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  erlaubt dagegen in den meisten Fällen nur Eigenwerte  $\lambda = r_\lambda e^{j\varphi_\lambda}$  mit bestimmten Argumenten  $\varphi_\lambda$ . Diese Eigenwerte und Eigenvektoren sind durch die Drehung  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  von  $\mathfrak{D}$  bestimmt.

Die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  aus Beispiel 4.6 erlaubt beispielsweise nur Eigenwerte mit den Argumenten  $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$  und  $\pi$  und für jeden Eigenvektor  $q = (r_1 e^{j\varphi_1}, r_2 e^{j\varphi_2}, r_3 e^{j\varphi_3})^T$  bezüglich  $\lambda = r_\lambda e^{j\frac{\pi}{3}}$  muss

$$(\varphi_1 - \varphi_2) \bmod \frac{\pi}{2} = (\varphi_2 - \varphi_3) \bmod \frac{\pi}{2} = (\varphi_3 - \varphi_1) \bmod \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

gelten. Drehungen werden im nächsten Abschnitt (Satz 5.4) weiter untersucht.

Analog zu Satz 4.11 kann mithilfe von Satz 4.13 festgestellt werden, ob eine Vorzeichenmatrix komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil erlaubt.

**Satz 4.14 :** Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Die folgenden Punkte sind äquivalent.

- (i)  $\mathcal{A}$  erlaubt einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Im(\lambda) \neq 0$  und  $\Re(\lambda) > 0$ .
- (ii) Es gibt einen komplexen Vorzeichenvektor, der Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist und in den ersten Quadranten verdreht wird.
- (iii) Es gibt einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  und eine Drehung  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  von  $\mathfrak{D}$ , sodass für jedes von Null verschiedene  $k \in \{1, \dots, n\}$  in  $\mathfrak{D}$ 
  - (a)  ${}^k\mathcal{V}^T \subseteq {}^k\mathcal{D}^T \mathcal{A}$  sowie
  - (b)  ${}^k\mathcal{W}^T \subseteq {}^k\mathcal{P}^T \mathcal{A}$  und
  - (c)  ${}^k\mathcal{V}_k = {}^k\mathcal{W}_k = +$

mit  $({}^k\mathcal{D}, {}^k\mathcal{P}) = V(\mathfrak{D}, k)$  und  $\Psi_{\mathfrak{D}}(k) = ({}^k\mathcal{V}, {}^k\mathcal{W})$  gilt.

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) :  $\mathcal{A}$  erlaubt einen komplexen Eigenwert mit positivem Realteil und jedes Element von  $\mathcal{A}$  ist reell. Daher gibt es mit Satz 2.1 ein  $A \in \mathcal{A}$ , ein  $q \in \mathbb{C}^n$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) > 0$  und  $\Im(\lambda) > 0$ , sodass  $q^T A = \lambda q^T$  gilt.  $q$  ist dann nach Definition 4.9 ein Element von einem Vorzeichen-Eigenvektor  $\mathfrak{D}$  von  $\mathcal{A}$ , der in den ersten Quadranten verdreht wird. (ii)  $\Rightarrow$  (i) ist offensichtlich und die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz 4.13.  $\square$

Mit dem folgenden Satz kann untersucht werden, ob ein komplexer Vorzeichenvektor ein Vorzeichen-Eigenvektor ist, der in den dritten Quadranten verdreht wird.

**Satz 4.15 :** *Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ . Die folgenden Punkte sind äquivalent.*

- (i)  $\mathfrak{D}$  ist ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  und  $\mathfrak{D}$  wird in den dritten Quadranten verdreht.
- (ii) Für jedes von Null verschiedene  $k \in \{1, \dots, n\}$  in  $\mathfrak{D}$  gilt mit  $(^k\mathcal{D}, ^k\mathcal{P}) = V(\mathfrak{D}, k)$ 
  - (a)  ${}^k\mathcal{V}^T \subseteq {}^k\mathcal{D}^T \mathcal{A}$ ,
  - (b)  ${}^k\mathcal{W}^T \subseteq {}^k\mathcal{P}^T \mathcal{A}$ ,
  - (c)  ${}^k\mathcal{V}_k = {}^k\mathcal{W}_k = \leftarrow$
und  $(^k\mathcal{V}, {}^k\mathcal{W}) = \Psi_{\mathfrak{D}}(k)$  ist eine Drehung von  $\mathfrak{D}$ .

*Beweis.* Der Beweis von (i)  $\Rightarrow$  (ii) verläuft analog zu dem von Satz 4.13. Für die Umkehrung nehmen wir an, dass ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  und eine Drehung  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  gegeben sind, sodass die Bedingungen (a) bis (c) erfüllt sind. Wir definieren  $\tilde{\mathcal{A}} := -\mathcal{A}$  und  $\tilde{\Psi}_{\mathfrak{D}}(k) := (-{}^k\mathcal{V}, -{}^k\mathcal{W})$  mit  $({}^k\mathcal{V}, {}^k\mathcal{W}) = \Psi_{\mathfrak{D}}(k)$  für jedes von Null verschiedene  $k$  in  $\mathfrak{D}$ .  $\tilde{\Psi}_{\mathfrak{D}}$  ist eine Drehung von  $\mathfrak{D}$  und alle drei Bedingungen von Satz 4.13.(ii) sind für  $\tilde{\mathcal{A}}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\tilde{\Psi}_{\mathfrak{D}}$  erfüllt.  $\mathfrak{D}$  ist daher ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\tilde{\mathcal{A}}$  im ersten Quadranten und es gibt ein  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ , ein  $q \in \mathfrak{D}$  und ein  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\tilde{\lambda}), \Im(\tilde{\lambda}) > 0$ , sodass  $q^T \tilde{A} = \tilde{\lambda} q^T$  gilt. Mit  $A := -\tilde{A}$  und  $\lambda := -\tilde{\lambda}$  gilt  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\Re(\lambda), \Im(\lambda) < 0$  und  $q^T A = \lambda q^T$ .  $\mathfrak{D}$  ist daher ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  im dritten Quadranten und (i) ist erfüllt.  $\square$

Aus Satz 4.15 folgt analog zu Satz 4.14 das folgende Ergebnis, mit dem festgestellt werden kann, ob eine Vorzeichenmatrix einen komplexen Eigenwert mit negativen Realteil erlaubt.

**Satz 4.16 :** *Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Die folgenden Punkte sind äquivalent.*

- (i)  *$\mathcal{A}$  erlaubt einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Im(\lambda) \neq 0$  und  $\Re(\lambda) < 0$ .*
- (ii) *Es gibt einen komplexen Vorzeichenvektor, der Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist und in den dritten Quadranten verdreht wird.*
- (iii) *Es gibt einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  und eine Drehung  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  von  $\mathfrak{D}$ , sodass für jedes von Null verschiedene  $k \in \{1, \dots, n\}$  in  $\mathfrak{D}$* 
  - (a)  *${}^k\mathcal{V}^T \subseteq {}^k\mathcal{D}^T \mathcal{A}$  sowie*
  - (b)  *${}^k\mathcal{W}^T \subseteq {}^k\mathcal{P}^T \mathcal{A}$  und*
  - (c)  *${}^k\mathcal{V}_k = {}^k\mathcal{W}_k = \leftarrow$*

*mit  $({}^k\mathcal{D}, {}^k\mathcal{P}) = V(\mathfrak{D}, k)$  und  $\Psi_{\mathfrak{D}}(k) = ({}^k\mathcal{V}, {}^k\mathcal{W})$  gilt.*

## 5 Vorzeichen-Steuerbarkeit und -Stabilisierbarkeit

In diesem Abschnitt wird mit den Sätzen 5.1 und 5.2 jeweils die Vorzeichen-Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit charakterisiert. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 eine alternative Darstellung eines komplexen Vorzeichenvektors  $\mathfrak{D}$  vorgestellt und es werden Eigenschaften von Drehungen ermittelt. Beiden Resultate werden in Abschnitt 5.3 genutzt, um die algorithmische Überprüfung der Vorzeichen-Steuerbarkeit bzw. Vorzeichen-Stabilisierbarkeit zu diskutieren. Zusätzlich wird ein Algorithmus zum Test der Vorzeichen-Steuerbarkeit beschrieben. In Abschnitt 5.4 werden abschließend zwei Systeme auf Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit untersucht.

### 5.1 Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit

Aus der Definition des Vorzeichen-Eigenvektors und Satz 4.8 folgt unmittelbar, dass ein Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nicht vorzeichen-steuerbar ist, wenn es einen Vorzeichen-Eigenvektor  $\mathfrak{D}$  von  $\mathcal{A}$  gibt, der gleichzeitig im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist. Daraus ergibt sich die folgende Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit.

**Satz 5.1 :** Gegeben sind zwei Vorzeichenmatrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{V}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Punkte sind äquivalent.

- (i) Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist vorzeichen-steuerbar.
- (ii) Für jeden komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D} \neq \circ$  der Ordnung  $n$  gilt
  - (a)  $\mathfrak{D}$  ist nicht im Kokern von  $\mathcal{B}$  oder
  - (b)  $\mathfrak{D}$  ist kein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ .
- (iii) Für jeden komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D} \neq \circ$ , der im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist, sind die folgenden Punkte erfüllt.
  - Wenn  $\mathfrak{D}$  reell darstellbar ist und  $\mathfrak{D}$  durch  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  beschrieben wird, dann gilt
    - (a)  $\circ \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$ ,
    - (b)  $\mathcal{Q}^T \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$  und
    - (c)  $-\mathcal{Q}^T \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$ .
  - $\mathfrak{D}$  ist kein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ , der
    - (d) in den ersten Quadranten verdreht wird,
    - (e) um 90 Grad verdreht wird, oder
    - (f) in den dritten Quadranten verdreht wird.

*Beweis.* Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist nach Satz 2.5.(iv) genau dann vorzeichen-steuerbar, wenn für jedes  $A \in \mathcal{A}$ , jedes  $B \in \mathcal{B}$ , jeden Wert  $\lambda \in \mathbb{C}$  und jeden Vektor  $q \in \mathbb{C}^n$  mit  $q \neq 0$ ,  $q^T B \neq 0$  oder  $q^T A \neq \lambda q^T$  gilt.

Wenn  $q^T A = \lambda q^T$  für ein  $q \neq 0$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt, dann ist der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ , in dem sich  $q$  befindet, nach Definition 4.9 ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ . Wenn  $\mathfrak{D}$  zusätzlich im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist, genau dann gibt es nach Satz 4.8 ein  $B \in \mathcal{B}$ , sodass  $q^T B = 0$  gilt. Daher ist  $(i) \iff (ii)$  erfüllt.

Für  $(i) \implies (iii)$  folgen die Eigenschaften (a), (b) und (c) unmittelbar aus Satz 3.16 und die Eigenschaften (d), (e) und (f) aus den Sätzen 4.8, 4.14, 4.11 und 4.16. Für die Umkehrung nehmen wir an, dass (i) nicht erfüllt ist. Dann gibt es ein  $A \in \mathcal{A}$ , ein  $B \in \mathcal{B}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sodass  $\lambda$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar ist. Wenn  $\lambda \in \circlearrowleft$ ,  $\lambda \in +$ , oder  $\lambda \in -$  gilt, dann folgt jeweils aus Satz 3.7, 3.14 oder 3.15, dass (a), (b) oder (c) für ein Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q}$  nicht erfüllt ist.  $\mathcal{Q}$  ist dann eine reelle Darstellung eines komplexen Vorzeichenvektors  $\mathfrak{D}$  und  $\mathcal{Q}$  ist im Kokern von  $\mathcal{B}$ . Andernfalls gilt  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und aus Satz 2.6 folgt, dass ohne Einschränkungen  $\Re(\lambda), \Im(\lambda) > 0$ ;  $\Re(\lambda) = 0, \Im(\lambda) > 0$  oder  $\Re(\lambda), \Im(\lambda) < 0$  gilt. Der Vektor  $q$  beschreibt einen zugehörigen Eigenvektor und der zu  $q$  gehörige komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  ist dann im Kokern von  $\mathcal{B}$  und ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ , der in den ersten Quadranten, um 90 Grad oder in den dritten Quadranten verdreht ist. Daher ist entweder (d), (e) oder (f) nicht erfüllt.  $\square$

Für die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit eines Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist im Gegensatz zur Vorzeichen-Steuerbarkeit nach Definition 3.20 und Satz 2.8.(iii) nur die  $(A, B)$ -Steuerbarkeit von allen  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) \geq 0$  notwendig. Es ergibt sich der folgende Zusammenhang.

**Satz 5.2 :** Gegeben sind die Vorzeichenmatrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{V}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die folgenden Punkte sind äquivalent.

- (i) Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist vorzeichen-stabilisierbar.
- (ii) Für jeden komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ , der im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist, sind die folgenden Punkte erfüllt.

Wenn  $\mathfrak{D}$  reell darstellbar ist und  $\mathfrak{D}$  durch  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^n$  beschrieben wird, dann gilt

- (a)  $\circlearrowleft \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$ .
- (b)  $\mathcal{Q}^T \not\subseteq \mathcal{Q}^T \mathcal{A}$ .

$\mathfrak{D}$  ist kein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ , der

- (c) in den ersten Quadranten verdreht wird.
- (d) um 90 Grad verdreht wird.

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis (i)  $\iff$  (iii) von Satz 5.1, wobei Satz 3.21 anstatt von Satz 3.16 verwendet und Satz 3.15 nicht benötigt wird.  $\square$

**Beispiel 5.1 (Fortsetzung von Beispiel 3.6, 4.4 und 4.5):** Gegeben sind die Vorzeichenmatrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{3 \times 3}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{V}^3$  mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \circ & + & \circ \\ - & \circ & - \\ \circ & \circ & - \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \end{pmatrix}.$$

In Beispiel 3.6 wurde gezeigt, dass jeder reelle Eigenwert in jedem System  $(A, B) \in (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  steuerbar ist und in den Beispielen 4.4 und 4.5 wurde jeweils gezeigt, dass der komplexe Vorzeichenvektor

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & \circ & + \\ - & + & - \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

im Kokern von  $\mathcal{B}$  und zugleich ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist, der um 90 Grad verdreht wird. Daher ist das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 5.1 nicht vorzeichen-steuerbar und nach Satz 5.2 auch nicht vorzeichen-stabilisierbar. Um genau zu sein, gibt es für jedes Element  $q$  aus  $\mathfrak{D}$  und jedes  $\lambda_I \in +$  nach Satz 4.8 ein  $B \in \mathcal{B}$  und nach Satz 4.10 ein  $A \in \mathcal{A}$ , sodass der Wert  $\lambda = j\lambda_I$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar ist.

Die komplexen Vorzeichenvektoren  $\mathfrak{D}$  und  $\bar{\mathfrak{D}}$  sind die einzigen Vorzeichen-Eigenvektoren von  $\mathcal{A}$ , welche im Kokern von  $\mathcal{B}$  sind. Der Vektor  $q = (1-j, -1-j, 1)^T$  (siehe Beispiel 3.6) ist beispielsweise ein Element von  $\mathfrak{D}$ .

Neben  $\mathfrak{D}$  und  $\bar{\mathfrak{D}}$  gibt es genau noch einen weiteren Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & + \end{pmatrix},$$

welcher reell darstellbar ist (z.B. mit  $\mathcal{D}' = (\circ, \circ, +)^T$ ), aber nicht im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist.

## 5.2 Weitere Eigenschaften komplexer Vorzeichenvektoren

In diesem Abschnitt wird mit Satz 5.3 eine alternative Darstellung eines komplexen Vorzeichenvektors vorgestellt und es wird gezeigt, dass die Bedingung aus Satz 4.5

hinreichend ist. Diese neue Darstellung wird anschließend in Satz 5.4 für die Untersuchung von Drehungen benutzt. Beide Sätze bilden die Grundlage für die algorithmische Überprüfung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit in Abschnitt 5.3.

**Satz 5.3 :** Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $(^k\mathcal{D}, ^k\mathcal{P}) := V(\mathcal{X}, k)$  für jedes  $k \in \hat{Z} = \{1, \dots, n\}$  und  $R$  bezeichnet die Menge der Rotationsmatrizen nach (4.4). Die folgenden Punkte sind äquivalent.

- (i) Die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  beschreibt einen komplexen Vorzeichenvektor.
- (ii) Für jedes  $x, y, z \in \hat{Z}$  gilt  ${}^z\mathcal{D}_z \in \{\circ, +\}$  und

$${}^z\mathcal{D}_z \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_y \\ {}^x\mathcal{D}_y \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} {}^z\mathcal{D}_y & {}^z\mathcal{P}_y \\ -{}^z\mathcal{P}_y & {}^z\mathcal{D}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_z \\ {}^x\mathcal{D}_z \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Menge  $\hat{Z}$  lässt sich in  $U$ ,  $\tilde{U}$  und  $N$  aufteilen und es gibt die Abbildung  $\nu: \hat{Z} \rightarrow (U \cup \{0\}) \times R$ ,  $k \mapsto (\nu_1(k), \mathcal{R}_k)$ , sodass die folgenden Punkte erfüllt sind.

(a) Wenn  $k \in N$ , dann gilt  $\nu_1(k) = 0$  und  ${}^i\mathcal{P}_k = {}^i\mathcal{D}_k = \circ$  für jedes  $i \in \hat{Z}$ .

Wenn andernfalls  $k \notin N$ , dann gilt  ${}^k\mathcal{D}_k = +$ .

(b) Wenn  $k \in \tilde{U}$ , dann gilt  $\nu_1(k) \in U$  und  $\begin{pmatrix} {}^k\mathcal{P}_{\nu_1(k)} \\ {}^k\mathcal{D}_{\nu_1(k)} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_k \begin{pmatrix} \circ \\ + \end{pmatrix}$ .

(c) Wenn  $k \in U$ , dann gilt  $\nu_1(k) \in U$  und

wenn zusätzlich  $|U| > 1$ , dann gilt  $\begin{pmatrix} {}^k\mathcal{P}_{\nu_1(k)} \\ {}^k\mathcal{D}_{\nu_1(k)} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_k \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$ .

(d) Für zwei verschiedene  $v, w \in U$  gibt eine Folge  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , sodass  $i_1 = w$ ,  $i_k = v$  und  $i_{l+1} = \nu_1(i_l)$  für jedes  $l \in \{1, \dots, k-1\}$  gilt.

(e) Wenn  $i, k \in U$  mit  $i \notin \{k, \nu_1(k)\}$  oder  $k \in \tilde{U}$  und  $i \in U \cup \tilde{U}$  gilt,

dann gilt  $\begin{pmatrix} {}^i\mathcal{P}_{\nu_1(k)} \\ {}^i\mathcal{D}_{\nu_1(k)} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_k \begin{pmatrix} {}^i\mathcal{P}_k \\ {}^i\mathcal{D}_k \end{pmatrix}$ .

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) wurde bereits in Satz 4.5 gezeigt. Für den Beweis von (ii)  $\Rightarrow$  (iii) gilt aufgrund der Annahme für alle  $x, y, z \in \hat{Z} = \{1, \dots, n\}$ ,  ${}^z\mathcal{D}_z \in \{\circ, +\}$ ,

$${}^x\mathcal{P}_y {}^z\mathcal{D}_z \subseteq {}^x\mathcal{D}_z {}^z\mathcal{P}_y + {}^x\mathcal{P}_z {}^z\mathcal{D}_y \quad \text{und} \quad (5.1a)$$

$${}^x\mathcal{D}_y {}^z\mathcal{D}_z \subseteq {}^x\mathcal{D}_z {}^z\mathcal{D}_y - {}^x\mathcal{P}_z {}^z\mathcal{P}_y. \quad (5.1b)$$

- 1) Wenn  ${}^k\mathcal{D}_k = \circ$  für ein  $k \in \hat{Z}$  gilt, dann definieren wir  $k \in N$  und  $\nu_1(k) := 0$ . Aus (5.1b) mit  $z = k$  und  $i = x = y \in \hat{Z}$  folgt  $\circ \subseteq {}^i\mathcal{D}_k {}^k\mathcal{D}_i - {}^i\mathcal{P}_k {}^k\mathcal{P}_i$  bzw.  $({}^i\mathcal{D}_k)^2 = -({}^i\mathcal{P}_k)^2$ . Daher gilt  ${}^i\mathcal{D}_k = {}^i\mathcal{P}_k = \circ$  für alle  $i \in \hat{Z}$  und (iii.a) ist erfüllt.

2) Wenn  ${}^v\mathcal{D}_w = {}^v\mathcal{P}_w = \circlearrowleft$  für zwei  $v, w \in \hat{Z}$  gilt, dann folgt aus (5.1b) mit  $x = y = w$  und  $z = v$ ,  ${}^w\mathcal{D}_w {}^v\mathcal{D}_v = \circlearrowleft$  und es gilt entweder  $v \in N$  oder  $w \in N$ . Wir definieren  $Z := \hat{Z} \setminus N$ , sodass für zwei  $v, w \in Z$  entweder  ${}^v\mathcal{D}_w \neq \circlearrowleft$  oder  ${}^v\mathcal{P}_w \neq \circlearrowleft$  gilt. Außerdem teilen wir die Menge  $Z$  in die Mengen  $U$  und  $\tilde{U}$  derart auf, dass  $U$  die größtmögliche Anzahl an Elementen enthält und  ${}^v\mathcal{D}_w \neq \circlearrowleft \neq {}^v\mathcal{P}_w$  für je zwei verschiedene  $v, w \in U$  gilt. Daraus folgt, dass es für jedes  $k \in \tilde{U}$  ein  $v \in U$  gibt, sodass entweder  ${}^v\mathcal{D}_k = \circlearrowleft$  oder  ${}^v\mathcal{P}_k = \circlearrowleft$  gilt. Wir definieren dann  $\nu_1(k) := v$  für dieses  $k \in \tilde{U}$  und  $v \in U$ . Abhängig von  ${}^v\mathcal{D}_k$  und  ${}^v\mathcal{P}_k$  definieren wir das  $\mathcal{R}_k \in R$ , sodass (iii.b) erfüllt ist.

3.1) Ohne Einschränkungen der Allgemeinheit gilt  $U = \{1, \dots, n'\}$ . Wenn  $n' = 1$ , dann definieren wir  $\nu_1(1) := 1$  und wenn  $n' = 2$ , dann definieren wir  $\nu_1(1) := 2$  und  $\nu_1(2) := 1$ . Außerdem definieren wir zusätzlich  $\mathcal{R}_1 \in R$  und  $\mathcal{R}_2 \in R$  derart, dass (iii.c) erfüllt ist, wenn  $n' = 2$  gilt.

3.2) Wir nehmen nun an, dass  $n' > 2$  gilt. In den folgenden Schritten 4) - 6) wird gezeigt, dass es dann für jedes  $w \in U$  ein  $v \in U \setminus \{w\}$  gibt, sodass für jedes  $i \in U \setminus \{v, w\}$

$${}^i\mathcal{D}_w {}^i\mathcal{D}_v = \mathcal{S} {}^i\mathcal{P}_w {}^i\mathcal{P}_v \quad \text{mit} \quad \mathcal{S} = {}^w\mathcal{P}_v {}^w\mathcal{D}_v \quad (5.2)$$

erfüllt ist. Dafür wird für zwei verschiedene  $x, y \in U$  die Menge  ${}^x M_y$  wie folgt definiert

$${}^x M_y = \{k \in U \setminus \{x, y\} \mid (5.2) \text{ ist mit } w = x, v = y \text{ und } i = k \text{ erfüllt}\}.$$

4) Für drei  $x, y, z \in U$  gilt im Allgemeinen

$${}^z\mathcal{D}_x = \mathcal{S}_x {}^z\mathcal{P}_x, \quad (5.3a)$$

$${}^z\mathcal{D}_y = \mathcal{S}_y {}^z\mathcal{P}_y \quad \text{und} \quad (5.3b)$$

$${}^x\mathcal{D}_y = \mathcal{S}_{xy} {}^x\mathcal{P}_y \quad (5.3c)$$

mit  $\mathcal{S}_x, \mathcal{S}_y, \mathcal{S}_{xy} \in \{+, -\}$ . Aufgrund von (5.3a) und (5.3b) gilt  ${}^z\mathcal{D}_x {}^z\mathcal{D}_y = \mathcal{S}_x \mathcal{S}_y {}^z\mathcal{P}_x {}^z\mathcal{P}_y$ , sodass aufgrund von (5.3c), (5.2) mit  $w = x, v = y$  und  $i = z$  genau dann erfüllt ist (es gilt  $z \in {}^x M_y$ ), wenn  $\mathcal{S}_{xy} = \mathcal{S}_x \mathcal{S}_y$  gilt. Gleichzeitig gilt aufgrund von (5.3c),  ${}^y\mathcal{D}_x = -\mathcal{S}_{xy} {}^y\mathcal{P}_x$ , sodass (5.2) mit  $w = y, v = x$  und  $i = z$  genau dann nicht erfüllt ist (es gilt  $z \notin {}^y M_x$ ), wenn  $\mathcal{S}_{xy} = \mathcal{S}_x \mathcal{S}_y$  gilt. D.h. es gilt

$$\mathcal{S}_{xy} = \mathcal{S}_x \mathcal{S}_y \iff z \in {}^x M_y \iff z \notin {}^y M_x. \quad (5.3d)$$

Analog ergibt sich aus (5.3a) und (5.3c),  ${}^x\mathcal{D}_z {}^x\mathcal{D}_y = -\mathcal{S}_x \mathcal{S}_{xy} {}^x\mathcal{P}_z {}^x\mathcal{P}_y$  und aus (5.3b),  ${}^y\mathcal{D}_z = -\mathcal{S}_y {}^y\mathcal{P}_z$ . Daher ist (5.2) mit  $w = y, v = z$  und  $i = x$  genau dann erfüllt (es gilt  $x \in {}^y M_z$ ), wenn  $-\mathcal{S}_x \mathcal{S}_{xy} = -\mathcal{S}_y$  bzw.  $\mathcal{S}_{xy} = \mathcal{S}_x \mathcal{S}_y$  gilt, d.h.

$$\mathcal{S}_{xy} = \mathcal{S}_x \mathcal{S}_y \iff x \in {}^y M_z. \quad (5.3e)$$

Zusammenfassend folgt aus (5.3d) und (5.3e) für je drei verschiedene  $x, y, z \in U$

$$z \in {}^x M_y \iff z \notin {}^y M_x \iff x \in {}^y M_z. \quad (5.4)$$

5) Wir werden im Folgenden zeigen, dass für zwei verschiedene  $k, w \in U$  entweder  ${}^w M_k = U \setminus \{w, k\}$  gilt, oder es gilt

$${}^w M_k \cup \{k\} \subseteq {}^w M_v \quad \text{für jedes } v \in U \setminus (\{w, k\} \cup {}^w M_k). \quad (5.5)$$

5.1) Wir wählen zwei verschiedene  $w, k \in U$  und wir nehmen an, dass  ${}^w M_k \neq U \setminus \{w, k\}$  gilt. Dann gibt es ein  $v \in U \setminus (\{w, k\} \cup {}^w M_k)$  und es gilt

$$v \notin {}^w M_k. \quad (5.6a)$$

Aufgrund von (5.4) gilt dann

$$k \in {}^w M_v. \quad (5.6b)$$

5.2) Wenn  ${}^w M_k = \emptyset$ , dann ist die Aussage in (5.5) zusammen mit (5.6b) erfüllt. Wir nehmen nun an, dass  ${}^w M_k \neq \emptyset$  gilt und wir fixieren ein  $i \in {}^w M_k$ .

5.3) Ohne Einschränkungen der Allgemeinheit gilt mit  $\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_v, \mathcal{S}_i \in \{+, -\}$ .

$${}^w \mathcal{D}_k = \mathcal{S}_k {}^w \mathcal{P}_k, \quad (5.6c)$$

$${}^w \mathcal{D}_v = \mathcal{S}_v {}^w \mathcal{P}_v \quad \text{und} \quad (5.6d)$$

$${}^w \mathcal{D}_i = \mathcal{S}_i {}^w \mathcal{P}_i. \quad (5.6e)$$

Aufgrund von (5.6a) und (5.2) gilt  ${}^v \mathcal{D}_w {}^v \mathcal{D}_k = -\mathcal{S}_k {}^v \mathcal{P}_w {}^v \mathcal{P}_k$ . Mit (5.6d) ergibt sich

$${}^v \mathcal{P}_k = \mathcal{S}_k \mathcal{S}_v {}^v \mathcal{D}_k \quad (5.6f)$$

Da  $i \in {}^w M_k$  gilt, folgt aus (5.2),  ${}^i \mathcal{D}_w {}^i \mathcal{D}_k = \mathcal{S}_k {}^i \mathcal{P}_w {}^i \mathcal{P}_k$ . Zusammen mit (5.6e) gilt dann

$${}^i \mathcal{P}_k = -\mathcal{S}_k \mathcal{S}_i {}^i \mathcal{D}_k. \quad (5.6g)$$

Aus (5.1a) mit  $x = w, y = k$  und  $z = v$  zusammen mit (5.6f) und (5.6d) ergibt sich  ${}^w \mathcal{P}_k \subseteq {}^w \mathcal{D}_v {}^v \mathcal{D}_k \mathcal{S}_v (\mathcal{S}_k + +)$  und aus (5.1b) mit  $x = w, y = k$  und  $z = i$  zusammen mit (5.6g) und (5.6e) ergibt sich  ${}^w \mathcal{D}_k \subseteq {}^w \mathcal{D}_i {}^i \mathcal{D}_k (\mathcal{S}_k + +)$ . Zusammen mit (5.6c) gilt daher  ${}^w \mathcal{D}_k = {}^w \mathcal{D}_v {}^v \mathcal{D}_k \mathcal{S}_v$  und  ${}^w \mathcal{D}_k = {}^w \mathcal{D}_i {}^i \mathcal{D}_k$  bzw.

$${}^v \mathcal{D}_k {}^k \mathcal{D}_i = {}^w \mathcal{D}_v {}^w \mathcal{D}_i \mathcal{S}_v, \quad \text{wenn } \mathcal{S}_k = + \text{ gilt.} \quad (5.6h)$$

Analog ergibt sich aus (5.1a) mit  $x = w, y = k$  und  $z = i$  zusammen mit (5.6g) und (5.6e),  ${}^w\mathcal{P}_k \subseteq {}^w\mathcal{D}_i {}^i\mathcal{D}_k \mathcal{S}_i (+ - \mathcal{S}_k)$  und aus (5.1b) mit  $x = w, y = k$  und  $z = v$  zusammen mit (5.6f) und (5.6d),  ${}^w\mathcal{D}_k \subseteq {}^w\mathcal{D}_v {}^v\mathcal{D}_k (+ - \mathcal{S}_k)$ . Zusammen mit (5.6c) gilt daher  ${}^w\mathcal{D}_k = - {}^w\mathcal{D}_i {}^i\mathcal{D}_k \mathcal{S}_i$  und  ${}^w\mathcal{D}_k = {}^w\mathcal{D}_v {}^v\mathcal{D}_k$  bzw

$${}^v\mathcal{D}_k {}^k\mathcal{D}_i = - {}^w\mathcal{D}_v {}^w\mathcal{D}_i \mathcal{S}_i, \quad \text{wenn } \mathcal{S}_k = + \text{ gilt.} \quad (5.6i)$$

Auf die gleiche Weise ergeben sich aus (5.1a) mit  $x = v, y = i$  und  $z = k$  zusammen mit (5.6f) und (5.6g) und aus (5.1b) mit  $x = v, y = i$  und  $z = w$  zusammen mit (5.6d) und (5.6e),

$${}^v\mathcal{P}_i \subseteq {}^v\mathcal{D}_k {}^k\mathcal{D}_i \mathcal{S}_k (\mathcal{S}_v + \mathcal{S}_i) \quad \text{und} \quad {}^v\mathcal{D}_i \subseteq {}^w\mathcal{D}_v {}^w\mathcal{D}_i \mathcal{S}_v (\mathcal{S}_v + \mathcal{S}_i) \quad (5.6j)$$

und aus (5.1a) mit  $x = v, y = i$  und  $z = w$  zusammen mit (5.6d) und (5.6e) und (5.1b) mit  $x = v, y = i$  und  $z = k$  zusammen mit (5.6f) und (5.6g),

$${}^v\mathcal{P}_i \subseteq {}^w\mathcal{D}_v {}^w\mathcal{D}_i (\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_v) \quad \text{und} \quad {}^v\mathcal{D}_i \subseteq - {}^v\mathcal{D}_k {}^k\mathcal{D}_i \mathcal{S}_v (\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_v). \quad (5.6k)$$

5.4) Wir nehmen zunächst an, dass  $\mathcal{S}_v = \mathcal{S}_i$  gilt. Aus (5.6j) ergibt sich dann  ${}^v\mathcal{P}_i = {}^v\mathcal{D}_k {}^k\mathcal{D}_i \mathcal{S}_k \mathcal{S}_v$  und  ${}^v\mathcal{D}_i = {}^w\mathcal{D}_v {}^w\mathcal{D}_i$  bzw.

$${}^i\mathcal{P}_v = - {}^v\mathcal{D}_k {}^k\mathcal{D}_i \mathcal{S}_k \mathcal{S}_v \quad \text{und} \quad (5.6l)$$

$${}^w\mathcal{D}_v = {}^i\mathcal{D}_w {}^i\mathcal{D}_v. \quad (5.6m)$$

Aus (5.6l) mit (5.6h), wenn  $\mathcal{S}_k = +$  gilt und (5.6i), wenn  $\mathcal{S}_k = -$  gilt ergibt sich  ${}^i\mathcal{P}_v = - {}^w\mathcal{D}_v {}^w\mathcal{D}_i$ . Mit (5.6e) ergibt sich  ${}^w\mathcal{D}_v = \mathcal{S}_v {}^i\mathcal{P}_v {}^i\mathcal{P}_w$ , sodass zusammen mit (5.6m) und (5.6d),  $i \in {}^wM_v$  gilt.

5.5) Wir nehmen nun an, dass  $\mathcal{S}_v = -\mathcal{S}_i$  gilt. Dann ergibt sich aus (5.6k),  ${}^v\mathcal{P}_i = \mathcal{S}_i {}^w\mathcal{D}_v {}^w\mathcal{D}_i$  und  ${}^v\mathcal{D}_i = {}^v\mathcal{D}_k {}^k\mathcal{D}_i$ . Mit (5.6e) ergibt sich daher

$${}^w\mathcal{D}_v = {}^i\mathcal{P}_v {}^i\mathcal{P}_w \quad \text{und} \quad (5.6n)$$

$${}^i\mathcal{D}_v = {}^v\mathcal{D}_k {}^k\mathcal{D}_i. \quad (5.6o)$$

Aus (5.6o) mit (5.6h), wenn  $\mathcal{S}_k = +$  gilt und (5.6i), wenn  $\mathcal{S}_k = -$  gilt ergibt sich  ${}^i\mathcal{D}_v = \mathcal{S}_v {}^w\mathcal{D}_v {}^w\mathcal{D}_i$  bzw.  ${}^w\mathcal{D}_v = \mathcal{S}_v {}^i\mathcal{D}_v {}^i\mathcal{D}_w$ . Zusammen mit (5.6n) und (5.6d) gilt  $i \in {}^wM_v$ .

5.6) Für jedes  $i \in {}^wM_k$  gilt  $i \in {}^wM_v$ , sodass mit (5.6b) die Aussage in (5.5) erfüllt ist.

6) Die Aussage in 3.2) ergibt sich mit (5.5) aus einer einfachen Rekursion. Für ein  $w \in U$ , wählen wir ein  $k \in U \setminus \{w\}$ , o.E.d.A.  $k = 1$ . Wenn  ${}^wM_k = U \setminus \{w, k\}$ , dann ist die Aussage in 3.2) erfüllt und andernfalls gibt es ein  $v \in U \setminus (\{w, k\} \cup {}^wM_k)$ , o.E.d.A.  $v = k + 1$ . Dann

gilt nach (5.5),  ${}^w M_k \cup \{k\} \subseteq {}^w M_{k+1}$ . Dieser Schritt wird wiederholt bis  ${}^w M_v = U \setminus \{w, v\}$  für ein  $v \in U \setminus \{w\}$  gilt.

Daher gibt es für jedes  $w \in U$  genau ein  $v \in U$ , sodass (5.2) für jedes  $i \in U \setminus \{v, w\}$  erfüllt ist. Wir definieren  $\nu_1(w) := v$  und  $\mathcal{R}_w$  abhängig von  ${}^v \mathcal{P}_w$  und  ${}^v \mathcal{D}_w$ , sodass (iii.c) erfüllt ist.

7) Es wird nun die Aussage in (iii.d) gezeigt. Dafür sind zwei  $v, w \in U$  mit  $v \neq w$  gegeben und o.E.d.A. gilt  $w = 1$ . Wenn  $v = \nu_1(1)$  gilt, dann ist die Aussage in (iii.d) mit  $k = 2$  erfüllt. Andernfalls gilt o.E.d.A.  $\nu_1(1) = 2$  und  $v \notin \{1, 2\}$ . Der Wert  $\nu_1(1)$  wurde in 6) derart definiert, dass  ${}^1 M_2 = U \setminus \{1, 2\}$  bzw.  $v \in {}^1 M_2$  gilt. Zusammen mit (5.4) ergibt sich daraus  $2 \in {}^v M_1$  und wir definieren  $k := 2$ .

7.1) Es gilt  $v \notin \{1, \dots, k\}$  und aufgrund von 7) für  $k = 2$  und (5.9) für  $k > 2$  gilt

$$k \in {}^v M_i \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k-1\}. \quad (5.7)$$

7.2) Wir nehmen zunächst an, dass  $\nu_1(k) \neq v$  gilt. Dann folgt der Definition von  $\nu_1$ , dass  ${}^k M_{\nu_1(k)} = U \setminus \{k, \nu_1(k)\}$  bzw.  $v \in {}^k M_{\nu_1(k)}$  gilt. Aufgrund von (5.4) gilt dann  $k \notin {}^v M_{\nu_1(k)}$ , sodass mit (5.7)  $\nu_1(k) \notin \{1, \dots, k-1\}$  gilt. O.E.d.A. gilt daher  $\nu_1(k) = k+1$ .

7.3) Dann gilt  $v \in {}^k M_{k+1}$  bzw.

$$k+1 \in {}^v M_k \quad (5.8)$$

und aufgrund von (5.7) gilt  $i \notin {}^v M_k$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Mit (5.5) folgt daraus  ${}^v M_k \cup \{k\} \in {}^v M_i$ , sodass aus (5.8)

$$k+1 \in {}^v M_i \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, k\} \quad (5.9)$$

folgt und wir führen den Beweis bei 7.1) mit  $k+1$  anstelle von  $k$  fort.

7.3) Andernfalls gilt  $v = \nu_1(k)$  und die Aussage in (iii.d) ist erfüllt.

8.1) Es wird nun die Aussage in (iii.e) gezeigt. Dafür nehmen wir zunächst an, dass  $i, k \in U$ ;  $i \notin \{k, \nu_1(k)\}$  und  ${}^k \mathcal{D}_{\nu_1(k)} = {}^k \mathcal{P}_{\nu_1(k)} = \mathcal{S}$  gilt. Dann gilt  $\mathcal{R}_k = \mathcal{S} \mathcal{I}_2$  und aufgrund von (5.2) mit  $w = k$  und  $v = \nu_1(k)$  sowie (5.1b) mit  $x = k$ ,  $y = \nu_1(k)$  und  $z = i$  gilt  $\mathcal{S} = {}^i \mathcal{P}_k {}^i \mathcal{P}_{\nu_1(k)} = {}^i \mathcal{D}_k {}^i \mathcal{D}_{\nu_1(k)}$ . Daher ist  ${}^i \mathcal{P}_{\nu_1(k)} = \mathcal{S} {}^i \mathcal{P}_k$  und  ${}^i \mathcal{D}_{\nu_1(k)} = \mathcal{S} {}^i \mathcal{D}_k$  erfüllt.

8.2) Wenn andernfalls  $i, k \in U$ ,  $i \notin \{k, \nu_1(k)\}$  und  ${}^k \mathcal{P}_{\nu_1(k)} = -{}^k \mathcal{D}_{\nu_1(k)} = \mathcal{S}$  gilt, dann gilt aufgrund von (5.2) mit  $w = k$  und  $v = \nu_1(k)$  und (5.1a) mit  $x = k$ ,  $y = \nu_1(k)$  und  $z = i$ ,  $\mathcal{S} = -{}^i \mathcal{P}_k {}^i \mathcal{D}_{\nu_1(k)} = {}^i \mathcal{D}_k {}^i \mathcal{P}_{\nu_1(k)}$ . Daher ist  ${}^i \mathcal{P}_{\nu_1(k)} = \mathcal{S} {}^i \mathcal{D}_k$  und  ${}^i \mathcal{D}_{\nu_1(k)} = -\mathcal{S} {}^i \mathcal{P}_k$  und erfüllt.

8.3) Wir nehmen abschließend an, dass  $k \in \tilde{U}$  und  $i \in U \cup \tilde{U}$  gilt. Dann ergibt sich (iii.e) direkt aus (iii.b) und (ii) mit  $x = i$ ,  $z = k$  und  $y = \nu_1(k)$ .

8.4) Die Aussage in (iii.e) wurde gezeigt, sodass (ii)  $\implies$  (iii) bewiesen ist. Durch einfache Umformungen folgt aus (iii.e) mit  $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathcal{I}_2$  für ein  $\mathcal{R} \in R$

$$\begin{pmatrix} {}^k \mathcal{P}_i \\ {}^k \mathcal{D}_i \end{pmatrix} = \mathcal{R}_k \begin{pmatrix} \nu_1(k) \mathcal{P}_i \\ \nu_1(k) \mathcal{D}_i \end{pmatrix} \quad \text{für zwei } i, k \in \tilde{U}. \quad (5.10)$$

9) Für den Beweis von (iii)  $\implies$  (i) wird in 9.1) einen Vektor  $q \in \mathbb{C}^n$  erzeugt, wobei die Vektoren  $r$  und  $\varphi$  jeweils die Beträge und die Argumente der Elemente von  $q$  beschreiben. Anschließend wird in 9.2) bis 9.6) gezeigt, dass

$$r_x r_y \sin(\varphi_y - \varphi_x) \in {}^x \mathcal{P}_y \quad \text{und} \quad r_x r_y \cos(\varphi_y - \varphi_x) \in {}^x \mathcal{D}_y \quad (5.11)$$

für jedes  $x, y \in \hat{Z} := \{1, \dots, n\}$  gilt.

9.1) Ohne Einschränkungen der Allgemeinheit gilt  $U = \{1, \dots, n'\}$ . Wir definieren  $r_k := 0$  und  $\varphi_k := 0$  für jedes  $k \in N$ . Wenn  $U = \emptyset$ , dann ergibt sich  $\tilde{U} = \emptyset$  aus (iii.b) und es gilt  $N = \hat{Z}$ . Andernfalls gilt  $n' > 0$  und für jedes  $k \in Z := U \cup \tilde{U}$  wählen wir ein beliebiges  $r_k \in +$  und wir definieren  $\varphi_1 := 0$ . Wenn  $n' > 1$ , dann gilt mit (iii.d) o.E.d.A.  $\nu_1(k) = k+1$  für jedes  $k \in U \setminus \{n'\}$ . Für jedes  $k \in U$  definieren wir ein  $\rho_k \in +$ , sodass

$$\sum_{i=1}^{n'} \rho_i = \frac{\pi}{2} \quad (5.12a)$$

erfüllt ist. Zudem definieren wir  $\rho_k := 0$  für jedes  $k \in \tilde{U}$  und

$$\omega_k := \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} + & \circ \\ \circ & + \end{pmatrix}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} \circ & + \\ - & \circ \end{pmatrix}, \\ \pi, & \text{wenn } \mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} - & \circ \\ \circ & - \end{pmatrix}, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} \circ & - \\ + & \circ \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5.12b)$$

für jedes  $k \in Z$ . Abschließend definieren wir

$$\varphi_{k+1} := \varphi_k + \omega_k + \rho_k \quad \text{für jedes } k \in U \setminus \{n'\} \text{ und} \quad (5.12c)$$

$$\varphi_k := \varphi_{\nu_1(k)} - \omega_k - \rho_k \quad \text{für jedes } k \in \tilde{U}. \quad (5.12d)$$

9.2) Für jedes  $k \in N$  und jedes  $i \in \hat{Z}$  gilt  ${}^i \mathcal{P}_k = \circ$  aufgrund von (iii.a). Außerdem gilt dann  $r_k = 0$ , sodass (5.11) erfüllt ist, wenn  $x \in N$  oder  $y \in N$  gilt.

9.3) Für jedes  $x, y \in Z$  mit  $x = y$  gilt  $r_x \cos(\varphi_x - \varphi_x) \in {}^x\mathcal{D}_x = +$ . Wenn  $|Z| = 1$  ist daher (5.11) erfüllt. Andernfalls folgt  $\varphi_{\nu_1(k)} - \varphi_k = \omega_k + \rho_k$  für jedes  $k \in Z \setminus \{n'\}$  aus (5.12c) und (5.12d). Mit den Additionstheoremen in (2.4) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \sin(\varphi_{\nu_1(k)} - \varphi_k) \\ \cos(\varphi_{\nu_1(k)} - \varphi_k) \end{pmatrix} = R_k \begin{pmatrix} \sin(\rho_k) \\ \cos(\rho_k) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad R_k = \begin{pmatrix} \cos(\omega_k) & \sin(\omega_k) \\ -\sin(\omega_k) & \cos(\omega_k) \end{pmatrix}. \quad (5.12e)$$

Aufgrund von (5.12b) gilt  $R_k \in \mathcal{R}_k$  für jedes  $k \in Z$ .

9.4) Für zwei verschiedene  $x, y \in U$ , ohne Einschränkungen  $y > x$ , ergibt sich  $\varphi_y - \varphi_x = \omega_x + \omega_{x+1} + \dots + \omega_{y-1} + \sum_{i=x}^{y-1} \rho_i$  aus (5.12c). Analog zu (5.12e) ergibt sich daher

$$\begin{pmatrix} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \\ \cos(\varphi_y - \varphi_x) \end{pmatrix} = R_{y-1} \dots R_{x+1} R_x \begin{pmatrix} \sin \left( \sum_{i=x}^{y-1} \rho_i \right) \\ \cos \left( \sum_{i=x}^{y-1} \rho_i \right) \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von (5.12a) gilt  $0 < \sum_{i=x}^{y-1} \rho_i \leq \sum_{i=1}^{n'-1} \rho_i < \frac{\pi}{2}$ . Zusammen mit (iii.c) und (iii.e) gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \\ \cos(\varphi_y - \varphi_x) \end{pmatrix} &\in \mathcal{R}_{y-1} \dots \mathcal{R}_{x+1} \mathcal{R}_x \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} \stackrel{(iii.c)}{=} \mathcal{R}_{y-1} \dots \mathcal{R}_{x+1} \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_{x+1} \\ {}^x\mathcal{D}_{x+1} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(iii.e)}{=} \mathcal{R}_{y-1} \dots \mathcal{R}_{x+2} \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_{x+2} \\ {}^x\mathcal{D}_{x+2} \end{pmatrix} = \dots = \mathcal{R}_{y-1} \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_{y-1} \\ {}^x\mathcal{D}_{y-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_y \\ {}^x\mathcal{D}_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gleichung (5.11) ist daher für jedes  $x, y \in U$  erfüllt.

9.5) Für jedes  $y \in \tilde{U}$  und jedes  $x \in U$ , ohne Einschränkungen der Allgemeinheit  $\nu_1(y) \geq x$ , folgt aus (5.12c) und (5.12d),  $\varphi_y - \varphi_x = \omega_x + \omega_{x+1} + \dots + \omega_{\nu_1(y)-1} + \sum_{i=x}^{\nu_1(y)-1} \rho_i = \omega_y - \rho_y$ .

Wenn  $x = \nu_1(y)$ , dann gilt mit (iii.b)

$$\begin{pmatrix} \sin(\varphi_x - \varphi_y) \\ \cos(\varphi_x - \varphi_y) \end{pmatrix} = R_x \begin{pmatrix} \sin(0) \\ \cos(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_x \begin{pmatrix} \circ \\ + \end{pmatrix} \stackrel{(iii.b)}{=} \begin{pmatrix} {}^y\mathcal{P}_x \\ {}^y\mathcal{D}_x \end{pmatrix}$$

und (5.11) ist erfüllt. Andernfalls gilt mit (iii.c) und (iii.e)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \\ \cos(\varphi_y - \varphi_x) \end{pmatrix} &= R_y^T R_{\nu_1(y)-1} \dots R_x \begin{pmatrix} \sin \left( \sum_{i=x}^{\nu_1(y)-1} \rho_i \right) \\ \cos \left( \sum_{i=x}^{\nu_1(y)-1} \rho_i \right) \end{pmatrix} \\ &\in \mathcal{R}_y^T \mathcal{R}_{\nu_1(y)-1} \dots \mathcal{R}_x \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} = \mathcal{R}_y^T \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_{\nu_1(y)} \\ {}^x\mathcal{D}_{\nu_1(y)} \end{pmatrix} \stackrel{(iii.e)}{=} \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_y \\ {}^x\mathcal{D}_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9.6) Abschließend wird der Fall  $x, y \in \tilde{U}$  untersucht, wobei ohne Einschränkungen der Allgemeinheit  $\nu_1(x) \geq \nu_1(y)$  gilt. Dann ergibt sich aus (5.12c) und (5.12d),  $\varphi_y - \varphi_x = \omega_x + \rho_x + \omega_{\nu_1(x)} + \omega_{\nu_1(x)+1} + \dots + \omega_{\nu_1(y)-1} + \sum_{i=\nu_1(x)}^{\nu_1(y)-1} \rho_i - \omega_y - \rho_y$ .

Wenn  $\nu_1(x) = \nu_1(y)$  gilt, dann folgt mit (iii.b) und (iii.e)

$$\begin{pmatrix} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \\ \cos(\varphi_y - \varphi_x) \end{pmatrix} = R_y^T R_x \begin{pmatrix} \sin(0) \\ \cos(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_y^T \mathcal{R}_x \begin{pmatrix} \circ \\ + \end{pmatrix} \stackrel{(iii.b)}{=} \mathcal{R}_y^T \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_{\nu_1(x)} \\ {}^x\mathcal{D}_{\nu_1(x)} \end{pmatrix} \\ = \mathcal{R}_y^T \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_{\nu_1(y)} \\ {}^x\mathcal{D}_{\nu_1(y)} \end{pmatrix} \stackrel{(iii.e)}{=} \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_y \\ {}^x\mathcal{D}_y \end{pmatrix}.$$

Andernfalls gilt mithilfe von (iii.c), (iii.e) und (5.10)

$$\begin{pmatrix} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \\ \cos(\varphi_y - \varphi_x) \end{pmatrix} = R_x R_y^T R_{\nu_1(y)-1} \dots R_{\nu_1(x)} \begin{pmatrix} \sin \left( \sum_{i=\nu_1(x)}^{\nu_1(y)-1} \rho_i \right) \\ \cos \left( \sum_{i=\nu_1(x)}^{\nu_1(y)-1} \rho_i \right) \end{pmatrix} \\ \in \mathcal{R}_x \mathcal{R}_y^T \mathcal{R}_{\nu_1(y)-1} \dots \mathcal{R}_{\nu_1(x)} \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} \stackrel{(iii.c)}{=} \mathcal{R}_x \mathcal{R}_y^T \begin{pmatrix} {}^{\nu_1(x)}\mathcal{P}_{\nu_1(y)} \\ {}^{\nu_1(x)}\mathcal{D}_{\nu_1(y)} \end{pmatrix} \\ \stackrel{(iii.e)}{=} \mathcal{R}_x \begin{pmatrix} {}^{\nu_1(x)}\mathcal{P}_y \\ {}^{\nu_1(x)}\mathcal{D}_y \end{pmatrix} \stackrel{(5.10)}{=} \begin{pmatrix} {}^x\mathcal{P}_y \\ {}^x\mathcal{D}_y \end{pmatrix}.$$

9.7) Die beiden Gleichungen in (5.11) sind für jedes  $x, y \in \hat{Z}$  erfüllt. Das heißt,  $q$  ist ein Element von dem komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ , welcher durch die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  beschrieben wird.  $\square$

Nach Satz 5.3.(iii) kann ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  mit drei Mengen  $U, \tilde{U}$  und  $N$  und einer Abbildung  $\nu$  beschrieben werden. Dabei sind alle Elemente von  $U$  in  $\mathfrak{D}$  unabhängig zueinander, für jede Element in  $k \in \tilde{U}$  gibt es ein Element  $i \in U$ , welches abhängig von  $k$  in  $\mathfrak{D}$  ist und jedes Element  $k \in N$  ist in  $\mathfrak{D}$  nicht von Null verschieden.

Die Funktion  $\nu: k \mapsto (i, \mathcal{R})$  ermittelt den Nachfolger  $i \in U$  von einem Element  $k \in U$  oder das zu  $k \in \tilde{U}$  abhängige Elemente  $i \in U$ . Zudem wird die Vorzeichen-Rotationsmatrix  $\mathcal{R} \in R$  übergeben, welche die Orientierung des Nachfolgers bzw. des abhängigen Elements beschreibt. Werden die Vorzeichen-Rotationsmatrizen mit den Zahlen 0 bis 3 in der Reihenfolge von (4.4) nummeriert, dann lässt sich die Funktion  $\nu$  mit einer  $2 \times n$  Matrix mit Einträgen aus  $\mathbb{Z}$  beschreiben. Die Einträge der ersten Zeile sind dann aus  $U \cup \{0\}$  und bezeichnen den Nachfolger von  $k$  bzw. das zu  $k$  abhängig Element in Spalte  $k$  und die Einträge der zweiten Zeile enthält dann den Identifier 0 bis 3 für die zugehörige

Vorzeichen-Rotationsmatrix. Die Mengen  $U$ ,  $\tilde{U}$  und  $N$  können anhand der Abbildung  $\nu$  identifiziert werden, sodass ein komplexer Vorzeichenvektor allein durch die Funktion  $\nu$  beschrieben ist.

Wenn mehrere Elemente in einem komplexen Vorzeichenvektor abhängig voneinander sind, dann ist genau ein Element davon in  $U$  und die anderen sind in  $\tilde{U}$ . In dieser Arbeit gehört immer das Kleinste aller voneinander abhängigen Elemente zu  $U$ .

Mit dem folgenden Beispiel wird gezeigt, dass die Umrechnung zwischen den beiden Darstellungen eines komplexen Vorzeichenvektors von Hand durchführbar ist, aber besonders für große Vektoren nur mit Computerunterstützung sinnvoll ist.

**Beispiel 5.2 :** Gegeben ist der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n = 7$ , der mit der folgenden Funktion beschrieben ist

$$\nu = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Für  $k = 7$  gilt  $\nu(k) = (0, \mathcal{R}_7)$ , sodass nach Satz 5.3.(iii).(a),  $N := \{7\}$  und  ${}^i\mathcal{D}_7 = {}^i\mathcal{P}_7 = \circ$  für jedes  $i \in \{1, \dots, 7\} =: \hat{Z}$  gilt. Für jedes  $i \in Z := \hat{Z} \setminus N = \{1, \dots, 6\}$  gilt daher  ${}^i\mathcal{D}_i = +$ . Außerdem gilt für jedes  $k \in Z$ ,  $\nu(k) = (i, \mathcal{R}_k)$  mit  $i \in \{1, 3, 5\} =: U$ , sodass sich  $\tilde{U} := Z \setminus U = \{2, 4, 6\}$  ergibt. Aus der zweiten Zeile von (5.13) folgt

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} + & \circ \\ \circ & - \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_6 = \begin{pmatrix} \circ & + \\ + & \circ \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_3 = \begin{pmatrix} + & \circ \\ \circ & + \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_5 = \begin{pmatrix} \circ & + \\ - & \circ \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\nu(1) = (5, \mathcal{R}_1)$ ,  $\nu(5) = (3, \mathcal{R}_5)$  und  $\nu(3) = (1, \mathcal{R}_1)$ , sodass sich aus (iii).(c)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1\mathcal{P}_5 \\ 1\mathcal{D}_5 \end{pmatrix} &= \mathcal{R}_1 \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5\mathcal{P}_3 \\ 5\mathcal{D}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_5 \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \begin{pmatrix} 3\mathcal{P}_1 \\ 3\mathcal{D}_1 \end{pmatrix} &= \mathcal{R}_3 \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & {}^2\mathcal{D}_1 & + & {}^4\mathcal{D}_1 & - & {}^6\mathcal{D}_1 & \circ \\ {}^1\mathcal{P}_2 & + & {}^3\mathcal{D}_2 & {}^4\mathcal{D}_2 & {}^5\mathcal{D}_2 & {}^6\mathcal{D}_2 & \circ \\ - & {}^2\mathcal{P}_3 & + & {}^4\mathcal{D}_3 & - & {}^6\mathcal{D}_3 & \circ \\ {}^1\mathcal{P}_4 & {}^2\mathcal{P}_4 & {}^3\mathcal{P}_4 & + & {}^5\mathcal{D}_4 & {}^6\mathcal{D}_4 & \circ \\ - & {}^2\mathcal{P}_5 & - & {}^4\mathcal{P}_5 & + & {}^6\mathcal{D}_5 & \circ \\ {}^1\mathcal{P}_6 & {}^2\mathcal{P}_6 & {}^3\mathcal{P}_6 & {}^4\mathcal{P}_6 & {}^5\mathcal{P}_6 & + & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{ergibt.}$$

Mit (iii)(b) folgt aus  $\nu(2) = (1, \mathcal{R}_2)$ ,  $\nu(4) = (3, \mathcal{R}_4)$  und  $\nu(6) = (5, \mathcal{R}_6)$

$$\begin{pmatrix} {}^2\mathcal{P}_1 \\ {}^2\mathcal{D}_1 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_2 \begin{pmatrix} \circ \\ + \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} {}^4\mathcal{P}_3 \\ {}^4\mathcal{D}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^6\mathcal{P}_5 \\ {}^6\mathcal{D}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ \circ \end{pmatrix}$$

und aus (iii).(e) mit  $k = 4 \in \tilde{U}$  und  $i = 3 \in U$  sowie  $i = 2 \in \tilde{U}$  folgt dann z.B.

$$\begin{pmatrix} {}^3\mathcal{P}_1 \\ {}^3\mathcal{D}_1 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_2 \begin{pmatrix} {}^3\mathcal{P}_2 \\ {}^3\mathcal{D}_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} {}^3\mathcal{P}_2 \\ {}^3\mathcal{D}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_2^T \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \quad \text{sowie}$$

$$\begin{pmatrix} {}^2\mathcal{P}_3 \\ {}^2\mathcal{D}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_4 \begin{pmatrix} {}^2\mathcal{P}_4 \\ {}^2\mathcal{D}_4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} {}^2\mathcal{P}_4 \\ {}^2\mathcal{D}_4 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_4^T \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich die folgende Darstellung für den komplexen Vorzeichenvektor

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & \circ & + & + & - & + & \circ \\ + & + & - & + & - & - & \circ \\ - & - & + & \circ & - & + & \circ \\ + & - & + & + & - & - & \circ \\ - & + & - & + & + & \circ & \circ \\ - & - & - & - & + & + & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}.$$

Der komplexe Vektor  $q := (1, e^{j\frac{\pi}{2}}, e^{-j\frac{\pi}{10}}, e^{j\frac{2\pi}{5}}, e^{-j\frac{4\pi}{5}}, e^{-j\frac{3\pi}{10}}, 0)^T$  ist beispielsweise ein Element von  $\mathfrak{D}$ . Da  $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4 = \varphi_5 - \varphi_6 = -\frac{\pi}{2}$  gilt, sind 2, 4 und 6 jeweils abhängig von 1, 3 und 5 in  $\mathfrak{D}$ . Außerdem gilt  $\varrho_q(5, 1) = \varrho_q(1) = \frac{\pi}{5}$ , sodass 5 ein Nachfolger von 1 ist;  $\varrho_q(3, 5) = \varrho_q(5) = \frac{\pi}{5}$ , sodass 3 ein Nachfolger von 5 ist und  $\varrho_q(1, 3) = \varrho_q(3) = \frac{\pi}{10}$ , sodass 1 ein Nachfolger von 3 ist.

**Beispiel 5.3 :** Für die beiden komplexen Vorzeichenvektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  aus Beispiel 4.1 gilt  $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{A}}$  bzw.  $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{C}}$ . Die beiden komplexen Vorzeichenvektoren sind mit

$$\nu_{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nu_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben, wobei jeweils  $U = \{1, 2\}$  und  $\tilde{U} = N = \emptyset$  gilt.

Der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  aus Beispiel 4.2 und 4.3 lässt sich mit

$$\nu_{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreiben, wobei  $U = \{1, 2, 3\}$ ,  $\tilde{U} = \{4\}$  und  $N = \emptyset$  gilt.

Der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  aus Beispiel 4.4, 4.5 und 5.1 lässt sich mit

$$\nu_{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

beschreiben, wobei  $U = \{1, 3\}$ ,  $\tilde{U} = \{2\}$  und  $N = \emptyset$  gilt. Die komplexen Vorzeichenvektoren  $\overline{\mathfrak{D}}$  und  $\mathfrak{D}'$  aus Beispiel 5.1 sind durch die Funktionen

$$\nu_{\overline{\mathfrak{D}}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nu_{\mathfrak{D}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben und für den komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  aus Beispiel 4.6 gilt

$$\nu_{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \{1, 2, 3\} \quad \text{und} \quad \tilde{U} = N = \emptyset.$$

Für die Untersuchung, ob ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  ein Vorzeichen-Eigenvektor ist, der in den ersten oder dritten Quadranten verdreht wird, muss in den Sätzen 4.13 und 4.15 u.a. geprüft werden, ob die Funktion  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  eine Drehung von  $\mathfrak{D}$  ist. Dafür kann der folgende Satz verwendet werden.

**Satz 5.4 :** *Gegeben ist ein komplexer Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ , der mit  $U$ ,  $\tilde{U}$  und  $N$  und der Funktion  $\nu: k \mapsto (\nu_1(k), \mathcal{R}_k)$  nach Satz 5.3.(iii) beschrieben ist. Für jedes  $w \in U^*$  gilt  $({}^w\mathcal{D}, {}^w\mathcal{P}) := V^*(\mathfrak{D}, w)$ . Zudem ist eine Abbildung  $\Psi_{\mathfrak{D}}: U \rightarrow \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n$ ,  $k \mapsto ({}^k\mathcal{V}, {}^k\mathcal{W})$  gegeben. Die folgenden Punkte sind äquivalent.*

- (i)  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  ist eine Drehung von  $\mathfrak{D}$ .
  - (ii) Es gibt ein  $\rho_{\lambda} \in +$ , ein  $\omega_{\lambda} \in \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$  und für jedes  $k \in U$  jeweils ein  $\rho_k \in +$ , ein  $v_k \in U^*$  und ein  $\mathcal{T}_k \in R$ , sodass die folgenden Punkte erfüllt sind.
    - (a) Es gilt  $\begin{pmatrix} {}^k\mathcal{V}^T \\ {}^k\mathcal{W}^T \end{pmatrix} = \mathcal{T}_k \begin{pmatrix} {}^{v_k}\mathcal{D}^T \\ {}^{v_k}\mathcal{P}^T \end{pmatrix}$ .
    - (b) Es gilt  $\cos(\omega_{\lambda} + \rho_{\lambda}) \in {}^k\mathcal{V}_k \neq \circlearrowleft$  und  $\sin(\omega_{\lambda} + \rho_{\lambda}) \in {}^k\mathcal{W}_k \neq \circlearrowleft$ .
    - (c) Es gilt  $\sum_{i \in U} \rho_i = \frac{\pi}{2}$ .
    - (d) Wenn  $v_k \in U$ , dann gilt  $\sum_{i \in M_k} \rho_i = \rho_{\lambda}$ .
    - (e) Wenn  $v_k \in U^* \setminus U$ , dann gilt  $\sum_{i \in M_k \setminus \{v_k\}} \rho_i < \rho_{\lambda} < \sum_{i \in M_k} \rho_i$ .
- Dabei gilt  $M_k := \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq U$  mit  $s < n'$ ,  $i_1 = |v_k|$ ,  $\nu_1(i_s) = k$  und  $i_{s+1} = \nu_1(l)$  für jedes  $l \in \{1, \dots, s-1\}$ .

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii) :  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  ist eine Drehung von  $\mathfrak{D}$ , sodass es nach Definition 4.12 einen

Vektor  $q \in \mathfrak{D}$  und eine komplexe Zahl  $\lambda = r_\lambda e^{j\varphi_\lambda} \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda), \Im(\lambda) \neq 0$  gibt und es gilt  $\Re(\lambda \cdot q/q_k) \in {}^k\mathcal{V}$  und  $\Im(\lambda \cdot q/q_k) \in {}^k\mathcal{W}$  für jedes  $k \in U$ . Die Vektoren  $r$  und  $\varphi$  beschreiben jeweils die Beträge und die Argumente von  $q$ . Wir fixieren ein  $k \in U$  und definieren  ${}^k z := \lambda \cdot q/q_k$ . Aus Satz 4.1 folgt, dass  $q \sim {}^k z$  bzw.  ${}^k z \in \mathfrak{D}$  gilt und nach Satz 4.4 gibt es ein  $v_k \in Z^*$ , o.E.d.A.  $v_k \in U^*$ , und eine Vorzeichen-Rotationsmatrix  $\mathcal{T}_k \in R$ , sodass

$$\begin{pmatrix} \Re({}^k z^T) \\ \Im({}^k z^T) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} {}^k \mathcal{V}^T \\ {}^k \mathcal{W}^T \end{pmatrix} = \mathcal{T}_k \begin{pmatrix} {}^{v_k} \mathcal{D}^T \\ {}^{v_k} \mathcal{P}^T \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

gilt. Daher ist (iia) erfüllt. Wir definieren  $\rho_\lambda := \varphi_\lambda \bmod \frac{\pi}{2}$  und  $\omega_\lambda := \frac{\pi}{2} \cdot (\varphi_\lambda \operatorname{div} \frac{\pi}{2})$ , sodass  $\rho_\lambda \in +$  und  $\omega_\lambda \in \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$  gilt und nach Gleichung (2.2) ist  $\varphi_\lambda = \omega_\lambda + \rho_\lambda$  erfüllt. Da  ${}^k z_k = q_k/q_k \lambda = \lambda$  gilt, ist mit (5.14) auch (iib) erfüllt.

Für jedes  $v \in U$  definieren wir  $\omega_v := \frac{\pi}{2} ((\varphi_{\nu_1(v)} - \varphi_v) \operatorname{div} \frac{\pi}{2})$  und  $\rho_v := (\varphi_{\nu_1(v)} - \varphi_v) \bmod \frac{\pi}{2}$ , sodass  $\varphi_{\nu_1(v)} - \varphi_v = \omega_v + \rho_v$  gilt. Aus Satz 5.3.(iii.c) folgt, dass  ${}^v \mathcal{D}_{\nu_1(v)} \neq \bigcirc \neq {}^v \mathcal{P}_{\nu_1(v)}$  bzw.

$$0 < \rho_v < \frac{\pi}{2} \quad \text{für jedes } v \in U \quad (5.15)$$

gilt und aus den Additionstheoremen in (2.4) ergibt sich für jedes  $v \in U$

$$\begin{pmatrix} \sin(\varphi_{\nu_1(v)} - \varphi_v) \\ \cos(\varphi_{\nu_1(v)} - \varphi_v) \end{pmatrix} = R_v \begin{pmatrix} \sin(\rho_v) \\ \cos(\rho_v) \end{pmatrix} \quad \text{mit } R_v = \begin{pmatrix} \cos(\omega_v) & \sin(\omega_v) \\ -\sin(\omega_v) & \cos(\omega_v) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Aufgrund von Satz 5.3.(iii.c) gilt  $R_v \in \mathcal{R}_v$ . Für je zwei verschiedene  $v, w \in U$  gibt es nach Satz 5.3.(iii.d) eine Folge  $i_1, i_2, \dots, i_p$  mit  $i_1 = v$ ,  $i_p = w$  und  $i_{l+1} = \nu_1(i_l)$  für jedes  $l \in \{1, \dots, p-1\}$ . Daher gilt  $\varphi_w - \varphi_v = \sum_{l=i_1}^{i_p-1} (\omega_l + \rho_l)$  und aus Satz 5.3.(iii.e) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} {}^v \mathcal{P}_w \\ {}^v \mathcal{D}_w \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{i_{p-1}} \dots \mathcal{R}_{i_2} \begin{pmatrix} {}^v \mathcal{P}_{\nu_1(v)} \\ {}^v \mathcal{D}_{\nu_1(v)} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{i_{p-1}} \dots \mathcal{R}_{i_1} \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}.$$

Da  $\sin(\varphi_w - \varphi_v) \in {}^v \mathcal{P}_w$  und  $\cos(\varphi_w - \varphi_v) \in {}^v \mathcal{D}_w$  und  $R_l \in \mathcal{R}_l$  für jedes  $l \in U$  gilt, muss  $\sin \left( \sum_{l=i_1}^{i_p-1} \rho_l \right) \in +$  und  $\cos \left( \sum_{l=i_1}^{i_p-1} \rho_l \right) \in +$ , bzw.

$$0 < \sum_{l=i_1}^{i_p-1} \rho_l < \frac{\pi}{2} \quad \text{mit } i_1 = v, i_p = w \neq v \text{ und} \\ i_{q+1} = \nu_1(i_q) \text{ für } q \in \{1, \dots, p-1\} \quad (5.17)$$

erfüllt sein. Für ein beliebiges  $v \in U$  gilt

$$0 = \varphi_v - \varphi_v = \varphi_{\nu_1(v)} + \rho_v + \omega_v - \varphi_v = \dots = \varphi_v - \varphi_v + \sum_{i \in U} (\rho_i + \omega_i),$$

sodass  $\sum_{i \in U} \rho_i = -\sum_{i \in Z} \omega_i$  erfüllt ist. Zusammen mit (5.17) gilt daher  $\sum_{i \in U} \rho_i = \frac{\pi}{2}$  und die Aussage in (iic) ist erfüllt.

Wenn  $v_k \in U$  gilt, dann gilt  ${}^{v_k} \mathcal{P}_{v_k} = \circlearrowleft$  und aus (5.14) folgt, dass entweder  $\Re(e^{j\varphi_\lambda} q_{v_k}/q_k) = 0$  oder  $\Im(e^{j\varphi_\lambda} q_{v_k}/q_k) = 0$  gilt. Daher gilt

$$(\varphi_\lambda + \varphi_{v_k} - \varphi_k) \bmod \frac{\pi}{2} = \left( \rho_\lambda - \sum_{l=1}^{p-1} \rho_{i_l} \right) \bmod \frac{\pi}{2} = 0.$$

mit  $i_1 = v_k$ ,  $\nu_1(i_q) = i_{q+1}$  für  $q \in \{1, \dots, p-1\}$  und  $i_p = k$ . Aus (5.17) ergibt sich daher  $\sum_{l \in M_k} \rho_l = \rho_\lambda$  und die Aussage in (iid) ist erfüllt.

Wenn anderenfalls  $v_k \in U^* \setminus U$  gilt, dann gilt aufgrund der Wahl von  $v_k$ ,  $(\varphi_\lambda + \varphi_w - \varphi_k - \epsilon_k) \bmod \frac{\pi}{2} = 0$  mit  $w = \nu_1(|v_k|)$  und  $0 < \epsilon_k < \rho_{|v_k|}$  (siehe Beweis von Satz 4.4). Daher gilt

$$0 < \epsilon_k = \rho_\lambda - \sum_{l=1}^{p-1} \rho_{i_l} < \rho_{|v_k|}$$

mit  $i_1 = w$ ,  $\nu_1(i_q) = i_{q+1}$  für  $q \in \{1, \dots, p-1\}$  und  $i_p = k$ . Die Aussage (iie) ist erfüllt.

Für die Umkehrung (ii)  $\implies$  (i) definieren wir mit (iic)  $q$  analog zu Punkt 9) von dem Beweis von Satz 5.3, sodass  $q \in \mathfrak{D}$  gilt. Weiterhin definieren wir  $\varphi_\lambda := \omega_\lambda + \rho_\lambda$  und  $\lambda := r_\lambda \cdot e^{j\varphi_\lambda}$  mit  $r_\lambda \in +$  und wir fixieren ein  $k \in U$  und ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Ohne Einschränkungen gilt  $U = \{1, \dots, n'\}$ ,  $i \geq k$ ,  $|v_k| = 1$  und  $\nu_1(q) = q+1$  für alle  $q \in \{1, \dots, n'-1\}$ . Damit ergibt sich  $M_k = \{1, \dots, k-1\}$  und aufgrund von (iid) und (iie) gilt  $\rho_\lambda = \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l - \epsilon_k$  mit  $\epsilon_k = 0$ , wenn  $v_k \in U$  und  $\rho_{|v_k|} > \epsilon_k > 0$ , wenn  $v_k \in U^* \setminus U$ . Es gilt

$$\varphi_\lambda + \varphi_i - \varphi_k = \omega_\lambda + \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l - \epsilon_k + \sum_{l=k}^{i-1} (\omega_l + \rho_l) = \Omega_k + \varphi_i - \varphi_{|v_k|} - \epsilon_k \quad (5.18)$$

mit  $\Omega_k = \omega_\lambda - \sum_{l=1}^{k-1} \omega_l$ . Aus (5.18) mit  $i = k$ , (iia) und (iib) folgt

$$T_k = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_k) & \sin(\Omega_k) \\ -\sin(\Omega_k) & \cos(\Omega_k) \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_k \in R, \quad \text{sodass}$$

$$r_\lambda \frac{r_i}{r_k} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_\lambda + \varphi_i - \varphi_k) \\ \sin(\varphi_\lambda + \varphi_i - \varphi_k) \end{pmatrix} = T_k r_\lambda \frac{r_i}{r_k} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i - \varphi_{|v_k|} - \epsilon_k) \\ \sin(\varphi_i - \varphi_{|v_k|} - \epsilon_k) \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_k \begin{pmatrix} {}^{v_k} \mathcal{D}_i \\ {}^{v_k} \mathcal{P}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^k \mathcal{V}_i \\ {}^k \mathcal{W}_i \end{pmatrix}$$

und somit auch (i) erfüllt ist.  $\square$

### 5.3 Überprüfung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit

In diesem Abschnitt wird die Lösbarkeit der Entscheidungsprobleme, ob ein Vorzeichen-System vorzeichen-steuerbar oder vorzeichen-stabilisierbar ist, untersucht, bevor eine algorithmische Lösung diskutiert wird. Dafür wird zunächst ein Ergebnis von KLEE, LADNER und MANBER zur strengen Surjektivität von Vorzeichenmatrizen vorgestellt. Für einen Überblick zur Komplexitätstheorie von algorithmischen Problemstellungen wird auf das Buch [GJ79] verwiesen.

**Satz 5.5 ([KLM84], S. 134, Theorem 1.2.):** *Gegeben ist eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ . Das Entscheidungsproblem, ob die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X}$  nicht streng surjektiv ist, ist NP-vollständig.*

Die strenge Surjektivität einer unsicheren Matrix kann nach Satz 3.7 mit  $(3^n - 1)/2$  Tests<sup>6</sup> überprüft werden. Aus Satz 5.5 lässt sich der folgende Satz ableiten.

**Satz 5.6 :** *Gegeben sind zwei Vorzeichenmatrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{V}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$ . Die beiden Entscheidungsprobleme,*

- *ob das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nicht vorzeichen-steuerbar und*
- *ob das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nicht vorzeichen-stabilisierbar*

*ist, sind NP-vollständig.*

*Beweis.* Die Entscheidungsprobleme gehören zu  $NP$ , da mit einem gegebenen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  und einer Drehung  $\Psi_{\mathfrak{D}}$  mit den Sätzen 3.16, 3.21, 4.8, 4.11, 4.14 und 4.16 in Polynomialzeit verifiziert werden kann, dass das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nicht vorzeichen-steuerbar bzw. nicht vorzeichen-stabilisierbar ist.

Um die NP-Schwere von den beiden Problemen zu zeigen, sei eine beliebige Vorzeichenmatrix  $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{n \times m}$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  gegeben und wir definieren  $\mathcal{A} := \bigcirc \in \mathbb{V}^{n \times n}$ . Aus den Sätzen 2.5.(iv) und 2.8.(iii) mit  $\lambda = 0$  folgt, dass das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$  genau dann vorzeichen-steuerbar bzw. vorzeichen-stabilisierbar ist, wenn die Vorzeichenmatrix  $(\mathcal{A}, \mathcal{X}) = (\bigcirc, \mathcal{X})$  streng surjektiv ist. Beide Entscheidungsprobleme lassen sich daher auf das Entscheidungsproblem aus Satz 5.5 reduziert.  $\square$

<sup>6</sup> Es gibt genau  $3^n - 1$  von Null verschiedene Vorzeichenvektoren und nur die Hälfte davon muss überprüft werden, da ein Test für  $\mathcal{D}$  und  $-\mathcal{D}$  genügt.

Nach Satz 5.1 kann ein gegebenes Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  auf die Vorzeichen-Steuerbarkeit untersucht werden, indem die Bedingung (iii) für jeden komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  getestet wird. Der Aufwand einer solchen Untersuchung hängt daher im Wesentlichen von der Anzahl der komplexen Vorzeichenvektoren einer Ordnung  $n$  ab. Diese lässt sich mit dem Wert  $3^{n^2}$  nach oben abschätzen, da jeder komplexe Vorzeichenvektor mit einer Vorzeichenmatrix aus  $\mathbb{V}^{n \times n}$  dargestellt werden kann. Die genaue Anzahl komplexer Vorzeichenvektoren liegt deutlich unter dieser Schranke und kann mit dem folgenden Satz ermittelt werden.

**Satz 5.7 :** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt es

$$\kappa(n) = 1 + \sum_{l=1}^n 4^{l-1} \cdot \binom{n}{l} \cdot \sum_{k=1}^l (k-1)! \cdot \left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\} \quad (5.19)$$

verschiedene komplexe Vorzeichenvektoren der Ordnung  $n$ , wobei die Ausdrücke  $\binom{n}{l}$  und  $\left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\}$  jeweils die Binomialkoeffizienten und die Stirling Nummer zweiter Art beschreiben.

*Beweis.* Nach Satz 5.3 lässt sich jeder komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  mit den drei Mengen  $U$ ,  $\tilde{U}$  und  $N$  und einer Funktion  $\nu$  beschreiben. Alle Elemente in  $Z := U \cup \tilde{U}$  sind dabei von Null verschieden und wir bezeichnen die Anzahl der Elemente von  $Z$  und  $U$  jeweils mit  $l$  und  $k$ , d.h.  $k := |U| \leq |Z| =: l \leq n$ . Für jedes der  $l - k$  Elemente in  $\tilde{U}$  gibt es ein Element in  $U$ , sodass diese beiden Elemente abhängig voneinander sind. Wir gruppieren jeweils die voneinander abhängigen Elemente in  $Z$ , sodass genau  $k$  Gruppen entstehen. Aus Satz 5.3.(iid) folgt, dass die Funktion  $\nu$  eine zyklische Permutation dieser  $k$  Gruppen beschreibt.

Die Stirling Nummer zweiter Art  $\left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\}$  mit  $k \leq l$  gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, um  $l$  Elemente in  $k$  nichtleere Gruppen zu verteilen [Bru09, S.285, Theorem 8.2.5]. Es gibt  $(k-1)!$  verschiedene zyklische Permutationen dieser  $k$  Gruppen und es gibt  $\binom{n}{l}$  verschiedene Möglichkeiten, die verbleibenden  $n - l$  Elemente aus  $N$  in dem komplexen Vorzeichenvektor zu verteilen. Jedes von Null verschiedene Element ist auf eine von vier möglichen Arten mit einem anderen von Null verschiedenen Element verbunden. Aus diesen Überlegungen ergibt sich unmittelbar Gleichung (5.19).  $\square$

In Tabelle 5.1 ist die Anzahl  $\kappa(n) - 1$  aller von Null verschiedenen komplexen Vorzeichenvektoren der Ordnung  $n$  für  $n$  von 1 bis 5 sowie 10 dargestellt.

Demnach müssen im ungünstigsten Fall deutlich mehr Tests durchgeführt werden, um ein Vorzeichen-System der Ordnung  $n = 5$  auf Vorzeichen-Steuerbarkeit als eine unsichere

Tabelle 5.1: Die Anzahl verschiedener Größen im Vergleich.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 10$
Tests zum Nachweis der strengen Surjektivität $= (3^n - 1)/2$	1	4	13	40	121	29524
Anzahl komplexer Vorzeichenmuster $= 9^n - 1$	8	80	728	6560	59048	$\approx 3.5 \cdot 10^9$
Anzahl komplexer Vorzeichenvektoren $= \kappa(n) - 1$	1	10	123	2100	47765	$\approx 4.5 \cdot 10^{12}$

Matrix der Dimension  $n = 10$  auf strenge Surjektivität zu untersuchen.

Mit den Sätzen 5.1 und 5.2 kann ein gegebenes Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  auf Vorzeichen-Steuerbarkeit oder Vorzeichen-Stabilisierbarkeit untersucht werden, indem geprüft wird, ob jeder komplexe Vorzeichenvektor die Bedingungen aus den Sätzen 5.1.(iii) bzw. 5.2.(ii) erfüllt. Ein Algorithmus zur Überprüfung der Bedingung (iii) von Satz 5.1 für einen konkreten komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  ist in Algorithmus 1 beschrieben.

In den Zeilen 2 bis 6 wird zunächst überprüft, ob  $\mathfrak{D}$  reell darstellbar (Zeile 2), im Kokern von  $\mathcal{B}$  (Zeile 4) und ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  zu einem reellen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist (5).  $\mathfrak{D}$  ist reell darstellbar (Zeile 2), wenn  $\mathfrak{D}_{i,k} = \circ$  für jedes  $1 \leq k < i \leq n$  gilt (siehe Abschnitt 4.2) und die Tests in den Zeilen 4 und 5 lassen sich leicht mit den in Abschnitt 2.4 definierten Rechenoperationen durchführen. Wenn  $\mathfrak{D}$  nicht reell darstellbar ist, dann wird in Zeile 7 überprüft, ob  $\mathfrak{D}$  im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist. Dies kann mit Bedingung (ii) aus Satz 4.8 für jedes charakteristische Vorzeichenmuster von  $\mathfrak{D}$  überprüft werden. Anschließend wird in Zeile 8 getestet, ob  $\mathfrak{D}$  ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist, der um 90 Grad verdreht wird, wofür Bedingung (ii) aus Satz 4.10 verwendet werden kann. Die Überprüfung, ob  $\mathfrak{D}$  ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist, der in den ersten oder in den dritten Quadranten verdreht wird, kann mit den Sätzen 4.13 bzw. 4.15 sowie 5.4 durchgeführt werden. Dabei wird mithilfe von Satz 5.4 zunächst überprüft, ob es für jedes  $k \in U$  ein  $v_k \in U^*$  und ein  $\mathcal{T}_k$  aus  $R$  gibt, sodass mit

$$\begin{pmatrix} k\mathcal{V}^T \\ k\mathcal{W}^T \end{pmatrix} = \mathcal{T}_k \begin{pmatrix} v_k \mathcal{D}^T \\ v_k \mathcal{P}^T \end{pmatrix}$$

die Bedingungen in (ii) von Satz 4.13 bzw. 4.15 erfüllt sind. Wenn es dann zusätzlich ein  $\rho_\lambda$ , ein  $\omega_\lambda$  und für jedes  $k \in U$  ein  $\rho_k$  gibt, sodass die Bedingungen (iic) bis (iie) von Satz 5.4 erfüllt sind, dann ist  $\mathfrak{D}$  ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ , der in den ersten bzw. dritten Quadranten verdreht wird. Die Bedingungen (iic) bis (iie) von Satz 5.4 beschreiben

---

**Algorithm 1** Test, ob  $\mathfrak{D}$  im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist und ob eine der Bedingungen (a) bis (f) von Satz 5.1.(iii) erfüllt ist.

---

**require:**  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{V}^{n \times n+r}$ ,  $\mathfrak{D}$  komplexer Vorzeichenvektor der Ordnung  $n$

- 1: **procedure** `is_in_cokernel_and_sign_ev`( $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathfrak{D}$ )
- 2:     **if**  $\mathfrak{D}$  ist reell darstellbar **then**
- 3:          $\mathcal{D} :=$  reelle Darstellung von  $\mathfrak{D}$ .
- 4:         **if**  $\circ \subseteq \mathcal{D}^T \mathcal{B}$  **then**
- 5:             **if**  $(\circ \subseteq \mathcal{D}^T \mathcal{A}) \vee (\mathcal{D}^T \subseteq \mathcal{D}^T \mathcal{A}) \vee (-\mathcal{D}^T \subseteq \mathcal{D}^T \mathcal{A})$  **then**
- 6:                 **return** 1;
- 7:         **if**  $\mathfrak{D}$  ist im Kokern von  $\mathcal{B}$  (Satz 4.8) **then**
- 8:             **if**  $\mathfrak{D}$  wird um 90 Grad verdreht (Satz 4.10) **then**
- 9:                 **return** 1;
- 10:         **if**  $\mathfrak{D}$  wird in den ersten Quadranten verdreht (Satz 4.13 und 5.4) **then**
- 11:                 **return** 1;
- 12:         **if**  $\mathfrak{D}$  wird in den dritten Quadranten verdreht (Satz 4.15 und 5.4) **then**
- 13:                 **return** 1;
- 14:         **return** 0;

---

ein Ungleichungssystem, welches z.B. mit dem Fourier-Motzkin Algorithmus auf seine Lösbarkeit untersucht werden kann [Sch98, S. 155-156].

Ein Algorithmus zur Prüfung der Bedingung (ii) von Satz 5.2 kann ähnlich zu Algorithmus 1 verlaufen, wobei der Test  $-\mathcal{D}^T \subseteq \mathcal{D}^T \mathcal{A}$  in Zeile 5 und der Test in Zeile 12 nicht durchgeführt werden darf.

Im Gegensatz zur Vorzeichen-Steuerbarkeit lassen sich die Entscheidungsprobleme, ob eine strukturelle Matrix streng strukturell surjektiv ist und ob ein strukturelles System streng strukturell steuerbar ist, in Polynomialzeit lösen (siehe z.B. [WRS14]). Da jedes streng strukturell steuerbare System vorzeichen-steuerbar und vorzeichen-stabilisierbar ist, sollte in jedem Test auf Vorzeichen-Steuerbarkeit bzw. Vorzeichen-Stabilisierbarkeit eine vorherige Prüfung der strengen strukturellen Steuerbarkeit stattfinden.

In physikalischen Modellen von technischen Systemen kommt es oft vor, dass die Eingangsmatrix  $B$  in einer Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag besitzt. Mit dem folgenden Satz kann dann die Anzahl der Test bei der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit deutlich verringert werden.

**Satz 5.8 :** Gegeben sind zwei unsichere Matrizen  $\mathcal{A} \in \mathbb{U}^{n \times n}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{U}^{n \times r}$  mit  $n, r \in \mathbb{N}$  und  $n > 1$  und es wird angenommen, dass eine Spalte  $i \in \{1, \dots, r\}$  von  $\mathcal{B}$  genau einen von Null verschiedenen Eintrag  $\circlearrowleft \notin \mathcal{B}_{k,i}$  in Zeile  $k \in \{1, \dots, n\}$  besitzt.

Die folgenden Eigenschaften sind dann erfüllt.

- (i) Jeder komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  mit  $\mathfrak{D}_{k,k} \neq \circlearrowleft$  ist nicht im Kokern von  $\mathcal{B}$ .
- (ii) Das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{U}^{n \times (n+r)}$  ist genau dann vorzeichen-steuerbar, wenn das unsichere System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \in \mathbb{U}^{(n-1) \times (n+r-1)}$  vorzeichen-steuerbar ist.
- (iii) Das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{U}^{n \times (n+r)}$  ist genau dann vorzeichen-stabilisierbar, wenn das unsichere System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \in \mathbb{U}^{(n-1) \times (n+r-1)}$  vorzeichen-stabilisierbar ist.

Bei ist  $\mathcal{A}'$  eine  $(n-1) \times (n-1)$  unsichere Matrix bestehend aus den Zeilen und Spalten von  $\mathcal{A}$  mit dem Index aus  $Z := \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$  und  $\mathcal{B}'$  ist eine  $(n-1) \times r$  unsichere Matrix bestehend aus den Spalten von  $\mathcal{B}$  mit dem Index aus  $\{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$  sowie aus der Spalte  $k$  von  $\mathcal{A}$  und den Zeilen mit dem Index aus  $Z$ .

*Beweis.* (i) : Wir fixieren einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  mit  $\mathfrak{D}_{k,k} \neq \circlearrowleft$  und  $({}^k\mathcal{D}, {}^k\mathcal{P})$  bezeichnet das  $k$ -te charakteristische Vorzeichenmuster von  $\mathfrak{D}$ . Die Matrix  $\mathcal{B}$  besitzt in der Spalte  $i$  nur in Zeile  $k$  einen von Null verschiedenen Eintrag, sodass für den  $i$ -ten Eintrag des Vorzeichenvektors  $\mathcal{Y}^T := {}^k\mathcal{D}^T \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \sum_{l=1}^n {}^k\mathcal{D}_l \mathcal{B}_{l,i} = {}^k\mathcal{D}_k \mathcal{B}_{i,k}$  gilt. Aufgrund der Annahme gilt  $\circlearrowleft \notin \mathcal{B}_{i,k}$  und  ${}^k\mathcal{D}_k \neq \circlearrowleft$ , sodass  $\circlearrowleft \notin \mathcal{Y}_i$  sowie  $\circlearrowleft \notin {}^k\mathcal{D}^T \mathcal{B}$  erfüllt ist. Der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  ist daher nach Satz 4.8 nicht im Kokern von  $\mathcal{B}$ .

(ii) : Ohne Einschränkungen der Allgemeinheit gilt  $k = n$  und  $i = r$ , und wir nehmen zunächst an, dass  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  nicht vorzeichen-steuerbar ist. Dann gibt es ein System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \in (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ , ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  und einen Vektor  $\tilde{q} \in \mathbb{C}^n$ , sodass  $\tilde{q}^T \mathcal{A}' = \tilde{q}^T \lambda$  und  $\tilde{q}^T \mathcal{B}' = 0$  gilt. Wir definieren  $A \in \mathcal{A}$ , sodass die ersten  $(n-1)$  Zeilen und Spalten identisch zu  $\mathcal{A}'$  sind und die ersten  $(n-1)$  Zeilen der letzten Spalte identisch zur letzten Spalte von  $\mathcal{B}'$  ist. Außerdem definieren wir  $B \in \mathcal{B}$ , sodass die ersten  $(n-1)$  Zeilen und  $(r-1)$  Spalten von  $B$  identisch zu den ersten  $(r-1)$  Spalten von  $\mathcal{B}'$  sind. Die letzte Zeile von  $A$  und  $B$  wird jeweils so gewählt, dass sie eine zulässige Realisierung  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$  ist. Mit  $q := (\tilde{q}^T, 0)^T$  gilt dann  $q^T A = q^T \lambda$  und  $q^T B = 0$ , sodass das System  $(A, B) \in (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nicht steuerbar ist.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass das unsichere System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nicht vorzeichen-steuerbar ist. Nach Satz 5.1 gibt es dann einen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$ , der im Kokern von  $\mathcal{B}$  und zugleich Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  ist und aufgrund von (i) gilt  $\mathfrak{D}_{n,n} = \circlearrowleft$ . Der komplexe Vorzeichenvektor  $\tilde{\mathfrak{D}}$  bestehend aus den ersten  $(n-1)$  Zeilen und Spalten von  $\mathfrak{D}$  ist dann im Kokern von  $\mathcal{B}'$  und zugleich Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}'$ , sodass das unsichere System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  nach Satz 5.1 nicht vorzeichen-steuerbar ist.

Der Beweis von (iii) verläuft analog zum Beweis von (ii).  $\square$

Wenn ein Spalte von der Vorzeichenmatrix  $\mathcal{B}$  eines Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  der Dimension  $n$  genau einen von Null verschiedenen Eintrag besitzt, dann reduziert sich mit Satz 5.8 die Prüfung der Vorzeichen-Steuerbarkeit bzw. der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit auf eine Prüfung eines kleineren Systems der Ordnung  $n - 1$ . Für ein System der Ordnung  $n = 5$  müssen dann beispielsweise anstatt der 47765 (siehe Tabelle 5.1) nur noch 2100 komplexe Vorzeichenvektoren überprüft werden, sodass in diesem Fall rund 96% der Tests eingespart werden können. Die Methode aus Satz 5.8 kann auch auf streng surjektive Untermatrizen von  $\mathcal{B}$  erweitert werden (siehe Abschnitt 5.4.2).

---

**Algorithm 2** Rekursiver Algorithmus zum Test der Vorzeichen-Steuerbarkeit.

---

**require:**  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{V}^{n \times r}$ ,  $n, r \in \mathbb{N}$

```

1: procedure is_sign_controllable( $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ )
2:   if  $\mathcal{B}$  hat eine Spalte  $i$  mit genau einem Eintrag  $\mathcal{B}_{k,i} \neq 0$  then
3:     if  $n = 1$  then
4:       return 1;
5:     else
6:        $N := \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$ ;  $M := \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$ ;
7:        $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A}[N, N]$ ;  $\tilde{\mathcal{B}} := [\mathcal{B}[N, M], \mathcal{A}[N, k]]$ ;
8:       return is_sign_controllable( $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ );
9:   else
10:    if  $n = 1$  then
11:      return 0;
12:    if is_structurally_controllable( $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ) then
13:      return 1;
14:    if not(is_structurally_controllable( $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ )) then
15:      return 0;
16:    for jeden komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D} \neq 0$  do
17:      if is_in_cokernel_and_sign_ev( $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathfrak{D}$ ) then
18:        return 0;
19:   return 1;

```

---

Ein rekursiver Algorithmus zur Überprüfung der Vorzeichen-Steuerbarkeit ist in Algorithmus 2 beschrieben. Dabei wird in den Zeilen 2 bis 8 die Methode aus Satz 5.8 umgesetzt. In Zeile 2 wird überprüft, ob  $\mathcal{B}$  eine Spalte mit genau einem von Null verschiedenen Eintrag besitzt. Wenn  $n = 1$  gilt, dann ist das System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  vorzeichen-steuerbar und es wird in Zeile 4 der Wert 1 ausgegeben. Andernfalls ist  $n > 1$

und nach Satz 5.8 ist das System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  genau dann vorzeichen-steuerbar, wenn das kleinere System  $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$  der Ordnung  $n - 1$  vorzeichen-steuerbar ist (Zeile 6 bis 8).

Falls  $\mathcal{B}$  keine Spalte mit genau einem von Null verschiedenen Eintrag besitzt und  $n = 1$  gilt, dann ist das System nicht vorzeichen-steuerbar und der Algorithmus liefert in Zeile 10 eine 0. Wenn  $n > 1$  gilt, dann wird nach der Prüfung auf strenge strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Steuerbarkeit in den Zeilen 12 und 14 ab Zeile 16 mit Algorithmus 1 überprüft, ob Bedingung (iii) von Satz 5.1 für jeden komplexen Vorzeichenvektoren erfüllt ist.

**Beispiel 5.4 :** Gegeben ist das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} - & + & + & - \\ + & + & - & + \\ - & + & - & + \\ + & - & + & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ + & - \\ \circ & \circ \\ \circ & + \end{pmatrix}.$$

Die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{B}$  hat in Spalte 1 genau einen von Null verschiedenen Eintrag in Zeile 2, sodass nach Satz 5.8 jeder komplexe Vorzeichenvektor mit  $\mathfrak{D}_{2,2} \neq \circ$  im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist. Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist daher genau dann vorzeichen-steuerbar oder vorzeichen-stabilisierbar, wenn das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  mit

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} - & + & - \\ - & - & + \\ + & + & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} + & \circ \\ + & \circ \\ - & + \end{pmatrix}$$

vorzeichen-steuerbar bzw. vorzeichen-stabilisierbar ist. Die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{B}'$  hat wiederrum in Spalte 2 genau einen von Null verschiedenen Eintrag in Zeile 3, sodass eine Untersuchung des Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'')$  mit

$$\mathcal{A}'' = \begin{pmatrix} - & + \\ - & - \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}'' = \begin{pmatrix} + & - \\ + & + \end{pmatrix}$$

ausreichend ist. Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'')$  ist strukturell steuerbar, aber nicht streng strukturell steuerbar, da mit  $\mathcal{Q} = (\star, \star)^T$ ,  $\circ \subset \mathcal{Q}^T(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\otimes, \otimes, \otimes, \otimes)$  gilt und Bedingung (iii) von Satz 3.12 nicht erfüllt ist.

Für jeden Vorzeichenvektor  $\mathcal{Q} \in \mathbb{V}^2$  gilt  $\circ \not\subset \mathcal{Q}^T \mathcal{B}''$ . Die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{B}''$  ist daher nach Satz 3.7 streng surjektiv und jeder komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D} \neq \circ$  ist somit nicht im Kokern von  $\mathcal{B}''$ . Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'')$  ist aufgrund der Sätze 5.1 und 5.2 vorzeichen-steuerbar und vorzeichen-stabilisierbar, sodass auch das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit Satz 5.8 vorzeichen-steuerbar und vorzeichen-stabilisierbar ist.

Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  der Ordnung  $n = 4$  ist nicht streng strukturell steuerbar und die Matrix  $\mathcal{A}$  erlaubt komplexe Eigenwerte. Algorithmus 2 bestimmt jedoch mit verhältnismäßig wenig Aufwand, dass das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  vorzeichen-steuerbar ist.

## 5.4 Zwei weitere Beispiele

In diesem Abschnitt werden abschließend zwei anwendungsnahe Systeme der Form (1.1) auf strenge strukturelle Steuerbarkeit, Vorzeichen-Steuerbarkeit sowie Vorzeichen-Stabilisierbarkeit untersucht.

### 5.4.1 Modell eines F-8 Strahlflugzeugs

In [Ell77] wird ein lineares zeitinvariantes System der Form (1.1) für die Längsdynamik eines F-8 Strahlflugzeugs bei einer Geschwindigkeit von 620 ft/s ( $\approx 680$  km/h) und einer Höhe von 20000 ft ( $\approx 6$  km) mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -0.49 & 0.0005 & -4.8 & 0 \\ 0 & -0.015 & -14 & -32.2 \\ 1 & -0.00019 & -0.84 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} := \begin{pmatrix} \dashv & + & + & \circ \\ \circ & \dashv & - & \dashv \\ + & - & - & \circ \\ + & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$B = \begin{pmatrix} -8.7 & 0 \\ -1.1 & 8.9 \\ -0.11 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B} := \begin{pmatrix} \dashv & \circ \\ \dashv & + \\ \dashv & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

vorgestellt. Die vier Zustandsgrößen  $x_1$  bis  $x_4$  beschreiben dabei jeweils die Nickwinkelrate, die Geschwindigkeit, den Anstellwinkel und den Nickwinkel des Flugzeugs und die Größen  $u_1$  und  $u_2$  repräsentieren jeweils die Höhenruder- und die Gasposition. In Abbildung 5.7 ist das F-8 Strahlflugzeug aus [Ell77] skizziert.

Mit dem strukturellen Vektor  $\mathcal{Q} = (\star, \circ, \star, \circ)^T$  gilt  $\circ \subset \mathcal{Q}^T(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\circ, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ)$ , sodass das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 3.11 nicht streng strukturell steuerbar ist. Da  $\mathcal{A}_{1,2} \cdot \mathcal{A}_{2,3} \cdot \mathcal{A}_{3,1} = \dashv \neq \circ$  gilt, ist die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  nach Satz 3.18.(c) nicht vorzeichen-stabil und  $\mathcal{A}$  erlaubt komplexe Eigenwerte.

Die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{B}$  besitzt in Spalte 2 genau einen von Null verschiedenen Eintrag in Zeile 2, sodass nach Satz 5.8 jeder komplexe Vorzeichenvektor mit  $\mathfrak{D}_{2,2} \neq \circ$

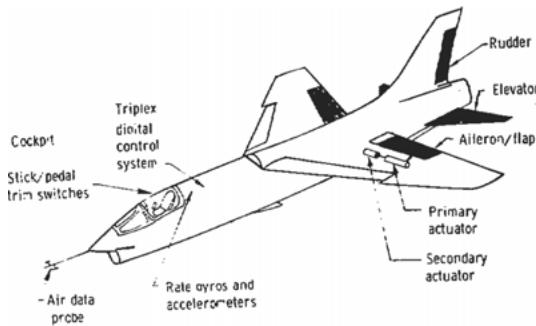


Abbildung 5.7: Skizze eines F-8 Strahlflugzeugs (aus [Ell77])

nicht im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist. Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist daher genau dann vorzeichen-steuerbar bzw. vorzeichen-stabilisierbar, wenn das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$

$$\text{mit } \mathcal{A}' = \begin{pmatrix} \dashv & \dashv & \circ \\ + & \dashv & \circ \\ + & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} \dashv & + \\ \dashv & \dashv \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

vorzeichen-steuerbar bzw. vorzeichen-stabilisierbar ist.

Die Matrix  $\mathcal{B}'$  setzt sich aus der streng surjektiven Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} \dashv & + \\ \dashv & \dashv \end{pmatrix}$$

in den ersten beiden Zeilen und einer Zeile mit Null-Einträgen zusammen. Daraus folgt analog zu Satz 5.8, dass jeder komplexe Vorzeichenvektor mit  $\mathfrak{D}_{1,1} \neq \circ$  oder  $\mathfrak{D}_{2,2} \neq \circ$  nicht im Kokern von  $\mathcal{B}$  ist. Zudem gilt für jedes  $A \in \mathcal{A}'$ , jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  und jeden Vektor  $q \in \mathbb{C}^3$  mit  $q_1 = q_2 = 0$  und  $q_3 \neq 0$ ,  $q^T(A - \lambda I_3) = (q_3 A_{3,1}, 0, -\lambda q_3) \neq 0$ , sodass kein komplexer Vorzeichenvektor mit  $\mathfrak{D}_{1,1} = \mathfrak{D}_{2,2} = \circ$  ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}'$  ist. Die Vorzeichen-Systeme  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  und  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  sind daher vorzeichen-steuerbar und vorzeichen-stabilisierbar.

Wird nun angenommen, dass die Höhenruderposition nicht als Stellgröße zur Verfügung steht, dann ergibt sich das Vorzeichen-System  $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$  mit

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \dashv & + & \dashv & \circ \\ \circ & \dashv & \dashv & \dashv \\ + & \dashv & \dashv & \circ \\ + & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \circ \\ + \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

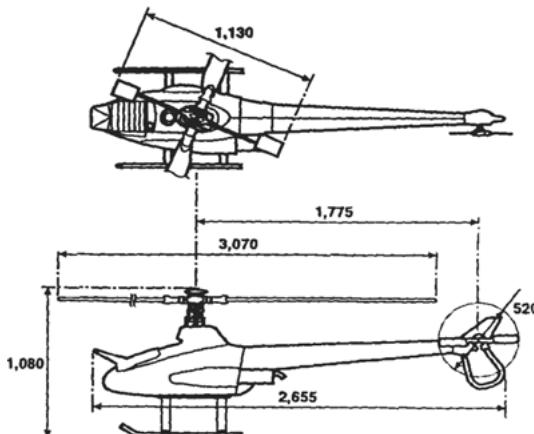


Abbildung 5.8: Skizze des unbemannten Helikopters „Yamaha R-50“ (aus [MTK99]).

Mit  $\mathcal{Q} = (+, \circ, +, \circ)^T$  gilt  $-\mathcal{Q}^T \subset \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{A}} = (\circ, \circ, -, \circ)$  und  $\mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{B}} = \circ$ . Aufgrund von Satz 3.15 gibt es ein  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ , ein  $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$  und ein  $\lambda \in -$ , sodass der Wert  $\lambda$  nicht  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ -steuerbar ist. Das Vorzeichen-System  $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$  ist daher nicht vorzeichen-steuerbar.

$\mathcal{Q}$  ist dabei eine reelle Darstellung von dem komplexen Vorzeichenvektor

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & \circ & + & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & + & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \nu_{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Untersuchung des Vorzeichen-Systems  $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$  mit jedem anderen komplexen Vorzeichenvektor ergibt, dass  $\mathfrak{D}$  der einzige komplexe Vorzeichenvektor ist, der Vorzeichen-Eigenvektor von  $\tilde{\mathcal{A}}$  und zugleich im Kokern von  $\tilde{\mathcal{B}}$  ist. Alle anderen Vorzeichen-Eigenvektoren von  $\tilde{\mathcal{A}}$  sind nicht im Kokern von  $\tilde{\mathcal{B}}$  und das Vorzeichen-System  $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$  ist nach Satz 5.2 vorzeichen-stabilisierbar.

Zusammenfassend gibt es lineare zeitinvariante Systeme  $(A, B)$  mit  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$  und  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$  nach (5.20), welche nicht steuerbar sind, aber jedes dieser Systeme ist stabilisierbar.

#### 5.4.2 Modell eines unbemannten Helicopters

In [MTK99] wird ein lineares zeitinvariantes System der Form (1.1) zur Beschreibung der Dynamik eines unbemannten Helikopters im Schwebeflug vorgestellt. Der untersuchte Helikopter mit der Bezeichnung „Yamaha R – 50“ ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

Das Modell des Hubschraubers hat 11 Zustands- und 4 Eingangsgrößen und gehört zu dem Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , welches mit den Vorzeichenmatrizen

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \star & \circ & \circ & \circ & \circ & \star & \star & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \star & \circ & \circ & + & \circ & \circ & + & \circ & \circ & \circ \\ \star & + & \circ & \circ & \circ & \circ & + & + & \circ & \circ & \circ \\ \star & \star & \circ & \circ & \circ & \circ & + & \star & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & + & \circ \\ \circ & \circ & \circ & + & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \star & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \star & \circ & \circ & + & \star & \circ & \circ & \circ \\ \circ & + \\ \circ & \circ & \circ & \star & \circ & \circ & \circ & \circ & + & \star & \circ \\ \circ & + & + \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

beschrieben ist. Für den Vektor

$$\mathcal{Q} = (\star \ \star \ \star \ \star \ \star \ \star \circ \ \circ \ \circ \ \circ \ \circ)^T,$$

gilt  $\circ \subset \mathcal{Q}^T(\mathcal{A} + \mathcal{I}_{11}^S, \mathcal{B})$ , sodass das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  nach Satz 3.11 nicht streng strukturell steuerbar ist. Die Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A}$  erlaubt komplexe Eigenwerte und  $\mathcal{A}$  ist nicht vorzeichen-stabil.

Bei der direkten Anwendung von Satz 5.1 bzw. 5.2 müssen  $\kappa(11) \approx 2.6 \cdot 10^{14}$  verschiedene komplexe Vorzeichenvektoren zur Untersuchung des Systems verwendet werden. Nach dreifacher Anwendung von Satz 5.8 ergibt sich jedoch das kleinere Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  der Ordnung 8 mit

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} \star & \circ & \circ & \circ & \circ & \star & \star & \circ \\ \circ & \star & \circ & \circ & + & \circ & \circ & + \\ \star & + & \circ & \circ & \circ & \circ & + & + \\ \star & \star & \circ & \circ & \circ & \circ & + & \star \\ \circ & \circ & + & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & + & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \star & \circ & \circ & \star & \circ \\ \circ & \circ & \star & \circ & \circ & \circ & + & + \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

und die Anzahl der zu untersuchenden komplexen Vorzeichenvektoren reduziert sich auf  $\kappa(8) \approx 1.9 \cdot 10^9$ .

Die Eingangsmatrix  $\mathcal{B}'$  dieses Systems besteht aus der streng surjektiven Matrix

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & + \end{pmatrix},$$

sodass analog zu Satz 5.8 (siehe auch Abschnitt 5.4.1) jeder komplexe Vorzeichenvektor mit  $\mathfrak{D}_{7,7} \neq 0$  oder  $\mathfrak{D}_{8,8} \neq 0$  nicht im Kokern von  $\mathcal{B}'$  ist. Die Untersuchung des Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  lässt sich daher auf die Untersuchung des Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'')$  mit

$$\mathcal{A}'' = \begin{pmatrix} - & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & - \\ \circ & - & \circ & \circ & + & \circ \\ - & + & \circ & \circ & \circ & \circ \\ - & - & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & + & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & + & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}'' = \begin{pmatrix} - & \circ \\ \circ & + \\ + & + \\ + & - \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

reduzieren. Für die Vorzeichen-Steuerbarkeit bzw. Vorzeichen-Stabilisierbarkeit von dem Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'')$  müssen nur  $\kappa(6) \approx 1.4 \cdot 10^6$  komplexe Vorzeichenvektoren verwendet werden. Die Anzahl der Tests kann durch die Methode von Satz 5.8 in diesem Beispiel um den Faktor  $\kappa(11)/\kappa(6) \approx 1.9 \cdot 10^8$  reduziert werden.

Eine Untersuchung des Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'')$  zeigt, dass alle reellen Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{R}$  in jedem  $A'' \in \mathcal{A}''$  und jedem  $B'' \in \mathcal{B}''$ ,  $(A'', B'')$ -steuerbar sind, aber z.B. der komplexe Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  mit

$$\nu_{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} + & \circ & + & + & - & + \\ + & + & - & + & - & - \\ - & - & + & \circ & - & + \\ + & - & + & + & - & - \\ - & + & - & + & + & \circ \\ - & - & - & - & + & + \end{pmatrix}$$

(siehe Beispiel 5.2) ist im Kokern von  $\mathcal{B}''$  und ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$ , der in den dritten Quadranten verdreht wird. Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist daher nach Satz 5.1 nicht vorzeichen-steuerbar. Genau genommen gibt es aufgrund von den Sätzen 4.8 und 4.15 ein  $q \in \mathfrak{D}$ , ein  $A'' \in \mathcal{A}''$ , ein  $B'' \in \mathcal{B}''$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda), \Im(\lambda) < 0$ , sodass  $q^T(A - \lambda I_6, B) = 0$  gilt und  $\lambda$  nicht  $(A'', B'')$ -steuerbar ist.

Die Prüfung des Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'')$  auf Vorzeichen-Stabilisierbarkeit ergibt, dass Bedingung (ii) von Satz 5.2 mit jedem komplexen Vorzeichenvektor der Ordnung 6

erfüllt ist. Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist daher vorzeichen-stabilisierbar und jedes lineare zeitinvariante System  $(A, B)$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  ist stabilisierbar.

Das lineare zeitinvariante System der Form (1.1) mit

$$A = \begin{pmatrix} -0.22177 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.81 & -0.3175 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.22177 & 0 & 0 & 9.81 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.01000 & 0.08996 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0307 & 0.0315 & 0 & 0 & 0 \\ -0.08996 & -0.01000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0100 & -0.0970 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

und  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$

ist z.B. nicht steuerbar, da der Wert  $\lambda = e^{-j\frac{7\pi}{10}} \approx -0.59 - j0.81$  nicht  $(A, B)$ -steuerbar ist. Der Vektor  $q := (1, e^{j\frac{\pi}{2}}, 9.81e^{-j\frac{\pi}{10}}, 9.81e^{j\frac{2\pi}{5}}, 9.81e^{-j\frac{4\pi}{5}}, 9.81e^{-j\frac{3\pi}{10}}, 0, 0, 0, 0, 0)$  ist ein Eigenvektor von  $A$  bezüglich  $\lambda$  und zugleich im Kokern von  $B$ .  $q$  ist ein Element des komplexen Vorzeichenvektors  $\mathfrak{D}$ , der mit

$$\nu_{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben ist.

Algorithmus 2 wurde in Matlab R2013a implementiert. Der Test des Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'')$  der Ordnung 6 hat auf einem Intel Core i5 Prozessor mit 2.67 GHz Taktfrequenz, 4 GB Arbeitsspeicher und einem 64 bit Windows 7 Professional Betriebssystem 542 Sekunden ( $\approx 9$  Minuten) gedauert. Nach 110 Sekunden wurde erkannt, dass das System nicht vorzeichen-steuerbar ist. Die Untersuchung der beiden Vorzeichen-Systeme der Ordnung 4 aus Abschnitt 5.4.1 dauerte auf demselben Rechner wenige Millisekunden.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden algebraische Methoden zum Nachweis der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme der Form (1.1) untersucht und es werden zwei bisher ungelöste Probleme, die Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit, gelöst. Dafür werden in Abschnitt 2 sieben Symbole ( $\circ, +, -, \oplus, \ominus, \star, \otimes$ ), die unsicheren Zahlen, definiert, welche verschiedene Teilmengen reeller Zahlen repräsentieren. Eine Matrix mit Einträgen aus der Menge der unsicheren Zahlen wird als unsichere Matrix bezeichnet und beschreibt eine Klasse reeller Matrizen. Zudem werden zwei Verknüpfungen, die Addition und die Multiplikation, für unsichere Zahlen und Matrizen festgelegt.

Anschließend wird in Abschnitt 3 die Surjektivität aller Elemente einer unsicheren Matrix untersucht. Dafür werden die Begriffe der strengen strukturellen Surjektivität und der strengen Surjektivität definiert und die Algebra der unsicheren Zahlen wird für die Charakterisierung dieser Begriffe verwendet. Zudem wird das unsichere System als Klasse linearer zeitinvarianter Systeme der Form (1.1) eingeführt. Allgemein bekannte Spezialfälle unsicherer Systeme sind strukturelle Systeme, bei denen die Matrizen aus den Symbolen  $\circ$  und  $\star$  bestehen, und Vorzeichen-Systeme, deren Matrizen die Symbole  $\circ$ ,  $+$  und  $-$  enthalten. Ein strukturelles System ist streng strukturell steuerbar, wenn jedes Element des strukturellen Systems steuerbar ist und ein unsicheres System ist jeweils vorzeichen-steuerbar, vorzeichen-stabil oder vorzeichen-stabilisierbar, wenn jedes Element des unsicheren Systems steuerbar, stabil oder stabilisierbar ist. Die strenge strukturelle Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilität sind bereits genau erforscht und allgemeine Charakterisierungen für strukturelle Systeme bzw. Vorzeichen-Systeme existieren. Für die Vorzeichen-Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit sind dagegen bisher nur hinreichende oder notwendige Bedingungen bekannt. In den Sätzen 3.12, 3.16, 3.19 und 3.21 werden jeweils bekannte Resultate zur strengen strukturellen Steuerbarkeit, Vorzeichen-Steuerbarkeit, Vorzeichen-Stabilität und Vorzeichen-Stabilisierbarkeit auf unsichere Systeme verallgemeinert. In den meisten dieser Bedingungen werden jeweils strukturelle Vektoren oder Vorzeichenvektoren mit den Matrizen des unsicheren Systems multipliziert. Wenn ein unsicheres System eine der Eigenschaften nicht besitzt, dann lassen sich anhand dieser Bedingungen direkt die Vorzeichen des nicht-steuerbaren Eigenwertes und der zugehörigen Eigenvektoren ablesen. Außerdem wird anhand von Beispiel 3.6 veranschaulicht, dass diese Bedingungen nicht hinreichend für die Vorzeichen-Steuerbarkeit und die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit sind, da mit diesen Bedingungen lediglich reelle Eigenpaare gefunden werden können.

Deshalb wird in Abschnitt 4 der komplexe Vorzeichenvektor als eine Äquivalenzklasse komplexer Vektoren eingeführt und es wird gezeigt, dass dieser neue Ansatz für die Untersuchung von Vorzeichenmatrizen geeignet ist. Wenn ein komplexer Vektor  $q \in \mathbb{C}^n$  beispielsweise im Kokern einer Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ist, dann ist jeder Vektor derselben Äquivalenzklasse  $[q]_{\sim}$  im Kokern einer Matrix vom selben Vorzeichenmuster wie  $X$  (siehe Satz 4.8) und wenn ein komplexer Vektor  $q$  ein Eigenvektor zu einem rein komplexen Eigenwert von einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist, dann ist jeder Vektor derselben Äquivalenzklasse  $[q]_{\sim}$  auch ein Eigenvektor zu einem rein komplexen Eigenwert für eine Matrix vom selben Vorzeichenmuster wie  $A$  (siehe Satz 4.10). Zusätzlich werden in Abschnitt 4 verschiedene Bedingungen vorgestellt, mit denen die möglichen Eigenwerte der Matrizen eines gegebenen Vorzeichenmusters ermittelt werden können. Mithilfe der Sätze 4.11, 4.14 und 4.16 werden z.B. erstmals die folgenden Entscheidungsprobleme, ob eine Vorzeichenmatrix  $\mathcal{A} \in \mathbb{V}^{n \times n}$  jeweils

- einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) = 0$  und  $\Im(\lambda) \neq 0$  erlaubt,
- einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) > 0$  und  $\Im(\lambda) \neq 0$  erlaubt oder
- einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\lambda) < 0$  und  $\Im(\lambda) \neq 0$  erlaubt

charakterisiert. Dabei wird mit jedem von Null verschiedenen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  überprüft, ob es einen Vektor in der jeweiligen Klasse  $\mathfrak{D}$  gibt, der ein Eigenvektor zu einem entsprechenden Eigenwert ist. Falls dem so ist, dann wird der komplexe Vorzeichenvektor als Vorzeichen-Eigenvektor der zugehörigen Vorzeichenmatrix bezeichnet. Da die Anzahl der komplexen Vorzeichenvektoren für eine Dimension  $n$  endlich ist, ist ein solcher Test zumindest für kleine  $n$  durchführbar.

In Abschnitt 5 wird in den Sätzen 5.1 und 5.2 jeweils eine Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit für beliebige Vorzeichen-Systeme  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  vorgestellt. Dafür wird mit jedem von Null verschiedenen komplexen Vorzeichenvektor  $\mathfrak{D}$  überprüft, ob  $\mathfrak{D}$  ein Vorzeichen-Eigenvektor von  $\mathcal{A}$  und ob  $\mathfrak{D}$  im Kokern eines Elements von  $\mathcal{B}$  ist. Das Vorzeichen-System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ist genau dann vorzeichen-steuerbar, wenn mindestens eine der beiden Bedingungen nicht erfüllt ist. Zudem wird gezeigt, dass die Entscheidungsprobleme, ob ein Vorzeichen-System nicht vorzeichen-steuerbar ist und ob ein Vorzeichen-System nicht vorzeichen-stabilisierbar ist, NP-vollständig sind. Außerdem wird ein Algorithmus zur Überprüfung der Vorzeichen-Steuerbarkeit beschrieben. Dabei wird eine rekursive Methode verwendet, welchen den Aufwand der Untersuchung deutlich reduzieren kann, wenn die Eingangsmatrix  $\mathcal{B}$  des untersuchten Vorzeichen-Systems eine bestimmte Eigenschaft besitzt. Abschließend werden zwei anwendungsnahe lineare zeitinvariante

Systeme der Form (1.1) auf strenge strukturelle Steuerbarkeit, Vorzeichen-Steuerbarkeit und Vorzeichen-Stabilisierbarkeit untersucht. Dabei handelt es sich um ein Modell der Längsdynamik eines F-8 Strahlflugzeugs und ein Modell für die Dynamik eines unbemannten Helikopters im Schwebeflug.

Die in dieser Arbeit verwendete Methode zur Untersuchung des Spektrums von Vorzeichenmatrizen unterscheidet sich deutlich zu den bisherigen Methoden, bei denen die Nullstellen der charakteristischen Polynome untersucht werden (siehe [EJ91], [COD09]). Viele Vorzeichenmatrizen erlauben nur bestimmte Eigenwerte und Eigenvektoren, sodass der Ansatz mit komplexen Vorzeichenvektoren möglicherweise zur Klärung weiterer ungelöster Entscheidungsprobleme, wie z.B., ob eine Vorzeichenmatrix Stabilität erlaubt, beitragen kann. In Beispiel 4.6 (siehe auch Beispiel 5.1) wird z.B. für eine Vorzeichenmatrix der Ordnung  $n = 3$  gezeigt, dass es nur genau  $n$  verschiedene komplexe Vorzeichen-Eigenvektoren gibt. Jeder dieser Vorzeichen-Eigenvektoren gehört genau zu einem Eigenwert eines Elements der Vorzeichenmatrix.

In [LS14] wird die strenge Surjektivität von Matrizen mit komplexen Einträgen untersucht. Bei der Ermittlung dieser Eigenschaft für eine  $n \times m$  Matrix wird eine Hilfsmatrix erzeugt, welche die Dimension  $(n \cdot m + n) \times (n \cdot m + m)$  hat, wenn es keine rein imaginären oder rein reellen Einträge in der Matrix gibt. Die Methode der komplexen Vorzeichenvektoren aus dieser Arbeit scheint ein vielversprechender Ansatz zu sein, um die Surjektivität komplexer Matrizen zu untersuchen und den zur Überprüfung notwendigen Aufwand zu reduzieren.

Wenn ein unsicheres System  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{U}^{n \times n+r}$  vorzeichen-stabilisierbar ist, dann gibt es für jedes System  $(A, B) \in (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  der Klasse eine Matrix  $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , sodass jeder Eigenwert der Matrix  $A + BK$  einen negativen Realteil besitzt. Interessant ist sicherlich die Untersuchung der Vorzeichenmusters all dieser Matrizen  $K$  sowie die Fragestellung, ob es auch eine Matrix  $K^* \in \mathbb{R}^{r \times n}$  gibt, sodass für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$  jeder Eigenwert von  $A + BK^*$  negativen Realteil besitzt. Jedes Element des streng strukturell steuerbaren Vorzeichen-Systems  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit  $\mathcal{A} = \circ$  und  $\mathcal{B} = +$  ist beispielsweise mit jedem  $K \in \dashv$  stabilisierbar, da der Eigenwert  $\lambda = BK$  von  $A + BK$  für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$  negativ ist. Gleichzeitig gibt es kein  $K \in \oplus$ , welches ein System aus dieser Klasse  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  stabilisiert. Die Vorzeichen-Stabilisierbarkeit eines unsicheren Systems ist offensichtlich notwendig für die Existenz einer Matrix  $K^*$ , welche alle Systeme der Klasse stabilisiert.

Die strukturelle Steuerbarkeit und die strenge strukturelle Steuerbarkeit wurden besonders in den letzten Jahren bei der Analyse und der Gestaltung von Netzwerken eingesetzt (siehe z.B. [LSB11, CM13]). Oft wird dabei angenommen, dass es sich um kooperative Netzwerke handelt, bei denen alle Systemparameter nicht-negativ sind. In zahlreichen

---

Beispielen der realen Welt gibt es aber sowohl kooperierende als auch konkurrierende Komponenten in einem Netzwerk. Die daraus entstehenden Systeme haben sowohl positive als auch negative Systemparameter und werden als *antagonistische Netzwerke* (engl. *antagonistic networks*) bezeichnet [Alt13]. Die Begriffe der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit eignen sich bestens, um die Lösbarkeit klassischer Problemstellungen wie z.B. den Konsensus in einem solchen Netzwerk mit unsicheren Parametern zu untersuchen.

In einigen technischen Systemen sind die Parameter nicht nur ungewiss, sondern auch zeitvariant. Daher ist die Fragestellung, wie sich jeweils die Steuerbarkeit oder die Stabilisierbarkeit eines vorzeichen-steuerbaren oder vorzeichen-stabilisierbaren Systems verhält, wenn sich die Systemparameter zeitlich verändern dürfen, interessant.

Alle Resultate zur Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme der Form (1.1) von dieser Arbeit lassen sich jeweils problemlos auf die Beobachtbarkeit und die Entdeckbarkeit der dualen Systeme übertragen.

## Stichwortverzeichnis

- Additionstheoreme, 9
- Antagonistische Netzwerke, 111
- Charakteristisches Vorzeichenmuster, 50
- Eigenwert, -vektor, -paar, -raum, 8
- Form I, 4
- Form II, 4
- Form III, 4, 21
- Ganzzahlquotient div, 8
- Kalman-Kriterium, 10
- Kokern, 8, 57
- Komplexer Vorzeichenvektor, 48
  - Abhängig von, 52, 89
  - Abstand  $\varrho_q(v, w)$ , 52
  - Anzahl, 96, 97
  - Darstellung mit einer Abbildung, 89
  - Darstellung mit Vorzeichenmatrix, 48
  - Drehung, 68
  - Geringster Abstand, 52
  - Konjugiert komplex, 56
  - Nachfolger, 52
  - Reell darstellbar, 56
  - Unabhängig, 52, 89
  - Von Null verschiedenen, 50, 89
  - Vorzeichen-Eigenvektor, 62
- Komplexes Vorzeichenmuster, 46
- L-Matrix, 4, 22
- Popov-Belevitch-Hautus Kriterium, 10
- Rest der Division mod, 8
- Spektrum, 8
- Stabilisierbarkeit, 11
- Stabilität, 9
- Steuerbarkeit
  - zeitinvariante Systeme, 10
  - zeitvariante Systeme, 38–40
- Strahlen-Muster, 46
- Strenge Strukturelle Steuerbarkeit, 2, 25
- Strenge Strukturelle Surjektivität, 20
- Strenge Surjektivität, 22
- Strukturelle Matrix, 12
- Strukturelle Steuerbarkeit, 2
- Strukturelle Zahl, 12
- Strukturelles System, 2, 24
- Surjektive Abbildung, 8
- Surjektive Matrix, 8
- Term der Expansion von  $\det(A)$ , 8
- Unsichere Matrix, 12
  - Addition, 15
  - Kokern, 57
  - Multiplikation, 15
  - Von Null verschiedenen, 13
- Unsichere Zahl, 12
  - Addition, 14
  - Multiplikation, 14
- Unsicheres System, 24
- Vorzeichen, 12
- Vorzeichen-Rotationsmatrizen, 54
- Vorzeichen-Stabilisierbarkeit, 3, 35
- Vorzeichen-Stabilität, 3, 33
- Vorzeichen-Steuerbarkeit, 3, 29
- Vorzeichen-System, 24
- Vorzeichenmatrix, 12
- Vorzeichenvektor, 12

## Literatur

- [AKL05] ASTROM, K.J. ; KLEIN, Richard E. ; LENNARTSSON, A.: Bicycle dynamics and control: adapted bicycles for education and research. In: *IEEE Control Systems Magazine* 25 (2005), Nr. 4, S. 26–47. – ISSN 1066–033X
- [Alt13] ALTAFINI, Claudio: Consensus problems on networks with antagonistic interactions. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 58 (2013), Nr. 4, S. 935–946
- [Bou92] BOUTE, Raymond T.: The Euclidean definition of the functions div and mod. In: *ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS)* 14 (1992), Nr. 2, S. 127–144
- [Bro70] BROCKETT, Roger: *Finite Dimensional Linear Systems*. Wiley & Sons, Inc., 1970. – ISBN 471–10585–6
- [Bru66] BRUALDI, Richard: Permanent of the direct product of matrices. In: *Pacific Journal of Mathematics* 16 (1966), Nr. 3, S. 471–482
- [Bru09] BRUALDI, Richard A.: *Introductory Combinatorics*. Prentice-Hall, New York, 2009. – ISBN 978–0–13–602040–0
- [BS09] BRUALDI, R.A. ; SHADER, B.L.: *Matrices of Sign-Solvable Linear Systems*. Cambridge University Press, 2009. – ISBN 978–0–521–48296–7
- [Cas87] CASTI, John L.: *Linear Dynamical Systems*. Academic Press Professional, Inc., 1987. – ISBN 0–12–163451–5
- [CF03] CORLESS, Martin J. ; FRAZHO, Art: *Linear Systems and Control: An operator perspective*. Marcel Dekker, Inc., 2003. – ISBN 0–8247–0729–3
- [CF12] CAVERS, Michael S. ; FALLAT, Shaun M.: Allow problems concerning spectral properties of patterns. In: *Electron. J. Linear Algebra* 23 (2012), S. 731–754
- [CM13] CHAPMAN, Airlie ; MESBAHI, Mehran: On strong structural controllability of networked systems: a constrained matching approach. In: *Proc. of the American Control Conference 2013, Washington, DC* IEEE, 2013, S. 6126–6131
- [COD09] CATRAL, M ; OLESKY, DD ; DRIESSCHE, P van d.: Allow problems concerning spectral properties of sign pattern matrices: A survey. In: *Linear Algebra and its Applications* 430 (2009), Nr. 11, S. 3080–3094

- [Dat04] DATTA, Biswa N.: *Numerical Methods for Linear Control Systems: Design and Analysis*. Bd. 1. Academic Press, 2004
- [DCW03] DION, Jean-Michel ; COMMAULT, Christian ; WOUDE, Jacob van d.: Generic properties and control of linear structured systems: a survey. In: *Automatica* 39 (2003), Nr. 7, S. 1125 – 1144. – ISSN 0005–1098
- [EHL98] ESCHENBACH, Carolyn A. ; HALL, Frank J. ; LI, Zhongshan: From Real to Complex Sign Pattern Matrices. In: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 57 (1998), Nr. 01, S. 159–172
- [Ein21] EINSTEIN, Albert: *Geometrie und Erfahrung*. Springer, 1921
- [EJ91] ESCHENBACH, Carolyn A. ; JOHNSON, Charles R.: Sign patterns that require real, nonreal or pure imaginary eigenvalues. In: *Linear and Multilinear Algebra* 29 (1991), Nr. 3-4, S. 299–311
- [Ell77] ELLIOTT, J: NASA's advanced control law program for the F-8 digital fly-by-wire aircraft. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 22 (1977), Nr. 5, S. 753–757
- [FB06] FREITAG, Eberhard ; BUSAM, Rolf: *Funktionentheorie 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006
- [FH77] FORTMANN, Thomas E. ; HITZ, Konrad L.: *An Introduction to Linear Control Systems*. Marcel Dekker, Inc., 1977. – ISBN 0–8247–6512–5
- [Fis10] FISCHER, Gerd: *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Springer-Verlag, 2010. – ISBN 978–3–8348–0996–4
- [GJ79] GAREY, M.R. ; JOHNSON, D.S.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979
- [GS76] GLOVER, K. ; SILVERMAN, L. M.: Characterization of structural controllability. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-21 (1976), Nr. 4, S. 534–537
- [Hau70] HAUTUS, MLJ: Stabilization controllability and observability of linear autonomous systems. In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* Bd. 73 North-Holland, 1970, S. 448–455
- [Haz09] HAZEWINKEL, Michiel: *Handbook of Algebra*. Bd. 6. Elsevier, 2009. – ISBN 978–0–444–53257–2

- [Hes09] HESPANHA, Joã.: *Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2009. – ISBN 978-0-691-14021-6
- [HJ13] HORN, Roger A. ; JOHNSON, Charles R.: *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2013. – ISBN 978-0-521-83940-2
- [HJS08] HENDRICKS, Elbert ; JANNERUP, Ole ; SØRENSEN, Paul H.: *Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods*. Springer, 2008. – ISBN 978-3-540-78485-2
- [HP05] HINRICHSEN, Diederich ; PRITCHARD, Anthony J.: *Mathematical Systems Theory I: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. Bd. 1. Springer, 2005
- [HRS12] HARTUNG, Christoph ; REISSIG, Gunther ; SVARICEK, Ferdinand: Characterization of strong structural controllability of uncertain linear time-varying discrete-time systems. In: *Proc. of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, 2012. – ISSN 0743-1546, S. 2189–2194
- [HRS13a] HARTUNG, Christoph ; REISSIG, Gunther ; SVARICEK, Ferdinand: Characterization of Sign Controllability for Linear Systems with Real Eigenvalues. In: *Proc. of the 3rd IEEE Australian Control Conference (AUCC)* IEEE, 2013, S. 450–455
- [HRS13b] HARTUNG, Christoph ; REISSIG, Gunther ; SVARICEK, Ferdinand: Necessary Conditions for Structural and Strong Structural Controllability of Linear Time-Varying Systems. In: *Proc. of the European Control Conference (ECC) 2013, Zuerich, Switzerland*, 2013, S. 1335–1340
- [HRS13c] HARTUNG, Christoph ; REISSIG, Gunther ; SVARICEK, Ferdinand: Sufficient Conditions for Strong Structural Controllability of Uncertain Linear Time-Varying Systems. In: *Proc. of the American Control Conference 2013, Washington, DC*, 2013, S. 5895–5900
- [HS93] HERSHKOWITZ, Daniel ; SCHNEIDER, Hans: Ranks of zero patterns and sign patterns\*. In: *Linear and Multilinear Algebra* 34 (1993), Nr. 1, S. 3–19
- [HS14] HARTUNG, Christoph ; SVARICEK, Ferdinand: Sign Stabilizability. In: *Proc. of the 22nd IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)* IEEE, 2014, S. 145–150

- [HW93] HEBISCH, Udo ; WEINERT, Hanns J.: *Halbringe: Algebraische Theorie und Anwendungen in der Informatik*. Teubner, 1993. – ISBN 3-519-02091-2
- [Jef74] JEFFRIES, Clark: Qualitative Stability and Digraphs in Model Ecosystems. In: *Ecology* 55 (1974), Nr. 6, S. 1415–1419. – ISSN 00129658
- [JKD77] JEFFRIES, Clark ; KLEE, Victor ; DRIESSCHE, Pauline Van d.: When is a Matrix Sign Stable? In: *Canadian J. of Math* 29 (1977), Nr. 2, S. 315–326
- [JMO93] JOHNSON, C. ; MEHRMANN, V. ; OLESKY, D.: Sign Controllability of a Nonnegative Matrix and a Positive Vector. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 14 (1993), Nr. 2, S. 398–407
- [Kai80] KAILATH, Thomas: *Linear Systems*. Bd. 1. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980. – ISBN 0-13-536961-4
- [Kal60] KALMAN, R. E.: Contributions to the Theory of Optimal Control. In: *Bol. Soc. Mat. Mexicana* 5 (1960), Nr. 2, S. 102–119
- [KD77] KLEE, Victor ; DRIESSCHE, Pauline van d.: Linear algorithms for testing the sign stability of a matrix and for finding Z-maximum matchings in acyclic graphs. In: *Numerische Mathematik* 28 (1977), Nr. 3, S. 273–285. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01389968>. – DOI 10.1007/BF01389968. – ISSN 0029-599X
- [KLM84] KLEE, Victor ; LADNER, Richard ; MANBER, Rachel: Signsolvability revisited. In: *Linear Algebra and its Applications* 59 (1984), Nr. 0, S. 131 – 157. – ISSN 0024-3795
- [KMT96] KIRKLAND, SJ ; McDONALD, JJ ; TSATSOMEROS, MJ: Sign-patterns which require a positive eigenvalue. In: *Linear and Multilinear Algebra* 41 (1996), Nr. 3, S. 199–210
- [Lan62] LANCASTER, Kelvin: The scope of qualitative economics. In: *The Review of Economic Studies* (1962), S. 99–123
- [LHE94] LI, Zhongshan ; HALL, Frank ; ESCHENBACH, Carolyn: On the period and base of a sign pattern matrix. In: *Linear Algebra and Its Applications* 212 (1994), S. 101–120
- [Lin74] LIN, Ching-Tai: Structural controllability. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 19 (1974), Nr. 3, S. 201–208

- [Lin81] LINNEMANN, Arno: Decoupling of structured systems. In: *Systems & Control Letters* 1 (1981), Nr. 2, S. 79–86
- [Liu07] LIU, Bolian: The period and base of a reducible sign pattern matrix. In: *Discrete Mathematics* 307 (2007), Nr. 23, S. 3031–3039
- [LM82] LOWELL, J ; MCKELL, HD: The stability of bicycles. In: *American Journal of Physics* 50 (1982), Nr. 12, S. 1106–1112
- [LS14] LIU, Yue ; SHAN, Hai-Ying: Complex-L matrix and its recognition. In: *Discrete Mathematics* 322 (2014), S. 31–35
- [LSB11] LIU, Yang-Yu ; SLOTINE, Jean-Jacques ; BARABÁSI, Albert-László: Controllability of complex networks. In: *Nature* 473 (2011), Nr. 7346, S. 167–173
- [LSH08] LIU, Yue ; SHAO, Jia-Yu ; HE, Chang-Xiang: On the Boundaries of the Determinantal Regions of Ray Pattern Matrices. In: *Linear Algebra and Its Applications* 428 (2008), Nr. 11, S. 2699–2707
- [Lun10] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2*. Springer, 2010. – ISBN 978–3–642–10197–7
- [Mey00] MEYER, Carl D.: *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Siam, 2000
- [MTK99] METTLER, Bernard ; TISCHLER, Mark B. ; KANADE, Takeo: System Identification of Small-Size Unmanned Helicopter Dynamics. In: *American Helicopter Society 55th Forum* Bd. 2, 1999, S. 1706–1717
- [Mur10] MUROTA, K.: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*. Bd. 20. Springer Verlag, 2010. – ISBN 978–3–642–03993–5
- [MY79] MAYEDA, Hirokazu ; YAMADA, Takashi: Strong structural controllability. In: *SIAM J. Control Optim.* 17 (1979), Nr. 1, S. 123–138
- [PI99] PETERS, MA ; IGLESIAS, PA: A spectral test for observability and reachability of time-varying systems and the Riccati difference equation. In: *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 3 IEEE, 1999, S. 2727–2732
- [Pol92] POLJAK, Svatopluk: On the gap between the structural controllability of time-varying and time-invariant systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 37 (1992), Nr. 12, S. 1961–1965

- [QR65] QUIRK, James ; RUPPERT, Richard: Qualitative Economics and the Stability of Equilibrium. In: *The Review of Economic Studies* 32 (1965), Nr. 4, S. 311–326. – ISSN 00346527
- [Qui81] QUIRK, James: Qualitative Stability of Matrices and Economic Theory: A Survey Article. In: *Computer-assisted Analysis and Model Simplification* (1981)
- [Rei88] REINSCHKE, Kurt: *Multivariable Control – A Graph Theoretic Approach*. Springer, 1988
- [RHS14] REISSIG, G. ; HARTUNG, C. ; SVARICEK, F.: Strong Structural Controllability and Observability of Linear Time-Varying Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 59 (2014), Nov, Nr. 11, S. 3087–3092. – ISSN 0018–9286
- [RR00] REINSCHKE, KJ ; RÖBENACK, K: Graph-theoretic characterization of structural controllability for singular differential-algebraic equations. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 80 (2000), S. 849–850
- [RSW92] REINSCHKE, K. J. ; SVARICEK, F. ; WEND, H.-D.: On strong structural controllability of linear systems. In: *Proc. 31st IEEE Conference on Decision and Control*, 1992, S. 203–208
- [RW97] REINSCHKE, Kurt J. ; WIEDEMANN, Gunter: Digraph characterization of structural controllability for linear descriptor systems. In: *Linear algebra and its applications* 266 (1997), S. 199–217
- [Sam47] SAMUELSON, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis*. 1947
- [Sch98] SCHRIJVER, Alexander: *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons, 1998. – ISBN 0-471-98232-6
- [SG03] SHAO, Yanling ; GAO, Yubin: Sign patterns that allow diagonalizability. In: *Linear algebra and its applications* 359 (2003), Nr. 1, S. 113–119
- [Sil91] SILJAK, Dragoslav D.: *Decentralized Control of Complex Systems*. Academic Press, Inc., 1991. – ISBN 0-12-643430-1
- [SJA11] SVARICEK, Ferdinand ; JARCYK, Jan C. ; ALT, Benedikt: Strukturelle und streng strukturelle Steuerbarkeit: Übersicht und neue Ergebnisse. In: *at-Automatisierungstechnik* 59 (2011), Nr. 6, S. 329–339

- [SM67] SILVERMAN, LM ; MEADOWS, HE: Controllability and observability in time-variable linear systems. In: *SIAM J. Control* 5 (1967), S. 64
- [Son98] SONTAG, Eduardo D.: *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*. Springer, 1998
- [SP76] SHIELDS, Robert W. ; PEARSON, J. B.: Structural controllability of multiinput linear systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-21 (1976), Nr. 2, S. 203–212
- [Tsa98] TSATSOMEROS, M.: Sign Controllability: Sign Patterns That Require Complete Controllability. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 19 (1998), Nr. 2, S. 355–364
- [VDW91] VAN DER WOUDE, JW: On the structure at infinity of a structured system. In: *Linear algebra and its applications* 148 (1991), S. 145–169
- [Wat07] WATKINS, David S.: *The matrix eigenvalue problem: GR and Krylov subspace methods*. Siam, 2007
- [Wei94] WEI, Kehui: Stabilization of linear time-invariant interval systems via constant state feedback control. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (1994), Nr. 1, S. 22–32. – ISSN 0018–9286
- [WL07] WILLIAMS, Robert L. ; LAWRENCE, Douglas A.: *Linear State-Space Control Systems*. John Wiley & Sons, 2007. – ISBN 0-471-73555-8
- [WRS14] WEBER, Alexander ; REISSIG, Gunther ; SVARICEK, Ferdinand: A linear time algorithm to verify strong structural controllability. In: *Proc. of the 53st IEEE Conference on Decision and Control* IEEE, 2014
- [Zhu97] ZHU, J J.: PD-spectral theory for multivariable linear time-varying systems. In: *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 4 IEEE, 1997, S. 3908–3913



# Online-Buchshop für Ingenieure

## ■■■ VDI nachrichten

### Online-Shops



**Fachliteratur und mehr - jetzt bequem online recherchieren & bestellen unter: [www.vdi-nachrichten.com/](http://www.vdi-nachrichten.com/)**  
**Der-Shop-im-Ueberblick**



**Täglich aktualisiert:  
Neuerscheinungen  
VDI-Schriftenreihen**



## BUCHSHOP

Im Buchshop von [vdi-nachrichten.com](http://vdi-nachrichten.com) finden Ingenieure und Techniker ein speziell auf sie zugeschnittenes, umfassendes Literaturangebot.

Mit der komfortablen Schnellsuche werden Sie in den VDI-Schriftenreihen und im Verzeichnis lieferbarer Bücher unter 1.000.000 Titeln garantiert fündig.

Im Buchshop stehen für Sie bereit:

### **VDI-Berichte** und die Reihe **Kunststofftechnik**:

Berichte nationaler und internationaler technischer Fachtagungen der VDI-Fachgliederungen

### **Fortschritt-Berichte VDI**:

Dissertationen, Habilitationen und Forschungsberichte aus sämtlichen ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen

### **Newsletter „Neuerscheinungen“:**

Kostenfreie Infos zu aktuellen Titeln der VDI-Schriftenreihen bequem per E-Mail

### **Autoren-Service:**

Umfassende Betreuung bei der Veröffentlichung Ihrer Arbeit in der Reihe Fortschritt-Berichte VDI

### **Buch- und Medien-Service:**

Beschaffung aller am Markt verfügbaren Zeitschriften, Zeitungen, Fortsetzungsreihen, Handbücher, Technische Regelwerke, elektronische Medien und vieles mehr – einzeln oder im Abo und mit weltweitem Lieferservice

## Die Reihen der Fortschritt-Berichte VDI:

- 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
- 2 Fertigungstechnik
- 3 Verfahrenstechnik
- 4 Bauingenieurwesen
- 5 Grund- und Werkstoffe/Kunststoffe
- 6 Energietechnik
- 7 Strömungstechnik
- 8 Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik
- 9 Elektronik/Mikro- und Nanotechnik
- 10 Informatik/Kommunikation
- 11 Schwingungstechnik
- 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
- 13 Fördertechnik/Logistik
- 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
- 15 Umwelttechnik
- 16 Technik und Wirtschaft
- 17 Biotechnik/Medizintechnik
- 18 Mechanik/Bruchmechanik
- 19 Wärmetechnik/Kältetechnik
- 20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE CAQ, CIM ...)
- 21 Elektrotechnik
- 22 Mensch-Maschine-Systeme
- 23 Technische Gebäudeausrüstung

ISBN 978-3-18-524708-8