

## Reihe 1

Konstruktions-  
technik/  
Maschinen-  
elemente

Nr. 442

Dipl.-Ing. Arian Wolfien,  
Schwäbisch Gmünd

## Untersuchungen zum Beanspruchungsverhalten von Zahnstangengetrieben in PKW-Lenksystemen



# Untersuchungen zum Beanspruchungsverhalten von Zahnstangengetrieben in PKW-Lenksystemen

Von der Fakultät Maschinenwesen

der

Technischen Universität Dresden

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

angenommene Dissertation

**Dipl.-Ing. Arian Wolfien**

geb. am 25. Januar 1984 in Magdeburg

Tag der Einreichung: 17. Mai 2017  
Tag der Verteidigung: 27. Februar 2018

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht  
Prof. Dr.-Ing. Karsten Stahl

Vorsitzender  
der Promotionskommission: Prof. Dr.-Ing.habil. Thorsten Schmidt



# Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 1

Konstruktionstechnik/  
Maschinenelemente

Dipl.-Ing. Arian Wolfien,  
Schwäbisch Gmünd

Nr. 442

Untersuchungen zum  
Beanspruchungsverhalten  
von Zahnstangengetrieben  
in PKW-Lenkssystemen

VDI verlag

Wolfien, Arian

## **Untersuchungen zum Beanspruchungsverhalten von Zahnstangengetrieben in PKW-Lenkssystemen**

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 1 Nr. 442 . Düsseldorf: VDI Verlag 2018 .

188 Seiten, 80 Bilder, 14 Tabellen.

ISBN 978-3-18-344201-0, ISSN 0178-949X,

€ 67,00/VDI-Mitgliederpreis € 60,30.

**Für die Dokumentation:** Zahnstangengetriebe – Lenksysteme – Tragfähigkeit – ISO 6336 – Beanspruchung – Beanspruchbarkeit – Lastverteilung – Breitenlastverteilung – Verformungseinflussfunktion – Wöhlerversuche

Die vorliegende Arbeit soll das Verständnis über die wirkenden Beanspruchungen und Beanspruchbarkeiten von Zahnstangengetrieben erweitern. Ausgehend von den Unterschieden zwischen Stirnrad- und Zahnstangengetrieben beinhaltet die Arbeit die erforderlichen Anpassungen der genormten Tragfähigkeitsberechnung sowie die Erweiterung des Verzahnungsumfeldes. Darüber hinaus wird ein prototypenähnlicher Methodenträger für die Zahnkontaktanalyse von Zahnstangengetrieben entwickelt. Die geometrischen Besonderheiten des Zahnstangenprofils werden über eine Modifizierung der Verformungseinflussfunktion in die Berechnung der Last- und Spannungsverteilung berücksichtigt. Hierbei lag der Fokus auf der lokalen Steifigkeitsveränderung des Zahnes bei einer Lasteinleitung in Zahnrandnähe. Zur vollständigen Betrachtung der Tragfähigkeit wird die Beanspruchbarkeit eines Zahnstangenzahnes mithilfe von Überrollungs- und Pulsationsversuchen untersucht.

### **Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter [www.dnb.de](http://www.dnb.de) abrufbar.

### **Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek**

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie (German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at [www.dnb.de](http://www.dnb.de).

Dissertation Technische Universität Dresden

Fakultät Maschinenwesen

Tag der Einreichung: 17. Mai 2017

Tag der Verteidigung: 27. Februar 2018

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 2018

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-949X

ISBN 978-3-18-344201-0

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand der Robert Bosch Automotive Steering GmbH in enger Kooperation mit dem Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion (IMM) der TU Dresden unter Leitung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht.

Ich bedanke mich herzlich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht für das entgegengebrachte Vertrauen, für die stets gewährte Unterstützung in meinem Promotionsvorhaben und für die ausgezeichneten Rahmenbedingungen am Lehrstuhl. Herrn Prof. Dr.-Ing. Karsten Stahl danke ich für die Durchsicht der Arbeit und die Übernahme des Korreferats. Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Füssel danke ich für die Durchführung der Nebenfachprüfung.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Oberingenieur Dr.-Ing. Michael Senf für die hervorragende fachliche Unterstützung und für die vielen wertvollen Diskussionsrunden am Institut. Ein großes Dankeschön möchte ich meinem Betreuer Herrn Dr. phil. nat. Christian Schroll für die außerordentliche Unterstützung, Motivation und die konstruktiven Anregungen aussprechen. Herrn Dipl.-Ing. Johannes Fauser und Herrn Dipl.-Ing. Markus Leberfinger danke ich für das Vertrauen, für den zeitlichen Rückhalt bei der Anfertigung der vorliegenden Arbeit sowie für die Ermöglichung der experimentellen Untersuchungen. Weiter gilt mein herzlicher Dank Herrn Dipl.-Ing. Michael Ilg für die vielen Ratschläge und die fortwährende Unterstützung.

Darüber hinaus bedanke ich mich bei allen Kollegen des CAE-Centers für das angenehme Arbeitsklima, insbesondere beim gesamten Auslegungsteam und bei den Kollegen der früheren Methodenentwicklung. Herrn Dipl.-Ing. Jochen Rieg danke ich für die Unterstützungen bei den FEM-Berechnungen. Mein Dank gilt auch Herrn Dr.-Ing. Jens Pfister für die Hilfestellungen bei den MKS-Simulationen.

Weiterhin möchte ich mich herzlich bei Herrn Dipl.-Ing. Thomas Schulze, Herrn Dipl.-Ing. Martin Tragsdorf und Herrn Dipl.-Ing. Robert Schröder für die gute Zusammenarbeit und für die vielen konstruktiven Ideen zur Umsetzung des Prüfstandskonzeptes und für die hervorragende Prüfstandsbetreuung bedanken.

Außerdem danke ich den wissenschaftlichen Hilfskräften Herrn B.Eng. Moritz Burger, Herrn B.Eng. Manuel Schultheiß, Herrn B.Eng. Harry Wiese, Herrn B.Eng. Christian Germscheid, Frau Dipl.-Ing. Sylvia Richter, Herrn B.Eng. Tobias Grünewald, Herrn B.Eng. Michael Fuchs sowie Herrn B.Eng. Lukas Konietzny. Durch euer außergewöhnliches Engagement konntet ihr mich im Rahmen einer Abschlussarbeit in hohem Maße unterstützen.

Aus tiefstem Herzen danke ich meiner Familie, die mich stets in meinem Handeln unterstützte und mir so ein stabiles Fundament zum Gelingen dieser Arbeit bereitstellte. Besonders danke ich meinem Sohn Emil, meiner Tochter Marlena und meiner lieben Lebensgefährtin Julia für die ausdauernde Geduld und Rücksichtnahme.



Arian Wolfien

Schwäbisch Gmünd, Februar 2018



## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                            |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Vorwort.....                                                                               | III  |
| Inhaltsverzeichnis .....                                                                   | V    |
| Formelzeichen, Definitionen und Einheiten.....                                             | VIII |
| Indizes und Definition.....                                                                | X    |
| Abkürzungsverzeichnis .....                                                                | XI   |
| Abstract.....                                                                              | XII  |
| 1 Einleitung.....                                                                          | 1    |
| 1.1 Problem- und Aufgabenstellung.....                                                     | 3    |
| 1.2 Zielsetzung und Lösungsweg .....                                                       | 5    |
| 2 Stand des Wissens.....                                                                   | 7    |
| 2.1 Einordnung der Zahnstangengetriebe .....                                               | 7    |
| 2.2 Grundsätzliche Eigenschaften von Zahnstangengetrieben .....                            | 9    |
| 2.3 Praktische Anwendung von Zahnstangengetrieben .....                                    | 13   |
| 2.4 Von den ersten Lenkungen zum heutigen Lenkungssystem .....                             | 17   |
| 2.5 Bisherige Forschungen an Zahnstangengetrieben .....                                    | 23   |
| 2.6 Weiterführende Literaturquellen.....                                                   | 27   |
| 2.6.1 Ansatz verallgemeinerter Verformungseinflusszahlen nach Linke .....                  | 27   |
| 2.6.2 Allgemeine Plattentheorie nach Heft.....                                             | 32   |
| 3 Normative Tragfähigkeitsberechnung für Zahnstangengetriebe .....                         | 37   |
| 3.1 Notwendigkeit einer Anpassung der normativen Berechnungsvorschrift.....                | 37   |
| 3.1.1 Zahnstangengetriebe als Ersatzstirnradgetriebe nach ISO 6336.....                    | 37   |
| 3.2 Kräftesituation im Zahnkontakt eines Zahnstangengetriebes .....                        | 39   |
| 3.3 Flankentragfähigkeitsberechnung für ein Ritzel-Zahnstangenpaar .....                   | 47   |
| 3.3.1 Ermittlung der Grübchentragfähigkeit bei Zahnstangengetrieben .....                  | 47   |
| 3.4 Zahnfußtragfähigkeitsberechnung für ein Ritzel-Zahnstangenpaar.....                    | 50   |
| 3.4.1 Der Formfaktor eines Zahnstangenzahns .....                                          | 50   |
| 3.4.2 Verifizierung der Zahnfußbiegespannung am Zahnstangenzahn.....                       | 54   |
| 3.5 Vergleich der modifizierten Tragfähigkeitsberechnung mit dem normativen Standard ..... | 57   |
| 3.6 Erweiterte Umfeldbetrachtung in Bezug auf die Zahnstangenlagerung.....                 | 59   |
| 3.7 Zwischenfazit .....                                                                    | 65   |

|         |                                                                                                    |     |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4       | Methodenträger zur Ermittlung der Last- und Spannungsverteilung .....                              | 66  |
| 4.1     | Notwendigkeit der Berechnung einer Last- und Spannungsverteilung .....                             | 66  |
| 4.1.1   | Motivation .....                                                                                   | 66  |
| 4.1.2   | Berechnung der Last- und Spannungsverteilung am Ritzel-Zahnstangen-<br>paar .....                  | 67  |
| 4.2     | Einfluss des Zahnstangenprofils auf die Verschiebungen .....                                       | 70  |
| 4.3     | Bestimmung der Verformungseinflussfunktionen für die Ritzel-<br>Zahnstangenpaarung .....           | 74  |
| 4.3.1   | Verformungseinflussfunktion am unendlichen Ritzel-Zahnstangenpaar ....                             | 74  |
| 4.3.2   | Berechnung einer Verformungseinflussfunktion nach Heft .....                                       | 76  |
| 4.3.2.1 | Formänderungsenergiehypothese des ebenen Dehnungszustandes .                                       | 77  |
| 4.3.2.2 | Neue Grundgleichungen für den allgemeinen Ansatz nach Heft.....                                    | 79  |
| 4.3.2.3 | Ergebnisse des analytischen Ansatzes nach Heft.....                                                | 83  |
| 4.4     | Last- und Spannungsverteilung am geradverzahnten Ritzel-Zahnstangen-<br>paar.....                  | 84  |
| 4.5     | Einfluss von örtlichen Steifigkeitsunterschieden auf den Reflexionsgrad .....                      | 86  |
| 4.5.1   | Einführung des Reflexionsgrades.....                                                               | 87  |
| 4.5.2   | Reflexion bei einem trapezförmigen Zahnflankenprofil .....                                         | 90  |
| 4.5.3   | Berücksichtigung des Reflexionsgrades bei der Berechnung der Last-<br>und Spannungsverteilung..... | 93  |
| 4.5.4   | Einfluss von spitzer und stumpfer Zahnstirnseite beim Zahnstangenprofil                            | 95  |
| 4.5.5   | Verifikation des Schrägungseinflusses einer trapezförmigen Stirnseite...                           | 100 |
| 4.5.6   | Reflexion bei einem Verzahnungsauslauf am Stirnradzahn.....                                        | 101 |
| 4.6     | Zwischenfazit .....                                                                                | 105 |
| 5       | Experimentelle Untersuchungen .....                                                                | 107 |
| 5.1     | Zielsetzung.....                                                                                   | 107 |
| 5.2     | Versuchseinrichtungen .....                                                                        | 108 |
| 5.2.1   | Laufversuchsstand .....                                                                            | 108 |
| 5.2.2   | Pulsatorversuchsstand .....                                                                        | 110 |
| 5.3     | Versuchsdaten .....                                                                                | 112 |
| 5.3.1   | Werkstoffkundliche Untersuchungen.....                                                             | 112 |
| 5.3.2   | Auswertung der Verzahnungsmessung.....                                                             | 115 |
| 5.4     | Versuchsprogramm.....                                                                              | 119 |
| 5.5     | Versuchsdurchführung.....                                                                          | 121 |
| 6       | Versuchsergebnisse und –auswertung .....                                                           | 123 |

|                      |                                                                        |     |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1                  | Vorbetrachtung für die Laufversuche .....                              | 123 |
| 6.1.1                | Untersuchung der Breitenlastverteilung bei Verkippung der Zahnstange   | 123 |
| 6.1.2                | Einfluss der Zahnstangenverdrehung auf die ertragbare Lebensdauer ...  | 126 |
| 6.1.3                | Untersuchung der Breitenlastverteilung unter Servomomenteneinfluss...  | 128 |
| 6.1.4                | Darstellung der Ausfallerscheinungen in den Laufversuchen .....        | 131 |
| 6.2                  | Vorbetrachtung für den Pulsatorversuch .....                           | 134 |
| 6.3                  | Auswertung der Wöhlerlinien des Lauf- und Pulsatorversuches .....      | 135 |
| 6.3.1                | Statistische Versuchsauswertung am Beispiel der Versuchsreihe Nr. 3 .. | 135 |
| 6.3.2                | Darstellung der Zahnfußfestigkeitswöhlerlinien.....                    | 138 |
| 7                    | Zusammenfassung, Fazit und Ausblick.....                               | 142 |
| 7.1                  | Zusammenfassung .....                                                  | 142 |
| 7.2                  | Fazit und Ausblick.....                                                | 145 |
| Anhang A:            | Verzahnungsdatenblätter A-E .....                                      | 147 |
| Anhang B.1:          | Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn, Paarung B .....       | 148 |
| Anhang B.2:          | Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn, Paarung C .....       | 149 |
| Anhang B.3:          | Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn, Paarung D .....       | 150 |
| Anhang C.1:          | Biegelinien für das trapezförmige Profil .....                         | 151 |
| Anhang C.2:          | Biegelinien für das quadratische Ersatzpolynom nach [BAUM90] .....     | 153 |
| Anhang D:            | Zusammenfassung der verwendeten Grundgleichungen .....                 | 156 |
| Anhang E:            | Zusammenfassung der verwendeten Gleichungsfolgen .....                 | 158 |
| Anhang F:            | Vergleich der Verformungseinflussfunktionen (unendlicher Zahn).....    | 159 |
| Anhang G:            | Reflexionsgrad am endlichen Zahnstangenzahn in Abh. von $\theta$ ..... | 161 |
| Anhang H:            | Reflexionsgrad am endlichen Stirnradzahn (geradverzahnt) .....         | 164 |
| Anhang J:            | Werkstoffzusammensetzung der Prüfverzahnungen.....                     | 168 |
| Literaturverzeichnis | .....                                                                  | 169 |

## Formelzeichen, Definitionen und Einheiten

| Symbol            | Definition                                              | Einheit              |
|-------------------|---------------------------------------------------------|----------------------|
| $a_{ij}$          | Verformungseinflusszahl                                 | [-]                  |
| $a_H$             | Hauptachse der Hertzschen Kontaktellipse                | [mm]                 |
| $b$               | Zahnbreite                                              | [mm]                 |
| $b_H$             | Hauptachse der Hertzschen Kontaktellipse                | [mm]                 |
| $b_T$             | Tragende Zahnbreite                                     | [mm]                 |
| $c$               | Kopfgrundspiel                                          | [mm]                 |
| $c_D$             | Steifigkeitsfaktor nach Fronius                         | [-]                  |
| $D$               | Steifigkeit der allgemeinen Platte                      | [kg cm]              |
| $d$               | Teilkreisdurchmesser                                    | [mm]                 |
| $d_a$             | Kopfkreisdurchmesser                                    | [mm]                 |
| $d_b$             | Grundkreisdurchmesser                                   | [mm]                 |
| $d_f$             | Fußkreisdurchmesser                                     | [mm]                 |
| $d_m$             | Durchmesser bei Profilmittte                            |                      |
| $d_z$             | Zahnstangendurchmesser                                  | [mm]                 |
| $E$               | Elastizitätsmodul                                       | [N/mm <sup>2</sup> ] |
| $E_{ij}$          | Verformungseinflussfunktion am Zahn endlicher Breite    | [-]                  |
| $E_\infty$        | Verformungseinflussfunktion am Zahn unendlicher Breite  | [-]                  |
| $F$               | Kraft                                                   | [N]                  |
| $F_a$             | Axialkraft                                              | [N]                  |
| $F_{aR}$          | Reibkraftanteil in Axialrichtung                        | [N]                  |
| $F_{bn}$          | Flankennormalkraft                                      | [N]                  |
| $F_k$             | Klemmkraft                                              | [N]                  |
| $F_r$             | Radialkraft                                             | [N]                  |
| $F_t$             | Umfangskraft                                            | [N]                  |
| $F_{Zst}$         | Zahnstangenkraft, ausgehend von den Spurstangen         | [N]                  |
| $F_R$             | Reibkraft                                               | [N]                  |
| $F_r$             | Rundlaufabweichung nach DIN 3960                        | [µm]                 |
| $F_\beta$         | Flankenlinien-Gesamtabweichung nach DIN 3960            | [µm]                 |
| $F_{\beta y}$     | Wirksame Flankenlinienabweichung aus DIN 3990, ISO 6336 | [µm]                 |
| $FPT$             | Freies Ritzelmoment                                     | [Nm]                 |
| $f_G$             | Größenfunktion                                          | [-]                  |
| $f_L$             | Abklingfunktion                                         | [-]                  |
| $f_{f\beta}$      | Profil-Formabweichung nach DIN 3960                     | [µm]                 |
| $f_{f\alpha}$     | Profil-Winkelabweichung nach DIN 3960                   | [µm]                 |
| $f_{f\beta}$      | Flankenlinien-Winkelabweichung nach DIN 3960            | [µm]                 |
| $f_k$             | Klaffen                                                 | [µm]                 |
| $f_{\beta\omega}$ | Verdrehabweichung infolge der Zahnstangenverdrehung     | [µm]                 |
| $f_{pt}$          | Teilungs-Einzelabweichung                               | [µm]                 |
| $f_{Rand1}$       | Reflexionsgrad in Abh. zu $\theta$                      | [-]                  |
| $f_{Rand2}$       | Randefflussfunktion der Zahnverformung                  | [-]                  |
| $f_z$             | Gesamtverformung                                        | [µm]                 |
| $g$               | Restklaffen                                             | [µm]                 |
| $h_0$             | Plattendicke                                            | [mm]                 |
| $h_{Fe}$          | Kraftbiegehebelarm                                      | [mm]                 |
| $i$               | Getriebeübersetzung                                     | [-]                  |
| $i_{konst}$       | Konstante Getriebeübersetzung                           | [-]                  |
| $i_{var}$         | Variable Getriebeübersetzung                            | [-]                  |

| Symbol             | Definition                                                  | Einheit |
|--------------------|-------------------------------------------------------------|---------|
| K                  | Relative Verformung                                         | [-]     |
| K <sub>A</sub>     | Anwendungsfaktor, berücksichtigt äußere Zusatzlasten        | [-]     |
| K <sub>Fα</sub>    | Stirnfaktor, Zahnfußbeanspruchung                           | [-]     |
| K <sub>Fβ</sub>    | Breitenfaktor, Zahnfußbeanspruchung                         | [-]     |
| K <sub>Hα</sub>    | Stirnfaktor, Zahnflankenbeanspruchung                       | [-]     |
| K <sub>Hβ</sub>    | Breitenfaktor, Zahnflankenbeanspruchung                     | [-]     |
| K <sub>v</sub>     | Dynamikfaktor, berücksichtigt dynamische Zusatzlasten       | [-]     |
| K <sub>β,T</sub>   | Exp. Breitenlastverteilungsfaktor unter Teillast            | [-]     |
| M                  | Mittelpunkt der Zahnfußkurve                                | [mm]    |
| M <sub>vz</sub>    | Kippmoment aus dem Verzahnungskontakt                       | [Nm]    |
| M <sub>servo</sub> | Servoseitiges Kippmoment                                    | [Nm]    |
| m <sub>n</sub>     | Normalmodul                                                 | [mm]    |
| N                  | Ertragbare Lastwechselzahl                                  | [LW]    |
| O                  | Ursprung bzw. Drehpunkt                                     | [-]     |
| P <sub>a</sub>     | Ausfallwahrscheinlichkeit                                   | [%]     |
| p <sub>t</sub>     | Teilkreisteilung                                            | [mm]    |
| p <sub>et</sub>    | Stirneingriffsteilung                                       | [mm]    |
| R <sub>M</sub>     | Radkörperbiegeanteil nach [WEBA53]                          | [mm]    |
| R <sub>MQ</sub>    | Radkörperneigung nach [WEBA53]                              | [mm]    |
| R <sub>QN</sub>    | Parallelverschiebung des Radkörpers nach [WEBA53]           | [mm]    |
| r <sub>a</sub>     | Kopflinie                                                   | [mm]    |
| r <sub>F</sub>     | Radius der Krafteinleitung                                  | [mm]    |
| r <sub>f</sub>     | Fußlinie                                                    | [mm]    |
| r <sub>Ff</sub>    | Fußformlinie                                                | [mm]    |
| r <sub>Na</sub>    | Kopfnutzlinie                                               | [mm]    |
| r <sub>Nf</sub>    | Fußnutzlinie                                                | [mm]    |
| r <sub>m</sub>     | Linie entlang der Profilmittte                              | [mm]    |
| r <sub>w</sub>     | Wälzlinie                                                   | [mm]    |
| r <sub>ü</sub>     | Übergangslinie                                              | [mm]    |
| S                  | Schraubpunkt                                                | [-]     |
| S <sub>ij</sub>    | Spannungseinflussfunktion am Zahn endlicher Breite          | [-]     |
| s <sub>a</sub>     | Zahnkopfdicke                                               | [mm]    |
| s <sub>f</sub>     | Zahnfußdicke                                                | [mm]    |
| T <sub>1</sub>     | Antriebsmoment am Ritzel                                    | [Nm]    |
| t                  | Maß zwischen Bezugsebene und geneigter Stirnseite           | [mm]    |
| U                  | Elastische Formänderungsenergie                             | [Nmm]   |
| v <sub>gs</sub>    | Gleitgeschwindigkeit                                        | [m/s]   |
| v <sub>n</sub>     | Flankenormalgeschwindigkeit                                 | [m/s]   |
| v <sub>t</sub>     | Umfangsgeschwindigkeit                                      | [m/s]   |
| W                  | Potentielle Energie                                         | [Nmm]   |
| W <sub>f</sub>     | Korrekturfunktion für den Schrägungswinkeleinfluss          | [-]     |
| W <sub>0</sub>     | Linienlast                                                  | [N/mm]  |
| w                  | Biegelinie                                                  | [mm]    |
| x <sub>1</sub>     | Profilverschiebungsfaktor (Ritzel)                          | [-]     |
| x*                 | Modulbezogene Zahnbreite                                    | [-]     |
| Y                  | Faktor für die Klemmkraftaufteilung an Last- und Rückflanke | [-]     |
| Y <sub>F</sub>     | Formfaktor nach DIN 3990, ISO 6336                          | [-]     |
| Y <sub>FS</sub>    | Zahnkopffaktor nach DIN 3990, ISO 6336                      | [-]     |
| Y <sub>S</sub>     | Spannungskorrekturfaktor nach DIN 3990, ISO 6336            | [-]     |
| Y <sub>β</sub>     | Schrägenfaktor (Zahnfuß) nach DIN 3990, ISO 6336            | [-]     |
| Y <sub>A</sub>     | Kopfeingriffsfaktor nach Fronius                            | [-]     |

| Symbol                | Definition                                                   | Einheit              |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------|
| $y_L$                 | Stirnlastaufteilungsfaktor nach Fronius                      | [-]                  |
| $y_\beta$             | Einlaufverschleiß nach DIN 3990, ISO 6336                    | [ $\mu\text{m}$ ]    |
| $Z_A$                 | Doppeleingriffsfaktor nach Fronius                           | [-]                  |
| $Z_{B,D}$             | Einzeleingriffsfaktoren                                      | [-]                  |
| $Z_E$                 | Elastizitätsfaktor nach DIN 3990, ISO 6336                   | [-]                  |
| $Z_H$                 | Zonenfaktor nach DIN 3990, ISO 6336                          | [-]                  |
| $Z_\beta$             | Schrägenfaktor (Zahnflanke) nach DIN 3990, ISO 6336          | [-]                  |
| $Z_\varepsilon$       | Überdeckungsfaktor nach DIN 3990, ISO 6336                   | [-]                  |
| $z_1$                 | Ritzelzähnezahl                                              | [-]                  |
| $\alpha$              | Eingriffswinkel                                              | [°]                  |
| $\beta$               | Schrägungswinkel                                             | [°]                  |
| $\beta_b$             | Schrägungswinkel am Grundkreis                               | [°]                  |
| $\Delta y$            | Abfall des äußeren Zahnstangenpunktes                        | [mm]                 |
| $\Delta s$            | Druckstückspiel, Federweg                                    | [mm]                 |
| $\delta$              | Gehäusewinkel                                                | [°]                  |
| $\varepsilon_\alpha$  | Profilüberdeckung                                            | [-]                  |
| $\varepsilon_\beta$   | Sprungüberdeckung                                            | [-]                  |
| $\varepsilon_\gamma$  | Gesamtüberdeckung                                            | [-]                  |
| $\gamma$              | Verzahnungsauslaufwinkel am Ritzel                           | [°]                  |
| $\theta$              | Stirnseitenwinkel                                            | [°]                  |
| $v$                   | Querkontraktionszahl, bei Stahl $v=0,3$                      | [-]                  |
| $\kappa, \omega, \nu$ | Hilfsintegrale nach [HERT63]                                 | [-]                  |
| $\xi, \eta, \zeta$    | Dimensionslose Koordinaten                                   | [-]                  |
| $\pi$                 | Formänderungsarbeit                                          | [Nmm]                |
| $\rho$                | Krümmungsradius                                              | [mm]                 |
| $\rho_F$              | Fußrundungsradius                                            | [mm]                 |
| $\rho_{FP}$           | Fußrundungsradius des Bezugsprofils                          | [mm]                 |
| $\psi$                | Verformung in Breitenrichtung                                | [-]                  |
| $\Sigma$              | Achskreuzungswinkel                                          | [°]                  |
| $\sigma_1$            | Tangentialspannung (FEM)                                     | [N/mm <sup>2</sup> ] |
| $\sigma_{H0}$         | Nominelle Flankenpressung                                    | [N/mm <sup>2</sup> ] |
| $\sigma_H$            | Flankenpressung                                              | [N/mm <sup>2</sup> ] |
| $\sigma_{F0}$         | Zahnfuß-Nennspannung nach DIN 3990, ISO 6336                 | [N/mm <sup>2</sup> ] |
| $\sigma_F$            | Zahnfußspannung nach DIN 3990, ISO 6336                      | [N/mm <sup>2</sup> ] |
| $\sigma_{Flim}$       | Zahnfußfestigkeit                                            | [N/mm <sup>2</sup> ] |
| $\varphi$             | i-te Grundgleichung des Biegelinienansatzes                  | [-]                  |
| $\varphi_z$           | Ritzeldrehwinkel                                             | [°]                  |
| $\omega_{kipp}$       | Kippwinkel als Maß der Zahnstangenverdrehung um die Hubachse | [°]                  |

## Indizes und Definition

| Symbol | Definition                             |
|--------|----------------------------------------|
| A      | Eingriffsbeginn                        |
| B      | Innerer Einzeleingriffspunkt am Ritzel |
| C      | Wälzpunkt                              |
| D      | Innerer Einzeleingriffspunkt am Rad    |

| Symbol | Definition                            |
|--------|---------------------------------------|
| E      | Eingriffsende                         |
| i      | Betrachteter Abschnitt                |
| j      | Mit Einzelkraft belasteter Abschnitt  |
| ers    | Ersatz-                               |
| n      | Normalschnitt                         |
| rel    | Modulbezogener Abstand zur Stirnseite |
| T      | Teillast                              |
| t      | Stirnschnitt                          |
| w      | Betrieb                               |
| 0      | Ausgangszustand                       |
| 1, I   | Ritzel                                |
| 2, II  | Zahnstange                            |

## Abkürzungsverzeichnis

| Abkürzung | Bedeutung                                                         |
|-----------|-------------------------------------------------------------------|
| AGMA      | American Gear Manufacturers Association                           |
| BEM       | Boundary-Elemente-Methode                                         |
| DIN       | Deutsches Institut für Normung e.V.                               |
| DMS       | Dehnmessstreifen                                                  |
| EHPS      | Electric hydraulic power steering                                 |
| EPSapa    | Electric power steering on a paraxial recirculating ball nut gear |
| EPSc      | Electric power steering on the steering column                    |
| EPSdp     | Electric power steering on a dual pinion                          |
| EPSrc     | Electric power steering on a rack concentric servo unit           |
| ESZ       | Ebener Spannungszustand                                           |
| EVZ       | Ebener Verzerrungszustand                                         |
| FL        | Flankenlinie                                                      |
| FEM       | Finite Elemente Methode                                           |
| HPS       | Hydraulic power steering                                          |
| IMM       | Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion          |
| ISO       | Internationale Organisation für Normung                           |
| LV        | Lastverteilung                                                    |
| PL        | Profillinie                                                       |
| Q         | Verzahnungsqualität                                               |
| RBAS      | Robert Bosch Automotive Steering GmbH                             |
| RIKOR     | Ritzelkorrektur (FVA Software)                                    |
| SV        | Zahnfußbiegespannungsverteilung                                   |
| VZ        | Verzahnung                                                        |
| ZSG       | Zahnstangengetriebe                                               |

## Abstract

Today's gear teeth design in passenger car steering systems is characterized by the continuing reduction of development times, the increasing demands on the running quality, more efficient use of existing material constraints and the implementation of new lightweight construction strategies. A good understanding of the acting stresses and load capacities form the basis of a save component design. As the first step in the product lifecycle process, the normative calculation procedure plays an important part. Computed downstream calculations using Multi-Body Simulation (MBS) and the Finite Element Method (FEM) are based on the load assumptions of the analytical program giving a review of the performance quality of the running gear teeth. The standardized calculations mostly refer to a pair of spur gears, whereas the geometric, kinematic and specific bearing characteristics of a steering gear (rack, pinion) are continuously disregarded. With regard to the variety of customer enquiries, a quick, analytical assessment is a suitable tool to be used before the preferred final solution of the toothing variation is selected.

Due to the differences between the spur/spur and rack/pinion gears, necessary adjustments have to be made to the original load capacity calculation. With the help of the deflection influence coefficients methods, the load distribution along the line of contact (LVR) and stress distribution along the tooth root (SVR) are detected whereby the geometric features of the rack profile are taken into account. The contact forces and tooth root bending stresses of a single meshed gear pair are compared to a Finite Element Analysis (FEA). A FEA contact simulation verifies the resulting loads and main stresses at the tooth root of the gear.

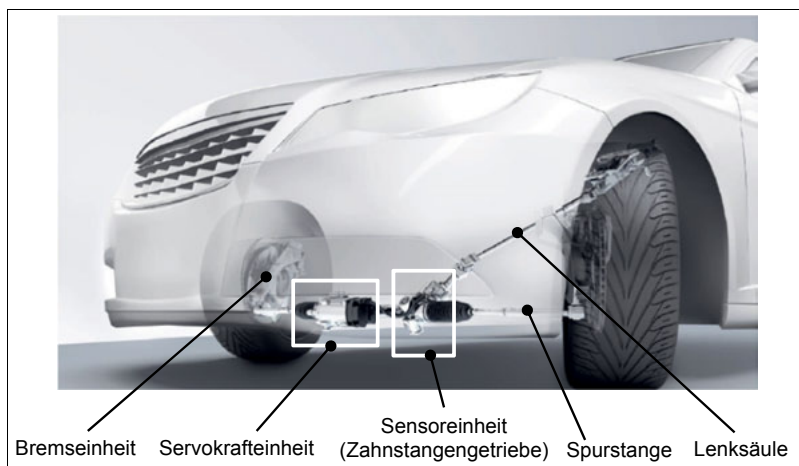
The task is aimed at improving stress analysis for rack and pinion gears. Characteristic effects on the tooth meshing of variable, local tooth stiffness and the tooth environment are analyzed both theoretically and experimentally explaining the effect on the load bearing capacity. The importance of the load capacity as a component of the LVR and SVR are shown for steering gear teeth increasing the possibilities of analytical calculation. The modified method of identification for the stress and the provision of the component Woehler (SN-) curves form a prospective and a more accurate lifetime prediction for rack and pinion gears.



## 1 Einleitung

Der allgemeingültige Anspruch an Lenksysteme hinsichtlich Lenkgefühl und -komfort in verschiedenen Fahrsituationen bei ausreichender Lenkhilfe entspricht bei Weitem nicht mehr der ausschließlichen Kundenanforderung. Neben Stoßdämpfung, einer guten Mittenstabilität bei geringen Lenkausschlägen und dem nahezu lenkmomentfreien Parkieren liegt das Hauptaugenmerk heutzutage auf einer gewichts- und beanspruchungsoptimierten Lenkung. Hinzu kommt eine mitdenkende, aktive Lenkunterstützung, die dem Fahrer unter minimalem Kraftstoffverbrauch begleitend und unbemerkt zur Seite steht. Die persönliche Fahrsicherheit wird in Abhängigkeit von der Fahrsituation und der Geschwindigkeit durch eine Vielzahl von Steuersignalen überwacht.

Ebenso entwickeln sich die heutigen Unternehmensziele bei stetig wachsenden Kundenansprüchen hin zu der Optimierung von Fertigungsprozessen, der Verwendung hochfester Werkstoffe sowie der Maximierung der Bauteilbeanspruchbarkeiten. Zudem erfordert die Vielzahl an Kundenanfragen eine schnelle Lösungsfindung hinsichtlich einer optimalen Verzahnungspaarung für die Sensor- oder Lenkverzahnung. So erscheint eine analytische Abschätzung für die Auswahl einer Vorzugslösung auch heutzutage als geeignetes Werkzeug. In der Abbildung 1.1 wird beispielhaft ein elektromechanisches Lenksystem in einem PKW-Vorderbau gezeigt. Die wesentlichen Bestandteile einer Lenkung sind die Sensor- und Servoeinheit, sowie die Lenksäule und Spurstangen.



**Abbildung 1.1: Elektromechanisches Lenksystem im PKW aus [RBAS15]**

Ein maßgebender Bestandteil des Produktentstehungsprozesses einer Lenkung (Abbildung 1.2) ist die beanspruchungsgerechte Auslegung des Zahnstangengetriebes. Innerhalb des Lenkgetriebes wälzt ein außenverzahntes Stirnrad auf einer Zahnstangenverzahnung ab. Hinsichtlich der Zahnflanken- und Zahnfußtragfähigkeit wird das Zahnstangengetriebe als sehr langsam laufende Zahnradpaarung eingeordnet. In der derzeitigen Tragfähigkeitsberechnung kann die Modellvereinfachung des Zahnstangengetriebes als Ersatzstirnradgetriebe durch das spezielle Verzahnungsumfeld (Lagerung, Kinematik) in einer Lenkung zu einer ungenauen Abschätzung der Beanspruchungsgrößen führen. Als Folge sind Verzahnungsschäden oder Ausfälle des Lenksystemes vorstellbar. Weiter begünstigt die fehlende Abstützung von Axialkräften an der Zahnstange eine Tragbildverlagerung in Richtung der Stirnkanten, wodurch sich Kantenträger und Zahneckbrüche ausbilden können. Darüber hinaus erfolgt der Betrieb des Zahnstangengetriebes im Mischreibungsbereich, sodass sich kein hydrodynamischer Schmierfilm entlang der Zahnflanken ausbilden kann. Als Folge entsteht ein hoher Zahnflankenverschleiß an den Zahnstangen- und Ritzelzähnen.

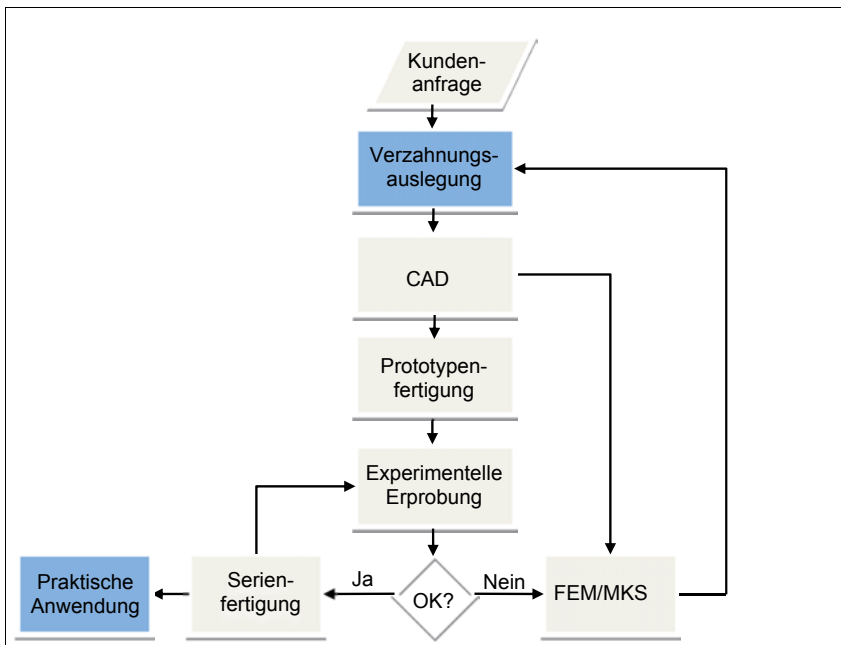


Abbildung 1.2: Einordnung der Verzahnungsauslegung im Entwicklungsprozess

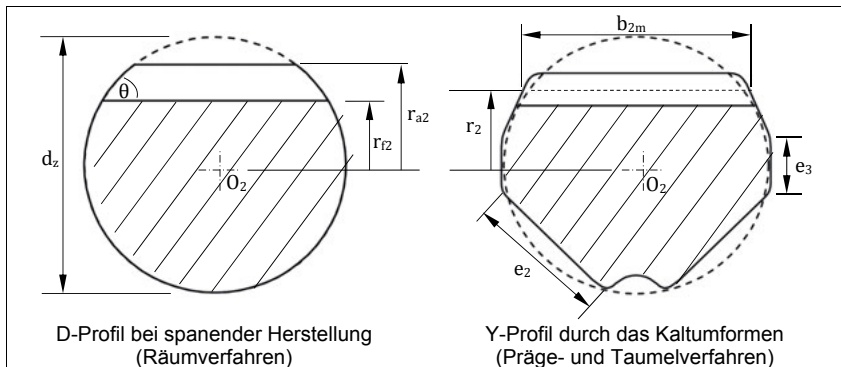
## 1.1 Problem- und Aufgabenstellung

Zur Vermeidung von Schadensfällen und der Sicherstellung einer exakten Lebensdauer-  
vorhersage ist das Zusammenspiel zwischen Beanspruchungsberechnung und Beanspruch-  
barkeit von maßgebender Bedeutung.

Allgemein gelten die Flankenpressungen und Zahnfußspannungen als aussagekräftige  
Dimensionierungsgrößen. Die analytischen Beanspruchungsgrößen errechnen sich mithilfe  
normativer Berechnungsverfahren nach [DIN3990] und [ISO6336] aus einer Vielzahl  
analytischer bzw. experimentell abgesicherter Einflussfaktoren. Als charakteristische Größen  
gelten die konjugierten Verzahnungsgeometrien sowie deren zulässige Fertigungstoleranzen  
und das nähere Verzahnungsumfeld. Die zur Beschreibung der Verzahnungen erforderlichen  
Formfaktoren sind in den Normen für Stirnräder festgelegt. Weiterhin wird eine Vielzahl  
verschiedener Einflussgrößen benötigt, die zum Teil auf experimentellen Erfahrungen  
beruhen, in Wechselwirkungen zueinander stehen und voneinander abhängig sind. Für eine  
Abschätzung dieser Einflussfaktoren ist neben der Bestimmung der anliegenden äußeren  
Kräften aus dem Antriebsstrang (Anwendungsfaktor  $K_A$ ) und den inneren dynamischen Kräften  
(Dynamikfaktor  $K_v$ ) auch das Verformungsverhalten von Zahn- und Radkörper unter Betriebs-  
last bei abweichungsbehafteter Verzahnungsgeometrie von Bedeutung. Die Beschreibung der  
ungleichmäßigen Lastverteilung entlang der Zahnbreite geschieht anhand der Breiten-  
faktoren ( $K_{H\beta}$ ,  $K_{F\beta}$ ) und der ungleichmäßigen Lastaufteilung auf die im Eingriff befindlichen  
Zahnpaare durch die Stirnfaktoren ( $K_{H\alpha}$ ,  $K_{F\alpha}$ ). Die Einflussfaktoren können maßgeblich die  
Beanspruchungen des Hertzschen Kontaktes und des Zahnfußes verändern.

Die Zahnstangengetriebe unterscheiden sich in der Verzahnungs- und Radkörpergeometrie,  
der Lagerung und der Kinematik deutlich von Stirnradverzahnungen und den dafür zu Grunde  
gelegten Normschriften. Als Beispiel werden in der Abbildung 1.3 die typischen Zahnstangen-  
querschnitte (D- und Y-Profil) und die Geometriegrößen des Zahnstangenzahnes dargestellt.  
Besonders die Stirnseiten- und Radkörpergeometrie weisen große Unterschiede bei einem  
Zahnstangen- und Stirnradzahn auf. Dennoch beziehen sich sämtliche Annahmen für die  
Einflussfaktoren auf Stirnradpaarungen. Selbst der eindeutig zu ermittelnde Form- ( $Y_F$ ) und  
Spannungskorrekturfaktor ( $Y_S$ ) bei der Zahnfußtragfähigkeit bzw. Zonenfaktor ( $Z_H$ ) oder Einzel-  
eingriffsfaktor ( $Z_{B,D}$ ) bei der Zahnflankentragfähigkeit werden mithilfe eines Ersatzstirnrad-  
getriebes berechnet. Infolgedessen sollte die örtliche Beanspruchungsberechnung hinsichtlich  
der Charakteristika von Zahnstangengetrieben modifiziert werden. Daher gilt es, die spezielle  
Zahnstangengeometrie in die normativen Berechnungsvorschriften über die verschiedenen  
Einflussfaktoren einzubinden.

Als Folge der ungleichmäßigen Lastverteilung wird eine Drehbewegung um die Zahnstangenlängsachse bzw. um den Ursprung  $O_2$  (siehe Abbildung 1.3) initiiert. Die Drehung der Zahnstange wird wegen der vorliegenden Druckstücklagerung nicht durch Lagersteifigkeiten behindert. Die sich anschließende Tragbildverlagerung in die äußeren Zahnflankenbereiche kann die Ungleichmäßigkeit entlang der Berührlinie weiter verstärken. Der größte Anteil der Kippneigung um  $O_2$  stammt zudem aus einer servounterstützten Hilfskraft. Die Lenkhilfe induziert Zwangskräfte und -momente beispielsweise über einen weiteren Zahnkontakt, über ein Kugelmutterumlaufgetriebe oder einen Riementrieb. Zusätzlich muss der Effekt der Stirnseitegeometrie des Zahnstangenzahnes (Stirnseitenwinkel  $\theta \neq 90^\circ$ ) und der daraus herabgesetzten örtlichen Steifigkeit in Zahnrandnähe gesondert untersucht werden. Die Berücksichtigung der genauen Stirnseitegeometrie erfordert eine lokale Berechnung der Last- und Spannungsverteilung durch die Verformungseinflusszahlenmethode oder durch eine Zahnkontaktrechnung mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM).



**Abbildung 1.3: Geometriegrößen an typischen Zahnstangenquerschnitten**

Darüber hinaus wird die lokale Beanspruchbarkeit gemäß der DIN 3990 und ISO 6336 maßgebend durch den Werkstoff (Kernfestigkeit, Stützwirkung) sowie die Oberflächen- und Wärmebehandlung beeinflusst. Im Gegensatz zur Einsatzhärtung des Stirnradzahnes wird der Zahnstangenzahn in der Regel induktiv gehärtet. Mithilfe eines Ringinduktors wird am Zahnstangenzahn eine Durchhärtung erreicht, die ein martensitisches Gefüge oder bainitisches Mischgefüge verursacht. Die Beanspruchbarkeiten von induktiv gehärteten Zähnen begründen sich derzeit aus jahrelangen Erfahrungen.

Für die Ermittlung des Last- und Spannungsverhaltens von Zahnstangengetrieben existiert bisher keine allgemeingültige oder normative Berechnungsmethodik. Die vereinfachte Abbildung als Stirnradpaarung bietet in der praktischen Anwendung ein deutliches Verbesserungspotenzial. Die vorliegende Arbeit soll einen grundlegenden Beitrag für eine sicherere Tragfähigkeitsberechnung von Zahnstangengetrieben leisten. Dafür wird der normative Berechnungsansatz der Stirnräder hinsichtlich der Gültigkeit überprüft und, falls erforderlich, erweitert. Um darüber hinaus eine Berechnung der Last- und Spannungsverteilung bei Zahnstangengetrieben zu gewährleisten, wird die Anwendbarkeit der Verformungseinflusszahlenmethode untersucht. Die angepassten normativen als auch örtlichen Methoden werden mithilfe von FEM-Kontaktrechnungen in einem für PKW-Lenkungen üblichen Antriebsmomentenbereich  $5 \text{ Nm} \leq T_1 \leq 140 \text{ Nm}$  bestätigt.

## 1.2 Zielsetzung und Lösungsweg

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines Berechnungsverfahrens für die Zahnradtragfähigkeit von Zahnstangengetrieben auf Basis von bekannten Verfahren der Stirnradgetriebe. Hierbei soll diese spezielle Vorgehensweise sowohl die charakteristischen Einflussgrößen auf die Beanspruchungen am Ritzel-Zahnstangenpaar berücksichtigen als auch auf gesicherte Beanspruchbarkeiten zurückgreifen. Die modifizierte Beanspruchungsermittlung hinsichtlich Zahnstangenengeometrie und die Ermittlung von Zahnfußfestigkeits-Wöhlerlinien für verschiedene Betriebszustände sollen eine verbesserte Tragfähigkeitsberechnung und Versagensvorhersage bei Zahnstangengetrieben ermöglichen.

Für die normative Tragfähigkeitsberechnung der ISO 6336 wird zunächst die Kräftesituation eines Zahnstangengetriebes analysiert und im Hinblick auf die wirkenden Zahnkontaktkräfte angepasst. Die Auswirkungen lokaler Effekte auf den Zahneingriff, die aus dem Zahnstangenprofil und dem unendlichen Krümmungsradius hervorgehen, werden für die Berechnung der Lastverteilungsfaktoren eingebunden. Die quantitative Aussagefähigkeit in Bezug auf einen Zahnfußbruch an der Zahnstange wird durch die Verwendung der tatsächlichen Zahngeometrie anstatt der bisherigen Ersatzstirnradverzahnung deutlich verbessert. Die Berücksichtigung des Biegehebelparmes, der Zahndicken und der Fußausrundung in der Zahnfußtragfähigkeitsberechnung werden unter Zuhilfenahme der Finiten-Element-Methode (FEM) anhand von typischen Lenkverzahnungen überprüft. Somit soll für die Verzahnungsauslegung von Zahnstangengetrieben eine schnelle Tragfähigkeitsabschätzung auf der Grundlage des normativen Berechnungsansatzes bereitgestellt werden.

Es wird eine weiterführende, auf die Besonderheiten der Ritzel-Zahnstangenpaarung angepasste Berechnung der Last- und Spannungsverteilung auf der Grundlage der Einflusszahlenmethode erforderlich, die in der Form eines prototypenähnlichen Methodenträgers aufgezeigt wird. In einem gekoppelten Scheibchenmodell lassen sich die Verformungseinflusszahlen aus der Kombination von der Zahn- und Radkörperverschiebung und einer empirisch ermittelten Verformungseinflussfunktion berechnen. Die Gültigkeit der allgemeinen Abklingfunktion für Verformungsverläufe bei Einzellast aus [LINK10] wird für den typischen Anwendungsbereich der Ritzel-Zahnstangenpaarung mithilfe der FEM bewertet. Falls nötig werden Anpassungen an der Verformungseinflussfunktion mit analytischen Näherungsverfahren untersucht. Dabei sind die lokalen Steifigkeitsänderungen in Zahnrandnähe des Zahnstangenzahnes sowie im Bereich des Verzahnungsauslaufes der Ritzelwelle besonders hervorzuheben.

Neben der theoretischen Analyse der Beanspruchungssituation im Zahnkontakt leistet auch eine systematische experimentelle Tragfähigkeitsuntersuchung hinsichtlich der Schadensart Zahnfußbruch bei Lenkverzahnungen einen unverzichtbaren Beitrag für die Verifizierung der Berechnungsverfahren. Die Ermittlung von Zahnfußfestigkeits-Wöhlerlinien aus Zeitfestigkeitsversuchen ist maßgebender Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Hierfür soll ein vereinfachter Durchlenkprüfstand die Lenkverzahnung sowohl unter den typischen Betriebsbedingungen abbilden als auch die Möglichkeit besitzen, den Systemfreiheitsgrad der Zahnstange einzuschränken. Somit können wichtige Einflussfaktoren im Lenkgetriebe und deren Auswirkung auf die Lebensdauer separiert werden. Darüber hinaus wird über die experimentelle Tragbildmessung die Berechnung des Lastverteilungsfaktors validiert, um die Tragfähigkeitsberechnung bei gegebener Zahnstangenverdrehung um die Zahnstangensachse weiter zu verbessern.

Ergänzend dazu werden an den Zahnstangenzähnen Pulsatorversuche durchgeführt. Das hochfrequente Pulsen bis zum Zahnfußbruch gilt als serienbegleitender Prüfversuch und wird zur Qualitätsüberwachung von Werkstoff und Wärmebehandlungsverfahren eingesetzt. Ein Zusammenhang zwischen den Pulsator- und Überrollversuchen ist daher wünschenswert und wird in der vorliegenden Arbeit ebenfalls näher untersucht.

## 2 Stand des Wissens

### 2.1 Einordnung der Zahnstangengetriebe

Die Zahnstangengetriebe sind gekennzeichnet durch einen konstanten oder variablen Übersetzungsverlauf und eine translatorische Abtriebsbewegung. Üblicherweise liegen die An- und Abtriebsachse gekreuzt zueinander, sodass Gleiteffekte entlang der Zahnprofil- und Flankenlinienrichtung vergleichbar zu den Schraubtrieben entstehen.

Grundsätzlich bewertet Linke in [LINK10] die Getriebe nach deren Übersetzungsverlauf. In einer Aufstellung zu den Getriebearten werden die Zahnstangengetriebe, bestehend aus einer vollständig oder teilweise verzahnten Zahnstange und einem Außenstirnrad, als Untergruppe der Zahnradgetriebe geführt. Hierbei können sie nach der Abbildung 2.1 sowohl den gleichmäßig übersetzenden ( $i_{\text{konst}}$ ) als auch den ungleichmäßig übersetzenden ( $i_{\text{var}}$ ) Getrieben zugeordnet werden. Jedoch werden die variablen Übersetzungsverläufe in der Praxis nur als Bindeglied zwischen gleichmäßig übersetzenden Übersetzungsbereichen eingesetzt. Der sogenannte Übersetzungssprung wird in der Regel so gestaltet, dass er nur einen geringen Anteil am Gesamthub besitzt und sich außerdem nicht in einem hochbeanspruchten Hubbereich befindet.

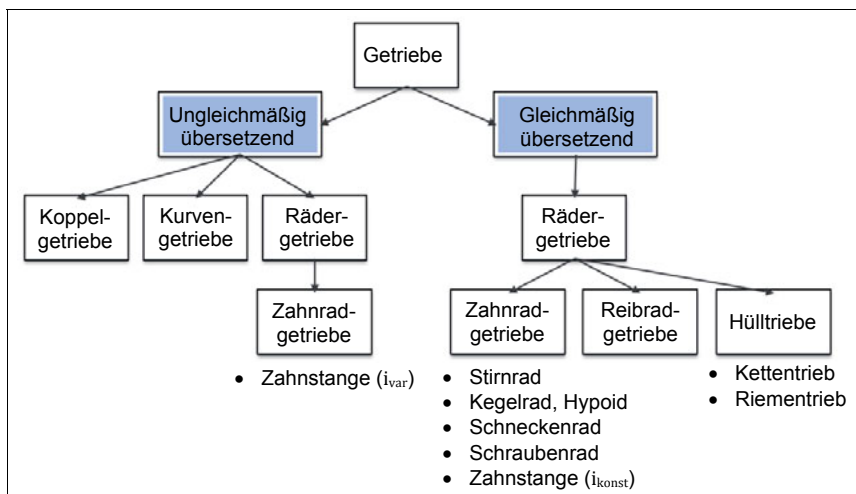


Abbildung 2.1: Einteilung der Getriebe nach der Art der Übersetzung nach [LINK10]

Durch die formschlüssige Kraftübertragung im Zahnstangengetriebe (ZSG) wird die Drehbewegung des Antriebsritzels in eine translatorische Abtriebs- bzw. Hubbewegung der Zahnstange gewandelt. Darauf aufbauend bezieht sich Neugebauer [NEUG12] auf eine Getriebeeinteilung hinsichtlich einer translatorischen Abtriebsbewegung (vgl. Tabelle 2-1) und empfiehlt Schraub-, Kurbel- oder Zahnstangengetriebe. Hierbei sind eine gleichförmige Bewegungsübertragung innerhalb eines begrenzten Hubbereiches die typischen Merkmale der Schraubtriebe. Dagegen sprechen die einfache konstruktive Umsetzung, die Realisierung gleichmäßiger Geschwindigkeiten im Arbeitsbereich bzw. ein schnelleres Heran- oder Abführen im Hin- und Rücklauf für die Kurbelgetriebe. Als Nachteile sind die geringen und nur aufwendig zu verändernden Hubwege zu nennen. Bei hohen Kraftübertragungen in Kombination mit großen und laufruhigen Zustellwegen befürwortet [NEUG12] die Verwendung von Zahnstangengetrieben. Allerdings können Zahneingriffsstörungen entstehen, die die Bewegungsgleichförmigkeit herabsetzen. Zusätzlich ist bei der Fettschmierung (Lebensdauer-schmierung) ein Trockenlauf möglich, da der Schmierstoff aus dem Zahneingriff gedrückt wird. Abgesehen davon müssen bei allen erwähnten Antrieben besondere konstruktive Maßnahmen gegen übermäßigen Verschleiß und Spielzunahme berücksichtigt werden. Neugebauer grenzt die Ritzel-Zahnstangengetriebe deutlich von den Schraubtrieben ab.

**Tabelle 2-1: Antriebe zur Bereitstellung translatorischer Bewegungen nach [NEUG12]**

| Schraubtrieb             | Kurbeltrieb                | Zahnstangentrieb  |
|--------------------------|----------------------------|-------------------|
| Spindel-Mutter           | Schubkurbel                | Ritzel-Zahnstange |
| Schnecke-Zahnstange      | Kurbelschwinge             |                   |
| Schnecke-Schneckenstange | Schwingende Kurbelschleife |                   |

Darüber hinaus können Zahnradgetriebe nach den vorliegenden Bewegungsverhältnissen unterschieden werden. [LINK10] klassifiziert das kinematische Verhalten der Zahnradpaarung in einen Wälz- oder Schraubmechanismus. Die aufeinander abrollenden und gleitenden Wälzkörper lassen sich aus der Rotation einer Hyperbel entwickeln (Hyperboloid). Anhand der Hyperboloidpaarung sowie der Verschiebung des Achsabstandes und/oder einer Änderung des Kreuzungswinkels werden sämtliche Zahnradgetriebe abgebildet. Der Achskreuzungswinkel ermittelt sich nach der Gl. 2–1 aus der Schrägungswinkelsumme der beteiligten Zahnräder. Bei parallelen Achsen (Stirnradgetriebe) liegen so zylindrische Wälzkörper vor. Kegelige Grundkörper entstehen in Folge von sich schneidenden Achsen (Kegelrad-, Hypoidgetriebe). Dagegen sind bei Schraubrad- und Schneckengetriebe windschiefe oder sich kreuzende Achsen charakteristisch.



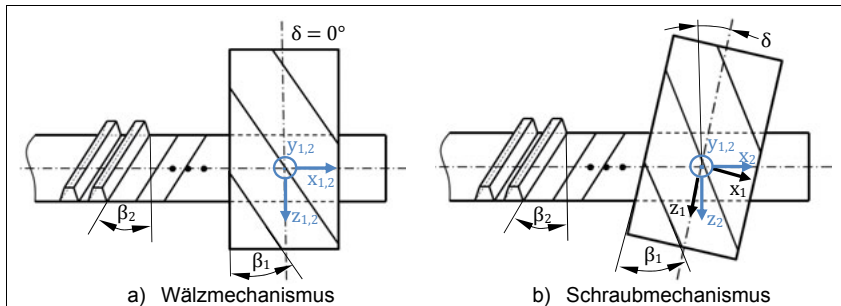
Bei Zahnstangengetrieben liegen die üblichen Achskreuzungswinkel zwischen  $\Sigma = \pm 30^\circ$  und unterscheiden sich deutlich von den Stirnrad- ( $\Sigma = 0^\circ$ ) und Schneckengetrieben ( $\Sigma = 90^\circ$ ). Niemann und Winter bewerten die Schraubradgetriebe mit  $|\Sigma| < 25^\circ$  wegen der großen Berührellipse als Stirnradverzahnung. Als Schadensbilder sollen laut [NIEM86] eher stirnradtypische Grübchenbildung und Zahnfußbrüche auftreten und nicht der hohe Verschleiß und das charakteristische Fressen als Folge hoher Schraubgleitung. Analog zur üblichen Notation wird das Antriebsritzel mit dem Index 1 und die Zahnstange als Abtrieb mit dem Index 2 geführt.

$$\Sigma = \beta_1 + \beta_2 \quad (2-1)$$

Auf Grundlage der beschriebenen Kategorisierungen und Merkmale können Zahnstangengetriebe in der vorliegenden Arbeit weiterführend als Grenzverzahnung einer Stirnräderpaarung betrachtet werden und demzufolge an die Tragfähigkeitsberechnung der DIN 3990 bzw. der ISO 6336 angelehnt werden.

## 2.2 Grundsätzliche Eigenschaften von Zahnstangengetrieben

Für Zahnstangengetriebe gilt der reine Wälzmechanismus bei senkrechter Drehachse des Antriebsrades zur Hubrichtung der Zahnstange (Abbildung 2.2, Fall a). Die Koordinatensysteme beider Wälzpartner fallen bei einem Gehäusewinkel  $\delta = 0^\circ$  stets zusammen. Hierbei entsteht beim Abrollvorgang außerhalb des Wälzpunktes das Zahnhöhengleiten (Profilgleiten). Sobald ein Zahnstangensystem mit  $\delta \neq 0^\circ$  vorliegt (Abbildung 2.2, Fall b), wirkt der Schraubmechanismus als Kombination aus Wälzen und Gleiten. Die zusätzliche Schraubgleitung in Zahnbreitenrichtung äußert sich durch einen niedrigeren Getriebewirkungsgrad, der bei einem konjugierten Verzahnungspaar abhängig ist von der Übersetzung  $i$ , dem Gehäusewinkel  $\delta$ , der Aufteilung der Schrägungswinkel  $\beta_{1,2}$  und der Eingriffsstellung. Hierbei ist der Anteil der Schraubgleitung in Zahnbreitenrichtung deutlich größer als das Profilgleiten. Laut Pech in [PECH11] kann der Einfluss des Profilgleitens an den Enden der Eingriffstrecke (A, E) erst bei Gehäusewinkeln  $\delta > 50^\circ$  vernachlässigt werden.



**Abbildung 2.2: Zahnstangensysteme in Abhängigkeit zum Summenachswinkel**

Das Schraubgleiten kann als Relativbewegung der Zahnflanken in Zahnbreitenrichtung um eine gedachte Schraubachse verstanden werden. Die verschiedenen Geschwindigkeitsanteile für einen Achskreuzungswinkel  $\Sigma \neq 0$  können nach [ÖN6725], [WASS05] auf Basis zylindrischer Schraubräder mit Evolventenverzahnung abgeleitet werden. Für eine deutlichere Darstellung des Schraubpunktes  $S$  wird das Stirnritzel in Abbildung 2.3 als Abwicklung approximiert. Die Gleitgeschwindigkeit  $v_{gs}$  entlang der Schraubachse ist die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Umfangsgeschwindigkeiten  $v_{ii}$ . Zur Berechnung der Geschwindigkeitsanteile werden zunächst die Eingriffswinkel  $\alpha_{sti}$  im Stirnschnitt und die Schrägungswinkel  $\beta_{si}$  am Schraubkreis nach [BART00] und [WASS05] benötigt. Die Schraubgleitrichtung steht orthogonal zur Flankennormalgeschwindigkeit  $v_n$ . Als Reaktion auf die verschiedenen Gleitreibungsanteile in Zahnprofil- und Zahnflankenrichtung zeigt die Verzahnung einen erhöhten Verschleißabtrag sowie unsymmetrische und zusätzliche Axialkräfte an den Lagerstellen.

Zusätzlich ist das Zahnprofil der Zahnstange als Grenzfall der Evolventenverzahnung zu verstehen und kann mithilfe der Krümmung  $\rho$ , das heißt dem Kehrwert des wirkenden Flankenradius, als Übergangsform zwischen der Außen- und Innenverzahnung positioniert werden (siehe Abbildung 2.4).

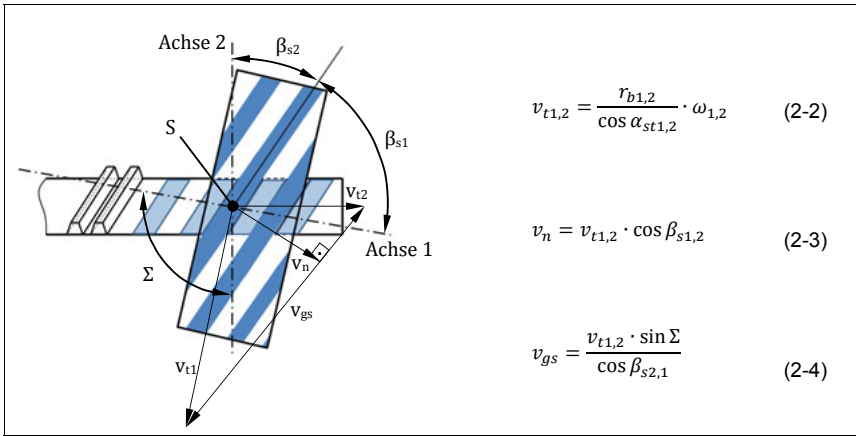


Abbildung 2.3: Definitionen zur Schraubleitung in Anlehnung an [WASS05]

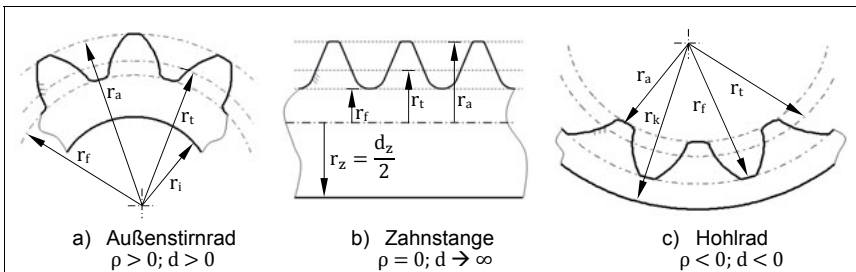


Abbildung 2.4: Einordnung der Zahnstange als Evolventenverzahnung nach [LINK10]

Die üblichen Flankenradien am Stirnrad besitzen bei der Zahnstange einen unendlichen Krümmungsradius, sodass mit Ausnahme des Zahnstangendurchmessers  $d_z$  nur von der Kopf- ( $r_a$ ), Teil- ( $r_t$ ) und Fußlinie ( $r_f$ ) gesprochen wird. Als Folge bildet sich ein geradflankiges Zahnstangenprofil im Stirn- und Normalschnitt aus. Für die Tragfähigkeitsberechnung ist der Ersatzkrümmungsradius  $\rho_{ers}$  im Kontaktpunkt entscheidend, der sich nach Gleichung 2–5 für Zahnstangengetriebe zu  $\rho_{i1}$  vereinfachen lässt. Der Index  $i$  in Gleichung 2–6 bezeichnet die Krümmung an einem beliebigen Radius.

$$\rho_{i,ers} = \frac{1}{\frac{1}{\rho_{i1}} + \frac{1}{\rho_{i2}}} \quad \rightarrow \text{Bei Zahnstangengetrieben: } \rho_{i,ers} = \rho_{i1} \quad (2-5)$$

$$\rho_{i1,2} = \frac{1}{r_{i1,2}} \quad (2-6)$$

Nach Fronius [FRON71] liegen die Vorzüge des evolventischen Flankenprofils vor allem im geradflankigen Bezugs- bzw. Werkzeugprofil, wodurch die Zahnradfertigung erleichtert wird. Dazu kommen die Unempfindlichkeit bei Achsabstandsänderungen und die daraus resultierende Austauschbarkeit einzelner Zahnräder. Außerdem kann in Abhängigkeit zur erforderlichen Tragfähigkeit der nutzbare Bereich der Zahnflanke mithilfe einer Profilverschiebung ( $x_n$ ) verschoben werden. Dagegen sollte die Neigung zu Unterschnitt bei  $x_n < 0$  oder zu spitzen Zähnen bei  $x_n > 0$  in Kombination mit kleinen Zähnezahlen und die daraus folgende Tragfähigkeitsminderung beachtet werden. Zudem lassen sich bei Zahnstangengetrieben im Vergleich zu Rädergetrieben Differenzen im Hertzchen Kontaktbereich feststellen. Die elliptische Kontaktfläche setzt sich nach [HERT83] aus den Hauptachsen  $a_H$  und  $b_H$  zusammen. Die Zahnradtragfähigkeit bei Stirnradpaarungen wird durch den Kontakt zweier Zylinderflächen  $d_{1,2}$  angenähert. Mithilfe des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Berührlinienlänge  $l_b$  sowie der wirkenden Kontaktkraft  $F$  lässt sich der Hertzsche Kontakt analog den Gleichungen 2–7 und 2–8 ermitteln. Dagegen wird eine sich im Eingriff befindliche Ritzel-Zahnstangenpaarung durch einen Zylinder / Ebenen-Kontakt gekennzeichnet, d.h. der Ersatzkrümmungsradius ergibt sich nur durch die Ritzelzahngeometrie (siehe Gl. 2–9).

$$a_H = l_b \quad (2-7)$$

$$b_{H,Zyl/Zyl} = \sqrt{\frac{4F(1-\nu^2)}{\pi E l_b \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right)}} \quad (2-8)$$

$$b_{H,Zyl/Ebene} = \sqrt{\frac{4F(1-\nu^2)d_1}{\pi E l_b}} \quad (2-9)$$

In typischen Stirnrad-, Schraubrad- oder Umlaufrädergetrieben errechnet sich die Übersetzung  $i$  nach Gl. 2–10 aus dem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{1,2}$  bzw. den Wälzkreisen der beiden Zahnräder. Die Übersetzung  $i_{\text{konst}}$  einer Zahnstangenverzahnung wird üblicherweise nach Gl. 2–11 als Zahnstangenhub pro Ritzelumdrehung  $H/n$  angegeben. Eine variable Übersetzung  $i_{\text{var}}$  wird über die Zahnstangengeometrie durch eine kontinuierliche Änderung der

Wälzlinie  $r_{w2}$  bzw. durch eine Anpassung des Normaleingriffswinkels  $\alpha_{n2}$  und des Schrägungswinkels  $\beta_{1,2}$  in Abhängigkeit vom Ritzeldrehwinkel  $\varphi_z$  realisiert. Die Berechnung der variablen Übersetzung  $i_{var}$  kann der Gl. 2–12 entnommen werden.

$$i = \frac{n_{an}}{n_{ab}} = \frac{2\pi\omega_1}{2\pi\omega_2} = -\frac{d_{w2}}{d_{w1}} = -\frac{z_2}{z_1} = |u| \quad (2-10)$$

$$i_{konst} = \frac{H}{n} = \frac{m_n z_1 \pi}{\cos \beta_2} \quad (2-11)$$

$$H(\varphi_z) = \int_{\varphi_{z0}}^{\varphi_z} i(\varphi_z) d\varphi_z \quad (2-12)$$

mit

$$i_{var} = i(\varphi_z) = \frac{m_n(\varphi_z) z_1 \pi}{\cos \beta_2(\varphi_z)}$$

$$m_n(\varphi_z) = m_n \cos \alpha_{n2}(\varphi_z)$$

### 2.3 Praktische Anwendung von Zahnstangengetrieben

Trotz ihrer im Vergleich zu Stirradgetrieben zahlenmäßig deutlich geringeren Verbreitung, spielen Zahnstangengetriebe in der speziellen Anwendung translatorischer Bewegungsübertragung eine wichtige Rolle. Es gibt eine Vielzahl von eingesetzten Ritzel-Zahnstangenpaarungen in der Praxis. Im folgenden Abschnitt wird ein kurzer Überblick über die häufigsten Anwendungsgebiete gegeben:

- Zahnstangentriebe kommen in Bergbahnen (Pilatusbahn) zum Einsatz, um laut [MESS71] Fahrstrecken mit Steigungen bis zu 50 % zu überwinden. Die geradzahnte, meist massiv ausgeführte Zahnstange liegt zwischen den beiden Schienen und ist ein Bestandteil des Gleises. Diese Bauweise von Zahnradbahnen ist bis zu den Anfängen der Dampfmaschinen zurückzuführen. Herkömmliche Adhäsionsbahnen stoßen bei deutlich geringeren Anstiegen, auf trockenen Schienen bei ca. 16 % Steigung, an ihre physikalischen Grenzen. Die Pilatusbahnen werden genutzt, um die abgetragenen Gesteine des Bergbaus an die Erdoberfläche zu befördern. Andererseits dienen sie als Alternative zu Standseilbahnen zur Beförderung von Personen und Stückgut entlang großer Gebirgsketten, wie beispielsweise die Matterhorn-Gotthard-Bahn. Eine der bekanntesten Zahnradbahnen befindet sich nach [SCLU10] in Brasilien entlang der Bahnstrecke Santos–Jundiaí.

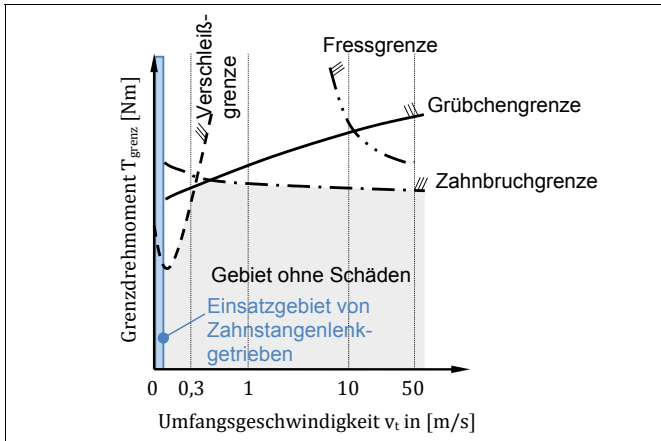
- Des Weiteren werden Zahnradbahnen heutzutage noch in den sogenannten Treidelloks vielfach eingesetzt. Diese Schiffschleppbahnen bewegen sich entlang von Gewässern und Kanälen und dienen der Beförderung von Wasserfahrzeugen bzw. auf dem Wasser befindlichen Transportgutes. Mithilfe des Zahnstangentriebs können die Schiffe beispielsweise die großen Steigungen zu den Schleusen des Panamakanals überwinden. Nach [SÄUB02] wurde erst 1990 auf eine neue Generation der Treidellokomotiven umgestellt, wobei der stetig wachsende Schiffsverkehr sowie die steigende Zuglast weitere Entwicklungsschritte erfordern.
- In [STOLL09] sind Zahnstangengetriebe bei Seilbaggern im Braunkohletagebau für eine zuverlässige Löffelbewegung erforderlich. Bei der hochbeanspruchten Grabdynamik wird der Löffelstiel mit Hilfe eines Zahnstangensystems, oder alternativ einer Seilführung, vor und zurück bewegt. Darüber hinaus werden sie laut [KUNZ02] als Vorstoßwerk, bestehend aus Zahnstange, Hub- und Vorstoßseil, in Hochlöffelbaggern eingesetzt. Kunze bezeichnet in [KUNZ02] den Hochlöffelbagger als Einzweckmaschine und sehr schwere Gewinnungsmaschine, um im Tagebau, Steinbruch bzw. bei großen Erdbaustellen die Arbeit zu erleichtern.
- In [KOEN08] werden Zahnstangengetriebe im Hochbau für mobile Senkrechtaufzüge, d.h. zur Versorgung der einzelnen Etagen mit Materialien und Baustoffen, angewendet. Das Lastheben und -senken erfordert ein Höchstmaß an Sicherheit, sodass die Hebebühne über zwei synchrone Zahnstangen-Radpaarungen verfügt. Beim Ausfall einer Verzahnung kann der Betrieb sicher fortgeführt werden.
- Zusätzlich zu den bisherigen Anwendungsgebieten können Zahnstangengetriebe laut Rögnitz [ROEG64] auch in Haupt- oder Nebenantrieben von Werkzeugmaschinen zum Einsatz kommen. Hierbei erfolgt beispielsweise in Hobelmaschinen eine Ausführung als Hauptantrieb mit vergleichsweise großem Antriebsritzel. Auch [NEUG12] befürwortet Zahnstangengetriebe in Hobelmaschinen aufgrund der benötigten großen Zustellwege und der enormen Kraftübertragung und weist gleichzeitig auf die Gefahr von Zahneingriffsstößen und die schlechte Bewegungsgleichförmigkeit hin als Folge der geringen Überdeckung. Perovic führt in [PERO02] bzw. [PERO09] verschiedene Beispiele für Nebenantriebe auf. In CNC-gesteuerten Bohrmaschinen, in einfachen Radial- und Auslegerbohrmaschinen oder in Säulenbohrmaschinen werden die elektrischen und/oder manuellen Verstellmechanismen für die einzelnen Achsen u.a. über Zahnstangengetriebe realisiert. Dadurch können die Bewegungen von Bohrspindel oder Bohrschlittens gemäß [PERO02] mit bis zu 2,5 µm Positionierungsgenauigkeit ermöglicht werden. Auch in Räummaschinen werden die elektromechanischen

Antriebe mithilfe von Elektromotoren und Zahnstangen- oder Kugelmutter-Umlaufgetriebe erreicht.

- Eine besondere Stellung nehmen Zahnstangengetriebe in PKW-Lenkssystemen ein. Die Räder bei zwei- oder mehrspurigen Fahrzeugen werden über das Zusammenspiel von translatorischer Hubbewegung der Zahnstange und der Radaufhängung, bestehend aus mindestens zwei Kardangelenken, in die Fahrrichtung gelenkt. Dabei wandelt die spielfrei gelagerte Zahnstangen-Radpaarung die Lenkraddrehung des Fahrers ohne Verzögerung in eine entsprechende Räderdrehung. Für den Lenkungsvorgang müssen nach [POES12] neben den Längsdynamik- (in Geradeausfahrt) und Vertikaldynamikkräften (in Einfederungsrichtung) vor allem die Querdynamikkräfte entlang der Kurvenrichtung überwunden werden. Ebenso gelangen Informationen von den äußeren Radkräften über den mechanischen Antriebsstrang zurück zum Fahrer. Poestgens bezeichnet diesen Informationsfluss als querdynamischen Regelkreis, der die Grundlage von Unterstützungs- und Assistenzsystemen bildet.

Die Entwicklung des Berechnungsverfahrens für Zahnstangengetriebe wird bei den Lenkgetrieben durch eine große Datenmenge gültiger Verzahnungsauslegungen und deren Erprobung begünstigt. Somit werden die theoretischen Überlegungen und experimentellen Untersuchungen der vorliegenden Arbeit speziell an Zahnstangengetrieben von Lenkssystemen verifiziert.

Dadurch, dass die Lenkgetriebe zu den sehr langsam laufenden Getrieben mit Umfangsgeschwindigkeiten  $v_t < 0,1 \text{ m/s}$  zählen, sind nach [NIEM86] die tribologischen Schmierseffekte genauso zu vernachlässigen wie die Grübchenbildung und Grauflecken. Das übliche Einsatzgebiet der Lenkgetriebe hinsichtlich Umfangsgeschwindigkeit und vorherrschendem Schadensmechanismus kann der Abbildung 2.5 entnommen werden. Der dort aufgezeigte, erhöhte Verschleiß kann durch die Anfederung der Zahnstange an das Ritzel, d.h. einen um den Verschleißbetrag nachstellenden Achsabstand, ausgeglichen werden. Darüber hinaus werden die werkstoffseitigen Einflussfaktoren bei einer Paarung hart/hart verringert. Schudy ermittelte bereits für Außenverzahnungen (hart/hart) und Innenverzahnungen (hart/weich) in [SCHU08] am FZG-Verzahnungsprüfstand eine maximale Schadensintensität bei  $v_t = 0,05 \text{ m/s}$ , sodass eine kurze Versuchsdauer angenommen wird. Somit kann aus der Kombination eines kleinmoduligen Verzahnungspaares und eines langsam laufenden, hochbelasteten Getriebes ein frühes Schadensbild unter dem Einfluss vernachlässigbarer kinematischer Effekte ermöglicht werden. Des Weiteren befindet sich der prognostizierte Ausfall der Lenkverzahnungen bei der Flanken- und Zahnfußtragfähigkeit stets im Zeitfestigkeitsgebiet, das einer höheren Anzahl von Wöhlerversuchen zugutekommt.



**Abbildung 2.5: Tragfähigkeitsgrenzen für oberflächengehärtete Zahnräder gemäß [NIEM86]**

#### Einordnung der zu untersuchenden Lenkgetriebe in PKW-Lenkssystemen:

Ausgehend vom Beispiel der Zahnstangengetriebe in Lenkssystemen werden in der vorliegenden Arbeit die Erkenntnisse so vereinheitlicht, dass sie für alle beschriebenen Anwendungsgebiete der Zahnstangengetriebe übertragbar sind.

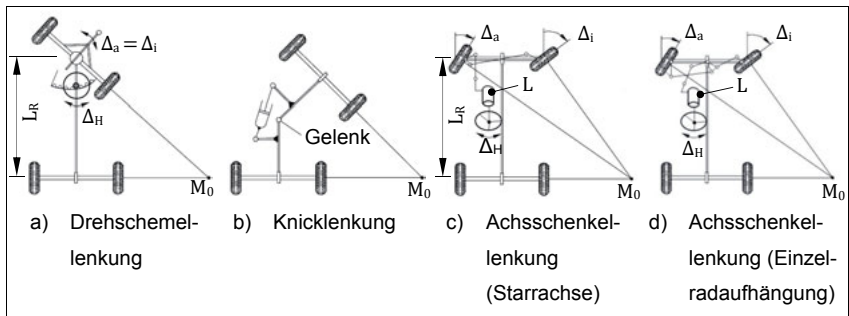
Bei der Betrachtung der vorkommenden Ritzelzähnezahlen  $z_1$  wird auffällig, dass die minimale Zähnezahl  $z_1 = 7$  für eine Bewegungsübertragung nach DIN 867 und bisweilen  $z_1 = 5$  nach DIN 58400 (Feinwerktechnik) in Lenkgetrieben unterschritten wird. Geringe Ritzelzähnezahlen können nach [ROTH74] Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha < 1$  verursachen, sodass die ISO 6336 für die Verzahnungspaarungen mit Überdeckungen von ( $\varepsilon_\alpha \leq 1$ ;  $\varepsilon_\gamma > 1$ ) nur bedingt anwendbar ist.

Die gültige Grenze für Gehäusewinkel  $|\delta| < 25^\circ$  bei Getrieben mit gekreuzten Achsen nach Niemann/ Winter in [NIEM86] wird bei den zu untersuchenden Zahnstangengetrieben eingehalten (vgl. Kapitel 2.1). Somit kann der Schraubgleitanteil in der Verzahnungsauslegung der Zahnstangengetriebe nachfolgend vernachlässigt werden.



## 2.4 Von den ersten Lenkungen zum heutigen Lenkungssystem

Die Lenkungshistorie lässt sich eng mit der Entwicklung der Mobilität bzw. des Automobils verknüpfen. Als Folge der Industrialisierung und den zu transportierenden Rohstoff- und Gütermengen benötigten die Menschen fortwährend stärkere und alltagstauglichere Transportmittel. Der Wunsch nach unabhängiger, bezahlbarer sowie komfortabler Überbrückung großer Entfernungen treibt die Automobil- bzw. Lenkungshersteller seit mehr als einhundert Jahren zu immer kürzeren Entwicklungsschritten an. Im folgenden Kapitel wird ein kurzer Überblick zu den wichtigsten Meilensteinen der Lenkungsgeschichte gegeben.



**Abbildung 2.6: Bauarten von Fahrzeuglenkungen in Anlehnung an [MATS07], [DUDZ05]**

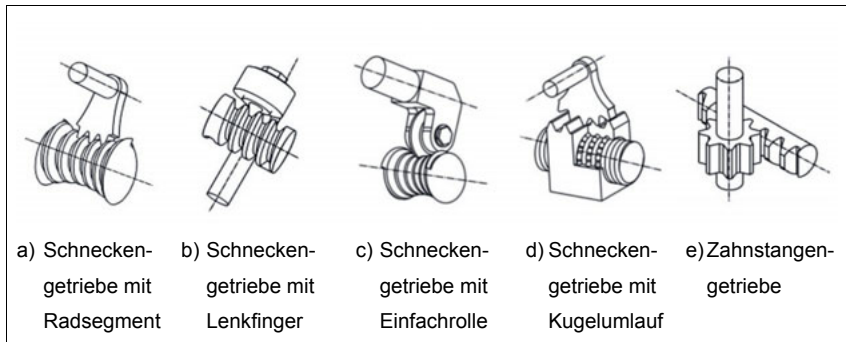
Das Prinzip der Drehschemellenkung lässt sich auf den Lenkmechanismus bei Kutschenwagen bis in die Römerzeit (800 v.Chr. – 700 n.Chr.) zurückführen. Wie bei einem mitlenkenden, gezogenen Anhänger erfolgte die Richtungssteuerung zunächst passiv. Erst Jahrhunderte später, hervorgerufen durch die ersten motorisierten Fahrzeugen von Gottlieb Daimler und Karl Benz, wurde die Lenkbewegung des Fahrers über eine Lenkpinne, Lenksäule, Ritzel und Drehkranz in eine Drehbewegung der Vorderachse umgesetzt. Nach [WALZ97] basierte Daimlers erstes Automobil (1886) auf den bekannten Kutschenkonstruktionen und wurde an den Hinterrädern angetrieben über einen Benzinmotor und Riemengetriebe. Die Vorderräder blieben während des gesamten Lenkvorgangs parallel und besitzen einen einheitlichen Kurvenwinkel um den Momentenpol  $M_0$ . Die Drehschemellenkung (siehe Abbildung 2.6a) findet heutzutage trotz des großen Lenkeinschlages nur noch Einsatz bei gezogenen Anhängern. Die Ursachen liegen laut [DUDZ05] in der erhöhten Kippgefahr bei Kurvenfahrten durch Reduzierung der Stützflächen, in dem erforderlichen Bauraum zur Realisierung der Einschlagwinkel und den Abkröpfungen im Rahmen.

Darüber hinaus wirken einseitige Lenkkräfte und -momente über den Hebelarm der halben Spurbreite. Auch die bei mobilen Arbeitsmaschinen häufig vorkommende Knicklenkung (Abbildung 2.6b) zeigt eine hohe Manövrierbarkeit unter Verringerung der Standfläche bei großen Einschlagwinkeln.

Daneben wurde die Achsschenkelenkung (Abbildung 2.6c) von Lankensperger, einem deutschen Kutschenbauer, im Jahr 1816 entwickelt und von Ackermann 1818 in Großbritannien als Patent eingetragen. Daher wird in der Literatur auch die Bezeichnung „Ackermann-Lenkung“ verwendet. Nach Bollée (1875) in Frankreich erkannte auch Karl Benz (1893) das Potenzial der Achsschenkelenkung und bezog sein drittes Patent auf dieselbe konstruktive Lösung. Der erste überlieferte Einsatz der Lenkung war im Viktoria-Motorwagen von Benz (1893 - 1900). Als Folge der geänderten Achsenkonstruktion vergrößert sich die Stützfläche zwischen Vorder- und Hinterachse am innenliegenden Rad bei maximalem Radeinschlag und gleichem Radabstand  $L_R$ , sodass die Standsicherheit deutlich zunimmt. Außerdem wird bei der Achsschenkelenkung deutlich weniger Bauraum für den maximalen Radeinschlag benötigt.

Laut [PFEF13] ist die Achsschenkelenkung heutzutage in nahezu sämtlichen modernen Kraftfahrzeugen vorzufinden. Die Konstruktion kann mit durchgehendem Lenkgestänge als Starrachse (Abbildung 2.6c) oder mit geteilten Spurstangen als Einzelradaufhängung (Abbildung 2.6d) ausgeführt sein, wobei der Lenkeinschlag des kurveninneren Rades  $\Delta_i$  stets größer ist als der Drehwinkel des kurvenäußeren Fahrzeuggrades  $\Delta_a$ . Die Lenkbewegung vom Lenkrad wird mithilfe eines Lenkgetriebes  $L$  über das Lenkgestänge (Spurstangen, Spurbel) auf die Räder übertragen. Zur Verminderung der Lenkkräfte werden in Abhängigkeit vom Lenkeinschlag sowohl das Lenkungsgetriebe als auch das Lenkgestänge mit einer Übersetzung versehen.

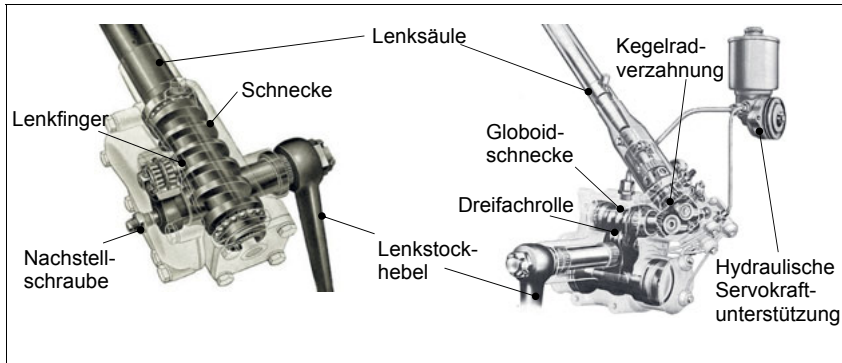
Nach der Festlegung auf die Achsschenkelenkung folgten weitere Entwicklungsschritte des mechanischen Lenkgetriebes, um eine weitere Reduzierung der Lenkkräfte herbeizuführen und die Fahrzeugbedienung für den Fahrer zu erleichtern. Eine Zusammenfassung über die verschiedenen Konstruktionen wird in Abbildung 2.7 gegeben. Entsprechend der geforderten Steigerung der Lenkübersetzung wurden die Getriebe nach dem Schrauben-Mutter-Prinzip zunächst ersetzt durch Schneckengetriebe mit Radsegmenten, Lenkfißern, Einfach- oder Doppelrollen oder gepaart mit Kugelumlauf sowie schließlich als Zahnstangengetriebe ausgeführt.



**Abbildung 2.7: Prinzipielle Ausführungen von mechanischen Lenkungsgetrieben aus [PFEF13]**

Die erste Schneckenradlenkung entwarf Northey (1905) in den USA. Hierbei befindet sich die Schnecke auf der Lenkradwelle und schwenkt durch die Drehbewegung des Lenkrades ein Radsegment bzw. einen Lenkstockhebel, der über eine Lenkstange und Lenkhebel die Spurstange verschiebt. Marles entwickelte im Jahr 1913 einen Lenkfinger (Mitnehmerwellenlenkung), der feststehend oder rollengelagert in die Schneckenverzahnung eingreift. Mit der Schneckenrollenlenkung, dargestellt in Abbildung 2.7c, erzielte Bishop in [BISH21] eine weitere Verbesserung hinsichtlich des Verschleißes. Eine Alternative dazu war das Kugelumlaufgetriebe, bestehend aus einer Schnecke mit Rundgewinde und den Übertragungsgliedern aus Kugel und Lenkmutter einschließlich einer Verzahnung (Abbildung 2.7d).

In Deutschland wurden mechanische Lenkgetriebe seit 1932 nach einer US-Patentübernahme gefertigt. Die als Ross-Lenkung (vgl. Abbildung 2.8) bekannte rollengelagerte Einfingerlenkung behauptete sich nach [ZFLS07] bis zum Jahr 1945 als maßgebliche Ausführungsvariante für PKW und NKW. Laut damaliger Produktbeschreibung konnten als herausragende Merkmale vor allem die nahezu erschütterungs- und spielfreie Lenkbarkeit, dem automatischen Rücklauf in Mittelstellung und der möglichen Verschleißnachstellung genannt werden. Wichtige Entwicklungsschritte waren die Verwendung einer Schnecke mit variabler Steigung und die Möglichkeit der Verschleißkorrektur an der Schneckenverzahnung durch einen verstellbaren Flansch. Im NKW-Bereich wurden die Einfingerlenkungen zunächst durch die Schneckengetriebe mit Einfach- oder Doppelrolle (ab 1945) teilweise abgelöst und später durch die ZF-Einzelradlenkung (1950) und ZF-Spindel-Hydrolenkung (1956) gänzlich ersetzt.



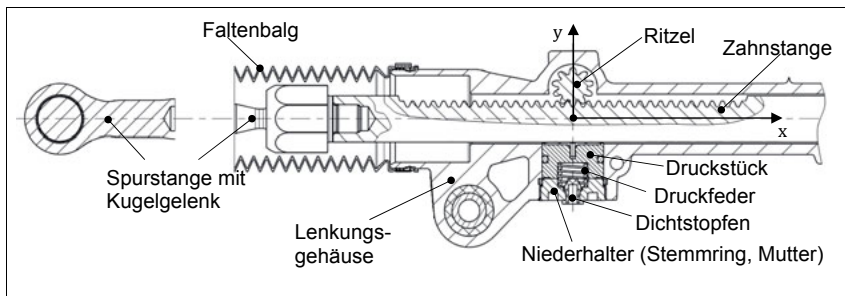
**Abbildung 2.8: ZF-Ross-Lenkung nach [ZFLS07]**

**Abbildung 2.9: ZF-Gemmer-Hydrolenkung nach [ZFLS07]**

Im PKW-Bereich startete 1953 mithilfe einer weiteren US-Patentübernahme der Einsatz einer globoidischen Schneckenverzahnung mit Doppel- oder Dreifachrolle (Gemmer-Lenkung), die zusätzlich mit einer hydraulischen Lenkkraftunterstützung gekoppelt wurde. Darüber hinaus wird die Drehbewegung des Lenkrades über die Lenkspindel und ein Kegelradpaar auf die Lenkschnecke übertragen, gleichzeitig werden durch die Lenkspindel auch die Durchflussmengen an den Ventilen gesteuert. Die als ZF-Gemmer-Hydrolenkung bezeichnete Konstruktion wird anhand der Abbildung 2.9 näher verdeutlicht. Die Einbindung einer Servounterstützung verringerte die aufzubringende Lenkkraft laut [ZFLS07] um ca. 70 - 80 %. Außerdem regulierte die Servoeinheit über die Ventilsteuerung entgegen einseitig auftretenden Störkräften. Das Prinzip der hydraulischen Lenkkraftunterstützung in Form eines Drehschieberventils (vgl. [DAVI46]) wurde von Davis bereits 1926 entwickelt und ist heutzutage noch wichtiger Bestandteil hydraulischer Lenkaggregate.

Im Zuge von Kosteneinsparungen bei der Serienfertigung und den Vorteilen des direkten Lenkens über Spurstangen war die mechanische Zahnstangenlenkung seit 1964 im Portfolio führender Lenkungshersteller. Bereits 1946 ließ sich Bishop [BISH46] die Umsetzung einer variablen Zahnstangenlenkung, die mithilfe eines exzentrischen Ritzels realisiert wurde, patentieren. Mit dem Patent [BISH57] folgte eine verbesserte Zahnstangenanfederung an das Ritzel. Schließlich führten die Bereitstellung eines serientauglichen Fertigungsverfahrens (Warm Schmiedeverfahren) sowie die konstruktiven Vereinfachungen in [BISH61], [BISH72] zu einer breiten Anwendung von mechanischen Zahnstangengetrieben.

In Deutschland wurde die Zahnstangen-Hydrolenkung (HPS<sup>1</sup>) für konstante und variable Übersetzungen ab 1973 bevorzugt. In der Abbildung 2.10 wird die Zahnstangenlagerung in Abbildung 2.10 näher erläutert. Der Zahneingriff beim Ritzel-Zahnstangenpaar unterliegt im lastfreien Zustand der Anfederung der Zahnstange durch ein sogenanntes Druckstück, bestehend aus Niederhalter, Druckfeder und Federhalter. So wird die Verzahnung im lastfreien Betrieb spielfrei gelagert und kann bei einem Lenkbefehl mit einer sofortigen Lenkbewegung reagieren. Unter Last wird das Druckstück um den maximalen Federweg ausgelenkt und dementsprechend vergrößert sich der Achsabstand um den Verschiebeweg in  $y$ -Richtung. Die translatorische Hubbewegung der Zahnstange erfolgt in  $x$ -Richtung. Während des Hubvorganges kann sich die Zahnstange, aufgrund des rotatorischen Freiheitsgrades in der Druckstücklagerung, entlang der Hubachse verdrehen.

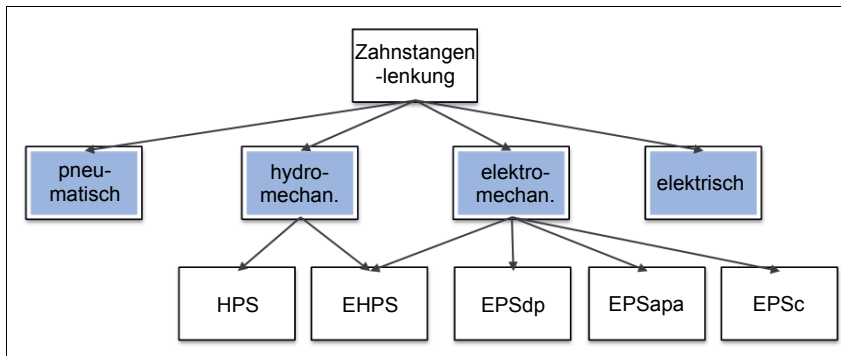


**Abbildung 2.10: Anfederung einer mechanischen Zahnstangenlenkung**

1

HPS (Hydraulic power steering) ist die englische Abk. für Zahnstangen-Hydrolenkung (ZHL)

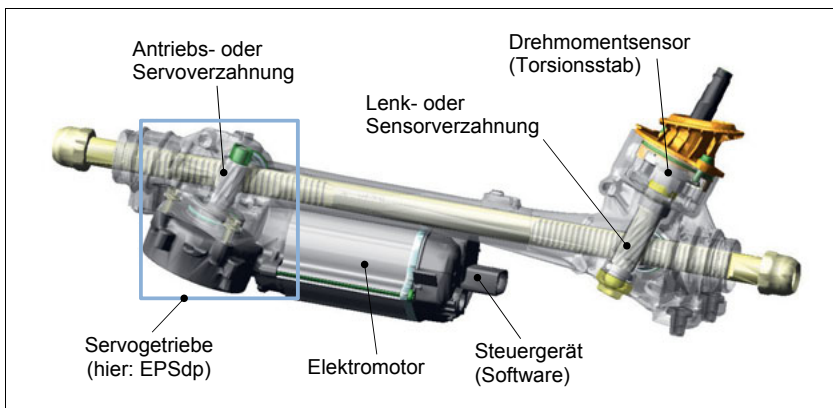
Hinsichtlich der gestiegenen Erwartungen bei der Energieeinsparung wurde die hydraulische Servokraftunterstützung schrittweise durch eine elektrische Lenkkrathilfe ersetzt. Anfänglich wurde das hydraulisch unterstützte Lenksystem über eine elektrisch angetriebene Lenkungs-  
pumpe versorgt (EHPS<sup>1</sup>). Ab 2002 werden elektrisch unterstützte Lenkungssysteme, d.h. elektromechanische Zahnstangenlenkungen mit einer rein elektrischen Servokraft-Unterstützungseinheit, eingesetzt. In Abhängigkeit der Bauform kann die Einbringung der Servokraft über eine weitere Ritzel-Zahnstangenpaarung als Doppelrytelausführung (EPSdp<sup>2</sup>), über ein achsparalleles Kugelmutterumlaufgetriebe (EPSapa<sup>3</sup>) oder über eine Servoeinheit an der Lenksäule (EPSca<sup>4</sup>) erfolgen. Eine konzentrische Bauform als Hohlwelle um die Zahnstange wird als EPSrc<sup>5</sup>-Lenkung bezeichnet. Hierbei wird der Kugelgewindetrieb direkt über einen Elektromotor angetrieben.



**Abbildung 2.11: Servounterstützte Zahnstangenlenkungen für PKW-Vorderradlenkungen nach [PFEF13]**

- 1 EHPS (Electric hydraulic power steering)-Hydrolenkung (ZHL)
- 2 EPSdp (Electric power steering on a dual pinion)
- 3 EPSapa (Electric power steering on a paraxial recirculating ball gear, belt)
- 4 EPSca (Electric power steering on the steering column)
- 5 EPSrc (Electric power steering on a rack concentric servo unit)

Der Aufbau einer elektromechanischen Zahnstangenlenkung wird am Beispiel eines EPSdp-Lenkensystemes in der Abbildung 2.12 erklärt. Die Lenkbewegung des Lenkrades wird über die Lenksäule an den Torsionsstab und schließlich an die Lenkverzahnung weitergegeben. Der Torsionsstab löst als Drehmomentensensor die Servokraftunterstützung des Servogetriebes aus. Bei einem EPSdp-Lenkensystem gilt die Servoverzahnung als hochbeanspruchte Ritzel-Zahnstangenverzahnung bzw. die Sensorverzahnung als niedrigbeanspruchte Verzahnung. Im Betriebszustand verdreht sich die Zahnstange um die Hubachse, wobei die Zahnstangenverkipfung hauptsächlich vom servoseitigen Kippmoment um die Hubachse verursacht wird. Somit befindet sich insbesondere die Lenkverzahnung bei einem EPSdp- oder EPSapa-Lenkensystem in einem Zwangszustand, der von dem jeweiligen Servogetriebe vorgegeben wird.



**Abbildung 2.12: Aufbau einer elektromechanischen Zahnstangenlenkung nach [RBAS15]**

## 2.5 Bisherige Forschungen an Zahnstangengetrieben

Die folgenden Forschungsarbeiten beziehen sich auf die bisherigen Entwicklungen an Zahnstangengetrieben bezüglich der Verzahnungsgeometrie eines Zahnstangenzahnes und der Untersuchung der Beanspruchungssituation am Ritzel-Zahnstangenpaar. Weiter fanden weitgehende Analysen des kinematischen Verhaltens, insbesondere bezüglich des entstehenden Kippmomentes sowie des benötigten Leerdurchdrehmomentes oder des freien Ritzelmomentes nach [KAMB03] als ein Maß der Leistungsfähigkeit eines Zahnstangengetriebes, statt. Zudem werden Arbeiten aufgeführt, die das Getriebeverhalten innerhalb des Zahnstangenlenksystems beziehungsweise im Fahrzeug untersuchen.

Die Auswirkungen unterschiedlicher Zahnfußgeometrien bei einem Zahnstangenzahn auf die Zahnfußbiegespannung untersuchte Arslan in [ARSL10] und [ARSL11]. Eine optimierte Zahnfußausrundung an einer Zahnstange mit D-Profil berechneten Arslan, Lohrengel und Schäfer unter Zuhilfenahme parameterbasierte FEM-Berechnungen. Hierfür wird in den FEM-Modellen aus [ARSL10] eine konstante Linienlast entlang der Zahnkopfkante aufgebracht. Zudem variiert Arslan den Zahnstangendurchmesser  $d_z = 26 \dots 36$  mm, den Normalmodul  $m_n = 1,85 \dots 2,1$  mm und den Normaleingriffswinkel  $\alpha_n = 20 \dots 25^\circ$ . Die kreisrunden bis elliptischen Formen der Zahnfußrundung weisen einen tangentialen Übergang zur Zahnflanke und Zahnücke auf. Dadurch reduzierten sich die Zahnfußbiegespannungen in [ARSL10] und [LOHR10] um durchschnittlich 7 % bei elliptischer Zahnfußausrundung im Vergleich zu der kreisrunden Ausformung.

Weiter bestimmte Arslan in [ARSL11] den Zahnkopffaktor  $Y_{FS}$  an geradverzahnten Zahnstangen nach [DIN3990] bei einer kreisförmigen Fußausrundung. Hierbei stützt sich die Berechnung des Form- ( $Y_{Fa}$ ) und des Spannungskorrekturfaktors  $Y_{Sa}$  für einen Kraftangriff am Zahnkopf auf die Abbildung der Zahnstange als Ersatzstirnrad mit großer Zähnezahl. Auf Basis derselben FEM-Parametervariation wie in [ARSL10] ergeben sich nach [ARSL11] ca. 15 % größere Kopffaktoren  $Y_{FS}$  in der FEM als nach [DIN3990]. Somit empfiehlt Arslan eine generelle Anpassung der Kopffaktoren  $Y_{FS}$  der [DIN3990] für den Zahnstangenzahn.

Auch Hasan, Mahmoud und Mousa untersuchten in [HASA15] die Wirkung von geometrischen, kinematischen sowie fertigungsbedingten Einflüssen auf die Zahnfußbiegespannung auf einen Zahnstangenzahn mithilfe der FEM. Unter der Variation von der Fußlinie  $r_{fz} = 10 \dots 15$  mm, einer konstanten Zahnhöhe  $h_2 = 5$  mm und einer Zahnbreite  $b_2 = 10$  mm wird in [HASA15] der Spannungskorrekturfaktor nach [AGMA2001] als Vergleichsgröße herangezogen. Unter der Einleitung einer konstanten Linienlast über die gesamte Zahnhöhe und Zahnbreite ermittelten Hasan, Mahmoud und Mousa bei einem Verhältnis von  $r_{fz} / h_2 = 2,2$  einen minimalen Spannungskorrekturfaktor.

Die Kippbewegung der Zahnstange im Lenkgetriebe wiesen Bishop und Baxter in [BISH85] als Resultat der Reibung und des Kippmomentes um die Zahnstangenhubachse nach. Um die Tragbildverlagerung in Richtung der Stirnseiten zu verhindern, veränderten sie die konstruktive Ausführung des Zahnstangentrückens vom D-Profil hin zu einem Y-Profil (siehe Abbildung 1.3). Darauf aufbauend erfassten Baxter, Wou und Oste die Reibungssituation im Zahnkontakt eines starren Ritzel-Zahnstangenpaares anhand der Gleitgeschwindigkeiten an Zahnstangen- und Ritzelzahn in [BAXT01]. Mithilfe eines vereinfachten analytischen Modells, dass durch



eine Spurstangenkrafteinleitung in Axialrichtung sowie eine rein translatorische Hubbewegung der Zahnstange gekennzeichnet war, berechneten [BAXT01] den mechanischen Wirkungsgrad, das erforderliche Leerdurchdrehmoment für die Hubbewegung der Zahnstange und die Zahnkontaktkräfte als Funktion der Druckstückkraft. Darüber hinaus schätzten Baxter, Wou und Oste den Grenzwert des erforderlichen Antriebsmomentes zwischen Ein- und Zweiflankenkontakt ab. Die analytische Näherungsberechnung des Wirkungsgrades eines Lenkgetriebes validierten [BAXT01] mittels eines reduzierten Versuchsaufbaus zur Wirkungsgradmessung, wobei die ermittelten Abweichungen zwischen Theorie und Messung im Bereich von 5 bis 10 % lagen.

Das Kippmoment um die Zahnstangenhubachse formuliert sich durch Kobayashi und Shibata als Resultat der Gleitbewegung infolge der Schraubbewegung bei sich kreuzenden Achsen. Für die analytische Abschätzung des Reibkoeffizienten im Zahnkontakt eines Zahnstangenlenkgetriebes ermitteln [KOBA09] die Gleitverhältnisse vektoriell an Ritzel und Zahnstange in Hubachsen-, in Eingriffslinien- und in Zahnhöhenrichtung. Weiter bestätigen Kobayashi und Shibata den Zusammenhang zwischen Kippmoment und –winkel. Indem sie das Kippmoment über die Verzahnungsgeometrie, das heißt durch die gezielte Wahl des Normalmoduls  $m_n$ , der Schrägungswinkel  $\beta_{1,2}$  sowie des Kopfgrundspieles  $c_{1,2}$ , minimieren, verringert sich das Kippmoment bzw. der Kippwinkel. Der Kippwinkel wird in [KOBA09] nur messtechnisch erfasst. Die Zahn- und Radkörperverschiebung infolge des Antriebsmomentes bleibt in [KOBA09] ohne Berücksichtigung.

Die tribologischen Schäden beim Kaltpilgerwalzen untersuchten Kadilnikova und Sushko in [KAD114] anhand der kinematischen und tribologischen Zusammenhänge im Zahnkontakt eines Ritzel-Zahnstangenpaares. So wurden in [KAD114] die Beziehungen hinsichtlich der Gleitverhältnisse, der Zug-, Schub- und Biegebeanspruchung und des Einlaufverschleißes sowie der Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  im Zahnstangengetriebe analytisch hergeleitet.

Kamble und Saha führten in [KAMB03] ein freies Ritzelmoment ( $M_{LDM}$ ) als charakteristische Größe zur Beschreibung der Leistungsverluste am Zahnstangengetriebe ein. Das freie Ritzelmoment definiert sich als Antriebsmoment, das zur Ausführung der Hubbewegung der Zahnstange (ohne Fahrzeugbereifung) erforderlich ist. Mithilfe einer Zweiflankenwälzprüfung ließ sich so anhand des freien Ritzelmomentes und des zurückgelegten Druckstückweges  $\Delta s$  das Systemverhalten eines Mehrkörpersystem- (MKS-) Modelles bestätigen. Weiter analysierten Kamble und Saha in [KAMB05] das freie Ritzelmoment unter dem Einfluss des Profilverchiebungsfaktors  $x_1$ , der Flankenlinienwinkelabweichung  $f_{H\beta}$ , eines Wärmeverzuges

entlang der Zahnstangenachse und der Zunahme des Druckstückweges  $\Delta s$  durch den Flankenverschleiß. Hierfür nutzten sie die bereits in [KAMB03] erwähnten experimentellen und analytisch-numerischen Methoden. Die Mehrkörpersimulationen (MKS) waren laut [KAMB07] geeignet, die Parametereinflüsse und Systemfunktionen ähnlich des Verhaltens des physischen Modells nachzubilden. In [KASA05] stellten Kamble und Saha den Zusammenhang zwischen der Änderung des Profilverchiebungsfaktors und der Kontaktreibung beziehungsweise des freien Ritzelmomentes dar. So wird in [KASA05] ein effektiver Radius  $r_{1,eff}$  der Drehmomentübertragung definiert. Darüber hinaus entwickelte Kamble ein neuartiges Konzept eines variabel-übersetzten Lenkgetriebes in der MKS. Anstelle einer variabel-übersetzten Zahnstangenverzahnung verwendete Kamble in [KAMB06] eine elliptische Ritzelwelle.

Eine analytische Beschreibung des freien Ritzelmomentes ( $M_{LDM}$ ) in Abhängigkeit zur Ritzelgeometrie, des Flankenverschleißes und der Zahnstangenbiegung definierten Rao, Saha und Kar. Ausgehend von einer Sinusfunktion werden die verschiedenen Einflüsse in [RASA08] auf das freie Ritzelmoment ( $M_{LDM}$ ) überlagert. Die Validierung durch einen Prüfversuch ergab eine Abweichung von  $\Delta M_{LDM} = \pm 0,25$  Nm. Weiterhin untersuchten sie ein sensorgestütztes Druckstück, das in Abhängigkeit zur Hubposition die Druckstückfederkraft verändert.

Eine Fehlerabschätzung zur Berechnung der analytischen Zahnstangendurchbiegung bei Einleitung einer Querkraft an den Spurstangen erfolgt in [KUMA14]. Im Vergleich zu einer FEM-Berechnung ermittelten Kumar und Chabra eine ca. 12 % niedrigere Vergleichsspannung nach Mises sowie eine um ca. 4 % zu hohe analytische Durchbiegung an der Zahnstange. Die Untersuchungen von [KUMA14] basieren auf den Untersuchungen von Kamble und Saha.

Eine Berechnungsabfolge zur Ermittlung der Verzahnungsgeometrie der Zahnstange bei einer variablen Übersetzung formuliert Alexandru in [ALEX07]. Hierfür verändert Alexandru den Normaleingriffswinkel  $\alpha_n$  in der Übergangszone kontinuierlich ausgehend vom Minimalwert in der Geradeausfahrtstellung  $\alpha_{n,min}$  hin zum maximalen Wert  $\alpha_{n,max}$  am Ende des Zahnstangenhubes. Alipiev und Antonov definierten in [ALIP06] die Zahngeometrie für eine asymmetrische Zahnstangenverzahnung. Zum besseren Verständnis teilen sie das Zahnprofil in diskrete, austauschbare Abschnitte ein.

Vaujany und Guingand formulierten in [VAUJ09] eine numerische Zahnkontaktanalyse für ein variabel-übersetztes Zahnstangegetriebe und einem Gehäusewinkel von  $\delta \neq 90^\circ$ . In dem numerischen Näherungsansatz wurden die Kontaktsteifigkeiten nach der Boussinesq-Cerruti Methode ermittelt. Die Anwendung des Ansatzes für allgemeine elastische Körper bewiesen Conry und Seireg bereits in [CONR71]. Die Ermittlung der lastabhängigen Zahn- und Radkörperverschiebung von Ritzel und Zahnstange gelang durch die Nachrechnung diskreter Eingriffspositionen in der FEM.

Die Möglichkeit von selbstsperrenden Zahnstangengetrieben wurde von Timofeyev, Sashchenko und Samoilova durch die Verwendung einer Pfeil- oder Doppelpfeilverzahnung realisiert. In [TIMO13] definierten sie ein Ritzel-Zahnstangenpaar, in dem sich der Teilkreis  $d_1$  und die Teillinie  $r_2$  außerhalb des Zahneingriffes befinden. Die Überprüfung der Verdreh-sicherung im Zahnstangengetriebe war vergleichbar zu dem Verhalten von selbstsperrenden Stirnradpaaren.

## 2.6 Weiterführende Literaturquellen

Im folgenden Abschnitt wird detailliert das Verfahren zur örtlichen Betrachtungsweise von Belastung und Beanspruchung an Stirnradpaarungen gemäß [LINK10] beschrieben. Die Übertragbarkeit der Vorgehensweise nach Linke auf Zahnstangengetriebe wird im vierten Kapitel überprüft. Weiterhin wird eine Methode zur Berechnung der Verformungseinflussfunktion aus [HERT63] für allgemeingültige Plattenprofile vorgestellt.

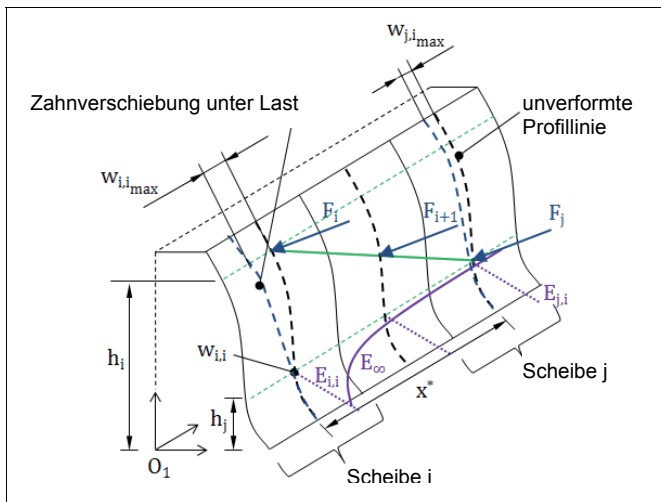
### 2.6.1 Ansatz verallgemeinerter Verformungseinflusszahlen nach Linke

Die allgemeine Methode der Verformungseinflusszahlen aus [LINK10] ist ein grundlegender Baustein zur analytisch-numerischen Berechnung der Lastverteilung entlang der Berührlinie eines Zahnpaares. Eine Methodik zur Abbildung der Zahnkontaktsituation untersuchten bereits Hohrein und Senf in [SENF77] anhand eines eingespannten Plattenmodells.

Durch die Annahme, dass auf jeden Plattenabschnitt eine Punktlast anstatt einer Linienlast wirkt sowie mithilfe des Superpositionsprinzips, kann nicht nur die Reaktion auf den angegriffenen Abschnitt abgeschätzt werden, sondern ebenso dessen Auswirkung auf die benachbarten Abschnitte berücksichtigt werden. Somit konnten die konkreten Belastungs-Verformungsverhältnisse entlang der Berührlinie bei Vorhandensein eines Flankenklaffens analytisch-numerisch ermittelt werden. Wie in der Abbildung 2.13 skizziert, wird zunächst eine

Aufteilung der am Eingriff beteiligten Zähne in diskrete Profilabschnitte vorgenommen, wobei die Einzellasteinleitung jeweils in der Abschnittsmitte erfolgt. Hierbei beschreibt der erste Index den betrachteten Zahnabschnitt bzw. der zweite Index den belasteten Abschnitt. Somit kann die Zahnverschiebung am Abschnitt  $i$  infolge der Kräfteinleitung am Abschnitt  $j$  durch die Einflusszahl  $a_{ij,k}$  an Ritzel ( $k = 1$ ) und Zahnstange ( $k = 2$ ) bestimmt werden. Nach [LINK10], [SCHL10] und [KLIN08] ergibt sich gemäß der Gleichung 2–13 folgender Zusammenhang zwischen der Zahnverformung  $f_{z,ij}$ , der Verformungseinflusszahl  $a_{ij,k}$  sowie der wirkenden Normalkraft  $F_n$  am  $j$ -ten Zahnabschnitt:

$$f_{z,i,k} = a_{ij,k} \cdot F_n(j) \quad (2-13)$$



**Abbildung 2.13: Zusammenhang zwischen der Zahnverschiebung und der Verformungseinflussfunktion für  $n$  Zahnabschnitte**

Die Gl. 2–13 kann mithilfe des Gleichungssystem nach Gl. 2–14 für einen belasteten Zahn des Ritzels oder der Zahnstange ( $k=1, 2$ ) nach [LINK10] folgendermaßen gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} a_{11,k} \cdot F_n(1) & + \dots + & a_{1j,k} \cdot F_n(j) & & a_{1n,k} \cdot F_n(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1,k} \cdot F_n(1) & + \dots + & a_{ij,k} \cdot F_n(j) & + \dots + & a_{in,k} \cdot F_n(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1,k} \cdot F_n(1) & + \dots + & a_{nj,k} \cdot F_n(j) & & a_{nn,k} \cdot F_n(n) \\ F_n(1) & + \dots + & F_n(1) & + \dots + & F_n(n) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_{z1,k} \\ \vdots \\ f_{zi,k} \\ \vdots \\ f_{zn,k} \\ F_{bn} \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

Aufbauend auf der Summe der Verformungseinflusszahlen von Ritzel und Rad sowie der Berücksichtigung von nichtlinearen Verformungsanteilen, wie beispielsweise die Hertzsche Verformung  $a_{eH}$ , ergibt sich laut [LINK10] die resultierende Verformungseinflusszahl  $e_{ij}$  nach Gl. 2–15.

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{k,ij} + a_{eH} \quad (2-15)$$

Für die Berücksichtigung eines Flankenklaffens  $f_k$  beziehungsweise die Ausgabe des Restklaffens der Zahnflanken  $g$  wird die Aufschlüsselung der Gesamtverformung  $f_z$  nach Gl. 2–16 benötigt. Die Gesamtverformung  $f_{zi}$  am  $i$ -ten Zahnabschnitt als Summe der Einzelverformungen  $f_{zi,k}$  setzt sich nach [KLIN08] aus der Drehwegabweichung, genauer gesagt aus dem Gesamtverdrehwinkel  $\varphi_{zi}$  unter einem wirksamen Radius  $r_{w,1}$  am Ritzelzahn, dem Flankenklaffen  $f_{ki}$  und dem Restklaffen  $g_i$  zusammen.

$$f_{zi} = \sum_{k=1}^2 f_{zi,k} + f_{ki} - g_i = \underbrace{\left( \varphi_{zi,1} + \varphi_{zi,2} \left( \frac{r_{w,2}}{r_{w,1}} \right) \right)}_{\varphi_{zi}} \cdot r_{w,1} + f_{ki} - g_i \quad (2-16)$$

Des Weiteren kann die Verformungseinflusszahl  $a_{ij}$  eines Zahnes am Abschnitt  $i$  bei Lasteinleitung am  $j$ -ten Zahnabschnitt anhand der Gl. 2–17 aus der Verformungseinflussfunktion  $E_{ij}$  und der Nachgiebigkeit  $q_{ij}$  nach [KLIN08] ermittelt werden.

$$a_{ij} = E_{ij} \cdot q_{ij} \quad (2-17)$$

Dazu wird die Verformungseinflussfunktion  $E_{ij}$  als Maß für das Abklingverhalten der Zahnverformung in Zahnbreitenrichtung infolge eines Einzellastangriffes eingeführt. Vereinfacht wird davon ausgegangen, dass sich bei einer Einzellast am  $j$ -ten Abschnitt die benachbarten Bereiche bis zu einer gewissen Abklingbreite von etwa  $6 \cdot m_n$  laut [KUNE99] ebenfalls in Profilrichtung verschoben werden. Zur Veranschaulichung der Wechselwirkung zwischen Verformungseinflussfunktion  $E_\infty$  und Zahnverschiebung  $w$  dient das Modell über  $n = 3$  diskrete Zahnabschnitte der Abbildung 2.13. Somit kann die Verformungseinflussfunktion  $E_{ij}$  als Kopplungsstärke zwischen den einzelnen Abschnitten verstanden werden, dessen Kopplungseinfluss sich in Abhängigkeit zur Distanz zwischen betrachteten und belasteten Abschnitt verändert.

Für die analytische Bestimmung der Verformungseinflussfunktion  $E_{ij}$  ist eine schrittweise Analyse, ausgehend von einem unendlich breiten Plattenmodell, erforderlich. Die so ermittelte Verformungseinflussfunktion  $E_{\infty, ij}$  stellt wiederum die Grundlage für die Berücksichtigung von örtlichen Steifigkeitsunterschieden in Zahnrandnähe dar. Kunert definierte in [KUNE99] die Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn  $E_\infty$  als flächennormierte dimensionslose Größe, die im Verformungsabklingverhalten in Zahnbreitenrichtung unabhängig von den absoluten Verformungswerten der Zahnverschiebung ist. Als Bezugswert für die Normierung der Verformungseinflussfunktion verwendet [KUNE99] das Flächenintegral der Funktion. In der Gl. 2–18 wird die Verformungseinflussfunktion  $E_\infty$  als Funktion der modulbezogenen Zahnbreite  $x^*$  ausgedrückt.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_\infty(x^*) dx^* = 1 \quad \text{mit} \quad x^* = \frac{x}{m_n} \quad (2-18)$$

Eine allgemeine Verformungseinflussfunktion wurde bereits von Kunert in [KUNE99] aus einer Vielzahl von Finiten-Element-Berechnungen (FEM) approximiert und gilt als Stand der Technik. Die allgemeine Verformungseinflussfunktion aus Gl. 2–19 ist für unendliche Zahnbreiten gültig und wird unabhängig von der Zahnform und dem Kraftbiegehebelarm eingesetzt. Kunert validierte die Funktion in [KUNE99] mithilfe von Dehnungsmessungen an verschiedenen Prüfpaarungen am Stirnradgetriebe ( $m_n = 12 \text{ mm}$ ) und führte zur Ableitung analytischer Zusammenhänge parameterbasierte FEM-Berechnungen durch.

$$E_{\infty}(x^*) = 0,146 \cdot [\cos(0,027(x^*)^3 - 0,333(x^*)^2 + 1,545x^*) + 1] \quad (2-19)$$

,wobei  $E_{\infty}(x^*) = 0$ , falls  $|x^*| \geq 6$

In Zahnrandnähe, das heißt bei einem Abstand zum Zahnrand von  $x_r^* \leq 2$ , erhöht sich die Verformungseinflussfunktion eines unendlichen Zahnes um die lokalen Steifigkeitseffekte der Stirnseitegeometrie und der fehlenden Möglichkeit des Verformungsabklingens aufgrund des fehlenden Materials. Grundsätzlich berechnet sich die Verformungseinflussfunktion eines Zahnes bei endlicher Zahnbreite  $E_{ij}(x^*)$  aus der Verformungseinflussfunktion am unendlich breiten Plattenmodell  $E_{\infty,ij}$ , dem Spiegelungsanteil in Zahnrandnähe  $\Delta E_{\infty,ij}$  und einer Korrekturfunktion für die Berücksichtigung des Schrägungswinkels  $W_{f,ij}$  nach Gl. 2–20 aus [LINK10] und [KLIN08].

$$E_{ij}(x^*) = \left( E_{\infty,ij}(x^*) + \Delta E_{\infty,ij}(x^*) \right) \cdot W_{f,ij}(x^*) \quad (2-20)$$

$$\text{mit } \Delta E_{\infty,ij}(x^*) = W_{f,ij}(x^*) = 1, \text{ falls } x_r^* \geq 2$$

Bei einer endlichen Zahnbreite wird nach [JARA50] der zusätzliche Verformungsanteil  $\Delta E_{\infty}$ , der über die Stirnseite hinaus abklingen würde, in den Zahn zurückgespiegelt. Die so zunehmende Verformungserhöhung dient als Maß der reduzierten Zahnsteifigkeit in Zahnrandnähe. Zudem wird der Einfluss der Stirnseitenschrägung nach [LINK10] über die Korrekturfunktion  $W_f$  realisiert. Diese Korrekturfunktion setzt sich gemäß Gl. 2–21 aus einer Abklingfunktion  $f_L$ , die das prinzipielle Verformungsverhalten am Zahnrand charakterisiert, und einer Größenfunktion  $f_G$ , die das Abmindern oder das Verstärken der Zahnverformung in Abhängigkeit zum Schrägungswinkel berücksichtigt, zusammen. Die Korrekturfunktion  $W_f$  ist gleichzusetzen mit der Randeinflussfunktion der Zahnverformung  $f_{Rand2}$  nach [KUNE99]. Somit erfordert die örtliche Betrachtungsweise der Belastung und Beanspruchung die Berücksichtigung des Schrägungswinkels, die Unterscheidung von spitzer und stumpfer Zahnstirnseite, den Abstand zwischen belasteten und betrachteten Zahnabschnitt sowie des Randabstandes des betrachteten Zahnabschnittes zur Stirnseite.

$$W_f = f_{Rand2} = 1 + f_G \cdot f_L \quad (2-21)$$

Zudem wurde in [MATT14] der Einfluss der Stirnkantengeometrie auf die Tragfähigkeit von Stirnradverzahnungen untersucht. Mithilfe von experimentellen Untersuchungen zur Schadensart bezüglich eines Stirnkantenbruches bewies Matt den Einfluss vom Schrägungswinkel, von Flankenmodifikationen, wie Balligkeiten oder Endrücknahmen, sowie von unterschiedlichen Anfasungen der Stirnkante auf die Bauteillebensdauer. Weiter wurde in [MATT14] die nur bedingte Übertragbarkeit der Gesetzmäßigkeiten der Kontaktbreitenmitte auf die Stirnseiten deutlich. Theoretische Untersuchungen zum örtlichen Belastungs- und Beanspruchungsverhalten wurden an einem FEM-Ersatzzylindermodell verglichen, sodass eine Erweiterung des FVA-Berechnungsprogrammes RIKOR (Ritzelkorrektur) um die Effekte der stirnseitigen Verformung, eines Versatzes und eines Hinterschneidungswinkels erfolgte.

### 2.6.2 Allgemeine Plattentheorie nach Heřt

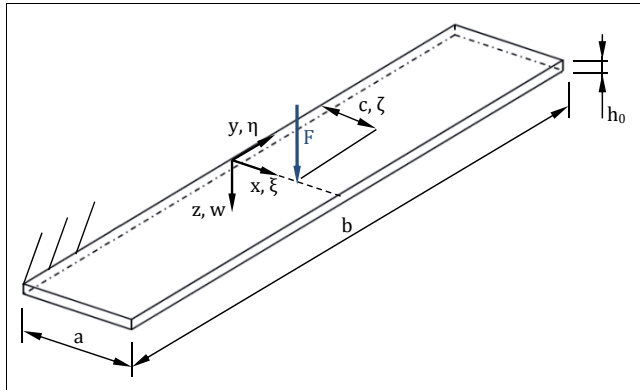
Das Näherungsverfahren nach Heřt aus [HERT63] basiert auf der elastischen Formänderungsenergie und dem Potential der aufgebrachten Lasten und kann für variable Plattenquerschnitte unter der Einhaltung der Theorie von dünnen Platten verwendet werden. Das Berechnungsverfahren soll im folgenden Abschnitt kurz erläutert werden.

Eine dünne Platte charakterisiert sich laut [SZAB01] durch eine unendliche Plattenlänge  $b$  und durch eine Plattendicke  $h_0$ , die im Vergleich zur Plattenbreite  $a$  deutlich geringer ist. Zudem wird nach Szabo nur eine Kraft erlaubt, die in Normalrichtung zur Plattenoberfläche wirkt und im Verhältnis zur Plattendicke  $h_0$  deutlich geringere Verformungen verursacht. Die Nomenklatur zu einer einseitig eingespannten Platte nach [HERT63] wird in der Abbildung 2.14 dargestellt.

Heřt definiert in [HERT63] die dimensionslosen Koordinaten  $\xi$ ,  $\zeta$  in Längsrichtung und  $\eta$  in Breitenrichtung gemäß Gl. 2–22. Außerdem wird zur besseren Darstellung die relative Verformung  $K(\xi, \eta, \zeta)$  nach Gl. 2–23 eingeführt. Die relative Verformung  $K(\xi, \eta, \zeta)$  wird von Heřt bei bekannter oder angenäherter Biegelinie  $w(\xi, \eta, \zeta)$  als Ergebnisgröße herangezogen.

Hierbei wird  $D(\xi)$  als veränderliche Steifigkeit einer allgemeinen Platte bezeichnet, die sich nach Gl. 2–24 in einen konstanten Steifigkeitsanteil  $D_0$  und einen variablen Betrag  $\chi(\xi)$  aufteilt.





**Abbildung 2.14: Definition einer Platte mit konstantem Querschnitt nach [HERT63]**

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a}; \quad \zeta = \frac{z}{a} \quad (2-22)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{F a^2}{D(\xi)} \cdot K(\xi, \eta, \zeta) \quad (2-23)$$

$$D(\xi) = \frac{E \cdot h^3(\xi)}{12(1 - \nu^2)} = D_0 \chi(\xi) \quad \text{mit } D_0 = \frac{E \cdot h_0^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2-24)$$

$$\text{und } \chi(\xi) = f(h, \xi)$$

Da für die Biegelinie  $w(\xi, \eta, \zeta)$  im Fall der allgemeinen Plattenquerschnitte keine exakte Lösung der Biegelinie vorliegt, verwendet Heřt das Näherungsverfahren nach Rayleigh-Ritz aus [RITZ09]. Das Verfahren nach Rayleigh-Ritz ermöglicht die Entwicklung der Lösung in einer unvollständigen Basis, das heißt unter Zuhilfenahme von verschiedenen Ansatzfunktionen, die die Randbedingungen erfüllen. Laut [RITZ09] kann eine geeignete Testfunktion, d.h. im vorliegenden Fall die Funktion der Biegelinie, parametrisiert werden und die Abweichung der Approximation zu einer unbekanntenen Lösung durch eine Variationsrechnung minimiert werden.

Die Variationsrechnung nach [RITZ09] zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten  $C_i$  gelingt über eine Folge von  $n$ -geeigneten Biegelinien, wobei die Genauigkeit der Näherungslösung insbesondere von der ersten Grundgleichung  $\varphi_1(\xi)$  abhängig ist. Befindet sich die Grundgleichung nahe an der tatsächlichen Lösung, so bewirken die weiteren Ansatzfunktionen  $\varphi_i(\xi)$  eine Glättung des Näherungsergebnisses. Die Grundlage der folgenden Betrachtung beruht auf der Konstanz von der Formänderungsarbeit  $\Pi$  und von den Entwicklungskoeffizienten  $C_i$  nach Gl. 2–25.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2-25)$$

Die zu ermittelnde Verschiebung  $w(\xi, \eta)$  am Kraftangriffspunkt lässt sich als Summe  $n$ -geeigneter Funktionen der Biegelinie  $w_i(\xi, \eta)$  und Konstanten  $C_i$  nach Gl. 2–26 beschreiben. Hiermit ist die Verschiebung im Unterschied zu [WEBA53] von der Längen- ( $\xi$ ) und Breitenkoordinate ( $\eta$ ) abhängig. Mit der Annahme, dass die Verschiebungen in Längen- und Breitenrichtung keine Wechselwirkung zueinander aufweisen, lässt sich die Verschiebung  $w(\xi, \eta)$  mithilfe eines Produktansatzes in  $\varphi_i(\xi) \cdot \psi_i(\eta)$  aufteilen. Hierbei beschreibt die Zielfunktion  $\psi_i(\eta)$  das Verformungsabklingen in Breitenrichtung.

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n C_i w_i(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta) \quad (2-26)$$

Weiter kann die Formänderungsarbeit  $\Pi$  laut Gl. 2–27 mithilfe der potentiellen Energie  $W$  und der elastischen Formänderungsenergie  $U$  ausgedrückt werden.

$$\Pi = U - W \quad (2-27)$$

Die potentielle Energie  $W$  lautet bei einer wirkenden Einzellast am Kraftangriffspunkt  $\xi = \zeta$  und  $\eta = 0$  nach Gl. 2–28 wie folgt:

$$W = F \cdot w(\xi, 0) \quad (2-28)$$

Die elastische Formänderungsenergie  $U$  wird auch als potentielle Energie der Spannungen bezeichnet und ermittelt sich nach der Gl. 2–29.

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 D(\xi) \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right) d\xi d\eta \quad (2-29)$$

Mithilfe der Auftrennung der Steifigkeiten nach Gl. 2–24 und dem Einsetzen der Gl. 2–26 lässt sich die Darstellung der Integrale in Gl. 2–29 weiter zu Gl. 2–30 vereinfachen.

$$U = \frac{D_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \chi(\xi) \left( \varphi_i''^2(\xi) \cdot \psi_i^2(\eta) + \varphi_i^2(\xi) \cdot \psi_i''^2(\eta) + 2\nu \cdot \varphi_i''(\xi) \cdot \varphi_i(\xi) \cdot \psi_i''(\eta) \cdot \psi_i(\eta) + 2(1-\nu) \varphi_i'^2(\xi) \psi_i'^2(\eta) \right) d\xi d\eta \quad (2-30)$$

Zudem werden in [HERT63] für eine bessere Handhabung der Gl. 2–30 die Hilfsintegrale  $\kappa_{ii}$ ,  $\omega_{ii}$  und  $\nu_{ii}$  nach Gl. 2–34 eingeführt.

$$\begin{aligned} \kappa_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) \cdot \varphi_i''^2(\xi) d\xi \\ \omega_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) \cdot \varphi_i^2(\xi) d\xi \\ \nu_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) \cdot [(1-\nu) \varphi_i'^2(\xi) - \nu \varphi_i(\xi) \varphi_i''(\xi)] d\xi \end{aligned} \quad (2-31)$$

Darüber hinaus werden die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  aus Gl. 2–35 für die Beschreibung der Verformungseinflussfunktion nach Heř benötigt.

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \sqrt[4]{\frac{\kappa_{ii}}{\omega_{ii}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\nu_{ii}}{\sqrt{\kappa_{ii} \omega_{ii}}} \right)} \\ \beta_i &= \sqrt[4]{\frac{\kappa_{ii}}{\omega_{ii}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\nu_{ii}}{\sqrt{\kappa_{ii} \omega_{ii}}} \right)}\end{aligned}\quad (2-32)$$

Aus der Eingangsbedingung der Gl. 2–28 und dem Einsetzen der Hilfsintegrale aus Gl. 2–34 erhält man für die Gl. 2–30 die Eulersche Differentialgleichung gemäß Gl. 2–36 nach [PONO56].

$$\omega_{ii} \cdot \psi_i^{(5)}(\eta) - 2\nu_{ii} \cdot \psi_i''(\eta) + \kappa_{ii} \cdot \psi_i(\eta) = 0 \quad (2-33)$$

Die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung ermöglicht in Gl. 2–37 die Bestimmung des Abklingverhaltens der Verformung in Breitenrichtung  $\psi_i(\eta)$  für eine frei wählbare Stelle  $\xi$  bei Einzelbelastung an  $\zeta$ .

$$\psi_i(\eta) = e^{-\alpha_i \eta} \cdot \left( \cos(\beta_i) \cdot \eta + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \sin(\beta_i) \cdot \eta \right) \quad (2-34)$$

Somit liegt ein Zusammenhang zwischen der Geometrie ( $\chi(\xi)$ ), der hinterlegten Biegelinie  $\varphi_1(\xi)$  und der Verformungseinflussfunktion vor. Demzufolge kann bei bekannter Geometrie und Biegelinie auf die Verformungseinflussfunktion geschlossen werden. Für eine Platte mit konstantem Querschnitt empfiehlt [HERT63] die Grundgleichung  $\varphi_1(\xi)$  als Näherungslösung der Biegelinie sowie die Polynomreihenentwicklung bis  $n=3$  nach Gl. 2–38.

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= \frac{1}{3} \cdot [(1 - \xi)^3 - 3(1 - \xi) + 2] \\ \varphi_n(\xi) &= \frac{1}{n+1} \cdot [(1 - \xi)^{n+2} - (n+2)(1 - \xi) + (n+1)]\end{aligned}\quad (2-35)$$

### 3 Normative Tragfähigkeitsberechnung für Zahnstangengetriebe

#### 3.1 Notwendigkeit einer Anpassung der normativen Berechnungsvorschrift

##### 3.1.1 Zahnstangengetriebe als Ersatzstirnradgetriebe nach ISO 6336

Im vorherigen Kapitel wurde eingehend dargelegt, dass ein Zahnstangengetriebe vereinfacht als Sonderform der Stirnradgetriebe gilt. Somit ist die Abbildung des Zahnstangenzahnes in der DIN 3990 und ISO 6336 als Stirnrad mit einer großen Zähnezahl die naheliegende Lösung für die Durchführung einer normativen Tragfähigkeitsberechnung. Durch die Projizierung auf große Durchmesser wird ein zahnstangenähnliches Zahnprofil erzeugt. Das Ritzel wird weiterhin in den tatsächlichen geometrischen Abmessungen berücksichtigt.

Im Folgenden wird dieses Vorgehen anhand einer Verzahnungsgeometrie aufgezeigt. Die Eingangsdaten und eine Darstellung der Verzahnungspaarung A können der Abbildung 3.1 entnommen werden. Im lastfreien Zustand ist die Verzahnung aufgrund der Anfederung im Nennachsabstand spielfrei (Zweiflankenkontakt). Neben den allgemeinen Verzahnungsgrößen werden zusätzlich der translatorische Hubweg  $H$  und die mittlere Verzahnungsbreite  $b_{2m}$  als charakteristische Parameter eines Zahnstangengetriebes eingeführt. Die mittlere Zahnbreite  $b_{2m}$  ist die wirksame Zahnbreite an der Teillinie  $r_2$  der Zahnstange. Das Ersatzstirnrad der Zahnstange wird über eine sehr große Zähnezahl abgebildet. Im vorliegenden Kapitel wird eine Ersatzzähnezahl von  $z_{2,ers} = 5000$  bzw.  $z_{2,ers} = 9000$  Zähnen gewählt. So wird sichergestellt, dass der Ersatzteilkreis  $d_{2,ers}$  annähernd die Teillinie  $r_2$  ergibt.

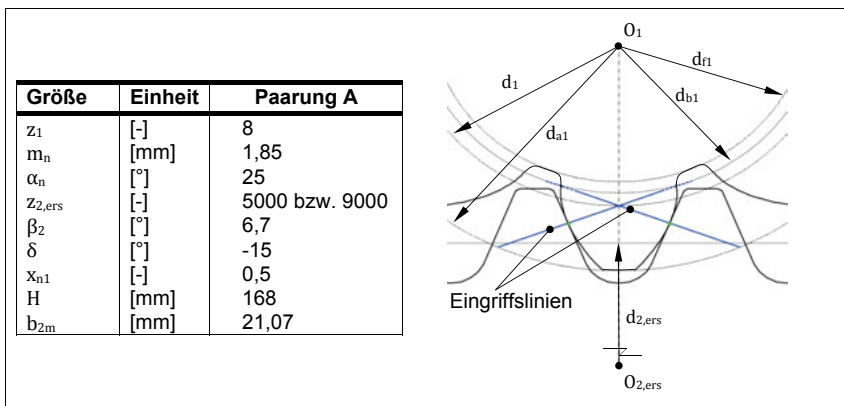


Abbildung 3.1: Darstellung der Verzahnungspaarung A als Ersatzstirnradgetriebe

Im nächsten Schritt wird die Zahnstangengeometrie im FVA-Berechnungsprogramm „STPlus“ und der Berechnungssoftware „KISSsoft“ als Ersatzradgeometrie abgebildet. In beiden Fällen ist keine signifikante Krümmung am Ersatzteilkreis  $d_{2,ers}$  zu erkennen. Dennoch weisen die Ergebnisse in Tabelle 3-1 zum Teil deutliche Unterschiede in Abhängigkeit zur gewählten Zähnezah  $z_2$  auf. Insbesondere der Betriebseingriffswinkel  $\alpha_{wt}$ , die Zahnkopfdicke am Ritzel  $s_{an1}$  ( $\Delta s_{an1} = 9\%$ ) und die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  ( $\Delta \varepsilon_\alpha = 31\%$ ) bilden keine Konvergenz aus. Somit ist die Bestimmung einer einheitlichen Verzahnungsgeometrie als Grundlage der sich anschließenden Tragfähigkeitsberechnung nicht sichergestellt. Der Grund liegt in der mangelhaften Handhabung der Standardprogramme mit sehr großen Abmessungen, sodass numerische Ungenauigkeiten bei der Anwendung der mathematischen Grundrechenarten bei großen Durchmessern und der Beschränkung auf wenige Nachkommastellen entstehen können. Demzufolge ist die Abbildung einer Zahnstange als Ersatzstirnrad in den verwendeten Standardprogrammen wenig empfehlenswert.

**Tabelle 3-1: Vergleich der Berechnungsgrößen, Verzahnung A**

| Größe                | Einheit | KISSsoft | STPlus |        |
|----------------------|---------|----------|--------|--------|
| $z_1$                | [-]     | 8        | 8      | 8      |
| $z_2$                | [-]     | 5000     | 5000   | 9000   |
| $\alpha_{wt}$        | [°]     | 26,672   | 26,672 | 26,666 |
| $m_t$                | [mm]    | 1,991    | 1,991  | 1,991  |
| $d_1$                | [mm]    | 15,929   | 15,929 | 15,929 |
| $d_{b1}$             | [mm]    | 14,236   | 14,236 | 14,236 |
| $d_{w1}$             | [mm]    | 15,932   | 15,932 | 15,932 |
| $d_{r1}$             | [mm]    | 13,154   | 13,154 | 13,335 |
| $d_{a1}$             | [mm]    | 20,554   | 20,554 | 20,554 |
| $s_{an1}$            | [mm]    | 1,018    | 1,018  | 0,937  |
| $p_{et}$             | [mm]    | 5,591    | 5,591  | 5,591  |
| $\varepsilon_\alpha$ | [-]     | 1,144    | 1,144  | 0,875  |
| $\varepsilon_\beta$  | [-]     | 1,340    | 1,340  | 1,340  |
| $\varepsilon_\gamma$ | [-]     | 2,484    | 2,484  | 2,215  |

Daher wird eine grundlegende Analyse des normativen Berechnungsverfahrens durchgeführt, um die folgenden Einflüsse zu überprüfen und gegebenenfalls gezielt die Berechnung an ein Zahnstangengetriebe anzupassen:

- Die Verwendung einer Stirnrad-Zahnstangenpaarung anstelle eines Stirnradpaares mit sehr großen Dimensionen des Ersatzrades.
- Eine Einbeziehung der gültigen Kräftesituation in Abhängigkeit vom Gehäusewinkel  $\delta$  (siehe Kap. 3.2) und die Analyse des Betriebslastfalls.

- c) Die Berücksichtigung des Verzahnungsumfeldes des Zahnstangentriebes in die Berechnung der wirksamen Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$ .
- d) Die Verwendung des exakten Ersatzkrümmungsradius zur Ermittlung der Hertzchen Pressung am Zylinder / Ebenen-Kontakt für die markanten Eingriffspunkte.
- e) Die Korrektur der Biegehebelermberechnung  $h_{Fe}$  und Anpassung des Formfaktors  $Y_F$  an die Zahnstangengeometrie.
- f) Die Kontrolle des Spannungskorrekturfaktors  $Y_S$  bzw.  $Y_{Sa}$  für typische Zahnfußrundungen der Zahnstange.

Die Verifizierung der durchgeführten Anpassungen erfolgt durch eine Gegenüberstellung der örtlichen Zahnfußbiegespannung  $\sigma_f$  in Anlehnung an die ISO 6336 mit der maximalen Hauptspannung  $\sigma_1$  aus einer FEM-Analyse.

### 3.2 Kräftesituation im Zahnkontakt eines Zahnstangengetriebes

Im Zahnkontakt eines Stirnrad-Zahnstangenpaares verhält sich die Kraftzerlegung, als Folge einer Schrägungswinkelsumme  $(\beta_1 + \beta_2) \neq 0^\circ$ , ähnlich eines Schraubradpaares nach [NIEM86]. Das heißt, die aus der Zahnnormalkraft entstehenden Kraftanteile in Umfangs- ( $F_t$ ), in Radial- ( $F_r$ ) und Axialrichtung ( $F_a$ ) unterscheiden sich an Ritzel und Zahnstange in Abhängigkeit von den Schrägungswinkeln  $\beta_{1,2}$  sowie dem Gehäusewinkel  $\delta$ .

Zunächst lässt sich die Tangentialkraft  $F_{t1}$  am Teilkreis  $d_1$  aus dem Antriebsmoment  $M_{t1}$  bestimmen. Im Anschluss können die Zahnnormalkraft unter Berücksichtigung des Ritzelkoordinatensystems ( $KS_1$  in Abbildung 3.2) im Stirn- ( $F_{bt}$ ) und Normalschnitt ( $F_{bn}$ ), die Axialkraft  $F_{a1}$  und die Radialkraft  $F_{r1}$  gemäß den Gleichungen 3-1, 3-2 (vektorielle Schreibweise) nach [LINK07] berechnet werden.

$$\begin{pmatrix} F_{bt1} \\ F_{a1} \\ F_{r1} \end{pmatrix} = F_{t1} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha_t \\ \tan \beta_1 \\ \tan \alpha_t \end{pmatrix} = \frac{2M_{t1}}{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha_t \\ \tan \beta_1 \\ \tan \alpha_t \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

$$F_{bn} = F_{bt} \cdot \frac{1}{\cos \beta_b} \quad (3-2)$$

Anhand der Abbildung 3.2 wird die erforderliche Transformation der Ritzelkräfte (blaue Kraftpfeile) ins Zahnstangenkoordinatensystem  $KS_2$  (rote Kraftpfeile) beispielhaft für einen Gehäusewinkel  $\delta > 0^\circ$  und Schrägungswinkel  $\beta_2 < 0^\circ$  erklärt. Die Umfangs- ( $F_{t2}$ ) und Axialkräfte ( $F_{a2}$ ) am Abtriebszahn werden durch die Drehung um den Gehäusewinkel  $\delta$  bestimmt, wobei sich die Gl. 3–3 durch Einsetzen zu Gl. 3–4 vereinfacht. Die Axial- und Radialkräfte am Zahnstangenzahn lassen sich wiederum analog zu den Stirnradverzahnungen berechnen (Gl. 3–5, 3–6).

$$\begin{pmatrix} F_{t2} \\ F_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \delta & \sin \delta \\ \sin \delta & -\cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{t1} \\ F_{a1} \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

$$F_{t2} = F_{t1} \cdot \frac{\cos(\beta_2)}{\cos(\beta_1)} \quad (3-4)$$

$$F_{a2} = F_{t2} \cdot \tan(\beta_2) \quad (3-5)$$

$$F_{r2} = F_{t2} \cdot \tan(\alpha_t) \quad (3-6)$$

Die Zahnnormalkraft  $F_{bn}$  und die Reibkraft  $F_R$  (grüne Kraftpfeile) sind nach Abbildung 3.2 an beiden Zahnpartnern identisch und bilden zusammen die resultierende Kraft  $F_{res}$  nach Gleichung 3–7. Als weitere Folge des Gehäusewinkels  $\delta \neq 0^\circ$  erhöht sich die Reibkraft  $F_R$  um einen weiteren Reibanteil in Axialrichtung ( $F_{aR}$ ). Diese zusätzlichen Axialkräfte stützen sich einerseits am Festlager des Ritzels ab oder bewirken an der Zahnstange ein Torsionsmoment  $M_{vz}$ . Die Ermittlung des zusätzlichen Reibanteils in Axialkrafttrichtung  $F_{aRi}$  kann mithilfe der Gleichung 3–8 erfolgen.



$$\vec{F}_{bn} + \vec{F}_R = \vec{F}_{bn} + \mu \cdot \vec{F}_{bn} = \vec{F}_{res} \quad (3-7)$$

$$\begin{pmatrix} F_{aR1} \\ F_{aR2} \end{pmatrix} = F_R \begin{pmatrix} \cos(\beta_2 + \delta) \\ \cos \beta_2 \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

Darüber hinaus führt eine Schrägungswinkelsumme  $(\beta_1 + \beta_2) \neq 0^\circ$  zu einer Schraubgleitung und einer ungleichmäßigen Breitenlastverteilung, die ein Verkippen bzw. Verdrehen der Zahnstange um deren Hubachse hervorruft. Diese ungleichmäßige Belastungssituation bewirkt wiederum ein Drehmoment  $M_{vz}$  um die Hubachse bzw. den Ursprung  $O_2$ . Im Zusammenspiel mit dem eingeleiteten Drehmoment  $M_{servo}$  aus der Servoeinheit verursachen beide Kippmomente  $(M_{vz}, M_{servo})$  eine wechselnde Belastungssituation über den Zahneingriff und folglich eine variierende Kippbewegung der Zahnstange. Die Änderung der Lastverteilung wird in der Abbildung 3.3 am Zahnstangenquerschnitt sowie Abbildung 3.4 am Zahnstangen-Längsschnitt anhand einer Punktlast näher erläutert. Befindet sich der Berührungspunkt auf der Schwerpunktschwerachse in Zahnbreitenmitte führen die Zahnaxialkräfte  $F_{a2}$  und  $F_{aR2}$  zu einer Winkelverdrehung oder –verkipfung  $\omega_{kip}$  um den Zahnstangenursprung  $O_2$ . Weiter kann sich der theoretische Berührungspunkt wegen Fertigungsabweichungen und Umfeldeinflüssen aus der Symmetrielage in Richtung der Stirnseiten verschieben. In diesem Fall erhöht sich das Torsionsmoment  $M_{vz}$  zusätzlich um den Anteil der Zahnradialkraft  $F_{r2}$  und dessen Hebelarm  $j$ . Allgemein kann das Torsionsmoment  $M_{vz}$  unter der Berücksichtigung der wirkenden Axial- und Radialkräfte sowie den Hebeln  $i, j$  nach Gleichung 3–9 berechnet werden.

$$M_{vz} = jF_{r2} + i(F_{a2} + F_{aR2}) \quad (3-9)$$

$$F_k = \frac{M_{vz}}{\frac{b_{2y}}{2} + \mu_{vz} \frac{r_y}{\sin(\alpha_n)} \cos(\beta_2)} \quad (3-10)$$

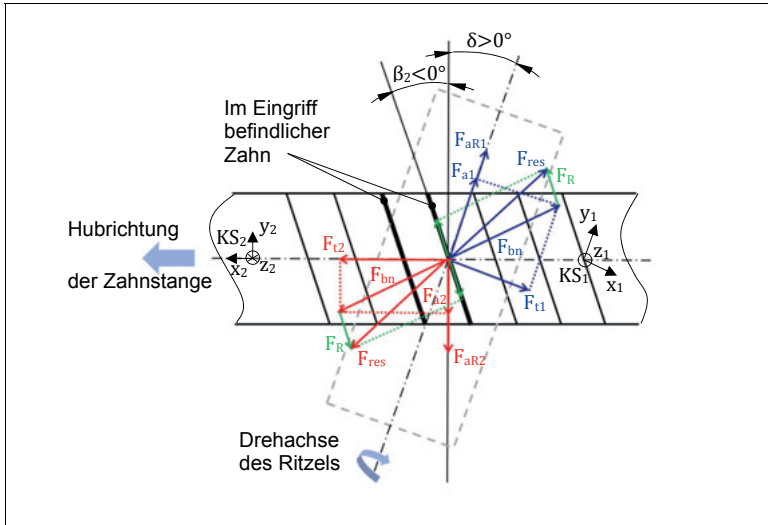


Abbildung 3.2: Schnittkräfte am Zahnstangengetriebe bei  $\delta \neq 0^\circ$

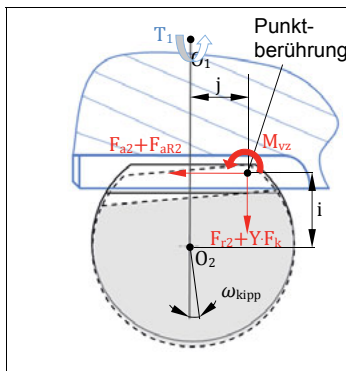


Abbildung 3.3: Kippmoment  $M_{vz}$  in Abhängigkeit zur Berührungspunkte an der Lastflanke

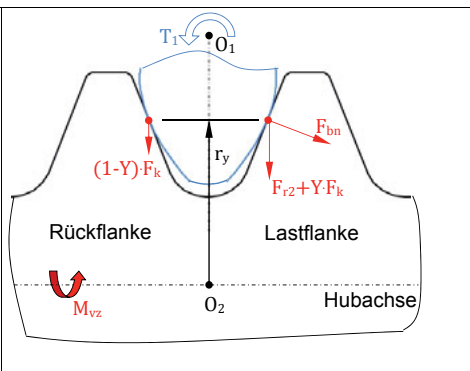
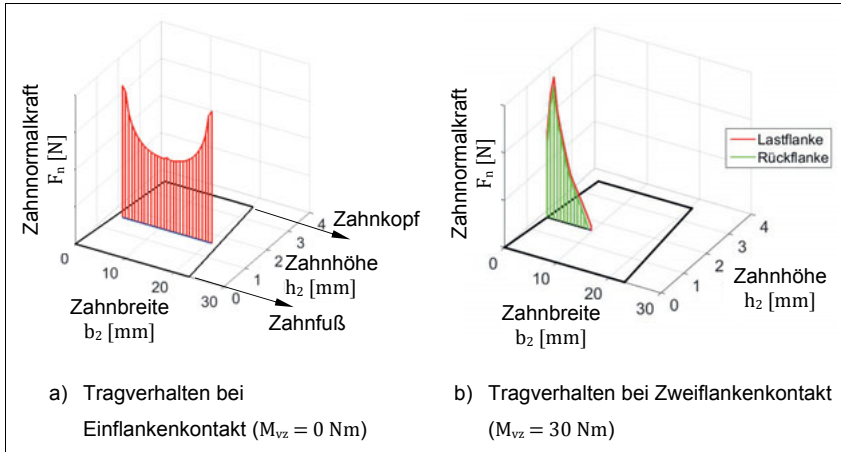


Abbildung 3.4: Klemmlastsituation am Ritzel-Zahnstangenpaar bei der Druckstücklagerung

Das Kippmoment  $M_{vz}$  bzw. die Zahnstangenverdrehung können einen Zweiflankenkontakt, wie in der Abbildung 3.4 gezeigt, hervorrufen. Demnach wird eine Klemmkraft  $F_k$  in Radialrichtung auf die Last- und Rückflanke induziert, die wiederum die Zahnnormalkraft  $F_{bn}$  an den Lastflanken beider Zahnkontaktpartner erhöht. Die Klemmkraft  $F_k$  als Funktion des Kippmomentes  $M_{vz}$  und des Kraftangriffes  $r_y$  berechnet sich nach Gleichung 3–10. Die Zahnbreite  $b_{zy}$  wird als wirkende Zahnbreite am Zahnstangenzahn entlang der Kraftangriffslinie  $r_y$  bezeichnet. Die Klemmkraft  $F_k$  wird ebenfalls von der Zahnkontaktreibung  $\mu_{vz}$  beeinflusst. Der Faktor  $Y$  aus der Abbildung 3.4 markiert die Klemmkraftaufteilung auf die Last- und Rückflanke. Die Annahme  $Y = 1$  würde eine vollständige Abstützung der Klemmkraft auf die Lastflanke bedeuten.

Der Einfluss des Kippmomentes wird durch die Tragbildverlagerung in der Abbildung 3.5 verdeutlicht. Mittels einer FEM-Kontaktanalyse kann die Auswirkung des Kippmomentes  $M_{vz}$  auf die Berührlinienlage und Höhe der Kontaktkraft bestimmt werden. Zur besseren Darstellung wurden die Kontaktkräfte des sich einstellenden Tragbildes auf den höchstbelasteten Knoten des jeweiligen Profilschnittes summiert, sodass statt der Kontaktellipse eine Berührlinie erkennbar wird.

Eine nahezu vollständige Tragbildausdehnung über die gesamte Zahnbreite stellt sich an der Lastflanke bei einem Antriebsmoment von  $T_1 = 60 \text{ Nm}$  ein (Fall a). Aufgrund der ungleichbreiten Zahnpartner ( $b_1 > b_2$ ) zeigen sich Lastspitzen an den Stirnkanten des Zahnstangenzahnes. Den Effekt der Lasterhöhung in Zahnrandnähe konnte Burger mit einem vereinfachten Kontaktmodell zweier Walzen unterschiedlicher Breiten in [BURG12] bestätigen. Falls nun ein Kippmoment  $M_{vz}$  in das System eingebracht wird, verschiebt sich das Tragbild in Abhängigkeit der Momentenrichtung zur Stirnkante des Zahnstangenzahnes (Fall b). Darüber hinaus entsteht ein Zahneingriff an der Rückflanke (grüne Kurve). Dieser Klemmeffekt schwächt sich bei größer werdendem Antriebsmoment  $T_1$  aufgrund der zunehmenden elastischen Verformungen an der Lastflanke ab.



**Abbildung 3.5: Darstellung der Zahnnormalkraft an Last- und Rückflanke**  
( $T_1 = 60 \text{ Nm}$ ;  $M_{vz} = 0; 30 \text{ Nm}$ )

Aus der Abbildung 3.5 folgt die notwendige Anpassung der Verzahnungskräfte um den Klemmeffekt für eine genauere Tragfähigkeitsberechnung. In Gleichung 3–11 wird die Radialkraft  $F_{r2}$  um den Anteil der Klemmkraft  $F_k$  analog der Abbildung 3.4 erhöht. Hierbei spielt die genaue Aufteilung der Klemmkraft auf die Last- und Rückflanke durch den Faktor  $Y$  eine entscheidende Rolle. Mit der so vergrößerten Radialkraft  $F_{r2}^*$  kann auf die Erhöhung der übrigen Verzahnungskräfte geschlossen werden:

$$F_{r2}^* = F_{r2} + YF_k \quad (3-11)$$

Die Wirkung eines Kippmomentes  $M_{vz}$  in Abhängigkeit vom Antriebsmoment  $T_1$  und der Aufteilung der Klemmkraft auf Last- und Rückflanke wird als Maß der Zahnfußbiegespannung in der Abbildung 3.6 dargestellt. Hierfür wurden verschiedene FEM-3D-Kontaktrechnungen exemplarisch an der Verzahnungspaarung D (siehe Anhang A) durchgeführt. Die verwendeten FEM-Modelle weisen als Randbedingungen ein Druckstückspiel  $\Delta s = 0 \mu\text{m}$  auf, sodass eine zusätzliche Zahnstangenverkipfung  $\omega_{\text{kipp}}$  nicht möglich ist. Dadurch konnte der Einfluss des Kippmomentes auf die Zahnfußbiegespannung separiert werden. Aus den FEM-Ergebnissen wird jeweils der maximale Wert der ersten Hauptspannung  $\sigma_1$  entlang der Zahnfußausrundung

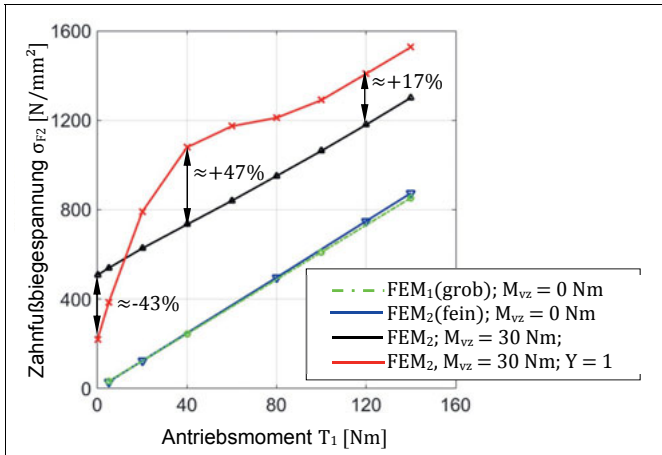
und der Zahnbreite als maximale Zahnfußbiegespannung  $\sigma_{Fz}$  in der Abbildung 3.6 ausgewiesen.

Zunächst erfolgt die Verifikation der Netzdiskretisierung anhand von zwei unterschiedlichen FEM-Hexaedervernetzungen. Die FEM-Elemente sind im Fall von  $FEM_1$  gekennzeichnet durch die Kantenlängen  $\Delta b \approx 0,7$  mm bzw.  $\Delta h \approx 0,3$  mm und bei  $FEM_2$  durch  $\Delta b \approx 0,2$  mm bzw.  $\Delta h \approx 0,1$  mm. Die hohe Übereinstimmung beider FEM-Ergebnisse (siehe blaue, grüne Kurven) lässt auf eine ausreichende Detaillierungsstufe schließen. Da sich das Tragbild als Folge des Kippmomentes  $M_{vz}$  in Richtung der Stirnkanten verlagert, werden die Klemmkrafteffekte anhand des diskreteren FEM-Netzes ( $FEM_2$ ) untersucht.

Wird nun ein Kippmoment  $M_{vz}$  um die Zahnstangenhubachse eingeleitet, erhöht sich die Zahnfußbiegespannung an der Lastflanke sprunghaft. In Abbildung 3.6 wird dieser Sprung anhand des Kippmomentes  $M_{vz} = 30$  Nm verdeutlicht. Die schwarze Kurve beschreibt den Spannungsanstieg bei einem möglichen Zweiflankenkontakt an Last- und Rückflanke. Das bedeutet, dass sich das Tragbild der Rückflanke bei steigendem Antriebsmoment bzw. bei zunehmender elastischer Verformung an der Lastflanke immer weiter verringert. Demzufolge erhöht sich der Faktor  $Y$  ebenfalls bei zunehmenden Antriebsmoment  $T_1$ . Ab einem Antriebsmoment  $T_1 = 90$  Nm stützen sich die eingeleiteten Momente nur auf der Lastflanke ab ( $Y = 1$ ). Eine Änderung des Geradenanstieges ist geringfügig erkennbar.

Die rote Kurve zeigt das Beanspruchungsverhalten bei einem modellhaften Einflankenkontakt. Das heißt, es stützen sich sämtliche Momente auf der Lastflanke ab. Somit wird der Faktor  $Y = 1$  dem Ritzel-Zahnstangensystem aufgezwungen. Aufgrund der fehlenden Klemmwirkung zwischen Last- und Rückflanke kann sich bis zu einem Antriebsmoment  $T_1 = 10$  Nm eine um ca. 43 % geringere Zahnfußbiegespannung einstellen. Folglich bewirkt der Klemmeffekt im Zweiflankenkontakt bei geringen Antriebsmomenten eine auffällig höhere Zahnfußbeanspruchung, die je nach Höhe des Kippmomentes ein Spannungsmaximum in Zahnrandnähe ausbildet. Im Bereich zwischen  $10 \text{ Nm} \leq T_1 \leq 80 \text{ Nm}$  führt die fehlende Stützwirkung der Rückflanke zu einer Steigerung der Zahnfußbiegespannung um ca. 47 % an der Lastflanke im Vergleich zur schwarzen Kurve. Als Ursache kann die Tragbildlage an der Stirnkante und die geringe Tragbildausbreitung entlang der Zahnbreite herangezogen werden. Beide Einflüsse lassen die Zahnfußbiegespannung an der Lastflanke im Fall des Einflankenkontaktes deutlicher ansteigen im Vergleich zum Zweiflankenkontakt. Erst mit zunehmender Tragbildausdehnung entlang der Zahnbreite ( $T_1 \geq 80 \text{ Nm}$ ) nähern sich die Kurvenanstiege von der schwarzen und roten Linie an. Bei einem Antriebsmoment von  $T_1 = 140 \text{ Nm}$  liegt die Zahn-

fußbiegspannung bei einem Einflankenkontakt noch 17 % höher gegenüber dem Zweiflankenkontakt. Die erhöhte Zahnfußbiegspannung begründet sich im Beispiel der roten Linie auf das fehlende Mittragen der Rückflanke. Der charakteristische Einflankenkontakt kann sich in Bezug auf die schwarze Kurve erst bei einem Druckstückspiel  $\Delta s \geq 0 \mu\text{m}$  oder bei der Einleitung noch höherer Antriebsmomente  $T_1$  einstellen.



**Abbildung 3.6: Zahnfußbiegspannung in Abhängigkeit vom Antriebsmoment und der Lastaufteilung der Klemmkraft auf die Last- und Rückflanke**

Die Aufteilung der Klemmkraft auf die Last- und Rückflanke ist abhängig von der Höhe der Lasteinleitung und der Symmetrie der Lasteinleitungsstellen. Die Symmetrie der Berührlinien an der Last- und Rückflanke wird beeinflusst von der Zahngeometrie, insbesondere vom Schrägungswinkel  $\beta_2$ , von der Eingriffsstellung sowie der Zahnstangenverkipfung. Um die verschiedenen Kreuzeinflüsse in der Berücksichtigung des Klemmeffektes in der normativen Tragfähigkeitsberechnung sicher abzubilden, wird vereinfacht von einer vollständigen Klemmkraftabstützung auf der Lastflanke ( $Y = 1$ ) ausgegangen.

### 3.3 Flankentragfähigkeitsberechnung für ein Ritzel-Zahnstangenpaar

Die Abbildung eines Zahnstangengetriebes in die normative Tragfähigkeitsberechnung der DIN 3990 bzw. ISO 6336 ist in Form einer Stirnrad-/Ersatzradpaarung nicht ausreichend exakt möglich. Die Notwendigkeit einer Anpassung der Berechnungsvorschrift wurde im Abschnitt 3.1.1 aufgezeigt. Im folgenden Kapitel werden die wesentlichen Modifikationen näher erläutert, um ein Stirnrad-Zahnstangenpaar hinsichtlich der Tragfähigkeit gegenüber Grübchenbildung zuverlässiger auszulegen.

#### 3.3.1 Ermittlung der Grübchentrugfähigkeit bei Zahnstangengetrieben

Laut ISO 6336-2 ist die Berücksichtigung des Zähnezahlnverhältnisses  $u$  vorgesehen, um den Krümmungseinfluss beider beteiligter Zahnpartner einzubeziehen. Die Krümmung am Zahn einer Zahnstange weist nach Gl. 2–5 einen unendlichen Krümmungsradius auf ( $\rho_{C2} \mapsto \infty$ ), wodurch sich das Zähnezahlnverhältnis  $u$  vernachlässigen lässt. Der Zusammenhang zwischen Zähnezahlnverhältnis und Krümmung und die Anpassung für das Stirnrad-Zahnstangenpaar werden in der Gl. 3–12 ersichtlich. Die resultierende Ersatzkrümmung am Wälzpunkt,  $\rho_C$ , vereinfacht sich zu  $\rho_{C1}$ .

$$\frac{1}{\rho_C} = \left(\frac{1}{\rho_{C1}}\right) + \left(\frac{1}{\rho_{C2}}\right) = \frac{1}{\rho_{C1}} \left(\frac{u+1}{u}\right) = \frac{2 \cos(\beta_b)}{d_1 \tan(\alpha_{wt})} \frac{1}{\cos(\alpha_t)} \quad (3-12)$$

Aus der Hertzchen Pressung  $p_H$  ergibt sich die nominelle Flankenpressung  $\sigma_{H0}$  im Wälzpunkt C durch das Einfügen der zahn- und paarungsspezifischen Einflussfaktoren  $Z_i$ . Unter Beachtung der Gl. 3–12 erhält man die nominelle Flankenpressung  $\sigma_{H0}$  für Zahnstangengetriebe (Gl. 3–13). Der Elastizitätsfaktor  $Z_E$  und der Überdeckungsfaktor  $Z_\epsilon$  berechnen sich gemäß des normativen Vorgehens der DIN 3990 oder ISO 6336.

$$\sigma_{H0,C} = Z_H Z_E Z_\epsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b}} \quad (3-13)$$

Als Folge der geradflankigen Zahnstange kann der Betriebseingriffswinkel  $\alpha_{wt}$  aus Gl. 3–12 in der Berechnung des Zonenfaktors  $Z_H$  für Zahnstangengetriebe mit dem Stirneingriffswinkel  $\alpha_t$

gleichgesetzt werden. Ein weiterer Anteil  $\cos(\alpha_t)$  stammt aus der Umrechnung der Normalkraft  $F_{bt}$  in die Umfangskraft  $F_t$ . Der Zonenfaktor  $Z_H$  errechnet sich für Zahnstangengetriebe nach Gl. 3–14.

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cos(\beta_b)}{\cos^2(\alpha_t) \cdot \tan(\alpha_{wt})}} \quad (\text{bei Stirnradgetrieben})$$

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cos(\beta_b)}{\cos^2(\alpha_t) \cdot \tan(\alpha_t)}} = \sqrt{\frac{2 \cos(\beta_b)}{\sin(\alpha_t) \cdot \cos(\alpha_t)}} \quad (\text{bei Zahnstangengetrieben}) \quad (3-14)$$

Der Schrägenfaktor  $Z_\beta$  ist auf Grundlage des maximalen Schrägungswinkels von Ritzel oder Zahnstange nach Gl. 3–15 gemäß ISO 6336 und [LINK10] zu ermitteln:

$$Z_\beta = \sqrt{\frac{1}{\max(\beta_1, \beta_2)}} \quad (3-15)$$

Der normative Berechnungsansatz zur Bestimmung der Einzeleingriffsfaktoren  $Z_{B, D}$  zeigt eine große Schwankungsbreite in der Berechnung einiger Hilfsgrößen. Als Grund können die großen Geometriedimensionen des Ersatzstirnrades herangezogen werden. Nach der ISO 6336 werden für die Grübchentragsfähigkeit die charakteristischen, inneren Einzeleingriffsfaktoren  $Z_B$  des Ritzels und  $Z_D$  des Rades im Vergleich zum Wälzpunkt C bewertet. Als alternative Vorgehensweise für die Zahnstangengetriebe ist die Ermittlung beider Einzeleingriffsfaktoren nur mithilfe der Ritzelgeometrie möglich. Die Eingriffstrecke  $g_\alpha$  beschreibt die Strecke zwischen den Eingriffspunkten A und E. Der wirkende Durchmesser  $d_{B1}$  am inneren Einzeleingriffspunkt B des Ritzels kann nach Gl. 3–16 durch die Subtraktion der Teilstrecke AB gebildet werden. Für die Ermittlung des  $Z_D$  wird anstatt des inneren Einzeleingriffspunktes des Ersatzrades der äußere Einzeleingriffspunkt des Ritzels herangezogen. Der Durchmesser  $d_{D1}$  bestimmt sich gemäß der Gl. 3–17 anhand der Teilstrecke AD, die der Stirneingriffsteilung  $p_{et}$  entspricht.



$$d_{B1} = \sqrt{d_{b1}^2 + \left( \sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} - \frac{2(\varepsilon_\alpha - 1)p_{et}}{(AB)} \right)^2} \quad (3-16)$$

$$d_{D1} = \sqrt{d_{b1}^2 + \left( \sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} - \frac{2p_{et}}{(AD)} \right)^2} \quad (3-17)$$

Durch die Kenntnis aller Durchmesser der spezifischen Eingriffspunkte kann der jeweilige Winkel  $\varphi_i$  zur Parametrisierung der Evolvente und der dazugehörige Krümmungsradius  $\rho_i$  (Gl. 3–18) berechnet werden:

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{d_i^2}{d_{b1}^2} - 1} \quad \text{und daraus folgt} \quad \rho_i = \frac{d_{b1}}{2} \varphi_i \quad (3-18)$$

Somit vereinfacht sich die Ermittlung der Einzeleingriffsfaktoren  $Z_{B,D}$  nach Gleichung 3–19 in Anlehnung an [LINK10] wegen des unendlichen Krümmungsradius der Zahnstange.

$$Z_{B,D} = \sqrt{\frac{\rho_{C1}}{\rho_{B1,D1}}} \quad (3-19)$$

Mithilfe der Einzeleingriffsfaktoren kann auf die nominelle Flankenpressung  $\sigma_{H0}$  an den inneren Einzeleingriffspunkten B, D geschlossen werden (Gl. 3–20):

$$\sigma_{H0,BD} = Z_{B,D} Z_H Z_E Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b}} \quad (3-20)$$

Die Betrachtung des Doppeleingriffsgebietes als relevanter Eingriffsbereich ist für die Verzahnungsauslegung nicht erforderlich, da bei den vorliegenden Ritzel-Zahnstangenpaarungen ein Kopfkantenbruch vorhanden ist. Darüber hinaus wird der Effekt eines eventuellen Kopfeingriffes durch den deutlich höheren Verzahnungsverschleiß im Einzel-

eingriffsgebiet weiter reduziert. Laut Fronius in [FRON71] ist der Kopfeingriff nur bei nicht modifizierten Verzahnungen zu untersuchen.

### 3.4 Zahnfußtragfähigkeitsberechnung für ein Ritzel-Zahnstangenpaar

Die Bestimmung der Zahnfußbiegespannung  $\sigma_{F1,2}$  erfolgt durch die normativen Berechnungsmethoden der DIN 3990 und ISO 6336 mithilfe eines Balkenmodells. Hierbei wird die Lasteinleitungsstelle auf den äußeren Einzeleingriff festgelegt. Der Formfaktor  $Y_F$  beinhaltet die Berücksichtigung der nominalen Zahngeometrie. Liegt eine Schrägverzahnung vor, wird eine Ersatzgeradverzahnung gebildet. Für die Ersatzgeradverzahnung kann wiederum der Formfaktor  $Y_F$  berechnet werden. Darüber hinaus wird die Kerbwirkung im Zahnfußbereich durch den Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  abgebildet. Beide Einflussfaktoren werden im nachfolgenden Abschnitt in Bezug auf einen Zahnstangenzahn analysiert und gegebenenfalls modifiziert.

#### 3.4.1 Der Formfaktor eines Zahnstangenzahns

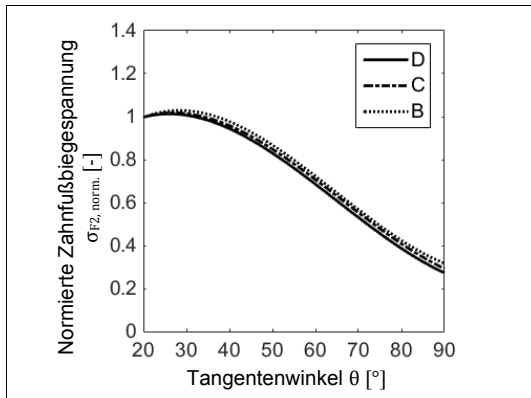
Zunächst werden in der Abbildung 3.7 die grundlegenden Geometriegrößen zur Bestimmung des Formfaktors  $Y_F$  definiert. Der äußere Einzeleingriffspunkt der Zahnstange ( $r_{et}$ ) kann laut ISO 6336-3 als kritischer Kraftangriffspunkt für die Abschätzung hinsichtlich eines Zahnfußbruchs angenommen werden. Der Biegehebelarm  $h_{Fe}$  wird als Abstand zwischen der in ihrer Wirkungsrichtung in Zahnmitte verschobenen Zahnnormalkraft und der Einspannung am Zahnfuß bezeichnet. Die theoretische Einspannung des Zahnes befindet sich am Berührungspunkt der 30°-Tangente mit der Fußausrundung. Die Einspannungsstelle für das analytische Balkenmodell ( $r_{f0}$ ) ermittelt sich nach Gl. 3–22 aus der Zahnfußkurve  $\rho_F$ , deren Mittelpunkt  $M$  und beliebigen Tangentenwinkeln  $\theta$ . Die Koordinaten des Fußrundungsmittelpunktes  $M$  können anhand der Gl. 3–21 errechnet werden. Der Fußrundungsradius  $\rho_F$  verläuft an der Linie  $r_{ut}$  tangential in die Zahnflanke, wobei der Bereich der aktiven Zahnflanke erst an der Fußnutzlinie  $r_{Nf}$  beginnt.

$$M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_t}{2} \\ r_f + \rho_F \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

$$r_{f\theta} = r_f + \rho_F(1 - \sin(\theta)) \quad (3-22)$$



Der Nachweis zur Anwendbarkeit der 30°-Tangente wurde mithilfe der FEM anhand von drei typischen Beispielen, die das gesamte Spektrum von Lenkverzahnungen wiedergeben, geführt. Die Abbildung 3.8 zeigt Spannungsverläufe (max. Hauptspannung) entlang der Zahnfußrundung für die Verzahnungspaarungen B, C und D. Die Zahnfußspannungen sind für eine bessere Vergleichbarkeit auf den jeweiligen Wert bei  $\theta = 20^\circ$  normiert. Es wird deutlich, dass sich die örtlichen Spannungsmaxima an der Zahnoberfläche nahe dem Berührungspunkt der 30°-Tangente mit der Fußausrundung befinden. Somit ist die Nennspannungsberechnung an  $\theta = 30^\circ$  und des Spannungskorrekturfaktors  $Y_S$  (siehe Kapitel 3.4.2) nach DIN 3990 und ISO 6336 anwendbar. Die Verzahnungspaarungen B bis D können dem Anhang A entnommen werden.



**Abbildung 3.8: Verlauf der Zahnfußbiegespannung entlang der Fußrundung**

Der Krafthebelarm  $h_{Fe}$  berechnet sich aus der Kraftangriffslinie  $r_{en}$  der äußeren Einzeleingriffsposition, der wirkenden Zahndicke  $s_{en}$  im Normalschnitt sowie der Einspannungsstelle ( $r_{f\theta}$ ) und dem Normaleingriffswinkel  $\alpha_n$ . Der Profilwinkel  $\alpha_{Fen}$  am äußeren Einzeleingriffspunkt kann wegen der konstanten Profilform des Zahnstangenzahnes mit dem Normaleingriffswinkel  $\alpha_n$  gleichgesetzt werden (siehe Gl. 3–25).

$$h_{Fe} = r_{en} - \frac{s_{en} \tan \alpha_n}{2} - r_{f\theta} \quad (3-25)$$

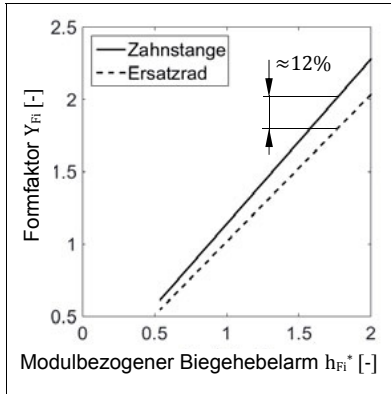
Am Kraftangriffspunkt  $r_{en}$  ergibt sich die Zahndicke  $s_{en}$  im Normalschnitt am Zahnstangenzahn aus der Umrechnung der Zahndicke an der Teillinie nach Gl. 3–26 unter Berücksichtigung des Normaleingriffswinkels  $\alpha_n$ .

$$s_{en} = \frac{\pi m_n}{2} - (r_{en} - r_2) \cdot 2 \tan(\alpha_n) \quad (3-26)$$

Schließlich lässt sich der Formfaktor  $Y_F$  für den Zahnstangenzahn nach Gleichung 3–27 aus dem modulbezogenen Biegehebelarm  $h_{Fe}$  und der Zahndicke am Schnittpunkt der 30°-Tangente mit der Fußausrundung  $s_{fn}$  berechnen. Die Zahnfußdicke  $s_{fn}$  ermittelt sich am Zahnstangenzahn analog der Gl. 3–26 unter Einsetzen der Einspannstelle  $r_{f0}$  anstelle des Kraftangriffsradius  $r_{en}$ .

$$Y_F = \frac{6 \frac{h_{Fe}}{m_n}}{\left(\frac{s_{fn}}{m_n}\right)^2} \quad (3-27)$$

Die Änderungen in der Ermittlung des Formfaktors zur Berücksichtigung der Zahnstangengeometrie spiegeln sich in der Abbildung 3.9 wieder. Hierfür wurde der Kraftangriffspunkt entlang des aktiven Zahnprofils von der Kopfnutzlinie  $r_{Na}$  bis zur Fußnutzlinie  $r_{Nf}$  variiert. Dadurch ermittelt sich ein von der Kraftangriffshöhe abhängiger Biegehebelarm  $h_{Fi}$ , aus dem sich die Formfaktoren  $Y_{Fi}$  bei konstanter Einspanndicke berechnen lassen. Im Vergleich zum Formfaktor des Ersatzrades zeigt sich eine Erhöhung des Einflussfaktors am Zahnstangenzahn um ca. 12 % entlang des veränderlichen Biegehebelarmes  $h_{Fi}/m_n$ . Die Zahngeometrien der verwendeten Zahnstange und des Ersatzrades (Verzahnungspaar A) können der Tabelle 3-2 entnommen werden. Die Ritzelgeometrie ist bei beiden Untersuchungen identisch geblieben.



**Abbildung 3.9: Formfaktor eines Zahnstangenzahns im Vergleich zum dazugehörigen Ersatzrad**

**Tabelle 3-2: Vergleich zum Ersatzrad (Zahnpaarung A)**

| Größe            | Einheit | Zahnstange | Ersatzrad |
|------------------|---------|------------|-----------|
| Z <sub>2</sub>   | [-]     | 32         | 9000      |
| r <sub>a2</sub>  | [mm]    | 10,06      | 8383,80   |
| r <sub>2</sub>   | [mm]    | 8,11       | 8382      |
| r <sub>f2</sub>  | [mm]    | 6,22       | 8380,4    |
| S <sub>an2</sub> | [mm]    | 1,49       | 1,49      |

### 3.4.2 Verifizierung der Zahnfußbiegespannung am Zahnstangenzahn

Die analytische Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit stützt sich auf die Zahngeometrie, die Lasteinleitungsstelle und auf die Form der Zahnfußrundung. In dem vorliegenden Abschnitt wird insbesondere die spannungserhöhende Kerbwirkung der Fußausrundung untersucht. Die örtliche Zahnfußspannung wird über die Nennspannung und einen Spannungskonzentrationsfaktor angenähert. Daher lässt sich der Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  nach Gleichung 3–28 aus der maximal örtlichen Zahnfußbiegespannung  $\sigma_F$  und aus der Biege-Nennspannung  $\sigma_{Fn}$  am Schnittpunkt der 30°-Tangente berechnen:

$$Y_S = \frac{\sigma_{Fmax}}{\sigma_{Fn}} \quad (3-28)$$

Die in der ISO 6336 empfohlene Vorgehensweise gilt für ein Bezugsprofil nach DIN 867 bzw. der ISO 53 mit einem Profilwinkel  $\alpha_n = 20^\circ$ . Das heißt, dass der Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  bei abweichenden Profilwinkeln nicht mehr korrekt berechnet wird. In der DIN 3990 werden graphische Lösungen für den Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  bei einem Profilwinkel  $\alpha_n = 20^\circ \dots 25^\circ$  bereitgestellt. Darüber hinaus untersuchte Linke die Zahnfußbiegespannungen am Zahnstangenzahn in [LINK10] bei Profilwinkeln zwischen  $\alpha_n = 15^\circ \dots 28^\circ$ . Linke empfiehlt für einen Profilwinkel  $\alpha_n > 28^\circ$  die Spannungsermittlung mithilfe der FEM oder der Boundary-

Elemente-Methode (BEM). Bei den Zahnstangengetrieben treten häufig Profilwinkel  $\alpha_n = 20^\circ$  auf, in manchen Fällen eines variabel-übersetzten Lenkgetriebes kann sich der Profilwinkel am Zahnstangenzahn auf  $\alpha_n = 45^\circ$  erhöhen. Da in beiden Fällen das Ritzel einen ähnlichen Profilwinkel ( $\alpha_n = 20^\circ \dots 25^\circ$ ) aufweist, wird die Zahnfußbiegespannung am Ritzel,  $\sigma_{F1}$ , bei einer variablen Übersetzung deutlich höher als die Beanspruchung am Zahnstangenzahn.

Des Weiteren ergeben sich in der Zahnfußgeometrie weitere Unterschiede zwischen Zahnstangenzahn und den normierten Bezugsprofilen der DIN 867 bzw. ISO 53. Anhand der Tabelle 3-3 werden diese Abweichungen beispielhaft am maximalen Fußrundungsradius  $\rho_{fp,max}^*$  der Paarungen B, C und D (siehe Anhang A) aufgezeigt. Die Fußausrundung am Zahnstangenzahn  $\rho_{fp,max}^*$ , die aus der Werkzeuggeometrie abgeleitet wurde, unterscheidet sich deutlich vom normierten Bezugsprofil ( $\rho_{fp} = 0,38 \cdot m_n$ ). Folglich gilt es die normative Abschätzung des  $Y_s$  für den typischen Zahnstangenzahn zu überprüfen.

**Tabelle 3-3: Zahnfußausrundungen typischer Zahnstangenprofile**

| Größe           | Einheit | Paarung    |            |            |
|-----------------|---------|------------|------------|------------|
|                 |         | D          | C          | B          |
| $\rho_{fp,max}$ | [mm]    | 0,60 $m_n$ | 0,70 $m_n$ | 0,65 $m_n$ |

Um die Genauigkeit des analytischen Vorgehens nach ISO 6336 für den Zahnstangenzahn zu untersuchen, wurde die Zahnfußbiegespannung an FEM-Modellen des Zahnstangenzahnes mithilfe von Linienlasten ermittelt. Der Spannungskorrekturfaktor  $Y_{S,FEM}$  kann als Quotient aus der maximalen Hauptspannung ( $\sigma_{FEM,max}$ ) und der analytischen Biege-Nennspannung  $\sigma_{F0-B}$  gebildet werden. Eine geringe Diskrepanz zwischen dem  $Y_{S,FEM}$  und dem  $Y_s$  nach ISO 6336 ist für eine hinreichend genaue Abschätzung der Zahnfußtragfähigkeit wünschenswert. Nach [LINK10] berechnet sich der Spannungskorrekturfaktor  $Y_{S,FEM}$  nach Gleichung 3–29 folgendermaßen:

$$Y_{S,FEM} = \frac{\sigma_{FEM,max}}{\underbrace{K_A K_v K_F \alpha K_{F\beta}}_{=1} \frac{F_t}{b m_n} \underbrace{Y_F Y_\beta}_{=1}} = \frac{\sigma_{FEM,max}}{\frac{F_t}{b m_n} Y_F} \quad (3-29)$$

Für die modellhafte Abbildung der ISO 6336 in der FEM wurden folgende Vereinfachungen getroffen (vgl. Gleichung 3–29):

- a) Einzeleingriff, d.h.  $\varepsilon_\alpha \leq 1$  und folglich  $K_{F\alpha} = 1$
- b) Homogene Linienlast ( $K_{F\beta} = 1$ ) über einen unendlich breiten Zahn (keine Randeffekte)
- c) Berührlinie verläuft unter einem konstanten  $h_{Fe}$  und demnach wird  $Y_\beta = 1$  gesetzt
- d) Der Formfaktor bzw. die Ersatzverzahnung wird über  $\sigma_{Fn}$  berücksichtigt

Eine Gegenüberstellung der Spannungswerte aus normativer Berechnungsmethodik und FEM erfolgt in der anhand von drei charakteristischen Beispielen. Hierfür wurde der analytische Biegespannungswert auf die gesamte Zahnbreite projiziert, um einen Spannungsverlauf zu erzeugen. Die beste Übereinstimmung ist bei der geradverzahnten Zahnstange (Fall a) zu beobachten. Der analytisch ermittelte Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  ist um 1,8 % geringer als der  $Y_{S,FEM}$ . Bei einer schrägverzahnten Zahnstange zeigen sich etwas größere Unterschiede zwischen dem analytischen Biegespannungswert und der FEM-Spannung. Auch das Verhältnis der Spannungskorrekturfaktoren  $Y_S / Y_{S,FEM}$  spiegelt die konservativere Abschätzung in der normativen Vorgehensweise wieder. Sowohl bei dem Fall b als auch beim Fall c wird  $Y_S$  um 4,6 % bzw. 5,7 % größer als in der entsprechenden FEM-Rechnung. Linke führt solche Unterschiede in [LINK10] auf die Verwendung der Ersatzgeradverzahnung bzw. auf den Schrägenfaktor  $Y_\beta$  und Formfaktor  $Y_F$  bei Schrägungswinkeln  $\beta \neq 0^\circ$  zurück. In den untenstehenden Beispielen begründet sich die Diskrepanz nur auf die Ersatzgeradverzahnung, da ein Schrägenfaktor von  $Y_\beta = 1$  gewählt wurde. Dennoch bildet die ISO 6336 den mehrachsigen Spannungszustand am Zahnstangenzahn hinreichend genau ab, sodass die normative Berechnungsabfolge für den Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  ohne Einschränkung angewendet werden kann.

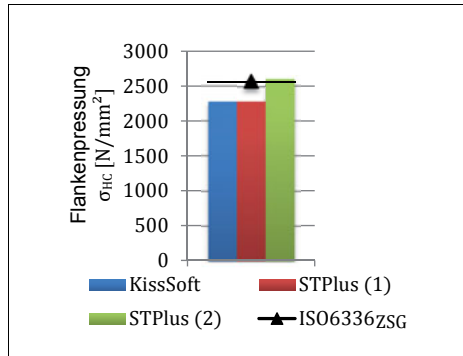
Die Unterschiede aus [ARSL11] zwischen den Zahnfußbiegespannungen der normativen Verfahrens der DIN 3990 und den FEM-Spannungen konnten durch die beschriebenen Änderungen am Biegehebelarm  $h_{Fe}$ , der Zahnfußdicke  $s_{Fn}$  und des Formfaktors  $Y_F$  bei Profilwinkeln  $\alpha_n = 20^\circ \dots 25^\circ$  deutlich reduziert werden.



### 3.5 Vergleich der modifizierten Tragfähigkeitsberechnung mit dem normativen Standard

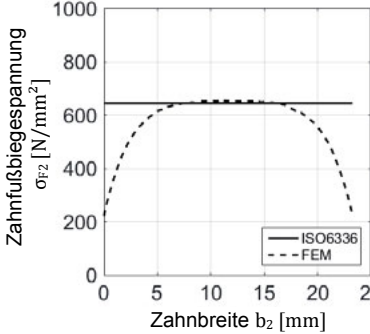
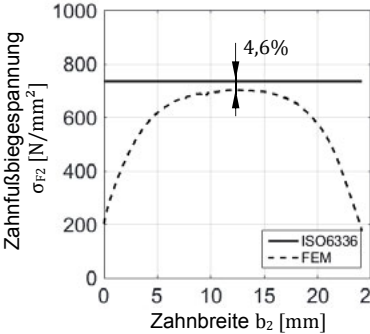
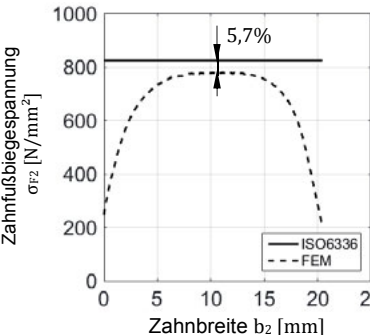
Abschließend werden die durchgeführten Änderungen an der Tragfähigkeitsberechnung für ein Stirnrad-Zahnstangenpaar (ISO 6336<sub>ZSG</sub>) im Hinblick auf das in Kapitel 3.1 erwähnte Beispiel (Paarung A) angewendet. Die Spannungswerte für die Hertzsche Pressung und Zahnfußbiegespannung werden mit den Resultaten der vorgestellten Standardprogramme (STPlus, KISSsoft) verglichen. Die Zahnstange wurde in STPlus als Ersatzstirnradverzahnung mit einer Ersatzzähnezahl von  $z_{z,ers} = 5000$  bzw.  $z_{z,ers} = 9000$  Zähnen, in KISSsoft mit  $z_{z,ers} = 5000$  Zähnen approximiert.

Bei der Gegenüberstellung der nominellen Flankenpressungen im Wälzpunkt in der Abbildung 3.10 wird ersichtlich, dass die Programme KISSsoft und STPlus bei einer Ersatzzähnezahl  $z_{z,ers} = 5000$  deutlich geringere Pressungswerte (ca. -14 %) ermitteln als STPlus bei einer Ersatzzähnezahl  $z_{z,ers} = 9000$ . Darüber hinaus ordnet sich das STPlus-Ergebnis mit  $z_{z,ers} = 9000$  mit einer Abweichung von ca. +2 % nur geringfügig oberhalb der nominellen Flankenpressung  $\sigma_{H0,C}$  der ISO 6336<sub>ZSG</sub> ein. Die Unterschiede innerhalb von STPlus werden hauptsächlich durch die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  und der Eingriffsfedersteifigkeit  $c_y$  hervorgerufen.

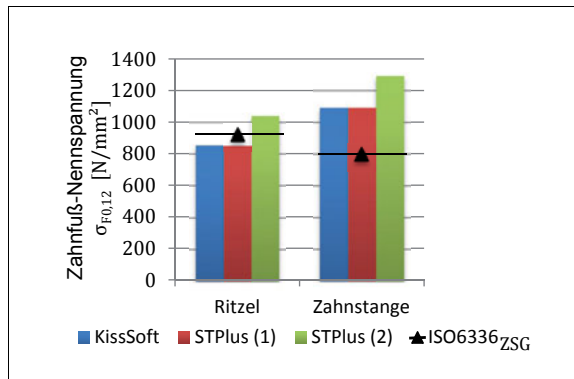


**Abbildung 3.10: Auswirkung der Anpassungen auf die Größchentrugfähigkeit am Bsp. A**

**Tabelle 3-4: Validierung der analytischen Zahnfußbiegespannungen mit der FEM an drei Beispielen**

| Geometrieparameter                                                                                                                                                                                                                                                                            | Spannungswerte                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) Paarung D</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>m_n = 2,05 \text{ mm}</math></li> <li>• <math>\alpha_n = 25^\circ</math></li> <li>• <math>\beta_2 = 0^\circ</math></li> <li>• <math>Y_F = 1,68</math></li> <li>• <math>Y_S / Y_{S,FEM} = 1,57 / 1,60</math></li> </ul>     |    |
| <p>b) Paarung C</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>m_n = 2,12 \text{ mm}</math></li> <li>• <math>\alpha_n = 20^\circ</math></li> <li>• <math>\beta_2 = 10,2^\circ</math></li> <li>• <math>Y_F = 1,95</math></li> <li>• <math>Y_S / Y_{S,FEM} = 1,59 / 1,52</math></li> </ul>  |   |
| <p>c) Paarung B</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>m_n = 1,70 \text{ mm}</math></li> <li>• <math>\alpha_n = 25^\circ</math></li> <li>• <math>\beta_2 = -11,5^\circ</math></li> <li>• <math>Y_F = 1,23</math></li> <li>• <math>Y_S / Y_{S,FEM} = 1,86 / 1,76</math></li> </ul> |  |

Noch deutlichere Unterschiede zeigen sich bei der Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit für die Stirnrad- / Ersatzrad- bzw. Stirnrad- / Zahnstangenpaarung (siehe Abbildung 3.11). Bei einer vergrößerten Ersatzzähnezahl steigt die Zahnfußbiegespannung am Zahnstangenzahn  $\sigma_{F2}$  innerhalb STPlus um ca. 18 % an. Nach angepasster Berechnungsmethodik (ISO 6336<sub>ZSG</sub>) liegt die Zahnfußbiegespannung  $\sigma_{F2}$  um ca. 37 % deutlich darunter. Die Spannungswerte aus KISSsoft bestätigen die Resultate aus STPlus(1). Selbst die Zahnfußbiegespannung am Ritzel  $\sigma_{F1}$  variiert innerhalb von STPlus in Abhängigkeit der Ersatzzähnezahl  $z_{2,ers}$  um ca. 22 %. Die Diskrepanzen werden durch die unterschiedlichen Eingriffsverhältnisse hervorgerufen. Beispielsweise verringert sich die Profilüberdeckung  $\varepsilon_{\alpha}$  in STPlus durch die Erhöhung der Ersatzzähnezahl auf  $z_{2,ers} = 9000$  um ca. 24 %. Außerdem nimmt die Zahnkopfdicke am Ritzel  $s_{an1}$  um etwa 8 % ab (siehe Tabelle 3-1). Die ermittelte Zahnfußbiegespannung  $\sigma_{F1}$  aus ISO 6336<sub>ZSG</sub> liegt zwischen den analytischen Ergebnissen.



**Abbildung 3.11: Auswirkung der Anpassungen auf die Zahnfußtragfähigkeit am Bsp. A**

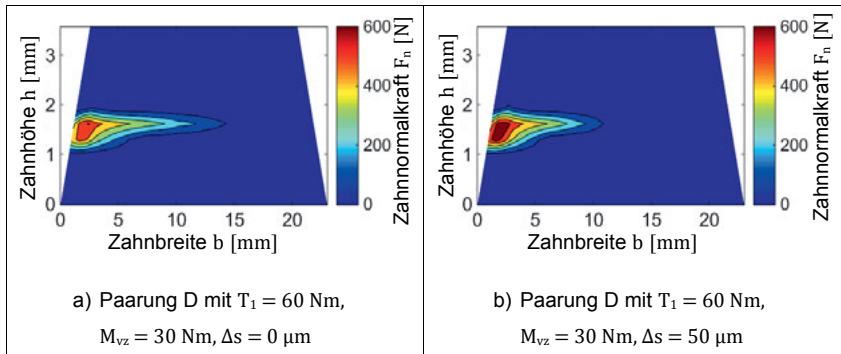
### 3.6 Erweiterte Umfeldbetrachtung in Bezug auf die Zahnstangenlagerung

Die nominale Berührlinienlage definiert sich im Zahneingriff an einem last-, abweichungs- und korrekturfreen Flankenpaar, der sogenannten konjugierten Verzahnung. Im Betriebszustand kann sowohl die Berührlinienlage als auch das Klaffmaß zwischen den Zahnflanken wegen den Fertigungsabweichungen, den elastischen Verformungen und Verlagerungen zum Teil erheblich von dem Idealzustand abweichen. Die Kontaktlinienabweichung im Betriebszustand gilt es bei einer Tragfähigkeitsberechnung zu beachten.

Die wirksame Kontaktlinienabweichung  $F_{\beta y}$  nach ISO 6336 berücksichtigt die geometrisch bedingten Form- und Lageabweichungen aus der Herstellung und Montage der Verzahnung ( $f_{\beta z}$ ), das Lagerspiel ( $f_{\beta L}$ ), die elastischen Verformungen der Wellen- und Radkörper sowie der beteiligten Stützpunkte am Gehäuse ( $f_{\beta E}$ ) und den aus dem Einlaufvorgang resultierenden Verschleißabtrag  $y_{\beta}$ .

Als Folge der angefederten Zahnstangenlagerung vergrößert sich unter Betriebslast der Achsabstand um den Betrag des Druckstück- bzw. Federweges  $\Delta s$ . Der Einfluss des Federweges  $\Delta s$  auf die Tragbildverlagerung in Abbildung 3.12 veranschaulicht die erforderliche Präzisierung der Berechnung des Verlagerungsverhaltens. Dabei dient die Kippmomenteneinleitung  $M_{vz}$  bei einem Federweg von  $\Delta s = 0 \mu\text{m}$  (Fall a) der Darstellung des Systemverhaltens bei Vorhandensein einer Verzahnungsabweichung.

Bei dem Vergleich der beiden Fälle a) und b) wird offensichtlich, dass eine Achsabstandsänderung von  $\Delta s = 50 \mu\text{m}$  sowohl die Lage als auch den Betrag der maximalen Kontaktkraft verändert. Die örtlichen Kontaktkräfte erhöhen sich etwa um das 1,2-fache und das Tragbild verlagert sich weiter in Stirnseitenrichtung. Die Verlagerung der Kontaktzone wird hervorgerufen durch das Zusammenspiel aus dem zunehmenden Flankenklaffen  $f_k$ , den vergrößerten Hebelarmen  $i, j$  der wirkenden Radial-  $F_{r2}$  bzw. Axialkraft  $F_{a2}$  sowie dem Kippwinkel  $\omega$  um die Zahnstangenhubachse. Die in der Praxis üblichen Federwege  $\Delta s$  können der Tabelle 3-5 entnommen werden. Die FEM-Kontaktanalysen zur Auswertung der Umfeldeffekte erfolgten in [KONI15].



**Abbildung 3.12: Tragbildverlagerung unter Achsabstandsänderung  $\Delta s$  (Verzahnungspaar D)**

**Tabelle 3-5: Typische Druckstückwege in Lenkgetrieben**

|                 | $\Delta s$ in [ $\mu\text{m}$ ] |
|-----------------|---------------------------------|
| Im Neuzustand   | 50 – 100                        |
| Lebensdauerende | 200 – 400                       |

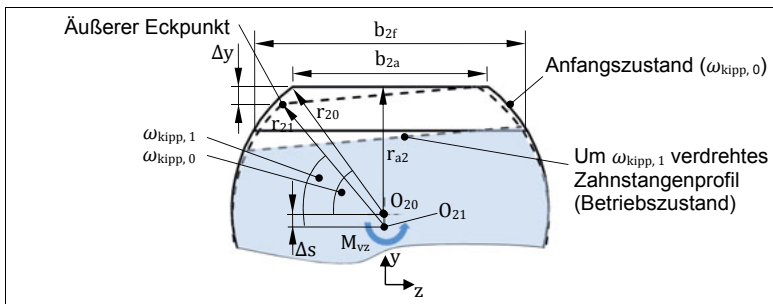
In der Abbildung 3.13 wird die Rotationsbewegung der Zahnstange vom Anfangs- ( $\omega_0$ ) zum Betriebszustand ( $\omega_1$ ) gezeigt, wobei sich der resultierende Drehwinkel  $\omega_{\text{kipp}}$  unter Berücksichtigung des überwundenen Feder- oder Druckstückweges  $\Delta s$  nach Gleichung 3–30 ermitteln lässt. Bei einer Zahnstangendrehung um  $O_{20}$  bewegt sich der äußere Eckpunkt des Zahnstangenzahnes um  $\Delta y$  auf einer Kreisbahn.

$$\omega = \omega_0 - \omega_1 \quad (3-30)$$

mit

$$\sin \omega_0 = \frac{r_{a2}}{r_{20}} = \frac{r_{a2}}{\sqrt{r_{a2}^2 + \left(\frac{b_{2a}}{2}\right)^2}}$$

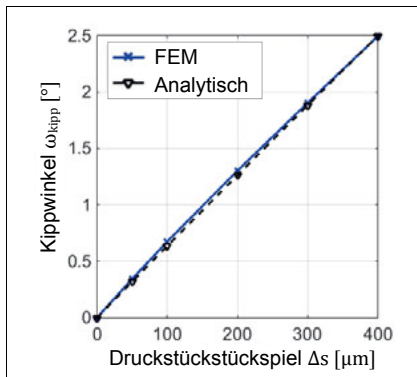
$$\sin \omega_1 = \frac{r_{a2} - \Delta y}{r_{21}} = \frac{r_{a2} - 2\Delta s}{\sqrt{(r_{a2} + \Delta s)^2 + \left(\frac{b_{2a}}{2}\right)^2}}$$

**Abbildung 3.13: Prinzip der Zahnstangenverkipfung in Abhängigkeit vom Federweg  $\Delta s$** 

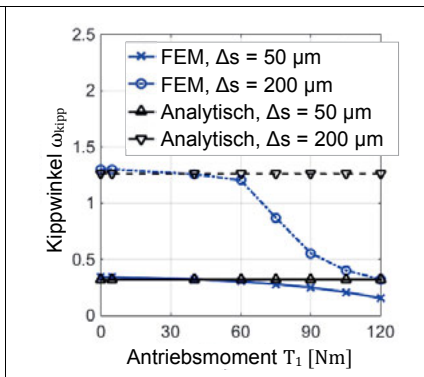
Die analytische Berechnung des Kippwinkels  $\omega_{\text{kipp}}$  in Abhängigkeit vom Druckstückspiel  $\Delta s$  entspricht nach der Abbildung 3.14 im lastfreien Zustand sehr gut der Zahnstangenverdrehung aus der FEM (Paarung D,  $T_1 = 0 \text{ Nm}$ ,  $M_{\text{servo}} = 30 \text{ Nm}$ ). Unter zusätzlicher Einleitung eines

Antriebsmomentes  $T_1$  weisen die analytischen Kippwinkel erst bei Drehmomenten  $T_1 > 60$  Nm und Druckstückspielen von  $\Delta s \geq 200$   $\mu\text{m}$  größere Abweichungen zur FEM auf (siehe Abbildung 3.15). Hierfür liegt die Ursache bei der Radialkraft  $F_{r2}$ , die mit größer werdendem Antriebsmoment  $T_1$  dem Servomoment  $M_{\text{servo}}$  und dem Kippmoment aus der Verzahnung,  $M_{vz}$ , entgegenwirkt. Gleichermäßen vergrößert sich das Kontaktraggbild mit zunehmendem Antriebsmoment  $T_1$ . Bei einer Tragbildausdehnung über die Zahnbreitenmitte hinaus wird ein zusätzliches Drehmoment induziert, welches den Kippmomenten entgegengerichtet ist. Der Betriebslastfall befindet sich in der Regel zwischen  $5 \text{ Nm} \leq T_1 \leq 70 \text{ Nm}$  bei  $M_{\text{servo}} \approx 20 \text{ Nm}$ . Eine weiterführende Validierung anhand eines Praxisbeispiels folgt in Kapitel 6.1.2.

Im nächsten Schritt ist es erforderlich, die Änderung durch die Drehung des äußeren Eckpunktes des Zahnstangenzahnes in eine äquivalente Änderung des Flankenklaffmaßes  $f_k$  umzurechnen (Abbildung 3.13). Als gute Näherung kann der Abstand  $\Delta y$  mit dem Federweg  $\Delta s$  gleichgesetzt werden.



**Abbildung 3.14: Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}}$  in Abhängigkeit vom Federweg  $\Delta s$  bei  $T_1 = 0 \text{ Nm}$ ;  $M_{vz} = 30 \text{ Nm}$**



**Abbildung 3.15: Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}}$  in Abhängigkeit vom Antriebsmoment  $T_1$  bei  $\Delta s = \text{konstant}$**

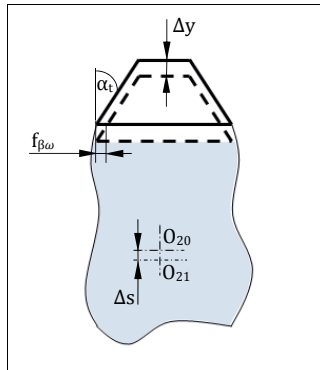
Die Erhöhung des Klaffmaßes  $f_k$  um den Betrag  $f_{\beta\omega}$  als Folge der Verdrehung wird in der Abbildung 3.16 verdeutlicht. Die Verdrehabweichung  $f_{\beta\omega}$  ermittelt sich für den äußeren Profilschnitt mithilfe des Profiwinkels  $\alpha_c$  und der Änderung des äußeren Eckpunktes um  $\Delta y$  nach Gl. 3–31 wie folgt:

$$f_{\beta\omega} = \Delta y \cdot \tan(\alpha_t) \quad (3-31)$$

Weiter kann die Verdrehabweichung  $f_{\beta\omega}$  als zusätzlicher Bestandteil des Erwartungswertes der Anteile  $f_{\beta i}$  verstanden werden (siehe Gl. 3–32). Daher kann die wirksame Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  nach [ISO6336] um den im Zahnstangengetriebe auftretenden Kippeinfluss erweitert werden. Mithilfe der Summe aus dem Erwartungswert und der Streuung der Anteile  $f_{\beta i}$  sowie dem Einlaufverschleiß  $y_\beta$  nach [SCHL10] erhält man die Gl. 3–32 und die Gl. 3–33.

$$\sum \bar{f}_{\beta i} = f_{\beta Z} + f_{\beta L} + f_{\beta E} + f_{\beta\omega} \quad (3-32)$$

$$F_{\beta y} = \left| \sum \bar{f}_{\beta i} \right| + \sqrt{\sum \bar{f}_{\beta i}^2 - y_\beta} \quad (3-33)$$



**Abbildung 3.16: Darstellung der Verkippung im Zahnstangen-Längsschnitt**

Hierbei bestimmen sich die Fertigungsabweichungen  $f_{\beta Z}$  aus den gültigen Toleranzwerten der Flankenlinienwinkelabweichungen  $f_{H\beta 1,2}$  nach DIN 3962 und der Achsneigungs- ( $f_{\Sigma\delta}$ ) sowie Achsschränkungsabweichung ( $f_{\Sigma\beta}$ ) nach DIN 3964. Die Achsschränkungsabweichung  $f_{\Sigma\beta}$  ermittelt sich nach der Gl. 3–34 aus der Gehäusewinkelabweichung  $\Delta\delta$  und dem Abstand  $L_G$  zwischen Los- und Festlager. Wenn nur die Toleranzwerte bekannt sind, ergibt sich die Summe aller geometrischen Abweichungen  $f_{\beta Z}$  gemäß [LINK10] und [SCHL10] nach Gl. 3–35.

$$f_{\Sigma\beta} = L_G \cdot \tan(\Delta\delta) \quad (3-34)$$

$$f_{\beta Z} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 f_{H\beta i}^2\right) + \left(f_{\Sigma\beta} \frac{b_1}{L_G}\right)^2 + \left(f_{\Sigma\delta} \frac{b_1}{L_G} \tan(\alpha_t)\right)^2} \cdot \cos(\alpha_t) \cdot \cos(\beta_1) \quad (3-35)$$

Darüber hinaus bestimmen sich die elastischen Anteile  $f_{\beta E}$  für Lenkgetriebe nur aus der Biege- und Torsionsverformung des Ritzels. Da sich die Druckstücklagerung der Zahnstange stets unterhalb des Zahneingriffes befindet, können die Auswirkungen der Biegeverformungen des Zahnstangenkörpers auf den Breitenfaktor  $K_{H\beta}$  unberücksichtigt bleiben. Außerdem erlaubt die fehlende Zahnverwindung beim Zahnstangenzahn auch die Vernachlässigung von Torsionseinflüssen.

Somit ergeben sich die elastischen Verformungen  $f_{\beta E}$  des Zahnstangengetriebes nur aus der Verlagerung der Ritzelwelle. Die elastische Verformung  $f_{\beta E}$  als Summe der Wellenbiegung und der -torsion des Ritzels lässt sich nach Gl. 3–36 gemäß der ISO 6336-1, Anhang E bestimmen. Die unsymmetrische Fest-Loslagerung am Ritzel erzeugt einen außermittigen Kontaktbereich, der sich eher in Richtung des Ritzelschaftes ausprägt. Zur Berechnung der elastischen Verformung werden der Elastizitätsmodul  $E$ , die Ritzelzahnbreite  $b_1$  und die maßgebende Umfangskraft  $F_{t1}$  am Teilkreis  $d_1$  benötigt.

$$f_{\beta E} = \frac{4}{3} \cdot \left( \underbrace{\frac{2}{3\pi} \frac{F_{t1}}{b_1 E} \left(\frac{b_1}{d_1}\right)^4 \left(\frac{L_G}{b_1} - \frac{65}{48}\right)}_{f_{b,max}} + \underbrace{\frac{4}{\pi} \frac{F_{t1}}{0,39 b_1 E} \left(\frac{b_1}{d_1}\right)^2}_{f_{t,max}} \right) \text{ mit } \xi = \frac{3}{4} \quad (3-36)$$



### 3.7 Zwischenfazit

Zusammenfassend zum vorliegenden Kapitel ist eine Abbildung des Ritzel-Zahnstangenpaares in die normative Berechnungsvorschrift zur Tragfähigkeitsberechnung nach ISO 6336 erreicht. Für die Abschätzung der Grübchentragsfähigkeit wurden die örtlichen Krümmungen im Kontaktbereich angepasst und die inneren Einzeleingriffspunkte als relevante Auslegungspunkte nachgewiesen. Die Ermittlung der Zahnfußtragfähigkeit erweitert sich um den korrekten Biegehebelarm  $h_{Fe2}$  am Zahnstangenzahn bzw. um die Modifizierung des Formfaktors  $Y_{F2}$ . Der Spannungskorrekturfaktor  $Y_{S2}$  kann analog zur ISO 6336-3 bestimmt werden. Darüber hinaus wurde das Verzahnungsumfeld um die Betriebseinflüsse Kippmoment  $M_{vz}$  und Druckstückspiel  $\Delta s$  ergänzt. Das Kippmoment  $M_{vz}$  kann aus der Servounterstützung als zusätzlicher Tangentialkraftanteil in die Tragfähigkeitsberechnung integriert werden. Ein vorhandener Federweg  $\Delta s$  ermöglicht eine Verdrehung der Zahnstange und verursacht demzufolge eine Vergrößerung der wirkenden Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  um den Anteil der Verdrehabweichung  $f_{\beta \omega}$ . Der Kippwinkel  $\omega_{kippp}$  wird als neue Umfeldgröße eingeführt, womit sich das wirkende Flankenklaffen und der Breitenlastverteilungsfaktor im Ritzel-Zahnstangenpaar genauer berechnen lässt. Später erfolgt im Kapitel 5 die Validierung der Breitenlastverteilung durch die Gegenüberstellung von analytischem Breitenfaktor und der aus Kontakttragbildern abgeleiteten experimentellen Breitenlastverteilung.

## 4 Methodenträger zur Ermittlung der Last- und Spannungsverteilung

### 4.1 Notwendigkeit der Berechnung einer Last- und Spannungsverteilung

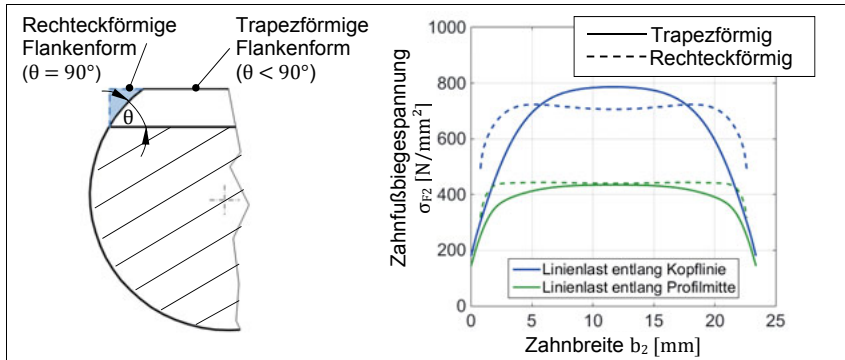
#### 4.1.1 Motivation

Das analytisch-empirische Vorgehen der ISO 6336 zur Ermittlung der charakteristischen Tragfähigkeitskennwerte wurde im vorhergehenden Kapitel erweitert und an die Gegebenheiten eines Ritzel-Zahnstangenpaares (ISO 6336<sub>ZSG</sub>) angepasst. Die Wechselwirkungen aus den Kippmomenten  $M_{Vz}$ , dem Druckstückspiel  $\Delta s$  und der Verdrehung der Zahnstange um deren Längsachse  $\omega_{\text{kipp}}$  führen nach Abbildung 3.12 zu einer Tragbildverlagerung in Richtung der Stirnseiten. Die Berührlinien befinden sich infolge der Zahnstangenverdrehung in Zahnrandnähe. Die Stirnseitengeometrie am Zahnstangenzahn unterscheidet sich wegen der trapezförmigen Flankenform besonders deutlich von einer typischen Stirnradgeometrie. Daher ist eine örtliche Steifigkeitsbetrachtung zur Abschätzung des Einflusses verschiedener Stirnseitengeometrien auf die Last- und Spannungsverteilung in Form eines prototypenähnlichen Methodenträgers durchzuführen.

In der Abbildung 4.1 wird der Einfluss des trapezförmigen Zahnstangenzahnes (Stirnseitenwinkel  $\theta = 54^\circ$ ) im Vergleich zu einer stirnradähnlichen Rechteckform ( $\theta = 90^\circ$ ) anhand des unterschiedlichen Zahnfußbiegespannungsverlaufes verdeutlicht. Hierfür wurde ein Zahnstangenzahn entlang der Kopfnutzlinie  $r_{\text{Na}2}$  bzw. entlang der Profilmitte ( $r_{\text{m}2}$ ) mit einer homogenen Linienlast beansprucht. Bei dem Lastangriff an der Kopfnutzlinie  $r_{\text{Na}2}$  steigt die Zahnfußbiegespannung  $\sigma_{\text{F}2}$  in Zahnbreitenmitte der trapezförmigen Flankenform aufgrund der verkürzten Berührlinie an. Außerdem führt der örtliche Steifigkeitsabfall in Zahnrandnähe zu einem verstärkten Spannungsabfall. Verschiebt sich der Lastangriff in Richtung des Zahnfußes, so nähern sich beide Spannungsverläufe, mit Ausnahme eines unterschiedlichen Randspannungsabfalls, an.

Außerdem weisen die Ritzelgeometrien der Lenkverzahnungen signifikante Unterschiede bezüglich Zähnezahzahl und Profilverchiebung im Vergleich zu den Prüfrädern in [KUNE99] auf. Kunert stützt die allgemeine Verformungseinflussfunktion, die mithilfe einer Parameterstudie aus einer Vielzahl von FEM-Analysen abgeleitet wurde, durch experimentelle Grundlagerversuche an Kunststoffzähnen: Die evolventischen Kunststoffverzahnungen beziehen sich auf einen Normalmodul  $m_n = 12 \text{ mm}$  als Maßstabsfaktor und auf einen Schrägungswinkelbereich zwischen  $0^\circ \leq \beta_{1,2} \leq 31^\circ$ .

Hierbei konnten die Verformungseinflusszahlen mithilfe von Dehnmessstreifen-Ketten (DMS) und dem Aufbringen einer Einzellast an beliebigen Stellen der Zahnflanke bestimmt werden und die analytische Verformungseinflussfunktion  $E_{\infty}$  für den unendlichen Zahn, die mechanische Spiegelungsmethode für den endlichen Zahn bzw. der Stirnseiteneinfluss verifiziert werden.



**Abbildung 4.1: Einfluss einer Zahnstangenform (D-Profil) auf die Zahnfußbiegespannung**

Der Einfluss des Biegehebelarms  $h_{Fe}$  kann laut [KUNE99] vernachlässigt werden, da bei einer Einzellast in Kopfnähe des einen Zahnpartners, der jeweilige Kontaktpartner in Höhe des Zahnfußnutzkreises belastet wird. In Summe bildet sich wieder die allgemeine Verformungseinflussfunktion nach [LINK10] aus. Jedoch werden besonders starke zahnhöhenabhängige Effekte auf die Verformungseinflussfunktion bei folgenden Stirnrädern erwartet:

- Kleinmodulige Verzahnungen (ca.  $m_n \leq 2,2 \text{ mm}$ )
- Geringe Zähnezahlen ( $z_1 = 6 \dots 8$ )
- Positive Profilverschiebungen zwischen  $0,3 \leq x_n \leq 0,8$ )

Zu der beschriebenen Verzahnungsgeometrie zählen auch die zu untersuchenden Stirnritzel.

#### 4.1.2 Berechnung der Last- und Spannungsverteilung am Ritzel-Zahnstangenpaar

Damit eine genaue Abbildung der Last- und Spannungsverteilung im Zahnstangengetriebe erfolgen kann, werden die einzelnen Berechnungsschritte für die Last- und Spannungs-

verteilung in Bezug auf die vorhandenen Einflüsse im Zahnstangengetriebe analysiert und gegebenenfalls modifiziert. Zunächst wird das standardisierte Vorgehen für Stirnradpaarungen gemäß des Kapitels 2.6.1 auf die Zahnstangengetriebe angewendet. Diese Methode wird in der Abbildung 4.2 mit blauen Pfeilen markiert. Die Berechnung der Lastverteilung stützt sich auf das Verfahren verallgemeinerter Einflusszahlen nach [LINK10] und [SENF77] und erfordert die Diskretisierung des Zahnes mithilfe eines eingespannten Plattenmodells. Ausgehend von den Zahngeometrien und den Berührverhältnissen der Zahnpaarung kann die Verformungseinflusszahl in Abhängigkeit der Zahn- und Radkörperverschiebung in Profillinienrichtung sowie der Verformungseinflussfunktion in Zahnbreitenrichtung berechnet werden. Die sogenannte allgemeine Verformungseinflussfunktion ( $E_{\infty}$ ) nach [LINK10] beinhaltet das Abklingverhalten einer Einzellast am unendlichen Zahn. Weiter wird der Zahnrandeinfluss am endlichen Zahn ( $E_{ij}$ ) mithilfe einer mechanischen Spiegelungsmethode in die Lastverteilungsrechnung projiziert. Eine genauere Erklärung wird im Kapitel 4.5 vorgenommen.

Bei der örtlichen Betrachtungsweise der Belastung und Beanspruchung müssen die Radkörperverschiebung bei der Zahnstange, die Verformungseinflussfunktionen beider Zahnpartner sowie die Stirnseitegeometrie am Zahnstangenzahn eingehender untersucht werden. Die Berechnung der Zahnverschiebung des Zahnstangenzahnes kann nahezu vollständig aus [WEBA53] übernommen werden. Einzig für den Radkörper besteht eine Einschränkung, da bei Weber und Banaschek eine Halbebene anstelle des D-Profiles zugrunde gelegt wird. Folglich kann sich die Radkörperverschiebung beim vorliegenden Zahnstangen-Rundprofil unterscheiden (siehe Abschnitt 4.2). Im Gegensatz dazu können die Zahn- und Radkörperverschiebungen am Stirnrad analog zu [WEBA53] bzw. zu [LINK10] ermittelt werden.

Die Verformungseinflussfunktionen  $E_{\infty}$  am unendlichen Zahn werden für die Ritzel- und Zahnstangenzähne im Kapitel 4.3.1 ermittelt und mit der allgemeinen Verformungseinflussfunktion nach [LINK10] verglichen. Weiterführend wird im Abschnitt 4.5 das Abklingverhalten in Zahnrandnähe des Zahnstangenzahnes analysiert, da sich dort das spätere Tragbild im Betriebszustand befindet. Somit wird am Zahnstangenzahn die Änderung der mechanischen Spiegelung in Abhängigkeit zum Stirnkantenwinkel  $\theta$  mit Hilfe von FEM-Berechnungen untersucht. Außerdem gilt es, den Steifigkeitseinfluss eines freien oder gebundenen Verzahnungsauslaufes auf den aktiven Verzahnungsbereich hinsichtlich der Verformungseinflussfunktion mithilfe vereinfachter FEM-Modelle zu bewerten. Eine analytische Beschreibung des Reflexionsgrades als Maß der Änderung des Spiegelungsanteils ist zu entwickeln und in die allgemeine Vorgehensweise nach [LINK10] zu integrieren.

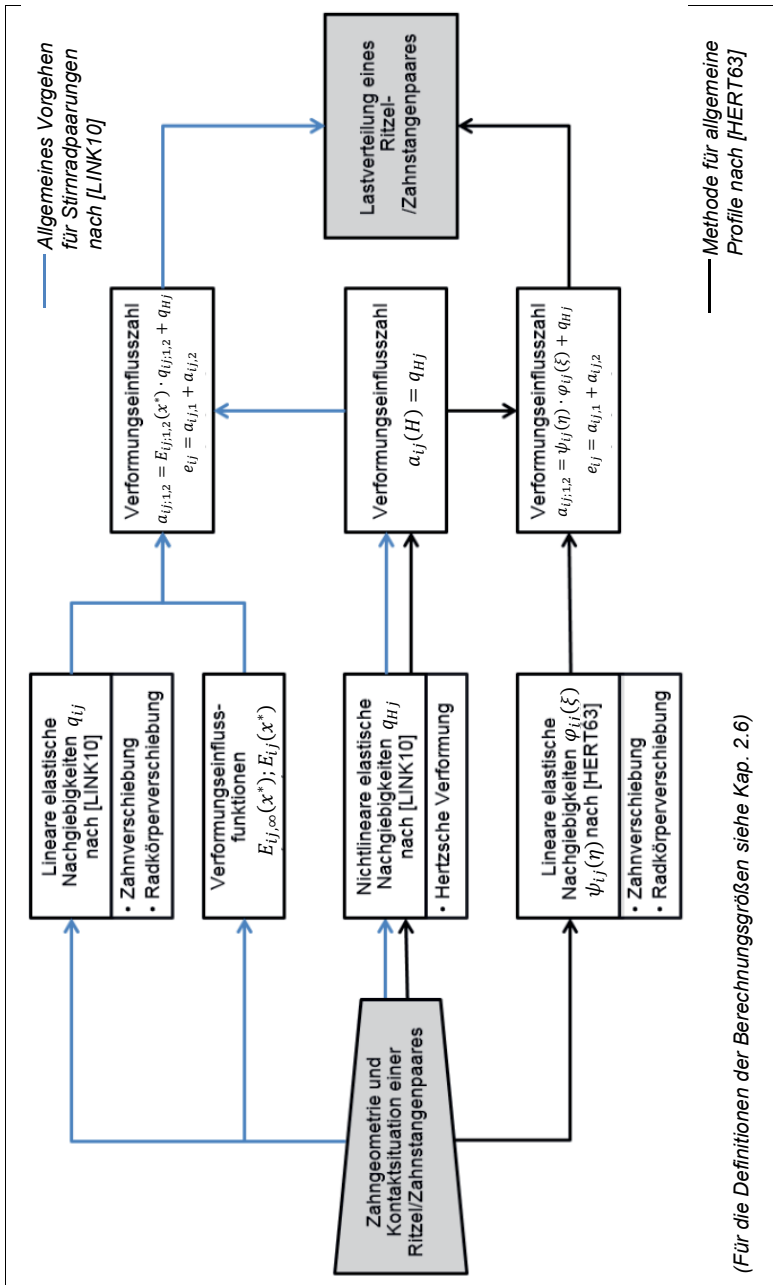


Abbildung 4.2: Gegenüberstellung der analysierten Methoden zur Ermittlung der Lastverteilung

Als alternatives Vorgehen soll in dieser Arbeit die Methode für allgemeine Plattenprofile nach [HERT63] auf Zahnstangengetriebe erweitert werden und hinsichtlich des Verbesserungspotentials bei der Berechnung der Lastverteilung bewertet werden. Die erforderlichen Schritte sind innerhalb der Abbildung 4.2 durch schwarze Pfeile markiert. Laut der Plattendefinition in [HERT63] gilt das trapezförmige Zahnprofil des Zahnstangenzahnes bereits als allgemeine Plattengeometrie. Jedoch betrachtet Heft in der Methode für allgemeine Plattenprofile (siehe Kapitel 2.6.2) nur den Biegemomenteneinfluss auf die Biegelinie, sodass das Verfahren für die vollständige Abbildung von Zahnprofilen um die Einflüsse aus Querkraft-, Druckkraft und Radkörperverschiebung zu erweitern ist. Die hierfür erforderlichen Modifizierungen werden im Kapitel 4.3.2 näher erläutert.

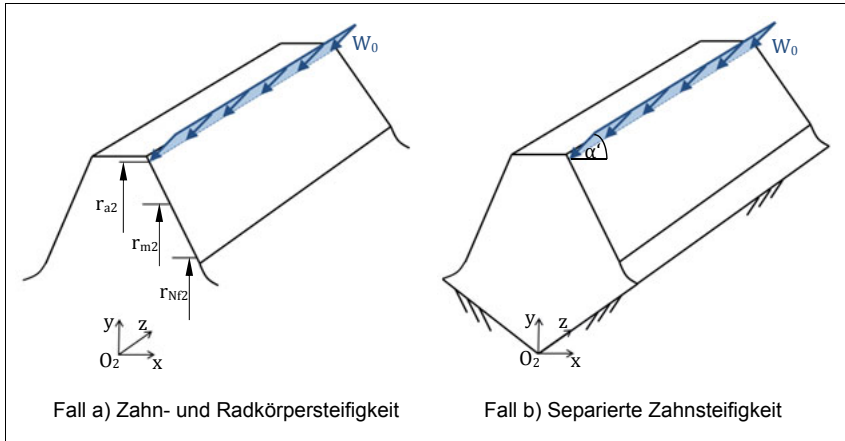
## 4.2 Einfluss des Zahnstangenprofils auf die Verschiebungen

Nach Weber und Banaschek beruhen die elastischen Verschiebungen des Zahnes und des Radkörpers auf der Gleichheit zwischen der Formänderungsarbeit und der Energie aus der Beanspruchung. Durch die Belastung eines Zahnes mit einer homogenen Linienlast  $W_0$  in Flankennormalrichtung lässt sich auf die Zahn- und Radkörperverschiebung schließen. Die Verifizierung der FEM-Zahnmodelle nach [REIC06] erfolgte anhand der analytischen Lösung nach [WEBA53]. Die verwendeten FEM-Zahnmodelle zur Separierung der Zahn- und Radkörpersteifigkeit in der FEM von [REIC06] werden in der Abbildung 4.3 am Beispiel eines Zahnstangenzahnes skizziert.

Um die Radkörpernachgiebigkeit nach [WEBA53] auf den vorhandenen Zahnstangenzahn des Lenkgetriebes zu übertragen, soll im folgenden Abschnitt die Radkörperverschiebung infolge einer Linienlast mit FEM-Ergebnissen verglichen werden. Die Ermittlung der FEM-Verschiebungsanteile erfolgt an Dreizahn-FEM-Modellen, die im Fall a) Zahn- und Radkörperelastizität und im Fall b) nur die Zahnnachgiebigkeit enthalten. Infolge der Linienlast  $W_0$  wirkt nach Gleichung 4-1 auf jeden Knoten  $k$  eine Einzellast  $F_{bn,k}$ .

$$W_0 = k \frac{F_{bn}}{b} \quad , \text{ wobei } k \text{ die Anzahl der Profillinien beschreibt.} \quad (4-1)$$

Um unterschiedliche Biegesituationen zu berücksichtigen, variiert die Kraftangriffsposition entlang der Linien  $r_{Na2}$ ,  $r_{m2}$  und  $r_{Nf2}$ .



**Abbildung 4.3: Analyse der Zahn- und Radkörperverschiebung nach [REIC06]**

Die Ermittlung der analytischen Zahnverschiebung ohne Einspannelastizität nach [WEBA53] wird in den absoluten Werten und im Biegelinienverlauf entlang des Zahnprofils vom FEM-Vorgehen gemäß [REIC06] bestätigt. Aber bei der Gegenüberstellung der analytischen Radkörperverschiebungen zur FEM wird eine zu geringe Parallelverschiebung  $R_{QN}$  sowie ein zu großer Radkörperbiegeanteil  $R_M$  festgestellt. Dagegen wird die Radkörperneigung  $R_{MQ}$  infolge Biegemoment und Querkraft nach [WEBA53] im Vergleich zum FEM-Zahnstangenmodell korrekt wiedergegeben. Als Ursache für die Unterschiede kann die Annahme des Radkörpers als Halbebene in [WEBA53] genannt werden, wodurch sich das Verformungsverhalten der Halbebene unter Last vom vorliegenden Zahnstangen-Rundprofil unterscheidet. Ein weiterer Einfluss obliegt der Geometrie der Zahnfußausrundung. Da sich das FEM-Modell an die praxisüblichen Ausführungen im Lenkgetriebe gemäß der Tabelle 3-3 orientiert, unterscheidet es sich weitgehend zu [WEBA53]. In der praktischen Anwendung ist eine vollrunde Fußkurve typisch, der Kurvenradius  $\rho_F$  entspricht damit der halben Lückenweite.

Daher ist die Berechnung der Radkörperparallelverschiebung  $R_{QN}^*$  und des Radkörperbiegeanteiles  $R_M^*$  zur korrekten Abbildung der Zahnstangenverzahnung zu modifizieren. Die Radkörperparallelverschiebung  $R_{QN}^*$  stützt sich nach der Gleichung 4–2 aus [WEBA53] auf den Eingriffswinkel im Kraftangriffspunkt  $\alpha'$  und den spezifischen Materialeigenschaften ( $E, \nu$ ). Der Radkörperbiegeanteil  $R_M^*$  nach Gleichung 4–3 ermittelt sich zusätzlich aus dem Biegehebelarm  $y_{ps}$  und der wirkenden Zahnfußdicke  $s_{FN}$ . Eine vollständige Darstellung der Geometriegrößen erfolgt in der Abbildung 4.7.

Eine Korrektur der erwähnten Radkörpersteifigkeitsanteile für die Zahnstangenverzahnung gelingt über die Änderung der konstanten Parameter  $QN^*$  und  $M^*$ :

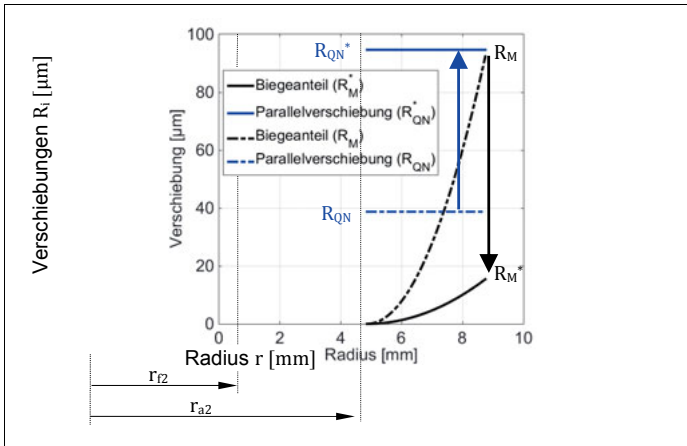
$$R_{QN}^* = \frac{W_0}{E} \cos^2(\alpha') \underbrace{\left(\frac{4,8}{\pi} (1 - \nu^2)\right)}_{C_{WB2}} \cdot QN^* + C_{WB1} \cdot C_{WB2} \cdot (0,294 \tan(\alpha')) \tag{4-2}$$

mit  $QN^* = 2,5$  anstelle 1,0

$$R_M^* = C_{WB1} \cdot \left(\frac{18}{\pi} (1 - \nu^2)\right) \cdot \frac{y_{ps}^2}{s_{fn}^2} \cdot M^* \tag{4-3}$$

mit  $M^* = 0,16\bar{6}$  anstelle 1,0

In der Abbildung 4.4 werden die durchgeführten Modifikationen der Radkörpersteifigkeit im Hinblick auf das vorliegende D-Profil näher quantifiziert. Während sich die Parallelverschiebung am Radkörper um den Faktor  $QN^* = 2,5$  erhöht, verringert sich der Verschiebungsanteil infolge des Biegemomentes an der Kopflinie um  $M^* = 0,16\bar{6}$ .

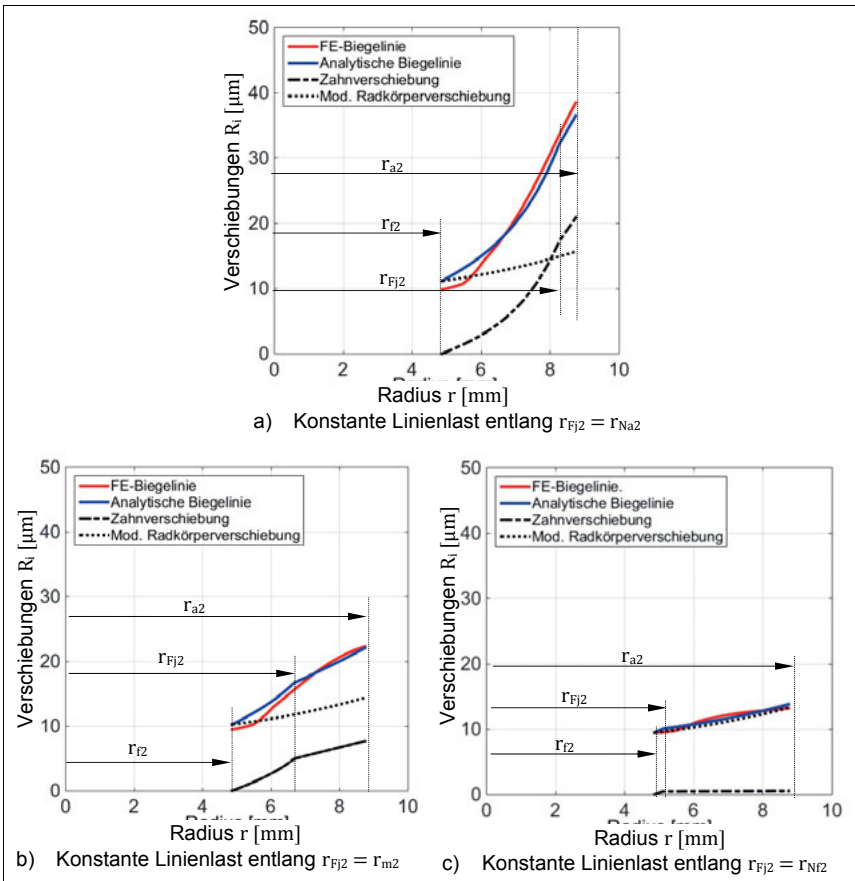


**Abbildung 4.4: Anpassung der Radkörperverschiebung für eine Zahnstange mit D-Profil**

In der Abbildung 4.5 werden die Anpassungen der Zahnverschiebungsberechnung mit der FEM-Biegelinie in Abhängigkeit von der Kraftangriffshöhe dargestellt. Hierbei wird am Beispiel der Verzahnungspaarung D die Kräfteinleitungsstelle ( $r_{F2}$ ) entlang des Profils variiert.



Die Zahnverformung entlang des Zahnprofils wird am Dreizahn-Modell (Abbildung 4.3a) unter einer konstanten Linienlast bei Änderung des Biegehebelarms berechnet. Die Zahnrandeinflüsse bleiben vernachlässigbar. Um die Abhängigkeit vom Biegehebelarm zu verdeutlichen, wird die analytische Biegelinie in die Verschiebungsanteile des Zahnes und Radkörpers aufgeteilt. In allen drei Fällen stimmt die analytische Biegelinie gut mit den FEM-Werten überein, sodass mithilfe der gezeigten Modifikationen eine Abbildung des Rundprofils im analytischen Berechnungsverfahren erreicht wird.



**Abbildung 4.5: Resultierende Zahn- und Radkörperverschiebung im Vergleich zur FEM**

### 4.3 Bestimmung der Verformungseinflussfunktionen für die Ritzel-Zahnstangenpaarung

Das vorliegende Kapitel befasst sich mit der Anwendbarkeit der allgemeinen Verformungseinflussfunktion nach [LINK10] für den Zahnstangen- und Ritzelzahn. Zur Bewertung werden FEM-Zahnmodelle mit Einzellasten beaufschlagt und deren Abklingverhalten in Zahnbreitenrichtung untersucht. Die zu variierenden Parameter sind die Kraftangriffshöhe und –position in Zahnbreitenrichtung. So ist es möglich, die resultierende Verformungseinflussfunktion unter lokalen Steifigkeitsveränderungen zu bewerten.

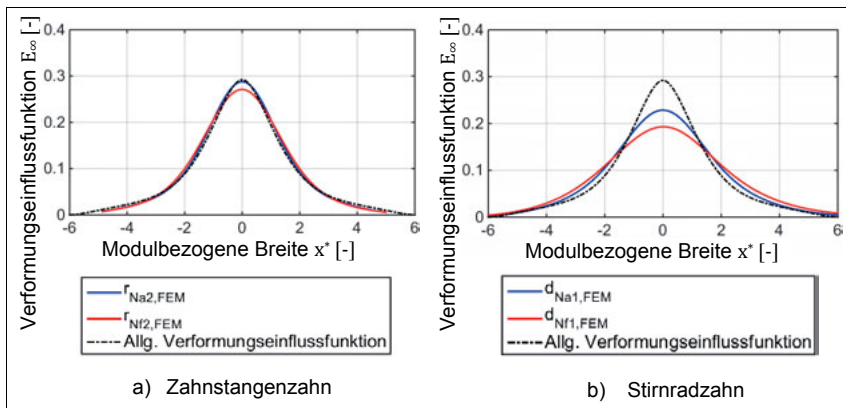
Als alternative Methode zur allgemeinen Verformungseinflussfunktion des unendlichen Zahnes aus [LINK10] soll im Kapitel 4.3.2 eine Berechnung der Verformungseinflussfunktion unter Anwendung der Rayleigh-Ritz-Methode nach [RITZ09] (siehe hierzu Kap. 0) untersucht werden. Heft entwickelte bereits in [HERT63] ein Vorgehen am Beispiel für verschiedene Plattenprofile, um die Verformungen eines eingespannten Profils unter einer Einzellast zu beschreiben.

#### 4.3.1 Verformungseinflussfunktion am unendlichen Ritzel-Zahnstangenpaar

Mithilfe der FEM wird das Verformungsabklingverhalten in Flankenlinienrichtung durch das Aufbringen einer Einzellast in Zahnbreitenmitte ( $x^* = 0$ ) berechnet. Die Lasteinleitungsstelle unterliegt im FEM-Zahnmodell jedoch dem Einfluss von Singularitätsfehlern, wodurch die Auswertung erschwert wird. Nach Andersson und Vedmar in [AVED03] und [VEDM81] können die unerwünschten FEM-Singularitäten im Kraftangriffspunkt mithilfe eines FEM-Zahnschalenmodells beseitigt werden. In diesem Zahnschalenmodell von [AVED03] sind sämtliche Verformungen bis auf die Verschiebungen infolge der Singularität durch die sehr hohe Steifigkeit unterdrückt. Die Differenz des Verformungsabklingens aus dem FEM-Zahnmodell und dem FEM-Zahnschalenmodell ergibt den gesuchten Verformungsverlauf entlang der Flankenlinie. Durch die Normierung des Zahnverformungsverlaufes entlang der Zahnbreite nach [KUNE99] auf einen Flächeninhalt  $A = 1$  lässt sich die Verformungseinflussfunktion im modulbezogenen Zahnbreitenbereich von  $-6 \leq x^* \leq 6$  berechnen.

In der Abbildung 4.6 werden die so ermittelten Verformungseinflussfunktionen bei einer wirkenden Einzellast in Zahnbreitenmitte an den Zähnen der Verzahnungspaarung C (siehe Anhang A) gezeigt. Zudem wurde diese Einzellast entlang der Profillinie variiert, sodass verschiedene Krafthebelarme wirken. Das Abklingverhalten vom Zahnstangenzahn (Fall a) ist

annähernd identisch zur allgemeinen Verformungseinflussfunktion nach [LINK10], somit wird der Einfluss des Biegehebelparmes vernachlässigbar. Außerdem ist die Zahnbreite im Verhältnis zum Modul grenzwertig, sodass selbst bei einem Lastangriff in Zahnbreitenmitte kein unendlicher Zahn laut Definition vorliegt. Dagegen kann am Stirnradzahn für beide Kraftangriffshöhen eine Stauchung der Verformungseinflussfunktion im Vergleich zum Funktionsverlauf nach [LINK10] identifiziert werden. Die geometrischen Besonderheiten (siehe Abschnitt 4.1.1) führen zu diesem leicht veränderten Steifigkeitsverhalten. Das heißt, in Kraftangriffsnähe ist ein geringerer Gradient zu erwarten, der bei Verschiebung der Einzellast in Richtung des Zahnfußnutztkreises weiter abnimmt. Da die berechneten Funktionen am Stirnradzahn gestaucht sind, muss von einer stärkeren Kopplung der benachbarten Abschnitte in Zahnbreitenrichtung ausgegangen werden. Die Verformungseinflussfunktion kann sich am Zahnstangenzahn unendlicher Zahnbreite über den Bereich von  $x^* = \pm 6$  ausdehnen.



**Abbildung 4.6: Verformungseinflussfunktionen am unendlichen Zahn (Paarung C)**

Auch bei der Einzellasteinleitung an den Zähnen der Verzahnungen B, D zeigen sich ähnliche Resultate an Zahnstangen- und Stirnradzahn. Eine vollständige Darstellung der Verformungseinflussfunktionen  $E_{\infty}$  in Abhängigkeit zu den verschiedenen Zahngeometrien und den Lasteinleitungen an den Radien  $r_{Na}$ ,  $r_m$  und  $r_{Nf}$  können dem Anhang B entnommen werden. Schließlich ist für die vorliegenden Ritzel-Zahnstangenpaarungen folgende Vorgehensweise empfehlenswert:

- Am Zahnstangenzahn beschreibt die allgemeine Verformungseinflussfunktion nach [LINK10] das Abklingverhalten hinreichend genau.

- Die untersuchten Stirnradgeometrien erfordern eine genaue analytische Bestimmung der Verformungseinflussfunktion, um eine sich anschließende Lastverteilungsberechnung nicht zu beeinträchtigen.

Darüber hinaus weist eine FEM-Untersuchung zum Verhalten der Verformungseinflussfunktion  $E_{\infty}$  in [SCHU12] nach, dass erst bei sehr großen Eingriffswinkeln  $\alpha_{n2} \geq 40^\circ$  am Zahnstangenzahn eine nennenswerte Abweichung zur allgemeinen Verformungseinflussfunktion nach [LINK10] besteht.

#### 4.3.2 Berechnung einer Verformungseinflussfunktion nach Heft

Die allgemeine Methode nach Heft beschreibt ein Näherungsverfahren auf Grundlage der elastischen Formänderungsenergie und dem Potential der eingeleiteten Punktlasten. Das Verfahren nach [HERT63] eignet sich für Platten mit variablem Querschnitt und ermittelt für eine Punktlast sämtliche Biegelinien entlang der Plattenhöhe,  $\varphi(\xi)$ , und -breite,  $\psi(\eta)$ . Somit ist eine Approximierung des Abklingverhaltens für die Ermittlung der Verformungseinflusszahlen gegeben. Die Bedingungen einer eingespannten Platte nach Kapitel 2.6.2 müssen weiterhin erfüllt bleiben. Zur Abbildung eines Zahnes gilt das Plattenmodell nach Heft nur bedingt, da die Biegelinie zusätzlich zum Biegemomenteneinfluss noch Verschiebungsanteile aus Querkraft-, Druckkraft- und Radkörperverschiebung enthält. Das bedeutet, dass die zu ermittelnden Biegelinien aus den Anteilen des Biegemomentes und der Querkraft bestehen sollten. Weiterhin erfordert das Näherungsverfahren nach Rayleigh-Ritz aus [RITZ09] eine Folge bestmöglicher Näherungen für die Biegelinie. Daher trägt insbesondere die Auswahl der ersten Grundgleichung  $\varphi_1$  eine entscheidende Bedeutung, da sie maßgeblich die Genauigkeit des Verfahrens einstellt. Demzufolge eignet sich die analytische Biegelinie nach [WEBA53] als Grundgleichung  $\varphi_1$ . Dafür gilt es, die allgemeine Methode nach Heft ausgehend von der Plattentheorie auf die Besonderheiten der Zahngeometrie anzupassen:

- Die Lösung des ebenen Problems mit Hilfe des ebenen Verzerrungszustandes ( $\varepsilon_z = 0$ ) anstelle des ebenen Spannungszustandes ( $\sigma_z = 0$ )
- und die Hinterlegung eines hinreichend genauen Ansatz einer analytischen Biegelinie des Zahnes.

Der Einfluss der berechneten Verformungseinflussfunktion aus [FUCH13] auf die Lastverteilung wird im folgenden Kapitel weiterführend analysiert.

### 4.3.2.1 Formänderungsenergiehypothese des ebenen Dehnungszustandes

Dem Ansatz von Weber / Banaschek folgend, gilt für den Zahnkontakt der ebene Verzerungszustand (EVZ) anstelle des ebenen Spannungszustandes (ESZ). Diese Konvention wird im folgenden Abschnitt auf die elastische Formänderungsenergie  $U$  nach [HERT63] angewendet:

$$U = \iint a \, d\xi \, d\eta, \quad \text{wobei } \xi \text{ und } \eta \text{ als dimensionslose Koordinaten und } a \text{ als Flächendichte definiert sind.} \quad (4-4)$$

Nach Szabó in [SZAB01] lassen sich hinreichend dünne Körper zu ebenen Problemstellungen vereinfachen. Wird ein ESZ in der  $x$ ,  $y$ -Ebene vorausgesetzt, dann können die Normal- und Schubspannungen in der  $z$ -Ebene unter Vernachlässigung der Volumenkräfte folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (4-5)$$

Außerdem bestimmen sich die Dehnungen  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$  sowie die Schubspannung  $\tau_{xy}$  am Bernoulli Balken nach [SZAB01] unter der Annahme des ESZ sowie der Verschiebung  $w=w(x, y)$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4-6)$$

Weiterhin weist Szabó auf die nur näherungsweise erfüllbaren Randbedingungen beim ESZ hin. Der EVZ charakterisiert sich nach [SZAB01] durch die verhinderte Dehnung in  $z$ -Richtung sowie einer auftretenden Spannung  $\sigma_z$ :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad , \text{ bzw. } \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (4-7)$$

Nun definieren sich die Kenngrößen Dehnung  $\varepsilon_{x,y}$  und Gleitung  $\gamma_{xy}$  des ebenen Dehnungszustandes aus der Querkontraktionszahl  $\nu$ , dem Elastizitätsmodul  $E$  und den Spannungen  $\sigma$  in  $x, y$ -Richtung sowie dem Schubmodul  $G$  und der Schubspannung  $\tau_{xy}$  laut Weber und Banaschek in [WEBA53] nach Gleichung 4–8.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (4-8)$$

Weiterhin ergibt sich die potentielle Energie je Raumeinheit  $a$  in [WEBA53] nach Gl. 4–9. Durch das Einsetzen von Gl. 4–7 in Gl. 4–9 folgt schließlich die Gl. 4–10:

$$a = \frac{1}{2} [\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}] \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned} a &= Gz^2 \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{2\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4-10)$$

Zur Bildung der Gl. 4–11 wird abschließend die Gl. 4–10 in die Gl. 4–4 eingesetzt, um die elastische Formänderungsenergie  $U$  nach Heft zu bestimmen. Laut Kapitel 2.6.2 wird die Verschiebung  $w(x, y) = w(\xi, \eta)$  in den Grenzen  $\xi = 0 \rightarrow 1$  beziehungsweise  $\eta = -\infty \rightarrow +\infty$  integriert und  $w(\xi, \eta)$  durch den Produktansatz  $C_i w_i(\xi, \eta) \rightarrow C_i \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta)$  ersetzt. Mit dieser Annäherung ist die Höhenkoordinate ( $\xi$ ) nahezu unabhängig von der Breitenkoordinate ( $\eta$ ). Demzufolge können die Biegelinien entlang der Zahnhöhe und Zahnbreite separiert werden. Die profilabhängige Steifigkeit  $D = D(\xi)$  komplettiert die Gleichung 4–11:

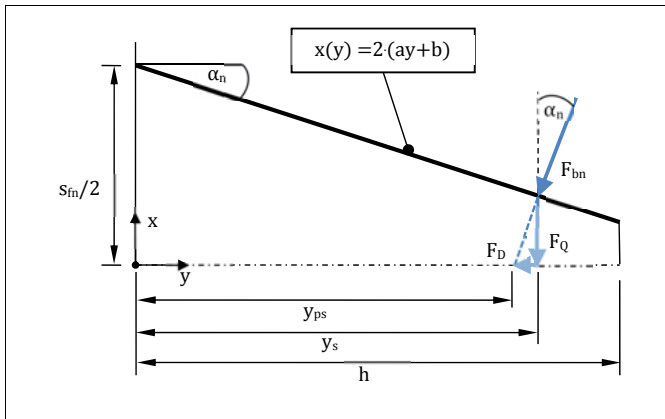
$$\begin{aligned}
 U = \iint \frac{1}{2} D \left[ \frac{(1-\nu)^3}{1-2\nu} (\varphi''(\xi)\psi(\eta))^2 + \frac{(1-\nu)^3}{1-2\nu} (\varphi(\xi)\psi''(\eta))^2 \right. \\
 \left. + \frac{2\nu(1-\nu)}{1-2\nu} (\varphi''(\xi)\psi(\eta)\varphi(\xi)\psi''(\eta)) \right. \\
 \left. + 2(1-\nu)(\varphi'(\xi)\psi'(\eta))^2 \right] d\xi d\eta \quad (4-11)
 \end{aligned}$$

Außerdem ist zur Berechnung der relativen Verformung K nach Kapitel 2.6.2 eine Anpassung der zu lösenden Integrale  $\kappa_{ii}$ ,  $\omega_{ii}$  und  $\nu_{ii}$  gemäß Gl. 4–12 notwendig, die sich wiederum auf die Heiß-Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  auswirken.

$$\begin{aligned}
 \kappa_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) \frac{(1-\nu)^3}{1-2\nu} \varphi_i''^2(\xi) d\xi \\
 \omega_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) \frac{(1-\nu)^3}{1-2\nu} \varphi_i^2(\xi) d\xi \\
 \nu_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) \left[ (1-\nu)\varphi_i'^2(\xi) - \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \varphi_i(\xi)\varphi_i''(\xi) \right] d\xi \quad (4-12)
 \end{aligned}$$

#### 4.3.2.2 Neue Grundgleichungen für den allgemeinen Ansatz nach Heiß

Zunächst wird eine Konvertierung der Biegelinien  $w$  in die erste Basis der Biegelinienschar nach [HERT63] benötigt. Im folgenden Abschnitt werden die erforderlichen Schritte anhand eines Beispiels näher erläutert. Die geometrischen Zusammenhänge am Zahnprofil zur Beschreibung einer Biegelinie werden in der Abbildung 4.7 dargestellt. Die Verformung entlang des Zahnprofils setzt sich aus den Biegemoment  $M_b$ , der Schubkraft  $F_q$  und Druckkraft  $F_d$  zusammen. Darüber hinaus werden die Zahn- und Radkörpersteifigkeit separiert voneinander untersucht (siehe Abschnitt 4.2). Für das bessere Verständnis wird sich anfangs auf das trapezförmige Zahnprofil sowie dessen Biegelinie infolge eines Biegemomentes  $M_b$  bei starrem Radkörper beschränkt.



**Abbildung 4.7: Zahngeometrie und Kräftekonvention gemäß [WEBA53]**

Basierend auf der allgemeingültigen Biegelinie für rechteckförmige Balkenquerschnitte aus [SZAB01] kann die Biegelinie für trapezförmige Querschnitte gemäß [WEBA53] mittels Gleichung 4–13 formuliert werden. Der trapezförmige Querschnitt des Zahnes wird nach Abbildung 4.7 über die Funktion  $x(y)$  realisiert.

$$w_b'' = -\frac{M_b(y)(1-v^2)}{I(y)E} = \frac{3(1-v^2)F_q}{2E} \frac{y_{ps}-y}{(ay+b)^3} \quad (4-13)$$

$$\text{mit } M_b(y) = -F_q(y_{ps}-y) \quad \text{und} \quad I(y) = \frac{b \cdot x(y)^3}{12}$$

Durch die zweimalige Integration in den Grenzen von 0 bis  $y_{ps}$  erhält man in der Gleichung 4–14 die Biegelinie  $w_b$  infolge des Biegemomentes  $M_b$  am trapezförmigen Zahnprofil:

$$w_b = \frac{3(1-v^2)F_q}{2E} \left[ \frac{\ln(ay+b)}{a^3} + \frac{ay_{ps}+b}{2a^3(ax+b)} - \frac{(b-ay_{ps})y}{2a^2b^2} - C_2 \right] \quad (4-14)$$

$$\text{mit } C_2 = \frac{ay_{ps}+b+2b \ln(b)}{2a^3b}$$



In dieser Schreibweise lassen sich auch die Biegelinien  $w_{q,d}$  infolge der Schub- und Druckbeanspruchung am trapezförmigen Profil in den Gleichungen 4–15 und 4–16, basierend auf dem Biegeverhalten nach [WEBA53], formulieren. Zur Vereinfachung wurde für das Verformungsabklingen in Zahnbreitenrichtung unter Quer- und Druckbelastung dasselbe Verhalten wie bei der reinen Biegung einer eingespannten Platte nach Heft übernommen. Die Größe  $\chi$  beschreibt das charakteristische Querschnittsprofil des Zahnes.

$$\begin{aligned} w_q &= \int \gamma_{xz} = 2\chi(1-v^2)(1+v) \frac{F_q}{E} \int \frac{1}{2(ay+b)} dy \\ &= \chi(1-v^2)(1+v) \frac{F_q}{E} \left[ \frac{\ln(ay+b)}{2a} - \frac{\ln(b)}{2a} \right] \end{aligned} \quad (4-15)$$

$$\begin{aligned} w_d &= \int \varepsilon_z = (1-v^2) \frac{F_d}{E} \int \frac{1}{2(ay+b)} dy \\ &= (1-v^2) \tan \alpha \frac{F_d}{E} \left[ \frac{\ln(ay+b)}{2a} - \frac{\ln(b)}{2a} \right] \end{aligned} \quad (4-16)$$

Wie bereits im Abschnitt 2.6.2 erwähnt, wird im Ansatz nach [HERT63] das Rayleigh-Ritz-Verfahren verwendet, das auf der Basis einer Biegelinienschar  $\varphi_i(\xi)$  die Verschiebungen infolge einer Einzellast in Profil- ( $\xi$ ) und Breitenrichtung ( $\eta$ ) berechnet. Insbesondere die Biegelinie der ersten Basis  $\varphi_1(\xi)$  beeinflusst das Endergebnis maßgeblich, da die Biegelinien der höheren Basen  $\varphi_n(\xi)$  nur noch eine Verfeinerung der Lösung bewirken. Um die verschiedenen Ansätze verknüpfen zu können, werden nun die Berechnungsgrößen aus [WEBA53] in die Konventionen nach [HERT63] überführt. Die Berechnung nach Heft basiert auf den dimensionslosen Koordinaten  $\xi, \eta$  sowie auf dem Verhältnis  $k$  anstelle des Eingriffswinkels  $\alpha$ . Somit gelten folgende Notationen der Gl. 4–17:

$$\begin{aligned} y &= \xi \cdot a & h_0 &= a\xi a^* + b \\ y_{ps} &= a & h_1 &= a(\xi a^*)^2 + b\xi a^* + c \\ \tan(\alpha) &= \frac{kS_{Fn}}{2a} & h_2 &= 2a\xi a^* + b \\ & & \Delta &= 4ac + b^2 \end{aligned} \quad (4-17)$$

Hierbei beschreiben die Koeffizienten  $a, b$  die Zahnprofilform, der Koeffizient  $a^*$  bezeichnet nach Heft die wirkende Plattendicke. Ebenso gilt es die Randbedingungen an der

Einspannung ( $\xi = 0$ ) und am freien Ende ( $\xi = 1$ ) nach Gleichung 4–18 zu erfüllen. Hierbei ist das freie Ende gleichzusetzen mit der Lasteinleitungsstelle.

$$\begin{aligned} I. \quad \varphi_i(\xi = 0) &= 0 \\ II. \quad \varphi_i'(\xi = 0) &= 0 \\ III. \quad \varphi_i(\xi = 1) &= 1 \end{aligned} \tag{4-18}$$

Durch Einsetzen der Notationen (Gl. 4–17) in Gleichung 4–14 und unter Beachtung der Randbedingungen (Gl. 4–18) erhält man die erste Biegelinienbasis  $\varphi_{1b}(\xi)$  infolge der Biegemomentbelastung nach Gl. 4–19. Wobei die dritte Randbedingung erst erfüllt wird, wenn  $k_1=1/\varphi_{1b}$  gilt.

$$\begin{aligned} \varphi_{1b}(\xi) = \frac{3(1-\nu^2)F_q}{2} \frac{1}{E} \left[ \ln(h_0) + \frac{a \cdot a^* + b}{2(h_0)} - \frac{(b - a \cdot a^*)a\xi \cdot a^*}{2b^2} \right. \\ \left. - \frac{a \cdot a^* + b + 2b \ln(b)}{2b} \right] \end{aligned} \tag{4-19}$$

Schließlich ergibt sich die neue Grundgleichung der ersten Basis  $\varphi_1(\xi)$  aus den Biegemoment- ( $\varphi_b$ ), Querkraft- ( $\varphi_q$ ) und Druckkraftanteilen ( $\varphi_d$ ) für das trapezförmige Zahnprofil nach Gleichung 4–20. Hierfür werden die Gleichungen 4–15 und 4–16 mithilfe der Notationen aus der Gleichung 4–17 umgeformt.

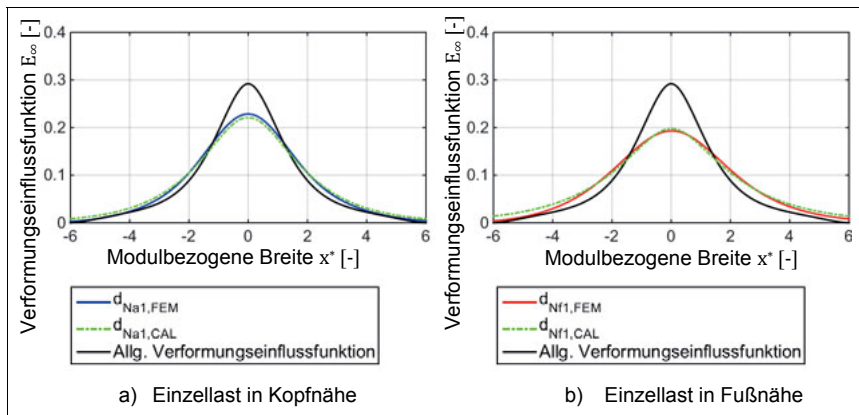
$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= [\varphi_{1b} + \varphi_{1q} + \varphi_{1d}] \\ \varphi_{1, \text{Trapez}}(\xi) &= \frac{3(1-\nu^2)F_q}{2} \frac{1}{E} \left[ \left( \ln(h_0) + \frac{a \cdot a^* + b}{2(h_0)} - \frac{(b - a \cdot a^*)a\xi \cdot a^*}{2b^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a \cdot a^* + b + 2b \ln(b)}{2b} \right) + \ln(h_0) + \ln(h_0) \right] \end{aligned} \tag{4-20}$$

Analog dazu lässt sich die Grundgleichung der ersten Basis  $\varphi_1(\xi)$  für evolventische Zahnprofile ermitteln. Eine Auflistung zu den Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  kann dem Anhang C entnommen werden. Eine Zusammenfassung über die Grundgleichungen  $\varphi_{1,i}(\xi)$  für trapezförmige und evolventische Zahnprofile ist dem Anhang D beigelegt. Im Anhang E werden die Grundgleichungen der höheren Basen  $\varphi_n(\xi)$  aufgelistet. Nun kann die elastische

Formänderungsenergie  $U$  als Teil der Formänderungsarbeit  $\Pi$  gemäß der Gleichung 4–11 berechnet werden.

#### 4.3.2.3 Ergebnisse des analytischen Ansatzes nach Heřt

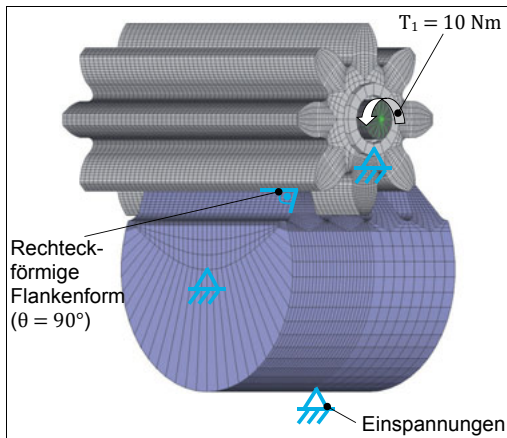
Die analytische Berechnung der Verformungseinflussfunktion kann mit dem allgemeinen Ansatz nach Heřt unter Beachtung der vorgestellten Anpassungen im Kapitel 4.3.2 ausgeführt werden. Das Abklingverhalten infolge einer Einzellast aus der FEM und dem analytischen Vorgehen werden in der Abbildung 4.8 mit der allgemeinen Verformungseinflussfunktion nach [LINK10] gegenübergestellt. Die eingeschlossene Fläche wird auf  $A = 1$  normiert, wobei die Funktionen der FEM und nach [HERT63] über die modulbezogene Breite von  $x^* = 6$  aus [KUNE99] wirken. An den untersuchten Lasteinleitungsstellen ( $d_{Na1}$ ,  $d_{Nf1}$ ) wird eine gute Übereinstimmung zwischen Heřt (Index: CAL) und der FEM ersichtlich. Der Verlauf der allgemeinen Verformungseinflussfunktion  $E_{\infty}$  liegt im Bereich ( $0 \leq |x^*| \leq 1,5$ ) oberhalb der ermittelten Funktionen bzw. im Bereich ( $1,5 \leq |x^*| \leq 4$ ) unterhalb. Die vollständigen Ergebnisse zu den Zahngeometrien der Paarungen B bis D für die Kraftangriffshöhen an  $d_{Na1}$ ,  $d_{m1}$  und  $d_{Nf1}$  sind dem Anhang F beigelegt.



**Abbildung 4.8: Gegenüberstellung der Verformungseinflussfunktionen am unendlichen Stirnradzahn (Paarung C)**

#### 4.4 Last- und Spannungsverteilung am geradverzahnten Ritzel-Zahnstangenpaar

Im nächsten Schritt können die so ermittelten Verformungseinflussfunktionen unter Zuhilfenahme der Verformungseinflusszahlenmethode zur Berechnung der Lastverteilung nach [LINK10], [SENF77] und [KUNE99] verwendet werden. Zur Verifikation des analytisch-numerischen Berechnungsansatzes dient ein geradverzahntes FEM-Kontaktmodell, wobei die Zahnstangenzähne im Kontaktbereich einen stirnradtypischen Stirnseitenwinkel von  $\theta = 90^\circ$  aufweisen (siehe Abbildung 4.9). Des Weiteren wird das Antriebsmoment von  $T_1 = 10 \text{ Nm}$  im Zahnkontaktmodell über eine verwindungssteife Ritzelwelle beidseitig eingeleitet, um die Torsionseffekte der Zahn- und Wellenverformung auf die Last- und Spannungsverteilung zu minimieren. Durch die gezielte Flankenlinienendrücknahme am Zahnstangenzahn wird eine Reduzierung der numerischen Steifigkeitseffekte des freien Zahnendes auf das Kontakttragbild in der FEM erzielt. Die Endrücknahme wird festgelegt auf  $C_{\beta I} = C_{\beta II} = 10 \text{ }\mu\text{m}$  entlang einer Zahnbreite von  $L_{CI} = L_{CII} = 1 \text{ mm}$ . Zur Einhaltung des EVZ analog Weber und Banaschek in [WEBA53] werden die Stirnseiten in Zahnbreitenrichtung als ideal starr angenommen. Um die Lastverteilung der FEM entlang der Berührlinie darzustellen, werden die Kontaktkräfte entlang einer Profillinie auf die Stelle der Maximalkraft aufsummiert. Die Spannungsverteilung ergibt sich im Zahnfußbereich entlang derjenigen Flankenlinie, wo sich die Stelle der maximalen Tangentialspannung befindet.

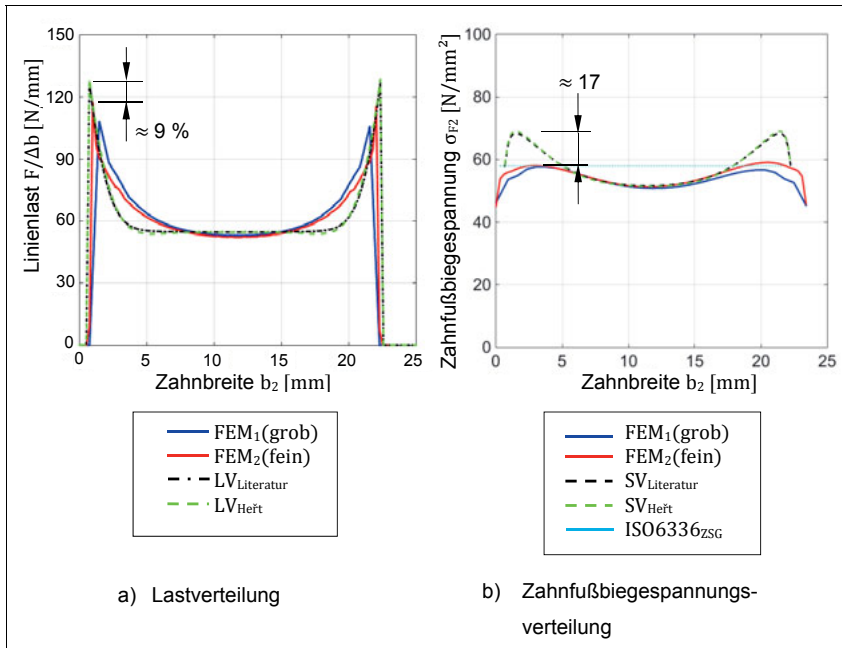


**Abbildung 4.9: FEM-Analyse zur Last- und Spannungsverteilung am Rechteckprofil an geradverzahnter Verzahnungspaarung D**

Die Ergebnisse zu den Last- und Spannungsverteilungen der verschiedenen Methoden werden in der Abbildung 4.10 dargestellt. Die Last- (LV) und Spannungsverteilungen (SV) der FEM-Modelle können für die zwei untersuchten Netzqualitäten, wobei FEM<sub>1</sub> eine geringere bzw. FEM<sub>2</sub> eine höhere Elementdichte markiert, als konsistent betrachtet werden. Die Lasterhöhungen an den Berührlinienenden werden durch die ungleichbreiten Zahnpartner hervorgerufen. Der prototypenähnliche Methodenträger zeigt unabhängig vom Berechnungsansatz ([LINK10], [HERT63]) in der Kontaktlinienmitte eine nahezu horizontale Belastung der einzelnen Abschnitte. Die Lasthöhen in der Zahnbreitenmitte sind vergleichbar mit dem FEM-Ergebnis. Auch die Lastspitzen in Zahnrandnähe werden mit einer Abweichung von ca. 9 % hinreichend genau wiedergegeben. Bei der Verteilung der Zahnfußbiegespannungen kann ein ähnliches Verhalten charakterisiert werden. Die Spannungsverteilungen im prototypenähnlichen Methodenträger weisen in Zahnbreitenmitte einen nahezu identischen Spannungsverlauf für beide Berechnungsmethoden auf. Erst in Richtung des Zahnrandes werden ca. 17 % höhere Spannungswerte im Vergleich zur FEM berechnet. Die größeren Abweichungen in Zahnrandnähe können auf die Flankenlinienendrücknahme im FEM-Modell zurückgeführt werden.

Die modifizierte Tragfähigkeitsberechnung für Zahnstangengetriebe aus Abschnitt 3 (ISO 6336<sub>ZSG</sub>) zeigt ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit den FEM-Ergebnissen. Die hohe Deckungsgleichheit mit den Beanspruchungsextrema der FEM ist zufällig, da der Randspannungsanstieg und die Flankenlinienendrücknahme in der normativen Tragfähigkeitsberechnung unberücksichtigt bleiben.

Die Auswirkungen der Verformungseinflussfunktion nach dem Heft-Vorgehen im Vergleich zur allgemeinen Verformungseinflussfunktion aus [LINK10] auf die Berechnung der Last- und Spannungsverteilung sind in diesem Beispiel vernachlässigbar.



**Abbildung 4.10: Gegenüberstellung der Last- (LV) und Spannungsverteilung (SV) aus FEM und analytisch-numerischer Berechnung am Rechteckprofil**

#### 4.5 Einfluss von örtlichen Steifigkeitsunterschieden auf den Reflexionsgrad

Bei der Zahnstangenverzahnung ergibt sich als Folge des Zahnstangen-Rundprofils ein Abfall der Stirnseite (siehe Abbildung 4.1). Damit erhöht sich die lokale Nachgiebigkeit in Zahnrandnähe wegen der fehlenden Stützwirkung des benachbarten Materials. Die mechanische Spiegelungs- bzw. Reflexionsmethode nach Hohrein und Senf in [SENF77] ist ein Werkzeug der Last- und Spannungsverteilungsrechnung, um den Einfluss des Zahnrandes auf das Abklingverhalten der Zahnverschiebung in Zahnbreitenrichtung zu berücksichtigen. Hierbei fungiert der Zahnrand für die Zahnverschiebung wie eine senkrechte Spiegelungs- oder Reflexionsebene ähnlich zu den bekannten Spiegelungseffekten der Optik. In [KUNE99] wurde das Vorgehen um die Effekte der Schrägverzahnung erweitert. Das heißt, dass die bei einer Schrägverzahnung auftretenden spitzen und stumpfen Zahnstirnseiten über den Faktor  $f_{\text{Rand}2}$  in Form einer Randeinflussfunktion  $f_L$  und einer Vergrößerungsfunktion  $f_G$  in der Verformungseinflussfunktion  $E$  am Zahn endlicher Zahnbreite gemäß Gl. 4–21 beachtet werden.

Der Faktoren  $f_G$  und  $f_L$  sind abhängig von der Entfernung des belasteten ( $x_{rel,i}^*$ ) und betrachteten Abschnittes ( $x_{rel,j}^*$ ) zum Zahnrand, dem Schrägungswinkel  $\beta_2$  und der Stirnseiten-geometrie in Form einer spitzen und stumpfen Zahnstirnseite.

$$f_{Rand2}(\theta = 90^\circ) = 1 + f_G f_L \quad (4-21)$$

Weiterhin führt Kunert den Faktor  $f_{Rand1}$  ein, der die generellen Einflüsse einer Randbelastung auf den Spiegelungsanteil  $\Delta E_\infty$  beschreibt und somit als Funktion des zu ermittelnden Reflexionsgrades verstanden werden kann. Solange eine rechtwinklige Stirnflankenseite als Spiegelungsebene vorliegt, kann der Faktor  $f_{Rand1} = 1$  nach Gl. 4–22 angenommen werden. Zudem definiert [KUNE99] den Randeinflussbereich der mechanischen Reflexion beziehungsweise der Faktoren  $f_{Rand1,2}$  zwischen  $0 \leq x_{rel,j}^* \leq 2$ , wobei sich  $x_{rel,j}^* = 0$  am freien Zahnende befindet.

$$f_{Rand1}(\theta = 90^\circ) = 1 \quad (4-22)$$

Für die Ermittlung der Auswirkungen einer lokalen Steifigkeitsänderung auf den Spiegelungsanteil der Verformungseinflussfunktion wird die Abhängigkeit der Faktoren  $f_{Rand1}$  und  $f_{Rand2}$  durch verschiedene trapezförmige Stirnseitengeometrien (Stirnseitenwinkel  $\theta$ ) bzw. durch verschiedene Verzahnungsausläufe (Auslaufwinkel  $\gamma$ ) gemäß der Abbildung 4.11 untersucht. Diese Geometrien sollen die Charakteristika der unterschiedlichen örtlichen Steifigkeiten in Zahnrandnähe nachbilden.

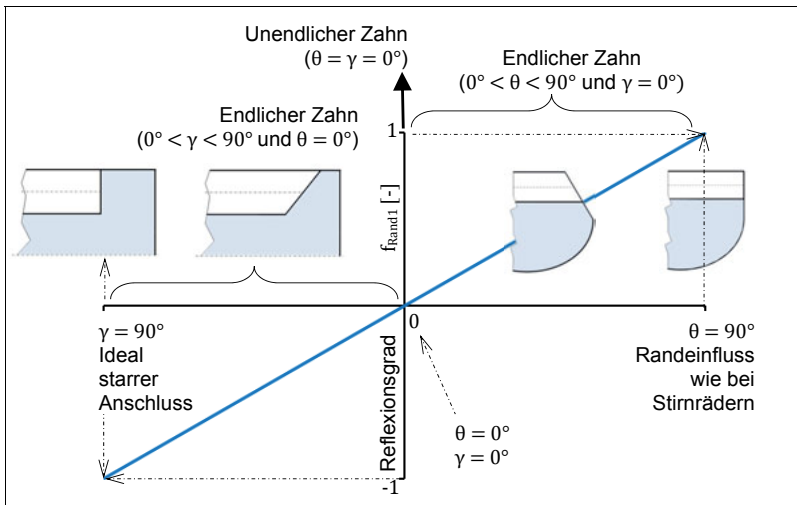
Gegenstand des vorliegenden Kapitels ist die weiterführende Untersuchung des Reflexionsgrades sowie das Ableiten analytischer Näherungen zur Abbildung einer lokalen Steifigkeitsveränderung. Dadurch soll der Berechnungsgang der Last- und Spannungsverteilung in Zahnrandnähe verbessert werden.

#### 4.5.1 Einführung des Reflexionsgrades

Bei dem trapezförmigen Flankenprofil der Zahnstange (siehe Abbildung 4.1) kann nicht mehr von einer Orthogonalität der Reflexionsebene ausgegangen werden. Der Spiegelungsanteil

$\Delta E$  wird sich in Abhängigkeit vom Stirnseitenwinkel  $\theta$  ändern. Das Maß der Spiegelung am freien Zahnende bei  $\theta = 90^\circ$  kann als vollständige Reflexion verstanden werden.

Eine Änderung des Stirnseitenwinkels  $\theta$  verursacht eine veränderte Randsteifigkeit, die wiederum eine Veränderung des Reflexionsmaßes nach sich zieht. Einen grundlegenden Überblick über das Reflexionsverhalten bei unterschiedlichen Steifigkeitssituationen gibt die Abbildung 4.11. Eine vollständige, positive Reflexion ( $f_{\text{Rand}1} = 1$ ) liegt bei einer stirnradtypischen Stirnflankenseite mit  $\theta = 90^\circ$  vor. Dagegen entsteht am unendlichen Zahn keine Reflexion, somit würde sich in diesem Fall ein charakteristischer Reflexionsgrad von  $f_{\text{Rand}1} = 0$  einstellen. Beide Fälle werden bereits in der Literatur, wie bspw. [LINK10] und [KUNE99], beschrieben. Eine schräge Stirnseitenneigung reflektiert nicht mehr den vollen Betrag von  $\Delta E$ , sodass sich in diesem Fall ein Reflexionswert zwischen  $0 \leq f_{\text{Rand}1} \leq 1$  ergibt. Sehr kleine Stirnseitenwinkel  $\theta \ll 10^\circ$  besitzen in heutigen Anwendungen nur eine untergeordnete Bedeutung. Darüber hinaus kann sich bei einer Verzahnung in Nähe des freien oder gebundenen Auslaufes ebenfalls ein lokaler Steifigkeitssprung ausbilden, wobei entgegen des freien Stirnseitenendes eine geringere Nachgiebigkeit zu erwarten ist. Folglich wird sich im Bereich des Verzahnungsauslaufes ein negativer Reflexionsgrad herausbilden.



**Abbildung 4.11: Modellvorstellung zum Reflexionsgrad für verschiedene Zahnrandsteifigkeiten bei endlichen Zähnen**

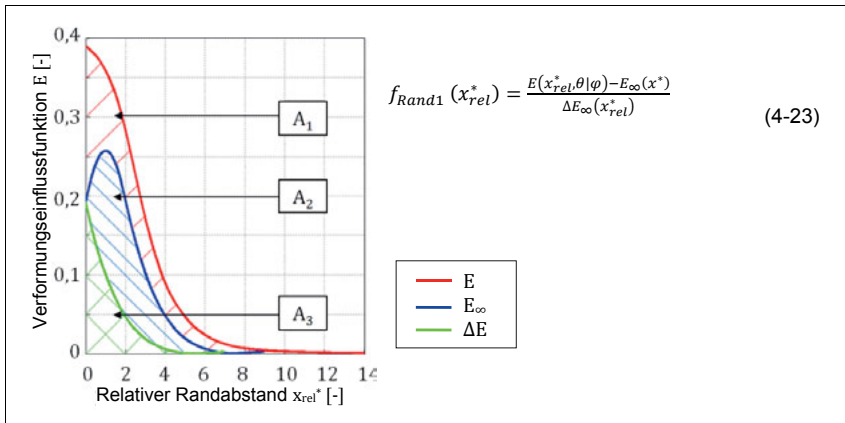


Eine graphische Erklärung zur Reflexionsgradermittlung wird anhand der Abbildung 4.12 aufgezeigt. Für den Fall einer Einzellasteinleitung in Zahnrandnähe bei  $x_{rel}^* = 1$  kann die Verformungseinflussfunktion  $E$  einschließlich des Spiegelungsanteils  $\Delta E$  aus der FEM ebenfalls mit Hilfe der Flächennormierung bestimmt werden.

Das analytische Vorgehen stützt sich auf die Verformungseinflussfunktion des unendlichen Zahnes  $E_{\infty}$  (als Fläche  $A_2$  gekennzeichnet) und deren Reflexionsanteil  $\Delta E$  (Fläche  $A_3$ ), der sich in Abhängigkeit von dem belasteten und betrachteten Zahnabschnitt sowie deren Randabstände zur Stirnseite auch von der örtlichen Steifigkeit ändert.

Aus diesen beiden Anteilen kann im analytischen Vorgehen ebenfalls auf eine Verformungseinflussfunktion  $E$  geschlossen werden. Ein Reflexionsgrad von  $f_{Rand1} = 1$  gemäß [KUNE99] stellt sich ein, falls die Summe der analytisch berechneten Teilflächen  $A_2 + A_3$  gleich der Gesamtfläche  $A_1$  ergibt.

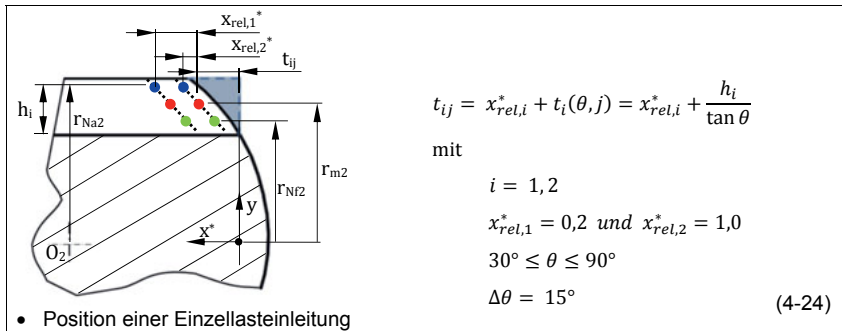
Der Faktor  $f_{Rand1}$  als Maß des Reflexionsgrades ermittelt sich nach der Gl. 4-23 aus der Verformungseinflussfunktion der FEM unter verschiedenen lokalen Steifigkeitssituationen am Zahnrand und den jeweiligen diskreten analytischen Lösungen der Verformungseinflussfunktion am unendlichen und endlichen Zahn nach [LINK10]. Später dient der abgeleitete Faktor  $f_{Rand1}$  der Abbildung der untersuchten Zahnrandeffekte.



**Abbildung 4.12: Zusammenhänge zur Ermittlung des Reflexionsgrades aus den einzelnen Anteilen einer Verformungseinflussfunktion**

### 4.5.2 Reflexion bei einem trapezförmigen Zahnflankenprofil

Die Abhängigkeit des variablen Spiegelungsanteils  $\Delta E$  wird durch eine Variation des Stirnseitenwinkels zwischen  $30^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  bei einer Schrittweite von  $\Delta\theta = 15^\circ$  mithilfe von geradverzahnten FEM-Zahnstangenmodellen analysiert. Durch die Geradverzahnung kann später der Zusammenhang zwischen dem Reflexionsgrad und dem Faktor  $f_{\text{Rand1}}$  ermittelt werden. Hierbei wird eine Einzellast in Zahnrandnähe an den Radien  $r_{\text{Na}2}$ ,  $r_{\text{m}2}$  und  $r_{\text{NI}2}$  sowie an zwei unterschiedlichen Randabständen  $x_{\text{rel},1,2}^*$  angenommen. Das Verformungsabklingen infolge der Randbelastung wird im Vergleich zum unendlichen Zahn ausgewertet. Zur Verdeutlichung des Neigungseinflusses einer Stirnseite wird zunächst das äquivalente Reflexionsmaß am stirnradähnlichen Ersatzprofil ( $x_{\text{rel},i}^* + t_{ij}$ ), das heißt an einem Zahnstangen-zahn unter einem Stirnseitenwinkel von  $\theta = 90^\circ$  mit einer weiteren FEM-Berechnung bestimmt. Der Abstand  $t_{ij}$  nach Gl. 4–24 definiert sich als projizierter Abstand zwischen den Stirnkanten des Trapez- und des Rechteck- bzw. Ersatzprofils. Die Abbildung 4.13 zeigt die Ermittlung des Abstandes  $t_{ij}$  am Beispiel der Lasteinleitung am Radius  $r_{\text{Na}2}$ .



**Abbildung 4.13: Definition der Randlasteinleitung bei der Zahnstangenverzahnung**

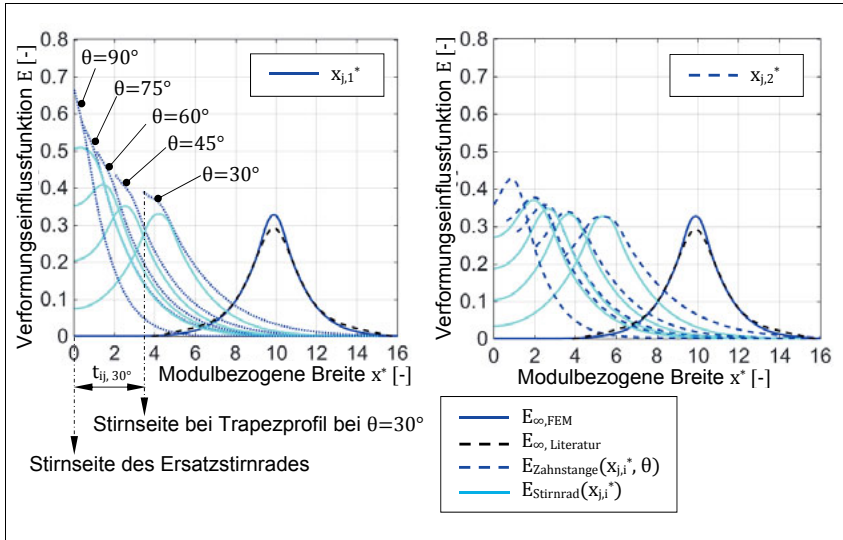
Die resultierenden Verformungseinflussfunktionen  $E$  in Abhängigkeit von  $\theta$  bei einer Einzellasteinleitung bei  $x_{\text{rel},1,2}^*$  werden in der Abbildung 4.14 beispielhaft für die kopfnähe Kraftangriffshöhe gezeigt. Mit steigendem Stirnseitenwinkel  $\theta$  erhöht sich der gespiegelte Anteil  $\Delta E$ , sodass gleichermaßen die Verformungseinflussfunktion  $E$  zunimmt. Der Spiegelungsanteil des Ersatzrades liegt mit Ausnahme zu  $\theta = 90^\circ$  immer unterhalb des Wertes des trapezförmigen Profils, da sich der Randabstand der Einzellast um den Wert  $t_{ij}$  erhöht. Bei einem Stirnseitenwinkel von  $\theta = 90^\circ$  sind die Kurven von Zahnstange und Ersatzrad deckungsgleich. Durch den

vergrößerten Randabstand der Lasteinleitung ( $x_{\text{rel}2}^*$ ) reduziert sich bei beiden Profilformen der Anteil von  $\Delta E$  an der jeweiligen Verformungseinflussfunktion  $E$ .

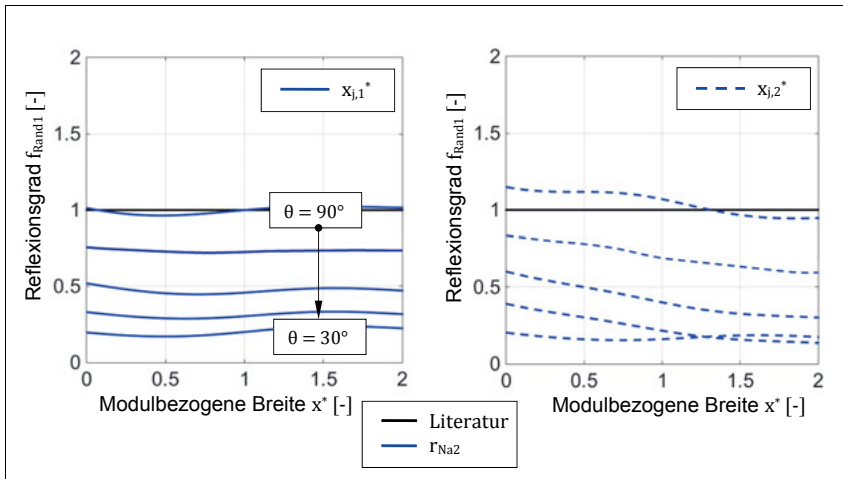
Im Vergleich zu  $x_{\text{rel}1}^*$  verschieben sich die örtlichen Maxima von der Stirnseite zur Lasteinleitungsstelle. Dennoch bleiben die Unterschiede im Spiegelungsanteil  $\Delta E$  an der Stirnseite ( $x^* = 0$ ) und demzufolge auch im Reflexionsgrad weiterhin sichtbar.

Aus den errechneten Verformungseinflussfunktionen der Abbildung 4.14 sowie unter Zuhilfenahme der Gleichung 4–25 lässt sich das Reflexionsmaß bestimmen. In der Abbildung 4.15 wird der Reflexionsgrad  $f_{\text{Rand}1}$  in Abhängigkeit vom Stirnseitenwinkel  $\theta$  unter kopfnaher Punktbelastung bei einem Randabstand  $x_{\text{rel}1}^*$  im Einflussbereich zwischen  $0 \leq x_{\text{rel}1}^* \leq 2$  veranschaulicht. Abgesehen von den geringen numerischen Ungenauigkeiten um die Lasteinleitungsstelle herum, stellt sich ein nahezu horizontaler Verlauf des Reflexionsgrades ein. Das heißt, der Reflexionsgrad ist unabhängig von der Krafteinleitungsstelle ( $x_{\text{rel}1}^*$ ) und wird darüber hinaus maßgeblich vom Stirnseitenwinkel  $\theta$  beeinflusst. Die Schwingungen des Reflexionsgrades um die Lasteinleitungsstelle entstehen durch das Näherungsverfahren nach Andersson und Vedmar (siehe Kapitel 4.3.1). Wegen der annähernd konstanten Verläufe des Reflexionsgrades genügt im Folgenden die Betrachtung des Reflexionsgrades an der Stelle  $x^* = 0$ .

Wie bereits in der Abbildung 4.11 angedeutet, verringert sich der Reflexionsgrad ausgehend von Einflussfaktor  $f_{\text{Rand}1} \approx 1$  bei  $\theta = 90^\circ$  mit abnehmendem Stirnseitenwinkel  $\theta$  in Richtung  $f_{\text{Rand}1} = 0$ . Exemplarisch ergibt sich für  $\theta = 30^\circ$  ein Reflexionsgrad von  $f_{\text{Rand}1} \approx 0,2$ . Eine vollständige Zusammenstellung der Reflexionsgrade für die verschiedenen Kraftangriffshöhen  $r_i$  und die Randabstände  $x_{\text{rel}1,2}^*$  können dem Anhang G entnommen werden.



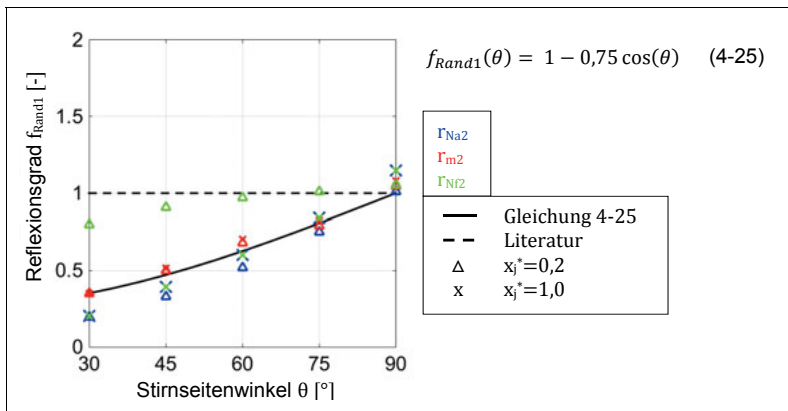
**Abbildung 4.14:** Änderung der Verformungseinflussfunktion bei verschiedenen Stirnseitenwinkeln  $\theta$  bei Einzellastangriff am Radius  $r_{Na2}$  in Zahnrandnähe



**Abbildung 4.15:** Reflexionsgrad in Abhängigkeit vom Stirnseitenwinkel  $\theta$  bei Lasteinleitung am Radius  $r_{Na2}$

In der Abbildung 4.16 wird der resultierende Reflexionsgrad für sämtliche Kraftangriffshöhen und Randabstände an der Stirnseite ( $x^*=0$ ) dargestellt. Es wird deutlich, dass das Reflexionsmaß ebenfalls von der Kraftangriffshöhe  $r_1$  abhängig ist. Bei den Einzellasten an  $r_{Na2}$  und  $r_{m2}$  bildet sich ein nahezu linearer Funktionsverlauf aus, der unabhängig vom Randabstand  $x_{rel}^*$  ist. Der Einfluss der Radkörpersteifigkeit in Zahnfußnähe bewirkt eine Verringerung der Steigung des linearen Kurvenverlaufes bei der eingeleiteten Randlast an  $x_{rel2}^*$ . Jedoch werden im Zahnfußbereich nur geringe Zahn- und Radkörperverschiebungen erreicht, sodass die Auswirkungen vernachlässigbar sind.

Somit kann der Reflexionsgrad  $f_{Rand1}$  an geneigten Stirnseitenflächen nach Gl. 4–25 in Abhängigkeit vom Stirnseitenwinkel  $\theta$  als ausreichend genaue Näherung unabhängig von der Position der Lasteinleitungsstelle analytisch erfasst werden.



**Abbildung 4.16: Reflexionsgrad in Abhängigkeit vom Stirnseitenwinkel  $\theta$  an der Stirnseite ( $x^* = 0$ ;  $\beta_2 = 0^\circ$ )**

### 4.5.3 Berücksichtigung des Reflexionsgrades bei der Berechnung der Last- und Spannungsverteilung

Damit der Einfluss des Reflexionsgrades auf den Spiegelungsanteil der Verformungseinflussfunktion  $\Delta E$  in Abhängigkeit des Stirnseitenwinkels  $\theta$  in der Berechnung der Last- und Spannungsverteilung zum Tragen kommt, ist es erforderlich, die Ermittlung der Verformungseinflussfunktion aus [LINK10] und [KUNE99] entsprechend der Gl. 4–26 anzupassen. Um die trapezförmige Stirnseitengeometrie zu berücksichtigen, ist der Reflexionsgrad  $f_{Rand1}(\theta)$  aus Gl. 4–25 einzusetzen.

$$E_{ij} = \left[ E_{\infty ij} + \Delta E_{ij} \cdot f_{Rand1ij}(\theta) \right] \cdot f_{Rand2ij}(\theta) \quad (4-26)$$

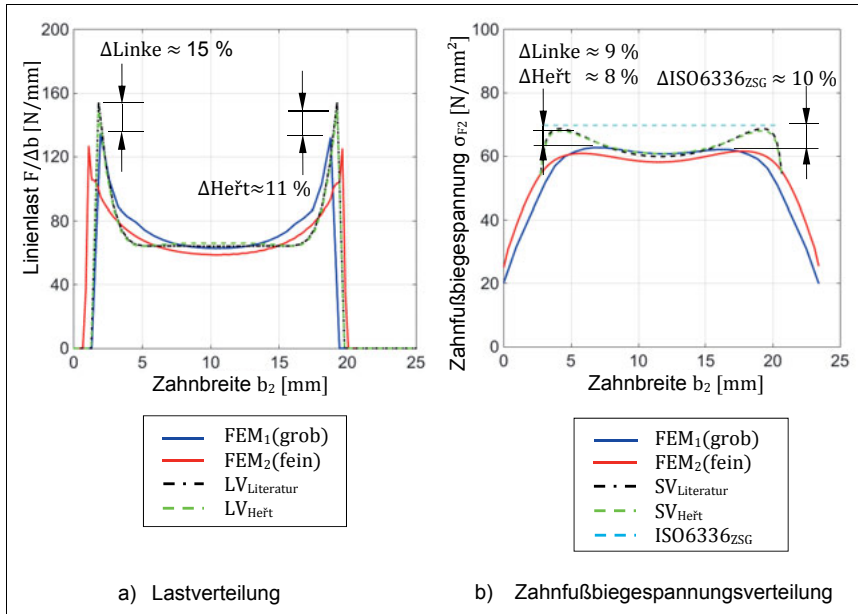
Dabei wird die Stirnseitenschrägung  $\theta$  über den Reflexionsgrad  $f_{Rand1}(\theta)$  nach Gl. 4–25 in der Berechnung der Verformungseinflussfunktion  $E_{ij}$  berücksichtigt. Bei stirnradtypischen Stirnkanten reduziert sich die Verformungseinflussfunktion  $E_{ij}$  auf ihre ursprüngliche Form gemäß der Gl. 2–20 bzw. der Faktor  $f_{Rand1}(\theta = 90^\circ)$  auf die Gl. 4–22. Der Schrägungseinfluss auf den Faktor  $f_{Rand2}(\theta)$  kann in diesem Beispiel aufgrund der geradverzahnten Zahnpaarung vernachlässigt werden. Der Einfluss der Schrägung auf eine schrägverzahnte Ritzel-Zahnstangenpaarung wird im Kapitel 4.5.4 umfassend analysiert.

Der Reflexionsgrad zeigt bei der untersuchten Zahnstangengeometrie kaum Einfluss auf die Spannungseinflussfunktion  $\Delta S_{ij}$ , da sich die trapezförmige Stirnseitengeometrie in Zahnfußrichtung deutlich verringert. Im Auswertebereich der Zahnfußbiegespannung kann wieder eine Stirnseitenschrägung  $\theta = 90^\circ$  angenommen werden. Der Unterschied im Verlauf der Zahnfußbiegespannung aus der Abbildung 4.1 wird durch die geänderte Lastverteilung verursacht.

Im Folgenden wird die Berechnung der Last- und Spannungsverteilung für das trapezförmige Zahnstangenprofil beispielhaft ausgeführt. Hierbei wird erneut das geradverzahnte FEM-Kontaktmodell aus Kapitel 4.3.2.3 mit zwei unterschiedlichen Netzqualitäten verwendet. Anstelle der rechtwinkligen Zahnflanke am Zahnstangenzahn liegt jedoch ein in der Praxis üblicher Stirnseitenwinkel von  $\theta = 54^\circ$  vor. Die Ritzelbreite  $b_1$  ist deutlich größer als die mittlere Zahnbreite des Zahnstangenzahnes,  $b_{2m}$ . Die Abbildung 4.17 zeigt die Ergebnisse der Last- und Spannungsverteilung der verschiedenen Berechnungsmethoden.

Bei Betrachtung der Lastverteilung aus den FEM-Analysen wird erneut die Zunahme der Kontaktlinienlänge mit höherer Diskretisierungsstufe deutlich. Während die semi-numerische Berechnungsmethode in der Kontaktlinienmitte eine sehr gute Übereinstimmung mit den FEM-Resultaten erzielt, bilden sich in Zahnrandnähe höhere Kontaktkräfte von ca. 15 % mit der allgemeinen Verformungseinflussfunktion nach [LINK10] und ca. 11 % bei Verwendung des Heiß-Algorithmus aus. In der Spannungsverteilung verringert sich die maximale Abweichung zur FEM auf 9 % bei dem Vorgehen nach [LINK10] bzw. 8 % nach [HERT63]. In den FEM-Modellen ist ein erhöhter Einfluss der lokalen Steifigkeiten am Zahnrand zu beobachten, der sich mit feineren Netzgütern verstärkt (Singularität). Dieser Effekt wird durch die Flankenlinienendrücke in den FEM-Modellen verhindert, sodass die FEM-Ergebnisse in Zahnrandnähe ebenfalls konvergieren.

Daher können sowohl die Belastungen (LV) als auch die Zahnfußbeanspruchungen (SV) in der FEM tendenziell geringer ausfallen als in der analytisch-numerischen Betrachtungsweise nach [LINK10] oder [HERT63].



**Abbildung 4.17: Ergebnisse zur Last- und Spannungsverteilung bei einem Ritzel-Zahnstangenpaar mit trapezförmiger Stirnseiteengeometrie**

#### 4.5.4 Einfluss von spitzer und stumpfer Zahnstirnseite beim Zahnstangenprofil

Bisher wurde die Wirkung des trapezförmigen Flankenprofils auf den zurückgespiegelten Anteil  $\Delta E$  der Verformungseinflussfunktion für ein geradverzahntes Zahnstangenmodell dargelegt. In der praktischen Anwendung werden zu einem großen Teil schrägverzahnte Zahnstangen eingesetzt, um durch die zusätzliche Sprungüberdeckung  $\varepsilon_{\beta}$  eine höhere Gesamtüberdeckung  $\varepsilon_{\gamma}$  zu realisieren. Daher ist die Gültigkeit der Randeinflussfunktion  $f_{\text{Rand2}}$  nach [KUNE99] für das trapezförmige Flankenprofil einer schrägverzahnten Zahnstange bei einer Randbelastung zu untersuchen. Durch die Schrägung des Zahnes bilden sich eine spitze und eine stumpfe Stirnseiteengeometrie heraus, deren lokale Steifigkeitsveränderung vom Schrägungswinkel abhängig ist. Zum Vergleich der FEM-Ergebnisse mit dem analytischen

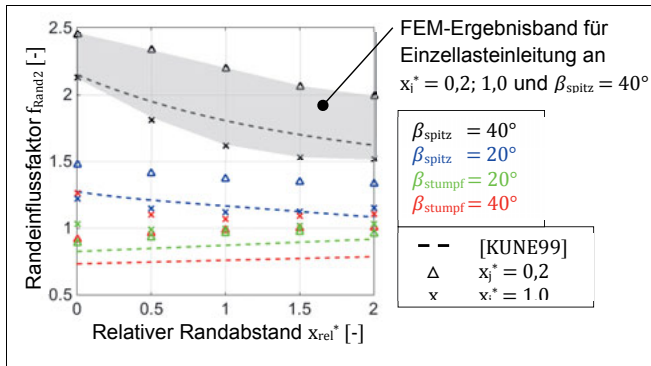
Ansatz nach Kunert (siehe Gl. 4–21) wird der Faktor  $f_{Rand2}$  gemäß der Gl. 4–27 als Quotient aus der Verformungseinflussfunktionen bei schräg- und geradverzahntem Zahnstangenzahn definiert. Für die folgende Untersuchung bleiben bis auf die Änderung des Schrägungswinkels alle übrigen Geometrieparameter konstant.

$$f_{Rand2} = \frac{E_{\beta \neq 0^\circ}}{E_{\beta = 0^\circ}}, \text{ wobei} \quad (4-27)$$

- $E_{\beta \neq 0^\circ}$  an der spitzen oder stumpfen Stirnseite wirkt
- und  $E_{\beta = 0^\circ}$  das charakteristische Verhalten an der Stirnseite bei  $\beta = 0^\circ$  widerspiegelt

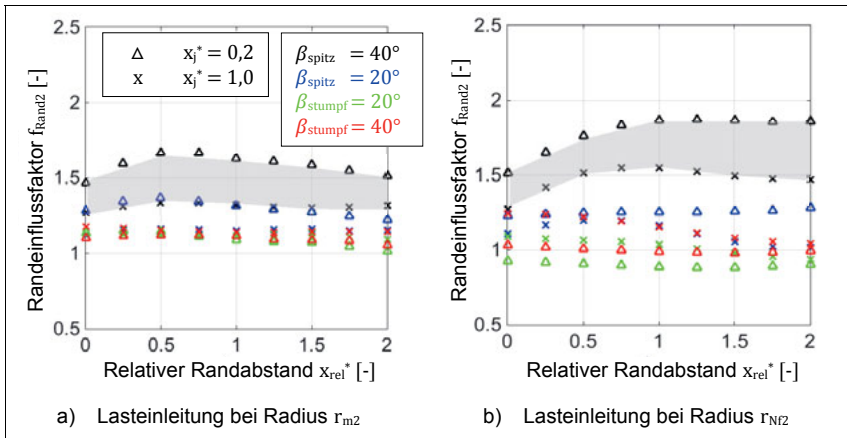
Zunächst wird die Übereinstimmung der Herangehensweise aus der Gl. 4–27 am Zahnstangenzahn mit orthogonalen Stirnkanten ( $\theta = 90^\circ$ ) im Bereich zwischen  $-40^\circ \leq \beta \leq 40^\circ$  nachgewiesen. Hierbei sollte sich ein Schrägungswinkeleinfluss am Zahnrand einstellen, der annähernd mit der analytischen Beschreibung nach Kunert (vgl. Gl. 4–21) übereinstimmt. Die Abbildung 4.18 zeigt eine Gegenüberstellung des Randeinflussfaktors  $f_{Rand2}$  aus [KUNE99] und den FEM-Ergebnissen am Zahnstangenzahn in Abhängigkeit von der Schrägung  $\beta_2$  bei Lasteinleitung an der Zahnprofilmitte. Für eine bessere Quantifizierung des Steifigkeitsverhaltens wurde die Lasteinleitung an den verschiedenen Randabständen  $x_1^* = 1m_n$  bzw.  $x_2^* = 2m_n$  in Profilmittigkeit ( $r_{m2}$ ) vorgenommen. Bei einer spitzen Zahnstirnseite liegt die analytische Lösung sowohl bei  $\beta_2 = 20^\circ$  als auch bei  $\beta_2 = 40^\circ$  im Ergebnisband der FEM. Das heißt, die zunehmende Nachgiebigkeit an der spitzen Stirnseitengeometrie wird mit dem analytischen Vorgehen hinreichend genau approximiert. Zudem zeigt sich im FEM-Ergebnis ein deutlicher Einfluss des Abstandes der Lasteinleitungsstelle ( $x_j^*$ ) von der Stirnseite, der in der analytischen Berechnung nach Gl. 4–21 bislang vernachlässigt wurde. An der stumpfen Zahnstirnseite findet eine Steifigkeitserhöhung in Zahnrandnähe statt. Für das zu untersuchte Beispiel wird der Effekt auf den Faktor  $f_{Rand2}$  in der analytischen Abschätzung nach [KUNE99] zu positiv im Vergleich zur FEM-Berechnung abgeschätzt. Während der analytische Randeinflussfaktor  $f_{Rand2}$  zwischen  $0 \leq x_{rel}^* \leq 2$  deutlich unterhalb von 1 liegt und sich mit steigendem Schrägungswinkeln reduziert, weisen die Einflüsse im FEM-Modell nur geringe Ausschläge um  $f_{Rand2} = 1$  auf. Dementsprechend deutlich verringern sich die FEM-Ergebnisbänder an der stumpfen Stirnseitengeometrie im Vergleich zur spitzen Stirnseite. Das bedeutet, dass die Verformungseinflussfunktion  $E_{ij}$  an der stumpfen Zahnstirnseite in der Berechnungsvorschrift für den Faktor  $f_{Rand2}(\theta = 90^\circ)$  nach [KUNE99] etwas zu gering abgeschätzt wird, insbesondere bei großen Schrägungswinkeln.





**Abbildung 4.18: Randeinflussfunktion  $f_{\text{Rand}2}$  bei stirnrädlicher Stirnseitengeometrie ( $\theta = 90^\circ$ ) in Abhängigkeit von dem Randabstand und der Lasteinleitung**

Als Nächstes verdeutlicht die Abbildung 4.19 den Effekt einer trapezförmigen Stirnseitengeometrie auf den Randeinflussfaktor  $f_{\text{Rand}2}$  bei einer Kraftangriffshöhe an Profilmittle  $r_{m2}$  bzw. an der Fußnutzlinie  $r_{Nf2}$ . Der Stirnseitenwinkel des schrägverzahnten Zahnstangenzahnes weist einen für Lenkgetriebe typischen Wert von  $\theta = 60^\circ$  auf. Dadurch schwächen sich die Werte für den Faktor  $f_{\text{Rand}2}$ , insbesondere am Zahnrand und bei einer Lasteinleitung in Richtung des Zahnkopfes, im Vergleich zu den Werten für  $f_{\text{Rand}2}$  bei einem Stirnseitenwinkel von  $\theta = 90^\circ$  (siehe Abbildung 4.18) deutlich ab. Der Faktor  $f_{\text{Rand}2}$  nimmt in Zahnrandnähe merklich niedrigere Funktionswerte an als zuvor bei der senkrechten Stirnseite. Zum besseren Vergleich kann wiederum die Darstellung des FEM-Ergebnisbandes bei  $\beta_{\text{spitz}} = 40^\circ$  herangezogen werden. Erst bei einem ungefähren Abstand von  $x_{\text{rel}}^* = 1,5$  von der Stirnkante nähern sich die FEM-Ergebnisse wieder der analytischen Lösung nach [KUNE99] aus der Abbildung 4.18 an. Die Differenzen zwischen den ermittelten Werten von  $f_{\text{Rand}2}$  bei den verschiedenen Stirnseitenneigungen von  $\theta = 60^\circ$  und  $\theta = 90^\circ$  verdeutlichen, dass für die Berücksichtigung von geneigten Stirnseiten eine Modifikation des Schrägungswinkeleinflusses erforderlich ist.



**Abbildung 4.19: Randeinflussfunktion  $f_{Rand2}$  bei trapezförmiger Stirnseitengeometrie ( $\theta=60^\circ$ ) in Abhängigkeit von dem Randabstand und der Lasteinleitung**

An der stumpfen Zahnstirnseite ( $20^\circ \leq \beta_{st} \leq 40^\circ$ ) lässt sich mit der vereinfachten Annahme, dass die Ausschläge des Faktors  $f_{Rand2}$  bei der Lasteinleitung am Radius  $r_{Nf2}$  aufgrund des Doppeleingriffsgebietes zu vernachlässigen sind, ein konstanter Wert für  $f_{Rand2}$  ableiten. Dafür können die Funktionsverläufe bei einer Randbelastung am Radius  $r_{m2}$  herangezogen werden. Wegen den annähernd horizontalen Verläufen genügt es, den Randeinflussfaktor  $f_{Rand2}$  analog der Gl. 4–28 auf einen konstanten Wert festzulegen:

$$f_{Rand2} (\theta = 60^\circ; 20^\circ \leq \beta_{st} \leq 40^\circ) = 1,15 \quad (4-28)$$

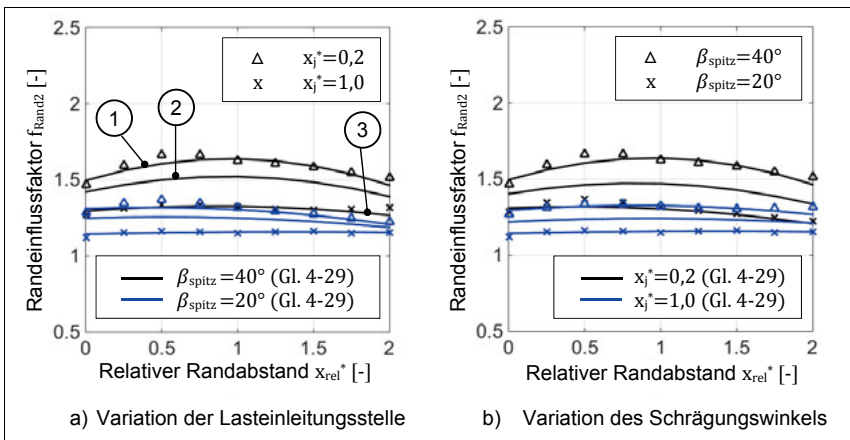
Bei der spitzen Zahnstirnseite ( $20^\circ \leq \beta_{sp} \leq 40^\circ$ ) können die Funktionsverläufe in Abhängigkeit von dem Schrägungswinkel  $\beta_{sp}$  und der Lasteinleitungsstelle  $x_j^*$  nicht derart vereinfacht werden. Stattdessen werden die Ergebnisse aus der Abbildung 4.19 mithilfe eines Polynoms 2. Grades abgebildet. Hierfür wird eine Gewichtung der beiden Einflussparameter ( $\beta_{sp}; x_j^*$ ) zur Abbildung der FEM-Ergebnisse durchgeführt. Die Polynomfunktion, bestehend aus den Koeffizienten und der Interpolation über die Gewichtung, wird in der Gl. 4–29 dargelegt. Die Gewichtungsfaktoren werden mit  $u$  und  $v$  bezeichnet.

$$f_{Randz}(\theta = 60^\circ; 20^\circ \leq \beta_{sp} \leq 40^\circ) \tag{4-29}$$

$$= v_2(1,142u_2 + 1,11u_1) + v_1(1,127u_2 + 1,786u_1) + [v_2(-0,015u_2 - 0,016u_1) + v_1(-0,007u_2 - 0,048u_1)]x_{rel}^* + [v_2(-0,024u_2 - 0,006u_1) + v_1(0,001u_2 + 0,012u_1)]x_{rel}^{*2}$$

- mit
- $u_1 = \frac{\beta \text{ in } [^\circ]}{20} - 1$  und  $u_2 = 1 - u_1$
  - $v_1 = \frac{x_j^*}{0,8} - 0,25$  und  $v_2 = 1 - v_1$

Die Anwendbarkeit der Gl. 4–29 für die spitze Stirnseitegeometrie am Zahnstangenzahn wird in der Abbildung 4.20 durch den Vergleich mit FEM-Einzellastuntersuchungen (Punkte:  $\Delta$ ,  $\times$ ) überprüft. Bei der Variation der Lasteinleitungsstelle (Fall a) bleibt der Schrägungswinkel  $\beta_{sp} = 20^\circ, 40^\circ$  unverändert. Bei beiden Lasteinleitungspositionen wird der Randeinflussfaktor  $f_{Randz}$  für  $x_j^* = 0,2$  (1) und  $x_j^* = 1,0$  (3) analytisch mit guter Übereinstimmung zur FEM ermittelt. Für die analytische Näherungslösung bei  $x_j^* = 0,5$  (2) liegt kein FEM-Ergebnis vor. Auch im umgekehrten Fall, das heißt bei veränderlichem Schrägungswinkel  $\beta_{sp}$  sowie konstanten Lasteinleitungsstellen (Fall b), wird eine große Kongruenz zwischen der Gl. 4–29 und der FEM offensichtlich. Letztlich kann durch die Gl. 4–29 eine hohe Abbildungsgenauigkeit bei einem Stirnseitenwinkel  $\theta \approx 60^\circ$  erreicht werden. Bei Schrägungswinkeln von  $\beta_{sp} = 0 \dots 20^\circ$  würde sich der Randeinflussfaktor  $f_{Randz}$  nur geringfügig von 1 unterscheiden.

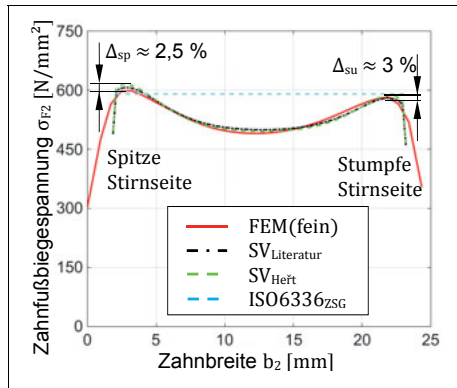


**Abbildung 4.20: Analytische Randeinflussfunktion  $f_{Randz}$  an der spitzen Zahnstirnseite des Zahnstangenzahnes ( $\theta = 60^\circ$ )**

#### 4.5.5 Verifikation des Schrägungseinflusses einer trapezförmigen Stirnseite

Das Vorgehen gemäß der Gl. 4–29 soll in diesem Kapitel mithilfe einer beispielhaften FEM-Kontaktrechnung verifiziert werden. Hierfür wird das FEM-Modell aus Kapitel 4.3.2.3 um eine schrägverzahnte Zahnstange ( $\beta_2 = 15^\circ$ ) erweitert. Durch die Wahl eines Gehäusewinkels von  $\delta = 15^\circ$  kann das Ritzel weiterhin geradverzahnt ausgeführt werden. Das Antriebsmoment wird für eine deutliche Ausbildung der Kontaktlinie auf  $T_1 = 100 \text{ Nm}$  erhöht. In der Abbildung 4.21 werden die Verteilungen der Zahnfußbiegespannungen am Zahnstangenzahn für die verschiedenen Berechnungsmethoden gegenübergestellt. Durch das Gleichsetzen von Gehäusewinkel und Zahnstangenschrägung verläuft die Kontaktlinie gerade über die Zahnflanke (vgl. Abbildung 4.3). Somit wird der Einfluss der Stirnseitengeometrie beziehungsweise die Steifigkeitsunterschiede von spitzer und stumpfer Stirnseite gezielt hervorgehoben. Bei Betrachtung des Diagramms der Abbildung 4.21 lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung der verschiedenen Berechnungsmethoden in Bezug auf den Kurvenverlauf und der Höhe der Zahnfußbiegespannung  $\sigma_{F2}$  feststellen. Infolge des Steifigkeitszuwachses an der stumpfen Zahnstirnseite verringert sich die Zahnfußbiegespannung bei einer trapezförmigen Zahnflanke nur um ca. 2 % im Vergleich zur spitzen Stirnseite. Diese unmerkliche Spannungsreduktion zeigt sich sowohl in der FEM-Kontaktrechnung als auch in der analytisch-numerischen Berechnung der Last- und Spannungsverteilung, wobei letztere Berechnungsmethode an beiden Stirnseiten eine ca. 3 % höhere Zahnfußbeanspruchung ermittelt.

Die geringere Abhängigkeit von der Stirnseitengeometrie am Zahnstangenzahn im Vergleich zu den Stirnrädern wurde bereits in der Abbildung 4.19 durch die niedrigen Werte von  $f_{\text{Rand}2}$  angedeutet. Das normative Vorgehen, angepasst an Zahnstangengetriebe (ISO 6336<sub>ZSG</sub>, Kapitel 3), erreicht unter der Verwendung einer toleranzfreien Ersatzgeradverzahnung und ohne Berücksichtigung etwaiger Zahnrandeinflüsse sowie bei Berücksichtigung des konkreten Kraftbiegehebelarms anstelle des äußeren Einzeleingriffes ebenfalls akzeptable Spannungsabweichungen. Die numerisch berechneten Beanspruchungen aus der FEM sowie nach [LINK10], [HERT63] liegen in Zahnbreitenmitte ca. 20 % unterhalb der Zahnfußbiegespannung der ISO 6336<sub>ZSG</sub>.

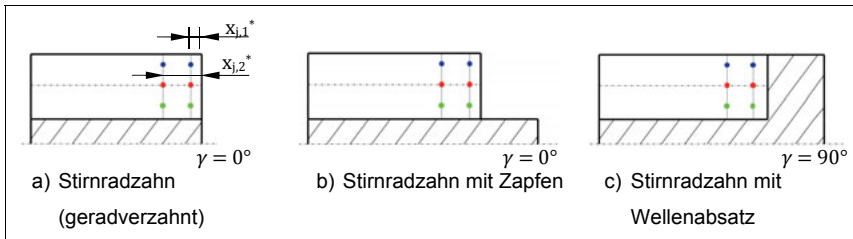


**Abbildung 4.21: Verifikation des Schrägungseinflusses  $f_{\text{Rand}2}$  anhand der Spannungsverteilung ( $\beta_1 = 0^\circ$ ;  $\delta = \beta_2 = 15^\circ$ )**

#### 4.5.6 Reflexion bei einem Verzahnungsauslauf am Stirnradzahn

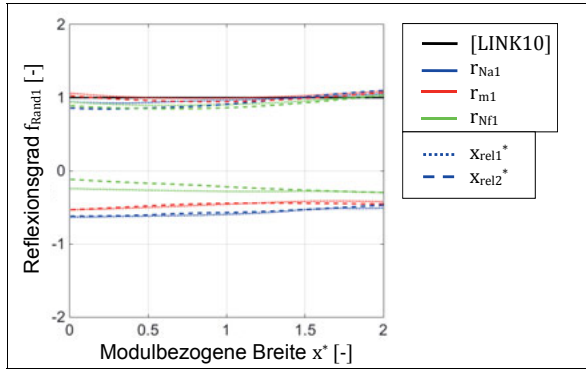
Bisher wurde der Einfluss von unterschiedlichen Stirnseitenneigungen auf die Verformungseinflussfunktion  $E$  durch die Änderung des Spiegelungsanteils  $\Delta E$  untersucht. In der Praxis kann ebenso eine lokale Steifigkeitszunahme, die beispielsweise durch einen Wellenabsatz oder einen Verzahnungsauslauf verursacht wird, auftreten. Nach der Abbildung 4.11 bewirkt ein unterschiedlicher Verzahnungsauslaufwinkel zwischen  $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$  einen örtlichen Anstieg der Zahnsteifigkeit in Zahnrandnähe, sodass ein Reflexionsgrad von  $f_{\text{Rand}1} < 0$  entstehen kann.

Als Voruntersuchung für einen linear ansteigenden Verzahnungsauslauf ( $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ ) wird dem Ausgangszustand (Abbildung 4.22, Fall a) zunächst eine Grenz Betrachtung mit zwei verschiedenen Wellenabsätzen gegenübergestellt. Die Ritzelwellen mit einem Außendurchmesser  $d_A = d_{f1}$  (Abbildung 4.22, Fall b) bzw.  $d_A = d_{a1}$  (Abbildung 4.22, Fall c) sollen modellhaft eine aufgesetzte Verzahnung sowie eine eingearbeitete Verzahnung darstellen. Später wird unter Berücksichtigung konkreter Anstiegswinkel  $\gamma$  die Auswirkung eines Verzahnungsauslaufes bei Einzellasteinleitung innerhalb des aktiven Flankenbereiches (Abbildung 4.24, Fall d) näher untersucht. In der Abbildung 4.22 (Fall a bis c) beziehungsweise in der Abbildung 4.24 (Fall d) werden die zugrunde gelegten geradzahnten FEM-Stirnradmodelle und die angenommenen Kräfteinleitungen an den Radien  $r_{\text{Na}1}$ ,  $r_{\text{m}1}$  und  $r_{\text{Nf}1}$  näher erläutert.



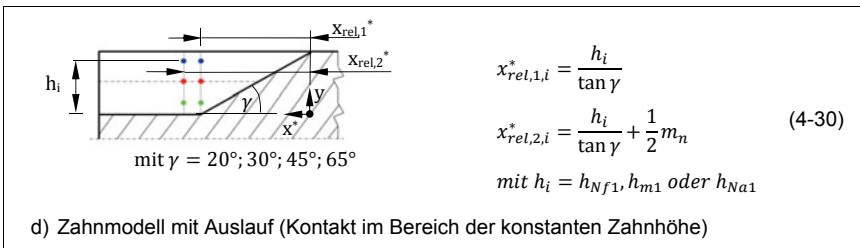
**Abbildung 4.22: Grenzbetrachtung für das Vorhandensein eines Verzahnungsauslaufes**

So lassen sich die Verformungseinflussfunktionen  $E$  für jede Einzellast in Abhängigkeit vom Verzahnungsauslauf und des Randabstandes der Lasteinleitung bestimmen. Der Reflexionsgrad  $f_{\text{Rand1}}$  lässt sich wiederum nach Gleichung 4–25 aus dem unterschiedlichen Verformungsabklängen infolge eingeleiteter Einzellasten in Zahnrandnähe sowie am unendlichen Zahn berechnen. In der Abbildung 4.23 werden die Ergebnisse des Reflexionsgrades  $f_{\text{Rand1}}$  für geradverzahnte Stirnräder unter den Grenzfällen a) bis c) nach Abbildung 4.22 aufbereitet. Für den geradverzahnten Stirnrads Zahn ohne Wellenabsatz (Fall a, Abbildung 4.22) wird der Reflexionsgrad von  $f_{\text{Rand1},a} = 1$  bestätigt. Beim Stirnrads Zahn mit zapfenförmigem Anschluss ist keine grundlegende Steifigkeitserhöhung durch den zusätzlichen Wellenkörper zu erkennen, sodass der Reflexionsgrad weiterhin bei  $f_{\text{Rand1},b} \approx 1$  verbleibt. Darüber hinaus werden in der Abbildung 4.23 die resultierenden Reflexionsgrade für den Stirnrads Zahn unter Einfluss eines Auslaufes mit einem Anstiegswinkel von  $\gamma = 90^\circ$  (Fall c) dargestellt. Für den Fall c) stellt sich bei den Kraftangriffshöhen  $r_{\text{Na1}}$  und  $r_{\text{m2}}$  ein charakteristischer Reflexionsgrad von ca.  $f_{\text{Rand1},c} = -0,6$  ein. Die Steifigkeiten im theoretischen Fall c) lassen weiterhin ein lokales Verformungsabklängen in Zahnbreitenrichtung zu, sodass der definierte Grenzwert  $f_{\text{Rand1}} = -1$  (vgl. Abbildung 4.11) in der Praxis nicht zu erreichen ist. Tendenziell nimmt der Reflexionsgrad bei zahnfußnaher Lasteinleitung im Vergleich zur mittigen und kopfnahen Belastung zu ( $f_{\text{Rand1}} = -0,4$  bei  $x^* = 2$ ). Als Hauptursache kann hierfür das mehrachsige Steifigkeitsverhalten in Form von Zahn-, Verzahnungsauslauf- und Radkörpersteifigkeit angeführt werden, wobei Letztere den größten Anteil bei einer Krafteinleitung am Fußnutzkreis  $r_{\text{Nf}}$  aufweist. Der relative Randabstand  $x_{\text{rel},i}^*$  der Krafteinleitungsstelle bleibt, unter Vernachlässigung der Singularitäten und der numerischen Rechengenauigkeiten, für das Reflexionsmaß in den untersuchten Fällen vernachlässigbar. Es kann annähernd von horizontalen Kurvenverläufen ausgegangen werden. Eine Zusammenstellung der Verformungseinflussfunktionen und den daraus abgeleiteten Reflexionsgraden befindet sich im Anhang H.



**Abbildung 4.23: Reflexionsgrad bei einem endlichen Stirnradsatz mit / ohne Wellenabsatz (Fall a, c)**

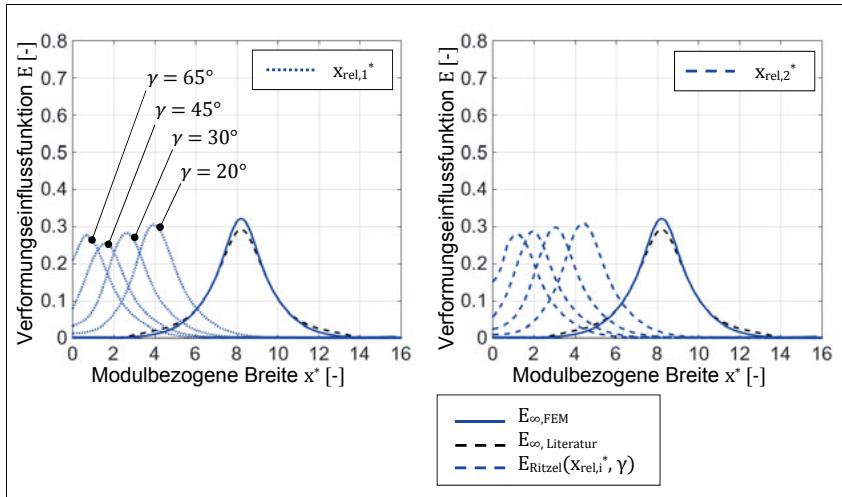
Im nächsten Schritt wird der Einfluss des Auslaufwinkels  $\gamma$  im Bereich zwischen  $20^\circ \leq \gamma \leq 65^\circ$  bei einer Einzellast im Bereich der konstanten Zahnhöhe genauer untersucht. Die geometrischen Zusammenhänge werden in der Abbildung 4.24 als Fall d) für den Kraftangriffshöhe  $h_i = h_{Na1}$  definiert. Die jeweiligen Randabstände  $x_{rel,i}^*$  der Lasteinleitung können mithilfe der wirkenden Kraftangriffshöhe  $h_j$  für die verschiedenen Verzahnungsausläufe nach Gl. 4–30 ermittelt werden.



**Abbildung 4.24: Modellbetrachtungen zur Untersuchung des Verzahnungsauslaufes am Beispiel der Lasteinleitung an der Höhe  $h_{Na1}$**

Die Verformungseinflussfunktionen, die mithilfe der FEM bei einer Einzellasteinleitung an der Höhe  $h_{Na1}$  ermittelt wurden, werden beispielhaft in der Abbildung 4.25 wiedergegeben. Wie im Fall c) führt der Steifigkeitszuwachs bei vorhandenen Auslaufwinkel  $\gamma$  zu einer Herabsenkung der Verformungseinflussfunktion  $E$  im Vergleich zum Verhalten bei unendlicher Zahnbreite

( $E_\infty$ ). Somit lässt sich bei einer Lasteinleitung in der Nähe des Verzahnungsauslaufes ebenso eine Verringerung des Reflexionsgrades  $f_{\text{Rand}1}$  ableiten. Die Verformungseinflussfunktionen  $E$  der Lastangriffshöhen  $h_{m1}$ ,  $h_{Nf1}$  befinden sich im Anhang H. Es zeigt sich, dass sich die Funktionsausschläge mit steigenden Auslaufwinkel  $\gamma$  bzw. mit zunehmenden Einfluss des Verzahnungsauslaufes abnehmen. Mit Ausnahme des Funktionsverlaufes bei  $\gamma = 65^\circ$  und  $x_{\text{rel}1}^*$  ist eine nahezu lineare Reduzierung der Extremwerte bei größer werdenden Auslaufwinkel  $\gamma$  zu beobachten.



**Abbildung 4.25: Darstellung der Verformungseinflussfunktionen am endlichen Stirnradsatz unter Einfluss eines Verzahnungsauslaufes**

Anhand der Abbildung 4.26 werden die ermittelten Reflexionswerte  $f_{\text{Rand}1}$  an der Stelle  $x^* = 0$  in Abhängigkeit zum wirkenden Kraftbiegehebelarm und zum Verzahnungsauslaufwinkel gegenübergestellt. Hierfür variiert sowohl der Auslaufwinkel zwischen  $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$  als auch der Krafthebelarm  $h_i$  je nach Lasteinleitung an den Radien  $r_{\text{Na}1}$ ,  $r_{m1}$  und  $r_{\text{Nf}1}$ . Es zeigt sich, dass keine Abhängigkeit zum Randabstand  $x_{\text{rel}1}^*$  besteht. Dagegen bewirkt ein zunehmender Biegehebelarm  $h_i$ , beziehungsweise der zunehmende Biegemomentenanteil, eine Verringerung des Reflexionsgrades  $f_{\text{Rand}1}$ . Der Einfluss der Verzahnungsauslaufsteifigkeit in Form des Auslaufwinkels  $\gamma$  kann als nichtlinear bezeichnet werden. Ab einem Auslaufwinkel von ca.  $\gamma \geq 45^\circ$  sorgt der negative Reflexionsgrad  $f_{\text{Rand}1}$  für geringere Werte der Verformungseinflussfunktion  $E$  im Vergleich zum Verhalten bei unendlicher Zahnbreite ( $E_\infty$ ). Bei dem Lastangriff an



der Höhe  $h_{NF1}$  zeigt sich wiederum der Steifigkeitseinfluss des Radkörpers, wodurch sich im Verhältnis zu den übrigen Lasteinleitungspositionen ( $h_{Na1}, h_{m1}$ ) zum Teil deutlich größere Reflexionsgradwerte  $f_{Rand1}$  ergeben. In der Abbildung 4.26 wird im Vergleich zum Stirnseitenwinkel  $\theta$ , bzw. zu der Abbildung 4.16, eine größere Ergebnisstreuung des Reflexionsgrades  $f_{Rand1}$  ersichtlich. Unter Beachtung des Auslaufwinkels  $\gamma$  sowie unter der Annahme, dass der relative Randabstand der Lasteinleitung und die Höhe des Biegehebels vernachlässigbar sind, kann der Reflexionsgrad  $f_{Rand1}$  durch die Gl. 4-31 angenähert werden:

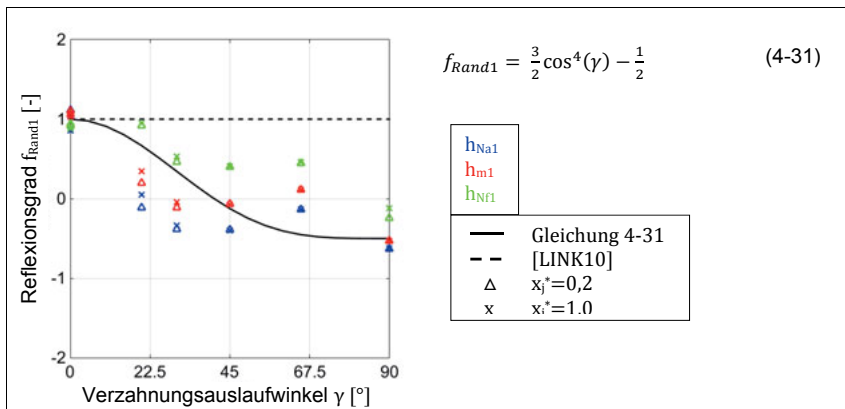


Abbildung 4.26: Reflexionsgrad bei Einzellast im aktiven Flankenbereich (Fall a - d)

#### 4.6 Zwischenfazit

Zunächst war es erforderlich die Radkörperverschiebung aus Weber/ Banaschek an das Rundprofil des Zahnstangenkörpers anzupassen, um eine zur Belastung passende Biegelinie zu erhalten. Im Anschluss wurde ein Berechnungsverfahren zur Ermittlung des Verformungsverhaltens in Zahnbreitenrichtung bei der Einleitung einer Einzellast auf Basis der Studien an unendlichen und endlichen Platten nach [HERT63] für einen Zahnstangen- und Stirnradzahn entwickelt. Damit konnte die Verformungseinflussfunktion in Abhängigkeit von der Zahnform und vom wirkenden Kraftbiegehebelarm berechnet werden.

Ein Vergleich zwischen der allgemeinen Verformungseinflussfunktion aus [LINK10], dem Funktionsverlauf nach [HERT63] sowie der FEM-Lösung ergab eine gute Übereinstimmung aller Methoden am Zahnstangenzahn, wobei sich eine Unempfindlichkeit gegenüber einer

Änderung des Krafthebelarmes entlang der Zahnhöhe zeigte. Als Grund kann der konstante Profilwinkel herangezogen werden, der sich aus der ebenen Zahnprofilform des Zahnstangenzahnes ergibt. Folglich kann weiterhin die allgemeine Verformungseinflussfunktion als gute Näherung für den Zahnstangenzahn verwendet werden. Auch die abschließende Verifikation an den Last- und Spannungsverteilungen eines Ritzel-Zahnstangenpaares bewies die Robustheit der numerischen Berechnungsvorschrift nach [LINK01], bzw. die erweiterte Berechnungsmethodik nach [HERT63] erzielte keine deutliche Verbesserung in der Ergebnisqualität.

Des Weiteren wurde die Größe des Reflexionsgrades definiert, um die Auswirkungen verschiedener Stirnseitegeometrien und deren Steifigkeitsverhalten bei wirkender Randbelastung charakterisieren zu können. Durch den Einfluss des Reflexionsgrades in Form des Faktors  $f_{\text{Rand1}}$  auf die Verformungseinflussfunktion  $E$  können die Effekte in der Berechnung der Last- und Spannungsverteilung berücksichtigt werden. Im Fall der trapezförmigen Zahnstangenflanke zeigte sich bei einer randnahen Einleitung einer Punktlast eine Reduzierung des zurückgespiegelten Anteils der Verformungseinflussfunktion ( $0 < f_{\text{Rand1}} < 1$ ) im Vergleich zur stirnradtypischen, orthogonalen Flankenform ( $f_{\text{Rand1}} = 1$ ). Dieser Effekt kann durch die höhere Randsteifigkeit als Folge der abgerundeten Stirnseitegeometrie des Zahnstangenprofils erklärt werden. Die niedrigeren Werte der Verformungseinflussfunktion in Zahnrandnähe bewirken am Zahnstangenzahn eine deutlich verminderte Lasterhöhung an den Enden der Kontaktlinie. Zudem wurde der Einfluss eines angrenzenden Verzahnungsauslaufes als Beispiel einer lokalen Steifigkeitserhöhung auf die Verformungseinflussfunktion  $E$  analysiert. Der negativer Reflexionsgrad, d.h. der Einflussparameter  $f_{\text{Rand1}} < 0$ , bestätigte die Definition zum Reflexionsverhalten gemäß der Abbildung 4.11.

Daran schloss sich die Analyse des Schrägungswinkeleinflusses anhand des Faktors  $f_{\text{Rand2}}$  an einem typischen Zahnstangenzahn eines Lenkgetriebes ( $\theta = 60^\circ$ ) an. Hier ließ sich ein deutlich geringerer Einfluss der spitzen oder stumpfen Stirnseitegeometrie des Zahnstangenzahnes im Vergleich zum Stirnrad nachweisen. Der Grund ist die erhöhte Zahnsteifigkeit in Zahnrandnähe des Zahnstangenzahnes, die als Folge der geringeren aktiven Zahnbreite in Richtung des Zahnkopfes entsteht. Somit wurde eine Anpassung zum allgemeinen Vorgehen nach [LINK01] erforderlich. Während für die stumpfe Stirnseitegeometrie des Zahnstangenzahnes ein konstanter Wert  $f_{\text{Rand2}} = 1,15$  ausreicht, wurde für die spitze Stirnseite eine Polynomfunktion 2. Grades ermittelt. Durch die Berücksichtigung einer Gewichtung der Einflussfaktoren Schrägungswinkel und Randabstand der Lasteinleitungsstelle ist eine dynamische Umrechnung auf die Einflussbereiche  $0^\circ \leq \beta_{\text{sp}} \leq 40^\circ$  sowie  $0 \leq x_j^* \leq 2$  möglich.

## 5 Experimentelle Untersuchungen

### 5.1 Zielsetzung

Die Lebensdauerabschätzung von Schlüsselbauteilen mithilfe der Schadensakkumulation ist eine etablierte Standardberechnungsmethode, die besonders in der Automobilindustrie stark verbreitet ist. Um zuverlässige Aussagen zu erhalten, ist es einerseits wichtig auf verifizierte Berechnungsverfahren, wie in Kapitel 3 und 4 gezeigt, aufzubauen. Andererseits müssen fundierte Informationen über die Beanspruchbarkeit der Bauteile zur Verfügung stehen.

Aus diesem Grund soll die Beanspruchbarkeit eines Ritzel-Zahnstangenpaares im folgenden Abschnitt unter Variation von Verzahnungsgeometrie und Betriebsparametern mit Hilfe von Wöhlerversuchen im Zeitfestigkeitsbereich bestimmt werden. Aus den Versuchsergebnissen (Belastungswöhlerlinien) können unter der Anwendung der vorgestellten Tragfähigkeitsberechnung die Bauteilwöhlerlinien erstellt werden. Diese Spannungswöhlerlinie ist unabhängig von der Verzahnungsgeometrie gültig. Die Parameterbetrachtung erfolgt an Serienverzahnungen, wodurch das Spektrum der üblichen Verzahnungsqualitäten und Fertigungstoleranzen im Verzahnungsumfeld befindlicher Bauteile sichergestellt wird.

Grundsätzlich gelten Zahnflankenschäden wie Zahnausbrüche, Flankenbrüche oder Eckabplatzer sowie Zahnfußbrüche an den Ritzel- und Zahnstangenzähnen für sämtliche Versuche als Abbruchkriterium. Besonderes Augenmerk liegt auf der Generierung von Zahnfußbrüchen am Zahnstangenzahn.

Ziel der Untersuchung ist es, lenkungssystemunabhängige Wöhlerlinien gegen Zahnfußbruchversagen im Zeitfestigkeitsbereich (zwischen  $10^4$  und  $10^6$  Lastwechseln) zu ermitteln und in die allgemeine Auslegungsberechnung von Ritzel-Zahnstangenverzahnungen zu überführen. Dafür wird die Versuchsdurchführung in drei Stufen eingeteilt, wobei mit zunehmender Stufe die Komplexität der Einflussfaktoren und der Abbildungsgrad zur realen Lenkung ansteigen. Eine detaillierte Zusammenstellung über das Versuchsprogramm und die -durchführung erfolgt in den Kapiteln 5.4 und 5.5.

## 5.2 Versuchseinrichtungen

### 5.2.1 Laufversuchsstand

Die große Bandbreite der verschiedenen Lenkungstypen, die hohe Anzahl von Einflussfaktoren im Lenkgetriebe sowie die schlechte Zugänglichkeit der Ritzel-Zahnstangenverzahnung im Betrieb schließt einen Prüflauf im Standard-Dauerlaufversuchsstand für Lenkgetriebe der Robert Bosch Automotive Steering GmbH (RBAS) aus. Demzufolge wurde am Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion (IMM, Technische Universität Dresden) ein Prüfstand für Überrollungsversuche konzipiert, der folgende charakteristische Merkmale erfüllt:

- Ritzel-Zahnstangenverzahnungen aller üblichen Lenkungstypen sind prüfbar
- Die Lagerung, die Schmierung und die Rückfettung der Verzahnungspaarung erfolgt im lenkungstypischen Serienstandard
- Alle wesentlichen Umfeldeinflüsse können gezielt separiert beziehungsweise durch die Möglichkeit des Aufbringens von Zusatzlasten kombiniert werden
- Die optische Überwachung der Verzahnungspaarung während des Prüflaufes ermöglicht ein exaktes Detektieren des Ausfallzeitpunktes

In der Abbildung 5.1 wird die Prüfstandskonstruktion des Laufversuchsstandes näher dargestellt. Die Drehbewegung des Prüfritzels (2), das durch den momentengeregelten Drehantrieb  $DA_1$  angetrieben wird, führt zu einer translatorischen Hubbewegung der Prüfzahnstange (1). Die Fest-Loslagerung des Ritzels ist konstruktiv in getrennten Gehäusen ausgeführt, sodass eine freie Sicht auf den Verzahnungsbereich gewährleistet wird. Der translatorischen Bewegung der Prüfzahnstange (1) in  $x$ -Richtung wird durch einen weggeregelten Linearantrieb (LA) entgegengewirkt. Der Betrag und die Richtung der Bremskraft ermittelt sich aus den dreidimensionalen Spurstangenkräften  $F_x$ ,  $F_y$  und  $F_z$ . Die Kraftaufbringung über Dreh- und Linearzylinder erfolgt mithilfe eines hydraulischen Regelkreises. Falls die Einstellung der Kugelflanschbuchse (3) die rotatorische Bewegung der Zahnstange nicht sperrt, verdreht sich die Zahnstange um die  $x$ -Achse entsprechend einer mechanischen Lenkung oder einer Lenksäulen-Lenkung (EPSc) infolge des Kippmomentes aus der Verzahnung  $M_{vz}$ . Die Druckstücklagerung (4) unterhalb des Zahneingriffes erlaubt ein Auslenken der Zahnstange um den Federweg der Druckstückfeder, sobald die Zahnradialkraft  $F_r$  die Federkraft  $F_f$  übersteigt. Durch den Gegenhalter (5) lässt sich das Druckstückspiel zu Beginn des Versuches einstellen und auf eine Achsabstandsänderung in  $y$ -Richtung zwischen  $50\ \mu\text{m}$  bis  $100\ \mu\text{m}$  im Neuzustand begrenzen.

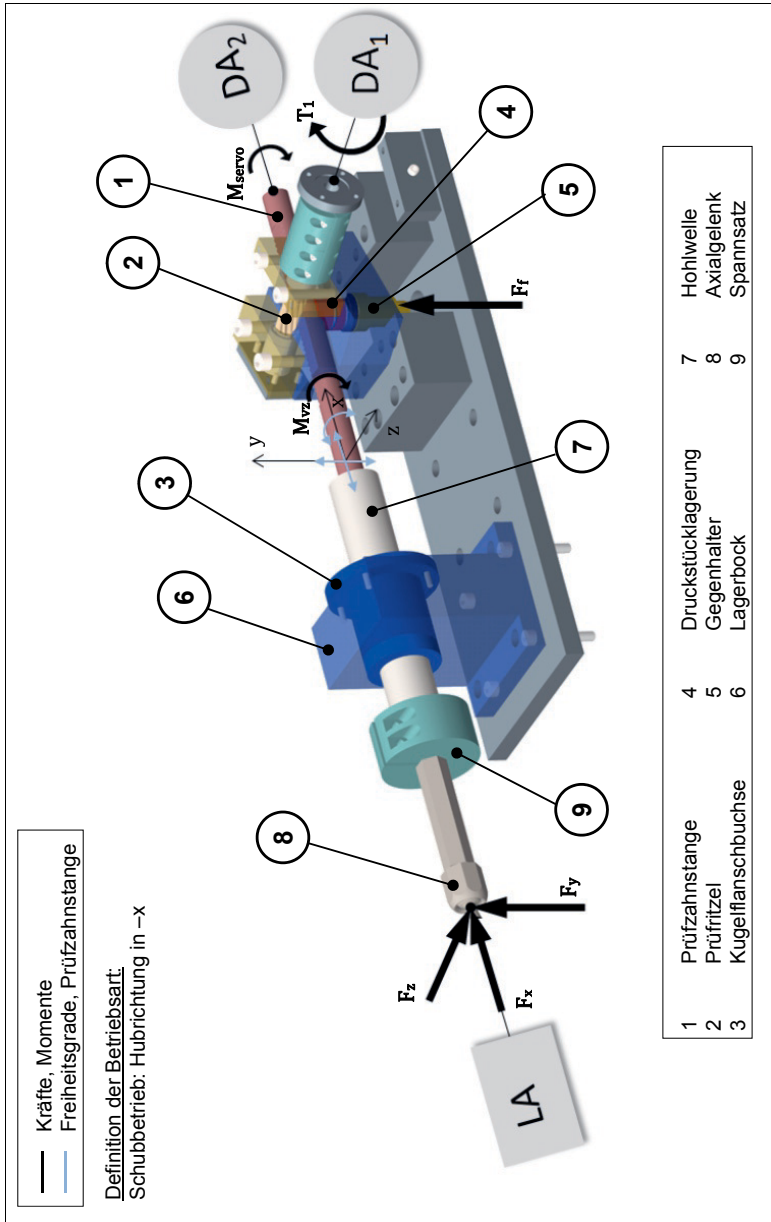


Abbildung 5.1: Prüfandaufbau für Laufversuche eines Zahnstangengetriebes

Der Lagerbock (6) charakterisiert die servoseitige Lagerung der Zahnstange über eine Hohlwelle (7). Die Hohlwelle (7) bewirkt eine breitere Abstützung ähnlich einer achsparallelen Lenkung und verhindert ein Klemmen während der Verschiebewegung infolge zu hoher Zahnstangendurchbiegung. Durch den Spannsatz (9) wird die Bremskraft des Linearantriebes LA vom Axialgelenk (8) über die Hohlwelle (7) an die Zahnstange (1) übertragen.

Der momentengeregelte Drehantrieb  $DA_2$  dient der zusätzlichen Einleitung eines Servomomentes  $M_{\text{servo}}$  analog eines servounterstützten Zahnstangengetriebes, wie beispielsweise bei der achsparallelen Lenkung (EPSapa) oder der Doppelritzell-Ausführung (EPSdp).

### 5.2.2 Pulsatorversuchsstand

Der Pulsatorversuch dient allgemein als Ersatzversuch für die Überrollungsversuche aus Abschnitt 5.2.1 und wird oftmals serienbegleitend als Überprüfung des Wärmebehandlungsverfahrens und des Werkstoffverhaltens eingesetzt. Die Pulsation ( $\approx 10$  Hz) des Zahnstangenzahnes durch eine wechselseitige Axialkraft  $F_a$  führt zu einem Zahnfußversagen. Der Pulsatorversuch gilt als weniger zeitaufwendige und kostengünstige Alternative zu den Laufversuchen. Als Teil der vorliegenden Arbeit spielt der Pulsatorversuch der Bosch Automotive Steering GmbH (RBAS) nur eine untergeordnete Rolle.

Das Prüfstandkonzept sieht die Krafteinleitung  $F_a$  in Axialrichtung (x-Richtung) über einen weggeregelten Linearantrieb vor. Nach der Abbildung 5.2 wird die Prüfzahnstange (1) über den Klemmbock (3) und die Spannschraube (6) axial fixiert, sodass sich der zu prüfende Zahnstangenzahn exakt unterhalb des Gegenhalters (2) befindet. Die genaue rotatorische Ausrichtung der Zahnstange erfolgt mithilfe der Arretierungsvorrichtung (4). Nun kann das eingreifende Gegenstück über den Spannsatz ebenfalls axial fixiert werden. Durch die Aufbringung einer Konterkraft  $F_s$  wird einem Abheben des Gegenhalters infolge der Radialkräfte entgegen gewirkt.

Die Abbildung 5.3 verdeutlicht die vorliegende Eingriffssituation zwischen der Prüfzahnstange (1) und dem Gegenhalter (2) näher. Die prismatische Arretierung wirkt als Lagerstelle und verhindert die Zahnstangendurchbiegung über dem Zahneingriff. Im Versuch wird der Zahn der Prüfzahnstange (1) über eine Schlittenführung wechselseitig gegen den Gegenhalter (2) gedrückt. Um eine mit dem Laufversuch vergleichbare Zahnfußbruchfläche zu erzeugen, wird eine Berührlinienlänge gewählt, die geringer ausfällt als die mittlere Zahnbreite  $b_{2m}$ .

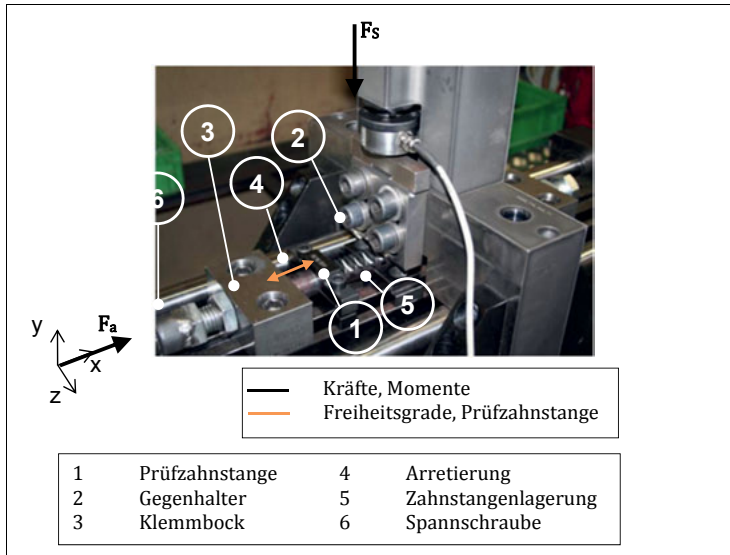


Abbildung 5.2: Prüfstands Aufbau zum Pulsen eines Zahnstangenzahnes

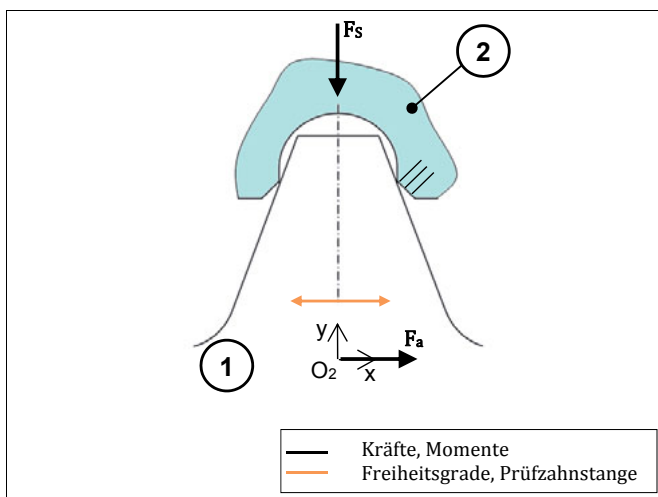


Abbildung 5.3: Eingriffssituation am Pulsatorversuch

### 5.3 Versuchsdaten

Als Prüfpaarung, bestehend aus einem Prüfritzel und einer Prüfzahnstange, wird die Ritzel-Zahnstangenpaarung nach Verzahnungsdatenblatt E (siehe Anhang A) ausgewählt. In dieser Serienverzahnung besitzt die Prüfzahnstange einen deutlich niedrigeren Sicherheitsfaktor  $S_F$  bezüglich Zahnfußermüdungsbruch im Vergleich zum Prüfritzel. Außerdem belegen die übrigen Sicherheitswerte, wie beispielsweise die Grubchensicherheit  $S_{HI}$ , eine hohe Auslegungssicherheit.

#### 5.3.1 Werkstoffkundliche Untersuchungen

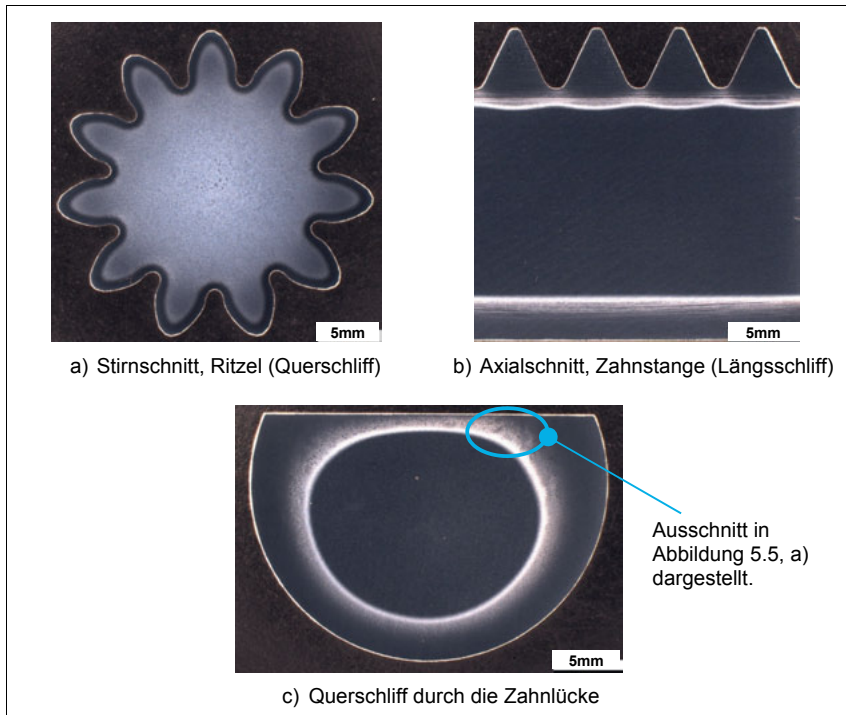
Im Folgenden wird auf die metallographischen Eigenschaften der Prüfräder eingegangen, wobei zwei Prüfpaarungen (1, 2) stochastisch entnommen wurden. Es werden neben der Werkstoffzusammensetzung, die Kernfestigkeit auch das makroskopische Gefüge nach der Wärmebehandlung und verschiedene Schlibfbilder zum Einhärtetiefenverlauf näher betrachtet. Die Kernfestigkeiten der Zahnstangen und Ritzel befinden sich innerhalb der Sollvorgaben (siehe Tabelle 5-1). Die chemische Zusammensetzung nach DIN 10083 ist dem Anhang J beigefügt.

**Tabelle 5-1: Werkstoff und Kernfestigkeit der Prüfräder**

| Merkmal                 | Zahnstange | Ritzel      |
|-------------------------|------------|-------------|
| Werkstoff               | 37CrS4     | 16MnCr5     |
| Kernfestigkeit in [MPa] | 856 - 859  | 1042 - 1056 |
| Sollvorgaben in [MPa]   | 780 - 930  | > 900       |

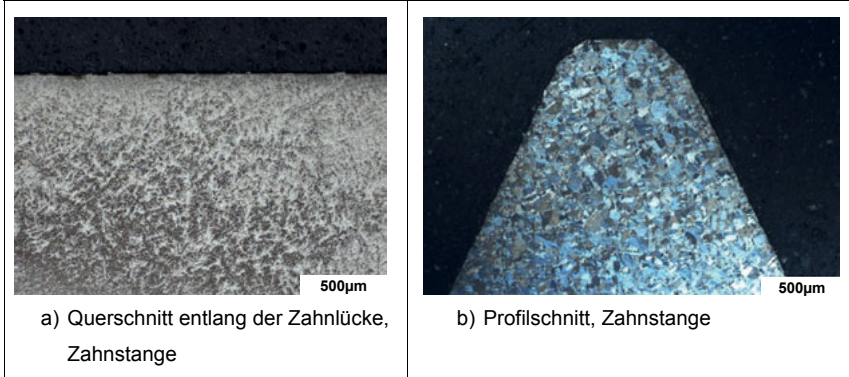
In den Schlibfbildern der Abbildung 5.4 werden die Gefügearten der verschiedenen Härtebereiche an dem Prüfritzel (a) und der Prüfzahnstange (b, c) hervorgehoben. Das einsatzgehärtete Ritzel weist im Randbereich ein martensitisch-bainitisches Gefüge mit einem Rest-Austenitgehalt von bis zu 15 % auf. Das Kerngefüge wird als helle Markierung in Abbildung 5.4a sichtbar. In den Schlibfbildern der Zahnstange (Abbildung 5.4 b, c) werden die Wärmebehandlungseffekte durch die Härtung per Ringinduktor deutlich. Im gesamten Zahnbereich und am Zahngrund bildet sich ein martensitisches Gefüge aus. Im Übergangsbereich zum Kernmaterial (Vergütungsgefüge) entsteht ein Mischgefüge. Am Zahn sowie im Übergangsbereich wird eine zeilige Materialstruktur deutlich, die bei der Herstellung des Rohlings (Strangpressverfahren) verursacht wird. Bei weiterer Vergrößerung der Schlibfbilder (blaue Markierung) kann das Gefüge näher analysiert werden.





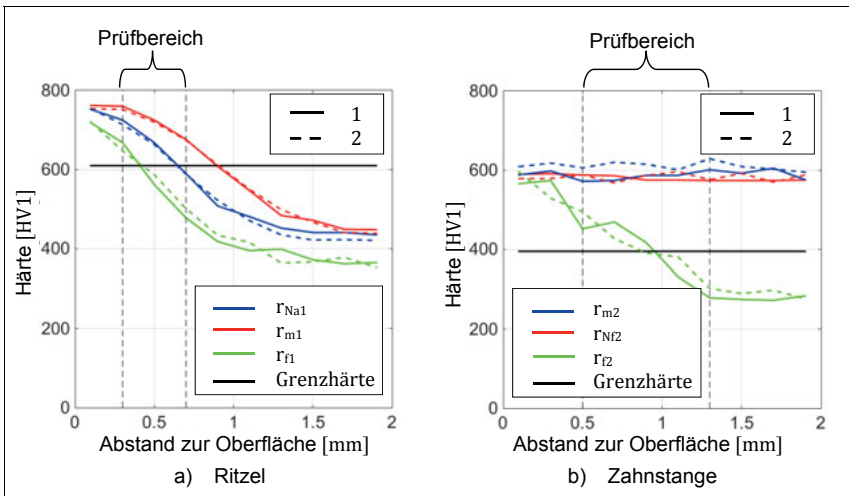
**Abbildung 5.4: Schliffbilder zur Darstellung der Härtebereiche**

In der Abbildung 5.5a wird das martensitische Gefüge in Zahnückenmitte deutlich sichtbar, wobei die dunkleren Flächen als Zwischenstufengefüge aus Perlit und Bainit gelten. Durch die Verwendung von polarisiertem Licht lässt sich die Gitterorientierung der Körner nachvollziehen (Abbildung 5.5b). So kann am Zahnstangenzahn eine Korngröße von  $5,0\ \mu\text{m}$  und feiner nach [ISO643] detektiert werden. In Richtung des Zahnkopfes sind größere Körner zu erkennen. Ein grobkörniges Gefüge entsteht durch eine lokal zu große Energieeinleitung, durch zu hohe Temperaturen oder durch einen zu schnellen Abkühlvorgang.



**Abbildung 5.5: Gefügeumwandlungen am Zahnstangenzahn**

Abschließend werden die Einhärtetiefenverläufe an den entnommenen Prüfpaaungen untersucht. Der Härteverlauf wurde an drei verschiedenen Radien in Flankennormalrichtung bestimmt und in der Abbildung 5.6 mit der einzuhaltenden Grenzhärte innerhalb eines definierten Oberflächenabstandes gegenübergestellt. Die Härteverläufe der untersuchten Prüfräder befinden sich im Prüfbereich oberhalb der geforderten Grenzhärte.



**Abbildung 5.6: Einhärtetiefenverläufe entlang des mittleren Profilschnittes**

### 5.3.2 Auswertung der Verzahnungsmessung

Neben den mikroskopischen Randbedingungen ist für die spätere Versuchsauswertung auch eine makroskopische Geometrieanalyse der Zahnpaarung notwendig, da sich die tatsächliche Zahngeometrie aufgrund von Fertigungsabweichungen von der Nominalgeometrie unterscheidet. Generell lässt sich die Analyse in eine Geometrieprüfung (Maß, Lage, Richtung, Form) und eine Funktionsprüfung (Einflanken-, Zweiflankenwälzprüfung, Tragbildmessung, Schall- und Verlustleistungsmessung) gliedern. Wobei sich im folgenden Abschnitt auf die Untersuchung der Makrogeometrie beschränkt wird, da die Verzahnungsabweichungen zwingend für die Nachrechnung der Wöhlerversuche erforderlich sind.

Zunächst wird die Abweichung zur vorgegebenen Flankenlinie am Zahnstangen Zahn als ein maßgeblicher Einflussfaktor der Breitenlastverteilung durch eine Zweiflankenmessung näher untersucht. Die standardisierten Flankenlinienabweichungen nach DIN 3960 werden Flankenlinien-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$ , Flankenlinien-Formabweichung  $f_{f\beta}$  und Flankenlinien-Gesamtabweichung  $F_{\beta}$  genannt. Während bei einem Einflankenkontakt zwischen Messkugel und Flanke die Bestimmung von Flankenmodifikationen, wie bspw. der Endrücknahme oder der Breitenballigkeit, bei einer konstanten Zahnhöhe im Vordergrund steht, wird bei einem beidseitigen Anliegen der Messkugel an der Last- und Rückflanke (siehe Abbildung 5.7) die Verzahnungsabweichungen bei einem Klemmverhalten an der Sensorverzahnung ähnlich des späteren Betriebszustandes bestimmt. Hierbei wird die Messkugel in Abhängigkeit von der Lückenweite in z-Richtung nachgeführt. Die Abweichung der Messkugel in x-Richtung kann so als gemittelte Flankenlinien-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$  aus der Links- und Rechtsflanke im Betriebszustand interpretiert werden.

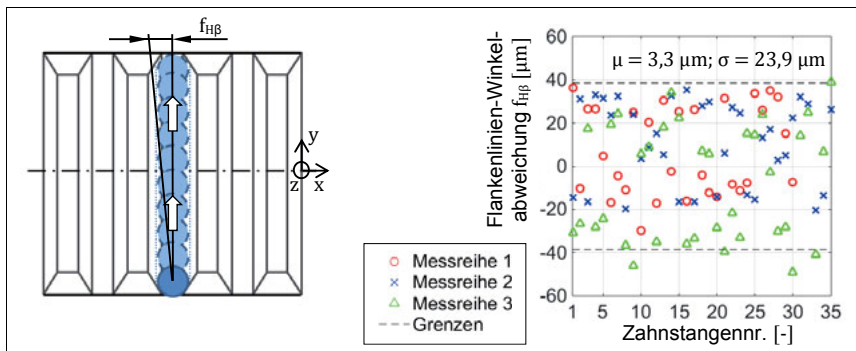
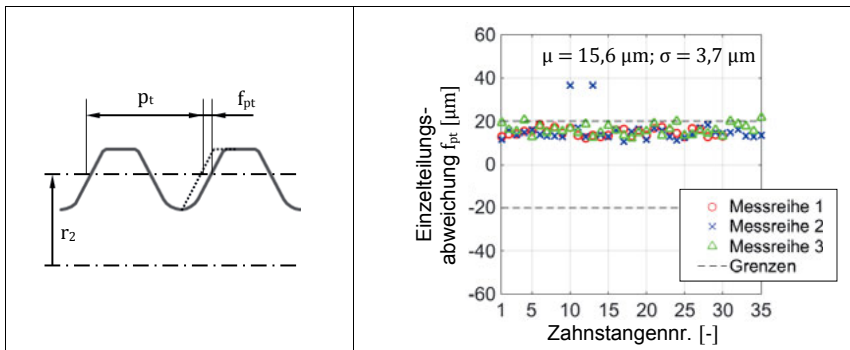


Abbildung 5.7: Flankenlinien-Winkelabweichung an der mittleren Zahnücke der Prüfzahnstangen

Zudem werden in der Abbildung 5.7 die gemessenen Flankenlinien-Winkelabweichungen  $f_{H\beta}$  an der mittleren Zahnücke aller Prüfzahnstangen dargestellt. Die mittlere Zahnücke des Zahnstangenhubes bedeutet die Null- oder Geradeausfahrtstellung. Die Versuchsträger streuen um einen Erwartungswert  $\mu = 3,3 \mu\text{m}$  bei einer Standardabweichung  $\sigma = 23,9 \mu\text{m}$ . Bei einem theoretischen Toleranzband von  $\pm 40 \mu\text{m}$  liegen ca. 3 % der Prüfkörper außerhalb der Grenzen. Die große Streubreite entsteht infolge der zyklischen Entnahme der Zahnstangen aus der Serienfertigung. Das heißt, die verwendeten Versuchsträger entstammen unterschiedlichen Fertigungslinien oder Härtestationen.

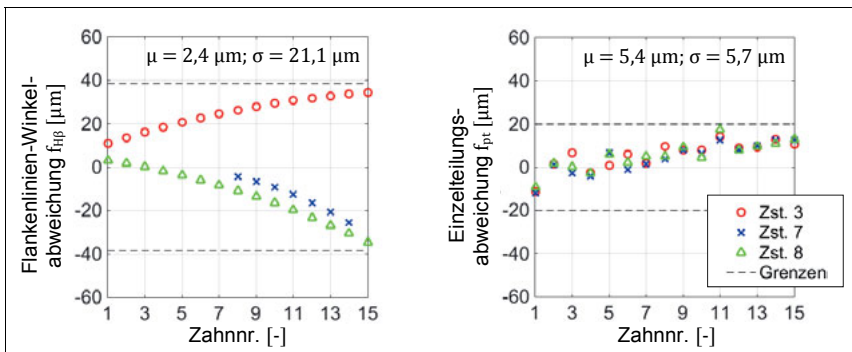
In der Abbildung 5.8 werden die Einzelteilungsabweichungen  $f_{pt}$  in Zahnbreitenmitte aller Prüfzahnstangen, geordnet nach Messreihe (1 bis 3) und Zahnstangennummer (1 bis 35), dargestellt. Für die Bestimmung der Teilungs-Gesamtabweichung  $F_p$  wurden sämtliche Links- und Rechtsflanken einer Zahnstangenverzahnung im Bereich des Gesamthubes ausgewertet. Auf Basis aller Prüfzahnstangen kann ein Erwartungswert von  $\mu = 15,6 \mu\text{m}$  und eine Standardabweichung  $\sigma = 3,7 \mu\text{m}$  bestimmt werden. Es sind zwei Überschreitungen des akzeptierten Toleranzbandes von  $\pm 20 \mu\text{m}$  festzustellen.



**Abbildung 5.8: Maximale Einzelteilungsabweichung in Zahnbreitenmitte aller Prüfzahnstangen über den Gesamthub**

Neben den Überrollungsversuchen am Ritzel-Zahnstangenpaar sollen auch Pulsationsversuche an den Zahnstangenzähnen durchgeführt werden. Hierfür genügt es, einzelne Zahnstangen (Nr. 3, 7, 8) entlang des Gesamthubes hinsichtlich der vorliegenden Fertigungsabweichungen zu analysieren, da später im Versuch jeder zweite Zahn einer Zahnstange geprüft wird. Bei Betrachtung der Abbildung 5.9 wird das systematische Verhalten der

Flankenlinien-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$  und der Einzelteilungsabweichung  $f_{pt}$  innerhalb eines Verzahnungsfeldes deutlich dargestellt. So steigt beispielsweise die Flanken-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$  bei der Zahnstange 3 ausgehend vom ersten Zahn bei  $f_{H\beta} = 11 \mu\text{m}$  auf  $f_{H\beta} = 34 \mu\text{m}$  am letzten Zahn. Das Verhalten kann auf den Bauteilverzug infolge der Wärmebehandlung, die Vorhaltewerte im Räumwerkzeug und der Einspannung des Zahnstangenrohlings sowie die elastischen und plastischen Verformungen innerhalb des Fräsprozesses zurückgeführt werden. Alle drei Zahnstangen befinden sich stets innerhalb des akzeptierten Toleranzbereiches.



**Abbildung 5.9: Makroskopische Geometrieabweichungen entlang einzelner Prüfzahnstangen**

Darüber hinaus werden die Prüfritzel für eine vollständige Dokumentation der Versuchsträger ebenfalls stichprobenartig vermessen. Für das Ritzel gelten die genormten Messgrößen nach DIN 3960 sowie die Messverfahren aus der einschlägigen Literatur, wie sie beispielsweise in [LINK10] oder [NIEM86] für Stirnräder definiert werden.

Die Messergebnisse zu der Flankenlinien-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$ , der Kreisteilungsabweichung  $f_{pt}$  und der Rundlaufabweichung  $F_r$  werden in der Abbildung 5.10 dargestellt. Hierbei liegt die Flankenlinien-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$  beider Flankenseiten innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbandes von  $\pm 28 \mu\text{m}$ . Die Breitenballigkeit von  $C_\beta = 30 \dots 40 \mu\text{m}$  erschwert die exakte Auswertung der Flankenlinien-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$ .

Die maximalen Abweichungen der Kreisteilung beziehungsweise des Rundlaufes befinden sich an den Prüfritzeln ebenfalls innerhalb der akzeptierten Fertigungstoleranzen und weisen eine sehr kleine Standardabweichung von  $\sigma < 5 \mu\text{m}$  auf.

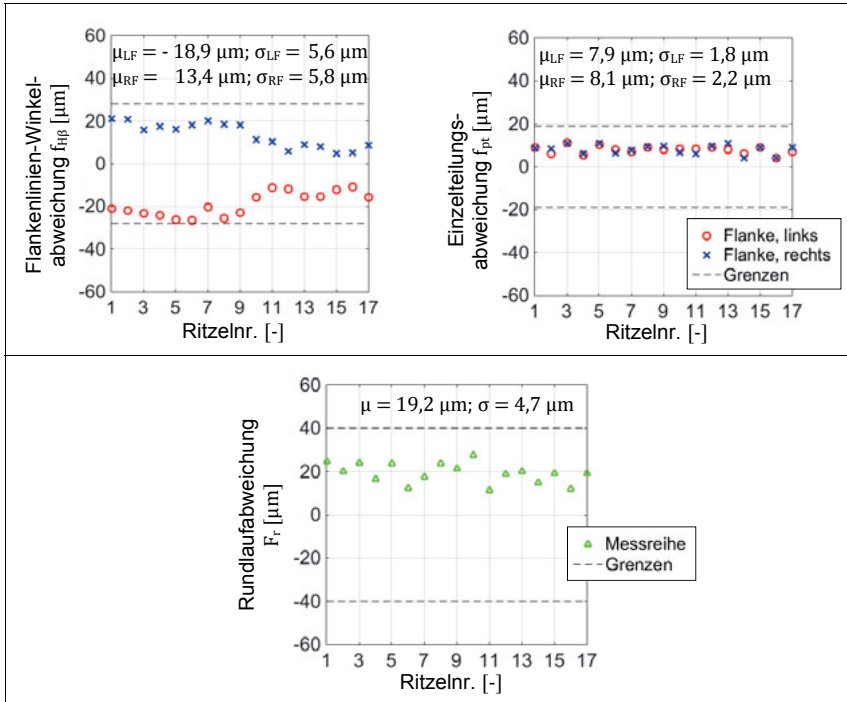


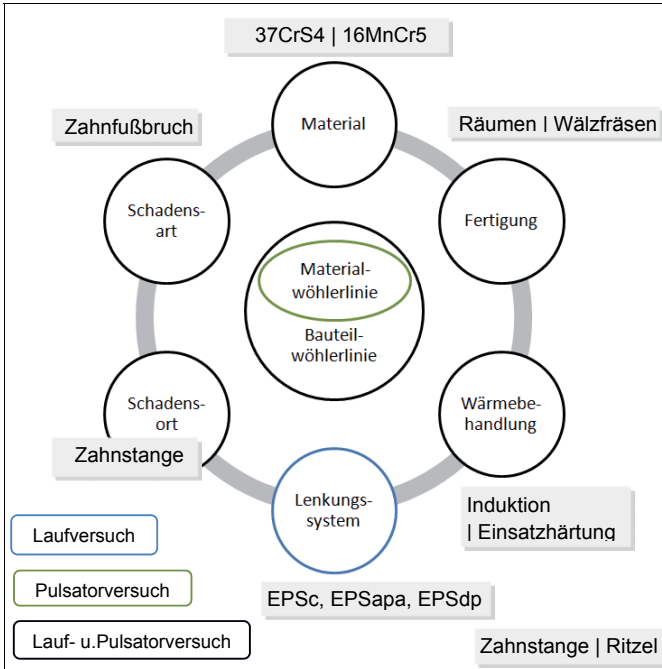
Abbildung 5.10: Makroskopische Geometrieabweichungen bei einer Auswahl von Prüfritzeln

## 5.4 Versuchsprogramm

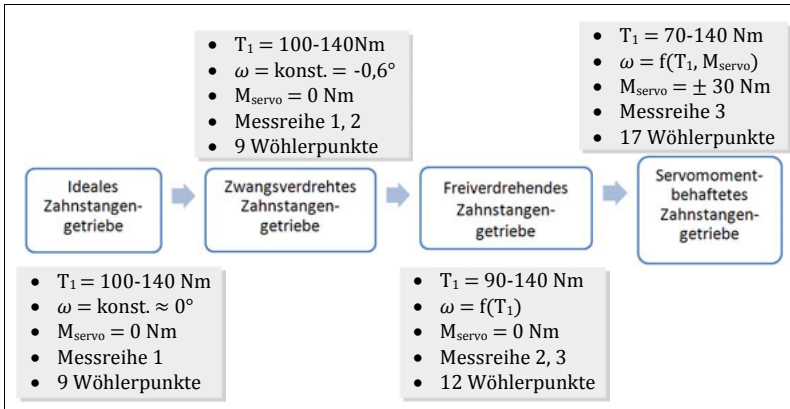
Als gewählte Verfahrensweise der Wöhlerlinienerstellung wird eine Kombination aus dem Horizonten- und Treppenstufenverfahren angewendet, das heißt zu jedem gewählten Lasthorizont werden drei gültige Wöhlerpunkte benötigt. Als Abbruchkriterium gilt das Versagen durch einen Zahnfußanriss oder –bruch am Zahnstangenzahn.

Die Randbedingungen der Wöhlerversuche werden unter Zuhilfenahme der Abbildung 5.11 veranschaulicht. In dem äußeren Kreis werden die charakteristischen Merkmale der Verzahnungspaarung erfasst, wobei eine Vielzahl der spezifischen Einflüsse eines Lenkungssystems nur in den Laufversuchen überprüft wird. Demzufolge können die Ergebnisse des Pulsatorversuches als Werkstoffwöhlerlinie beziehungsweise des Laufversuches für die Erstellung einer Bauteilwöhlerlinie herangezogen werden.

Der Versuchsplan für den Pulsatorversuch sieht die Prüfung jedes zweiten Zahnes der Prüfzahnstangen (Zahnstangen-Nr. 3, 7, 8) der Verzahnungspaarung E vor. Die Verzahnungsgeometrie zur Paarung ist dem Anhang A beigefügt. Zusätzlich wird die Zahnpaarung E mithilfe von Laufversuchen im Zeitfestigkeitsbereich untersucht, wobei verschiedene Betriebssituationen für die Zahnstange experimentell eingestellt werden. Die Abbildung 5.12 dient der Verdeutlichung des Prüfplanes zu den Überrollungsversuchen. Ausgehend von einem annähernd idealen Verzahnungssystem, dessen wirksame Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  durch die verdrehgesicherte Zahnstange bei  $\omega_{\text{kipp}} = 0^\circ$  nur von der Flankenlinien-Winkelabweichung  $f_{\text{H}\beta}$  sowie den Verzahnungs- und Umfeldnachgiebigkeiten beeinflusst wird, lässt sich zunächst ein stark vereinfachtes Lenksystem abbilden. In der nächsten Versuchsreihe wird die Zahnstange permanent auf einen Kippwinkel von  $\omega_{\text{kipp}} = -0,6^\circ$  zwangsverdreht, sodass sich die wirksame Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  um den Anteil der Verdrehwinkelabweichung  $f_{\beta\omega}$  erhöht. In einem weiteren Schritt wird der rotatorische Freiheitsgrad der Zahnstange entsperrt, sodass sich die Zahnstange infolge des Kippmomentes  $M_{vz}$  frei einstellt. Das entspricht analog zum Abschnitt 2.4 einem Systemverhalten ähnlich eines EPSc-Lenksystemes (Lenkverzahnung) oder eines EPSdp-Lenkgetriebes (Servoverzahnung). In der letzten Versuchsreihe wird nach der Abbildung 5.12 ein äußeres Servomoment in das Prüfsystem impliziert, um ein Betriebsverhalten wie bei einem EPSapa- oder EPSdp-Lenksystem für die jeweilige Lenkverzahnung zu erzeugen. Das Servomoment  $M_{\text{servo}}$  lässt sich als zusätzliches Kippmoment zum bereits vorhandenen Verzahnungsmoment  $M_{vz}$  interpretieren, das die Zahnstangenverdrehung je nach Vorzeichen verstärkt oder abmindert.



**Abbildung 5.11: Randbedingungen der Prüfverzahnungen für Lauf- und Pulsatorversuch**



**Abbildung 5.12: Überblick über die durchgeführten Laufversuche**



## 5.5 Versuchsdurchführung

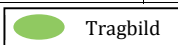
Ausgehend vom Versuchsprogramm lassen sich die Wöhlerversuche aus der Abbildung 5.12 durch die Ausbildung der Tragbilder, den Lastzyklus sowie durch die vorliegende Beanspruchungssituation im Zahnfuß charakterisieren. Die untenstehende Tabelle 5-2 verdeutlicht die Randbedingungen der durchzuführenden Laufversuche (Nr. 1 bis Nr. 4) im Vergleich zum Lenksystem in der Praxis (Nr. 5). Die schematische Darstellung der Tragbilder unter maximaler Belastung erfolgt in der Draufsicht des Zahnes. Die linke Flanke zeigt das Tragbild unter maximaler Last in Richtung des negativen Hubbereiches (Zahnstange ausgefahren), die rechte Flanke das Tragbild bei eingefahrener Zahnstange. Durch die freie Rotation der Zahnstange um deren Hubachse (Nr. 3 bis Nr. 5) entstehen spiegelsymmetrische Tragbilder um die Zahnbreitenmitte. Bei Einleitung eines zusätzlichen Servomomentes verschieben sich die Tragbilder in Richtung der Stirnseiten (Nr. 4, 5). Aufgrund der Richtungsabhängigkeit von Antriebs- ( $T_1$ ), Verzahnungs- ( $M_{vz}$ ) und Servomoment ( $M_{servo}$ ) bleibt die Symmetrie der Tragbilder weitgehend erhalten.

Der Lastzyklus, eine nahezu rechteckförmige Prüflast ohne Einbringung einer Servokraft, ist für die ersten drei Prüfsysteme identisch. Im Prüfsystem Nr. 4 wird das Servomoment ebenfalls über einen rechteckförmigen Lastzyklus eingeleitet, sodass ein schnelles Erreichen der 100 %igen Servokraftunterstützung erreicht wird. Im praxisnahen Lenksystem wirkt nur die Servounterstützungskraft über den gesamten Lenkvorgang, erst am Endanschlag kann eine manuelle Lenkkraft die Verzahnungskräfte zusätzlich erhöhen. Der Zyklus „ausfahrende Zahnstange“ definiert sich in der Tabelle 5-2 im positiven Hubbereich, das bedeutet nach der Abbildung 5.2 eine Verschiebung der Zahnstange in x-Richtung.

Das Beanspruchungsniveau steht in direkter Abhängigkeit von den Tragbildern und dem Lastzyklus. Das Ein- und Ausfahren der Zahnstange verursacht eine wechselnde Beanspruchung im Zahnfußbereich. Ein symmetrisches (Nr. 1) oder spiegelsymmetrisches (Nr. 4) Tragbild an Links- und Rechtsflanke führt zu einem Wegfall der Mittelspannung  $\sigma_m = 0$ . Erst ein asymmetrisches Tragbild an der Links- und Rechtsflanke (Nr. 2), eine Tragbildausdehnung über die Zahnbreitenmitte (Nr. 3) oder eine inhomogene Lasteinleitung (Nr. 5) bewirken eine Mittelspannung von  $\sigma_m \neq 0$ .

**Tabelle 5-2: Prüfsituationen für die durchzuführenden Wöhlerversuche**

| Benennung                                                      | Tragbild | Lastzyklus | Beanspruchungszyklus |
|----------------------------------------------------------------|----------|------------|----------------------|
| 1) Ideales, zwangsverdrehtes Prüfsystem ( $\omega = 0^\circ$ ) |          |            |                      |
| 2) Zwangsverdrehtes Prüfsystem ( $\omega = 0,6^\circ$ )        |          |            |                      |
| 3) frei verdrehendes Prüfsystem                                |          |            |                      |
| 4) Servokraftunterstütztes Prüfsystem (frei verdrehend)        |          |            |                      |
| 5) Servokraftunterstütztes Lenksystem in der Praxis            |          |            |                      |



Tragbild

— Antriebsmoment  
— Servokraft

— Zahnfußbiegespannung

## 6 Versuchsergebnisse und –auswertung

### 6.1 Vorbetrachtung für die Laufversuche

#### 6.1.1 Untersuchung der Breitenlastverteilung bei Verkipfung der Zahnstange

Im Vorfeld der Wöhlerlinienberechnung soll eine Überprüfung des normativen Berechnungswerkzeuges aus Abschnitt 3 anhand der Breitenlastverteilung erfolgen. Durch die Erstellung von Kontakttragbildern unter verschiedenen Teillasten wird ein experimenteller Breitenlastverteilungsfaktor  $K_{\beta}$  bestimmt, der mit dem Breitenfaktor  $K_{H,\beta}$  aus der normativen Tragfähigkeitsberechnung verglichen wird. Je genauer die analytische Berechnungsmethode das Verzahnungsverhalten und -umfeld sowie die Betriebsbedingungen abbildet, umso besser werden die Prüfstandeffekte später in der Bauteilwöhlerlinie berücksichtigt. Ausgehend von der Verzahnungspaarung der Tabelle 6-1 werden die Kontakttragbilder in Abhängigkeit vom eingeleiteten Antriebsmoment des Drehantriebes  $DA_1$  (siehe Abbildung 5.2) ausgewertet. Auf der Grundlage der Ausmessung der Flanken-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$  und der Teilungsabweichung  $f_{pt}$  sowie auf die versuchsbegleitende Messung des Kippwinkels  $\omega_{kip}$  kann die wirksame Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  für die weitere Abschätzung der Tragfähigkeitswerte ermittelt werden.





**Tabelle 6-1: Randbedingungen für die Erstellung der Kontakttragbilder (1)**

| Benennung                                                     | Zahnstange                       | Ritzel |
|---------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------|
| Paarungsnummer                                                | Nr. 43                           | Nr. 46 |
| Flanken-Winkelabweichung $f_{H\beta}$ in $[\mu\text{m}]$      | 51                               | 28     |
| Prüfstandssystem                                              | EPSc (zwangsverdreht)            |        |
| Kippwinkel $\omega_{kip,0}$ in $[\circ]$ (Ausgangslage)       | $\approx -0,6$                   |        |
| Druckstückspiel $\Delta s$ in $[\mu\text{m}]$<br>(Neuzustand) | 100                              |        |
| Antriebsmoment $T_1$ in $[\text{Nm}]$                         | 40 - 140                         |        |
| Schmierung                                                    | Fettschmierung Renolit JP16 / 19 |        |

Die Kontakttragbilder und deren charakteristische Parameter wie die Tragbildgröße, d.h. die tragende Breite  $b_T$ , und die Tragbildlage werden in der Tabelle 6-2 für den Prüfzyklus der ausfahrenden Zahnstange gezeigt. Die Tragbilder enthalten bereits sämtliche Umfeldanteile aus Fertigungsabweichungen aller beteiligten Bauteile, die elastischen Verformungen und die lastabhängigen Verlagerungen der Zahnstange. Anhand der Kontakttragbilder wird deutlich, dass sowohl die Tragbildausdehnung über die Zahnbreite als auch das lastabhängige Kippmoment  $M_{vz}$  einen erheblichen Einfluss auf die Zahnstangenverdrehung besitzen.

Das Kippmoment aus der Verzahnung bewirkt mit zunehmendem Antriebsmoment ein stärkeres Zurückdrehen der Zahnstange. Sowohl die zunehmende Tragbildausdehnung, insbesondere ab einer Tragbildbreite über die Hälfte der Zahnbreite hinaus, als auch das zunehmende Kippmoment aus der Verzahnung  $M_{vz}$  führen eine Reduzierung des Kippwinkels vom Anfangs-wert von  $\omega_{kipp,0} = -0,6^\circ$  auf etwa  $\omega_{kipp} = -0,1^\circ$  bei  $T_1 = 140 \text{ Nm}$  herbei. Ab einer Tragbildausdehnung größer als 50 %, das heißt über die Symmetrieachse hinaus, ändert sich die Richtung des Kippmomentes  $M_{vz}$ , wodurch sich wiederum der Kippwinkel  $\omega_{kipp}$  sprunghaft verringert.

**Tabelle 6-2: Ermittlung der Kontakttragbilder in Abhängigkeit vom Antriebsmoment aus [SCHU14]**

| Merkmal                             | Lastflanke                                                                        |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                     | $T_1 = 40 \text{ Nm}$                                                             | $T_1 = 80 \text{ Nm}$                                                             | $T_1 = 120 \text{ Nm}$                                                            | $T_1 = 140 \text{ Nm}$                                                            |
| Tragbild (ausfahrend)               |  |  |  |  |
| Kippwinkel $\omega_{kipp} [^\circ]$ | -0,40                                                                             | -0,25                                                                             | -0,15                                                                             | -0,10                                                                             |
| Tragbildgröße [%]                   | $40 \pm 2$                                                                        | $65 \pm 2$                                                                        | $85 \pm 2$                                                                        | 100                                                                               |
| Tragende Breite $b_T [\text{mm}]$   | $8,8 \pm 0,4$                                                                     | $14,4 \pm 0,4$                                                                    | $18,8 \pm 0,4$                                                                    | 22,1                                                                              |

Die Ermittlung des experimentellen Breitenlastverteilungsfaktors anhand der Tabelle 6-2 stützt sich auf die tragende Breite  $b_T$  in Abhängigkeit von der wirkenden Last. Bereits in der Arbeit [RADE67] von Rademacher wurde ein erstes Verfahren entwickelt, um aus den Tragbildern einer Zahnradpaarung auf die wirkende Breitenlastverteilung zu schließen. Hierbei stützen sich die Annahmen aus [RADE67] auf verschiedene Hilfsfaktoren. Darauf aufbauend wird von Fronius in [FRON71] sowie in [LUCK87] die Möglichkeit der experimentellen Ermittlung der Verformung je Belastungseinheit, basierend auf der wirksamen Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  und der Zahnverformung  $f_z$ , erwähnt. Der so bestimmte Breitenlastverteilungsfaktor  $K_{H\beta, T}$  nach Gl. 6-1 gilt bei  $b_T < b_{2m}$  und  $K_{H\beta, T} > 2$ .

$$K_{H\beta,T} = \frac{2b_{2m}}{b_T} = \sqrt{\frac{2F_{\beta y}}{f_z}} \quad , \text{ wobei } b_T < b_{2m} \text{ und } K_{H\beta,T} > 2 \quad (6-1)$$

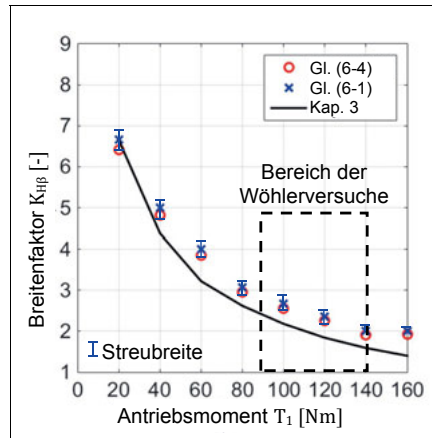
Auch die DIN 3990 sieht die Ableitung der Breitenlastverteilung aus Kontakttragbildern vor. Bei bekannter Tragbildausdehnung in [%] lässt sich die ideale Flankenlinienabweichung  $f_{ma}$  unter Annahme einer Schichtdicke  $s_c$  der Tragbildpaste nach Gl. 6–2 berechnen. Bei der Aufbringung der Tragbildpaste kann laut DIN 3990 eine Schichtdicke von  $6 \mu\text{m}$  angenommen werden. Darauf basierend berechnet sich die ursprünglich wirksame Flankenlinienabweichung unter Teillast,  $F_{\beta x, T}$ , nach Gl. 6–3 aus den gemessenen Tragbildbreiten  $b_T$ , aus der mittleren Verzahnungsbreite  $b_{2m}$ , der zugehörigen Umfangslast  $F_{t, T}$  und der Eingriffsfedersteifigkeit  $c_y$ . Zudem kann auf die Flankenlinienabweichung infolge Biegung und Torsion unter Teillast,  $f_{sh, T}$ , geschlossen werden. Unter Anwendung des normativen Berechnungsweges der DIN 3990 berechnet sich somit der experimentelle Breitenlastverteilungsfaktor unter Teillast  $K_{H\beta, T}$  nach der Gl. 6–4 unter Berücksichtigung der mittleren Zahnverformung  $F_{m, T} / (b_{2m}c_y)$ .

$$f_{ma} = \frac{b_{2m}}{b_T} s_c \quad , \text{ wobei } s_c = 2 \dots 20 \mu\text{m} \quad (6-2)$$

$$F_{\beta x, T} = \left[ \frac{2F_{t, T}}{b_{2m} \left( \frac{b_T}{b_{2m}} \right)^2 c_y} \right] \quad \text{und} \quad f_{sh, T} = |F_{\beta x, T} - f_{ma}| \quad (6-3)$$

$$K_{H\beta, T} = 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{\Delta f_{sh, l}}{f_m} = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{f_{sh, T}}{\frac{F_{m, T}}{b_{2m} c_y}} \quad (6-4)$$

In der Abbildung 6.1 werden die Breitenlastverteilungen nach [FRON71] und der [DIN3990] auf Basis der Tragbilder unter Teillasten mit den Werten des Breitenfaktors aus der normativen Tragfähigkeitsberechnung für Zahnstangenge triebe verglichen. Als Eingangsgrößen für die Abschätzung des Breitenfaktors nach Kapitel 3 dienen die Flanken-Winkelabweichung an Ritzel und Zahnstange ( $f_{H\beta 1,2}$ ) und die Verdrehabweichung ( $f_{\beta \omega, T}$ ) als Funktion der Teillast, des Druckstückspieles  $\Delta s$  und der Zahnstangenverdrehung  $\omega_{\text{kipp}, T}$ . Mit Abweichungen unter 4 % zueinander bestimmen beide Verfahren zur experimentellen Ableitung der Breitenlastverteilung nahezu identische Werte für den Breitenfaktor  $K_{H\beta, T}$ . Die Breitenfaktoren  $K_{H\beta}$  aus der Tragfähigkeitsberechnung weisen eine maximale Abweichung von circa 11 % zu den experimentellen Werten auf. Da sich die späteren Versuche im Momentenspektrum zwischen  $70 \text{ Nm} \leq T_1 \leq 140 \text{ Nm}$  befinden, kann die Aussagekraft der Berechnungsmethode als sehr gut eingeschätzt werden.



**Abbildung 6.1: Vergleich zwischen experimentellen und normativen Breitenlastverteilung in Abhängigkeit von  $T_1$**

### 6.1.2 Einfluss der Zahnstangenverdrehung auf die ertragbare Lebensdauer

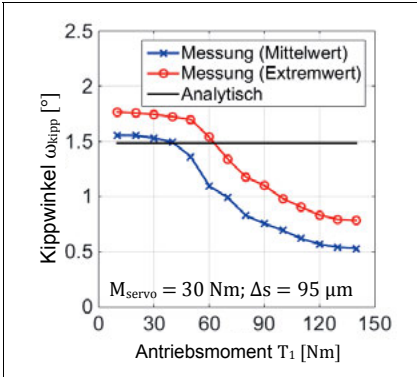
Die bisherigen Untersuchungen der Breitenlastverteilung beschränkten sich auf ein zwangsverdrehtes Prüfsystem, wodurch eine genaue Bestimmung der Tragbilder möglich wurde. Bei einem rotationsfreien Prüfsystem ändert sich der Kippwinkel  $\omega_{kipp}$  fortdauernd, sodass sich dem Kippwinkel kein eindeutiges Kontakttragbild zuordnen lässt.

Die analytische Abschätzung der Zahnstangenverdrehung wurde bereits im Abschnitt 3.6 anhand von FEM-Kontaktrechnungen verifiziert, wobei eine gute Übereinstimmung bis  $T_1 = 60$  Nm nachgewiesen wurde. Nun folgt die Validierung des analytischen Berechnungsverfahrens zur Drehwinkelbestimmung an Laufversuchen. Hierfür wurde der Kippwinkel in Abhängigkeit vom Antriebsmoment  $T_1$  über eine Ritzelumdrehung bei einem Druckstückspiel von  $\Delta s = 95$   $\mu\text{m}$  und einem Servomoment von  $M_{servo} = 30$  Nm gemessen. In der Abbildung 6.2 werden die maximalen Messausschläge des Kippwinkels  $\omega_{kipp}$  mit der analytischen Näherung gegenübergestellt. Das Näherungsverfahren basiert nur auf der Zahnstangengeometrie und auf dem Ausfederungsweg der Zahnstange in  $y$ -Richtung bei einer Beibehaltung des Ursprungs in  $z$ -Richtung (siehe Abbildung 3.13) und berechnet so einen lastunabhängigen Kippwinkel von  $\omega_{kipp} = 1,48^\circ$ . Die elastischen Nachgiebigkeiten bleiben in der Winkelberechnung unberücksichtigt.

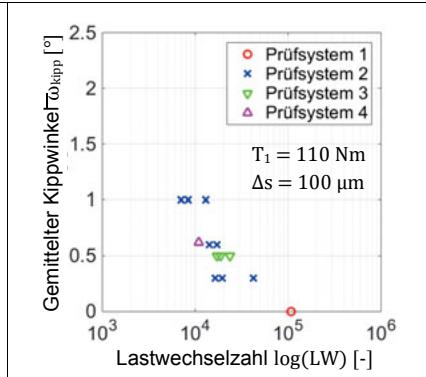
Bei der Analyse der Winkelmessung bildet sich nach der Abbildung 6.2 unter geringen Antriebsmomenten ( $T_1 \leq 40 \text{ Nm}$ ) bei etwa  $\omega_{\text{kipp}} = 1,6^\circ$  ein Plateau heraus. Hierbei liegt das Tragbild an den Stirnseiten des Zahnstangenzahnes. Die Effekte aus Schraubgleitung und Reibung überwiegen gegenüber den Kippmomenten  $M_{\text{vz}}$  und  $M_{\text{servo}}$ . Der maximale Kippwinkel ist zurückzuführen auf das Durchlaufen des Eingriffsfeldes und der daraus resultierenden Änderung der wirkenden Hebelarme sowie den Kippmomenten  $M_{\text{vz}}$ ,  $M_{\text{servo}}$  in Abhängigkeit von der Eingriffsstellung. Bis  $T_1 = 50 \text{ Nm}$  erhöht sich der Kippmomenteneinfluss nur geringfügig und das Tragbild vergrößert sich in Richtung der Zahnbreitenmitte. Im Bereich des Antriebsmomentes  $T_1 = 50 \dots 80 \text{ Nm}$  erreicht das Tragbild die Symmetrieachse. Durch die geänderte Hebelwirkung um die Hubachse wirken die Kippmomente aus der Verzahnung  $M_{\text{vz}}$  als Maß des Antriebsmomentes  $T_1$  nun gegen das Kippmoment  $M_{\text{servo}}$ . Mit weiter steigendem Kippmoment  $M_{\text{vz}}$  beziehungsweise einer zunehmenden Tragbildausdehnung ändern sich die Hebelverhältnisse weiter zu Gunsten einer geringeren Zahnstangenverdrehung  $\omega_{\text{kipp}}$ . Sobald sich ein vollständiges Tragen über die Zahnbreite ausbildet, ändert sich der Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}}$  kaum noch. Ab etwa  $T_1 \geq 120 \text{ Nm}$  deutet sich ein erneutes Plateau bei circa  $\omega_{\text{kipp}} = 0,5^\circ$  an. Nach dem Erreichen der vollen Tragbildbreite bewirkt das größer werdende Antriebsmoment  $T_1$  vorrangig eine Erhöhung der Zahn- und Radkörperverschiebung als eine Zunahme des Kippmomentes  $M_{\text{vz}}$ .

Der Einfluss des Verdrehfreiheitsgrades der Zahnstange und der Kippmomente auf die ertragbare Lastwechselzahl wird in der Abbildung 6.3 im Vergleich zu den zwangsverdrehen Prüfsystemen qualitativ ohne Berücksichtigung von Verzahnungsabweichungen dargestellt. Die Definition der Prüfsysteme kann der Abbildung 5.12 entnommen werden. In den Versuchen wurde die Zahnstange jeweils mit einem Antriebsmoment von  $T_1 = 110 \text{ Nm}$  bis zum Zahnfußbruch belastet. Im ersten Prüfsystem wird die Zahnstange ideal auf  $\omega_{\text{kipp}} = 0^\circ$  geführt und die höchste Bruchlastspielzahl aller Versuchspaarungen erreicht.

Bei bestehender Zwangsführung der Zahnstange reduziert sich die ertragbare Lastwechselzahl mit zunehmendem Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}}$ . Es zeigt sich eine Reduzierung der Bruchlastspielzahl von etwa 108.000 LW ( $\omega_{\text{kipp}} = 0^\circ$ ) auf circa 10.000 LW bei  $\omega_{\text{kipp}} = 1^\circ$ . Durch die mögliche Rotation der Zahnstange stellt sich im dritten Prüfsystem ein durchschnittlicher Kippwinkel von  $\omega_{\text{kipp}} \approx 0,5^\circ$  ein. Eine tendenzielle Erhöhung der Bruchlastspielzahl der dritten Versuchsreihe im Vergleich zum zwangsverdrehen System bei  $\omega_{\text{kipp}} = 0,3^\circ$  bzw.  $0,6^\circ$  wird ersichtlich. Auch die Einleitung eines Servomomentes ( $M_{\text{servo}} = 30 \text{ Nm}$ ) wirkt sich in einem Stichprobenversuch, trotz der größeren Momentensumme, nicht signifikant auf die Bruchlastspielzahl aus.



**Abbildung 6.2: Gegenüberstellung von gemessener und analytischer Zahnstangenverkipfung**



**Abbildung 6.3: Ertragbare Lastwechsel bei den verschiedenen Prüfsystemen**

**6.1.3 Untersuchung der Breitenlastverteilung unter Servomomenteneinfluss**

In dem Kapitel 3.2 wurde der Einfluss eines Servomomentes auf die Belastungssituation im Zahnkontakt eines Ritzel-Zahnstangenpaares erklärt und ein rechnerisches Vorgehen über eine entsprechende Erhöhung der Zahnradialkraft aufgezeigt. Dort wurde bereits die gute Übereinstimmung zwischen einer FEM-Analyse und der analytischen Vorgehensweise nachgewiesen. Nun soll ein weiterer empirischer Nachweis die korrekte Vorgehensweise der Tragfähigkeitsberechnung belegen. Hierfür werden die experimentellen Breitenlastverteilungsfaktoren  $K_{H\beta,T}$  und die analytische Abschätzung des Breitenfaktors  $K_{H\beta}$  unter Berücksichtigung der Zahnstangenverkipfung, des Kippmomentes aus der Verzahnung  $M_{Vz}$  sowie des zusätzlich eingeleiteten Servomomentes  $M_{servo}$  analog zum Vorgehen im Kapitel 6.1.1 gegenübergestellt.

Für die Erstellung der Kontakttragbilder wurde das Antriebsmoment  $T_1$  über den Drehantrieb  $DA_1$  eingeleitet und innerhalb des Momentenbereiches  $T_1 = 20...140$  Nm variiert. Das Servomoment  $M_{servo} = 30$  Nm bleibt für die gesamte Untersuchung konstant und wird vom Drehantrieb  $DA_2$  bereitgestellt. Die Lage der Prüfzahnstange um deren Längsachse konnte sich während des Durchlenkens frei einstellen. Eine Auflistung der wichtigsten Prüfparameter kann der Tabelle 6-3 entnommen werden.





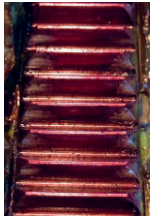





**Tabelle 6-3: Randbedingungen bei der Abnahme der Kontakttragbilder (2)**

| Benennung                                                          | Zahnstange                                                        | Ritzel  |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|---------|
| Paarungsnummer                                                     | Nr. 88                                                            | Nr. A50 |
| Flanken-Winkelabweichung $f_{H\beta}$ in [ $\mu\text{m}$ ]         | 7                                                                 | 28      |
| Prüfstandssystem                                                   | EPSdp/EPSapa<br>(freiverdrehend unter Einfluss eines Servomoment) |         |
| Kippwinkel $\omega_{\text{kipp},0}$ in [ $^\circ$ ] (Ausgangslage) | $\approx -0,6$                                                    |         |
| Druckstückspiel $\Delta s$ in [ $\mu\text{m}$ ] (Neuzustand)       | 100                                                               |         |
| Antriebsmoment $T_1$ in [Nm]                                       | 20 - 100                                                          |         |
| Servomoment $M_{\text{kipp}}$ in [Nm] um die Hubachse              | 30                                                                |         |
| Schmierung                                                         | Fettschmierung Renolit JP16 / 19                                  |         |

Die Ergebnisse der Tragbildmessungen in der Tabelle 6-4 zeigen eine deutlich geringere Tragbildausdehnung bei Antriebsmomenten bis  $T_1 \leq 40$  Nm im Vergleich zu den vorherigen Prüfläufen ohne Servomoment (vgl. Tabelle 6-2). Die Servokrafteinleitung unterstützt die Hubbewegung der Zahnstange, sodass die Kippbewegung um die Hubachse ebenfalls verstärkt wird. Durch die größere Ausweichbewegung der Zahnstange ändert sich die Eingriffssituation im untersuchten Beispiel derart, dass sich neben einem verstärkten Kantentragen ebenfalls eine größere Abstützung an den Rückflanken (Zweiflankenkontakt) zeigt. Mit zunehmender Zahnverformung an den Lastflanken wird der Zweiflankenkontakt wieder aufgehoben. Die unterschiedliche Tragbildgröße bei Einfahr- und Ausfahrzyklus der Zahnstange wird durch den zyklusabhängigen Schub- oder Zugbetrieb hervorgerufen. Bei einfahrender Zahnstange (Schubbetrieb), das heißt die Hubbewegung erfolgt nach Abbildung 5.1 in negativer x-Richtung, muss bei entsprechend hohem Antriebsmoment die Zahnstangendurchbiegung an der servoseitigen Lagerstelle (Bauteile 3, 8) überwunden werden. Zudem kommt es an der Lagerposition zu einem Versatz in y-Richtung, da die Achsabstandsänderung als Folge der sensorseitigen Druckstückspielzunahme fehlt. Der Einfluss der servoseitigen Lagerstelle entfällt beim Zugbetrieb vollständig. Der Betrag von der Reibkraft und der Schraubgleitung aus dem Verzahnungskontakt sind bei beiden Betriebsarten gleich groß.

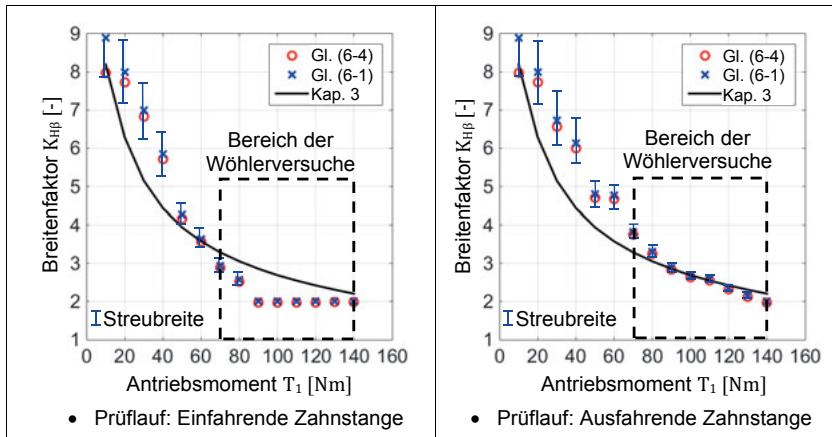
**Tabelle 6-4: Ermittlung der Kontakttragbilder in Abhängigkeit vom Antriebsmoment aus [TRAG15]**

| Merkmal                                    | Lastflanke                                                                        |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                            | $T_1 = 20 \text{ Nm}$                                                             | $T_1 = 40 \text{ Nm}$                                                             | $T_1 = 80 \text{ Nm}$                                                             | $T_1 = 100 \text{ Nm}$                                                            |
| Tragbild (einfahrend)                      |  |  |  |  |
| Tragbild (ausfahrend)                      |  |  |  |  |
| Kippwinkel $\omega_{\text{kipp}} [^\circ]$ | $\pm 1,55$                                                                        | $\pm 1,49$                                                                        | $\pm 0,83$                                                                        | $\pm 0,69$                                                                        |
| Tragbildgröße [%]                          | $(25   25) \pm 3$                                                                 | $(34   33) \pm 3$                                                                 | $(78   60) \pm 2$                                                                 | $100   75 \pm 2$                                                                  |
| Tragende Breite $b_T$ [mm]                 | $(5,5   5,5) \pm 0,6$                                                             | $(7,6   7,3) \pm 0,6$                                                             | $(17,2   13,3) \pm 0,4$                                                           | $22,1   (16,6 \pm 0,4)$                                                           |

Zahnstangen einfahrender | ausfahrender Prüfzyklus

Aus den Tragbildern von [TRAG15] lassen sich die experimentellen Breitenlastverteilungen gemäß der Gl. 6–1 aus [FRON71] beziehungsweise Gl. 6–4 der [DIN3990] bestimmen und schließlich in der Abbildung 6.4 mit dem normativen Breitenfaktor der Tragfähigkeitsberechnung vergleichen. Bei der Versuchsauswertung nach der [DIN3990] werden, wie zuvor in der Abbildung 6.1 veranschaulicht, stets etwas geringere Breitenfaktoren  $K_{\text{HB}, T}$  als nach dem Ansatz von [FRON71] ermittelt. Die Tragfähigkeitsberechnung (schwarze Kurve) ermittelt für beide Prüfläufe im Momentenbereich  $T_1 = 10 \dots 50 \text{ Nm}$  unter Berücksichtigung der vorhandenen Flanken-Winkelabweichungen  $f_{\text{H}\beta 1, 2}$ , des Servomomentes  $M_{\text{Servo}}$  und der Zahnstangenverkippung  $\omega_{\text{kipp}}$  geringere Werte der Breitenlastverteilung. Wobei sich eine größere Ablesungenauigkeit bei der Tragbildausmessung im Vergleich zur vorherigen Auswertung (vgl. Abbildung 6.1) zeigt. Mit steigendem Antriebsmoment nähern sich die experimentellen und die analytischen Breitenlastverteilungen sehr gut an, insbesondere beim Zyklus der ausfahrenden Zahnstange.

Die Abhängigkeit des Tragbildes zur Hubrichtung bleibt in der Tragfähigkeitsberechnung unberücksichtigt, sodass beim Einfahrzyklus erst bei höheren Antriebsmomenten von einem vollständigen Tragen ausgegangen wird. Die Tragfähigkeitsberechnung würde in dem Fall von einem zu hohen Beanspruchungswert ausgehen. Man würde sich in diesem Fall auf der sicheren Auslegungsseite befinden. Jedoch ergab die Analyse des Ausfallortes in den verschiedenen Wöhlerlinien stets eine Initiierung des Zahnfußbruches von den Lastflanken der ausfahrenden Hubrichtung, da dort stets die maximale Beanspruchung wirkte.



**Abbildung 6.4: Vergleich zwischen experimenteller und normativer Breitenlastverteilung in Abhängigkeit zu  $T_1$  ( $M_{\text{Servo}} = 30$  Nm)**



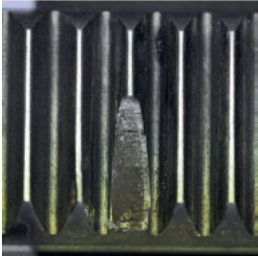

#### 6.1.4 Darstellung der Ausfallerscheinungen in den Laufversuchen

Mithilfe von einstufigen Wöhlerversuchen wurden im Momentenbereich  $T_1 = 90 \dots 140$  Nm Zahnfußbrüche an den Zahnstangenzähnen bei einem Ritzdrehwinkel von  $\varphi_1 = \pm 90^\circ$  erzeugt. In der Tabelle 6-5 werden exemplarisch die charakteristischen Ausfallerscheinungen für die einzelnen Prüfsysteme gezeigt. Die Verzahnungsparameter blieben in allen Prüfpaarungen unverändert. Da die Eingriffslinien als Folge eines Gehäusewinkels  $\delta \neq 0^\circ$  und eines Schrägungswinkels  $\beta_1 \neq 0^\circ$  schräg über den Zahn verlaufen, besteht die Zahnbruchfläche aus circa  $2/3$  der Zahnbreite  $b_{zm}$ . Zudem bewirkt die unterschiedliche Zahnsteifigkeit in Zahnhöhenrichtung eine unsymmetrische Breitenlastverteilung. Im Zahnkontakt des Ritzel-Zahnstangenpaares treten neben den typischen Axialkräften einer Schrägverzahnung zusätzlich die Reibkräfte aus der Schraubgleitung auf.

Laut der Tabelle 5-2 wird die größtmögliche Tragbildausdehnung im Betriebslastfall ( $T_1 \approx 60 \text{ Nm}$ ) im idealen Prüfsystem unter einem Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}} = 0^\circ$  erreicht. Der Flankenverschleiß im Fall 1 zeigt sich großflächig über die gesamte Zahnbreite. Vermutlich blieb ein Zahnfußbruch von der Prüfstandsüberwachung zunächst unerkannt, sodass sich zeitnah ein weiterer Zahnfußbruch einstellen konnte. Der Kopfabplatzer kann als Folgeschaden durch kurzzeitige Überbelastung entstanden sein. Bei der Zwangsführung der Zahnstange unter einen Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}} = 0,6^\circ$  (Fall 2) zeigen sich an den Zahnflanken deutlichere Verschleißmarken, insbesondere in Richtung der Stirnseiten. Das Schadensbild ähnelt stark der Ausfallerscheinung des ersten Falles. Wird die Rotation der Zahnstange um deren Hubachse ermöglicht (Fall 3), lassen sich Abrollspuren an den Zahnstirnseiten der Zahnstange erkennen. Hier dreht sich die Zahnstange nun deutlich aus dem aktiven Flankenbereich des Ritzels heraus, sodass es zeitweise zu einer erheblichen Verkürzung der Berührlinienlängen kommt. Dessen ungeachtet, reduziert sich der Verschleiß qualitativ im Vergleich zu den Fällen 1) und 2) als Folge der freien Verdrehmöglichkeit der Zahnstange. Die Zahnstange reagiert last- und eingriffsabhängig mit einer Kippwinkeländerung. Vor allem bei geringen Antriebsmomenten  $T_1$  und bei kurzzeitig hohen Kippwinkeln  $\omega_{\text{kipp}}$  wird eine Abstützung an den Rückflanken (Zweiflankenkontakt) beobachtet (siehe Tragbilder in der Tabelle 6-4).

Eine weitere Verstärkung der Kippbewegung der Zahnstange wird durch die Einleitung eines richtungsabhängigen Servomomentes erreicht. So weisen die Zahnstangenzähne des vierten Falles zum Teil erhebliche Verschleißspuren an den Stirnseiten auf, die häufig zu Eckabplatzern oder Flankenausbrüchen führen können.

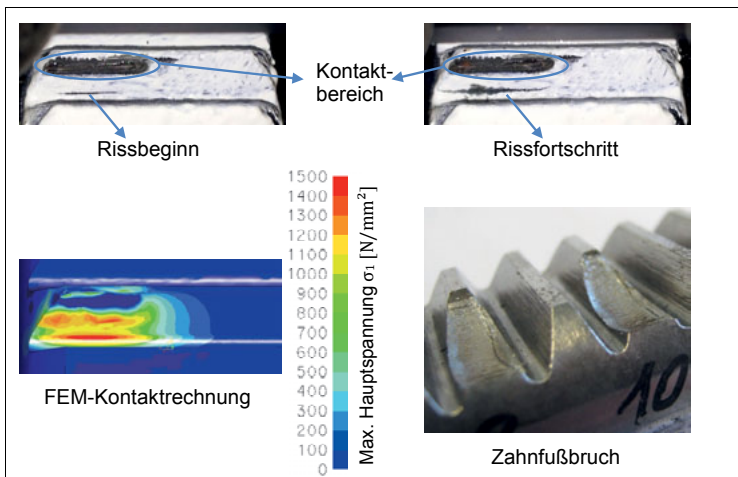
**Tabelle 6-5: Zahnfußbrüche bei den Laufversuchen aus [SCHU14], [TRAG15]**

| Wöhlerlinie                                                               | Exemplarischer Ausfall                                                              | Bemerkung                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) Ideal geführtes Prüfsystem (Reihe 1)                                   |    | Zst. -Nr.: 28<br>Ri. -Nr.: 2<br>$T_1 = 110 \text{ Nm}$<br>$M_{\text{Servo}} = 0 \text{ Nm}$<br>27578 LW     |
| 2) Zwangsverdrehtes Prüfsystem (Reihe 2)                                  |    | Zst. -Nr.: A17<br>Ri. -Nr.: A06<br>$T_1 = 140 \text{ Nm}$<br>$M_{\text{Servo}} = 0 \text{ Nm}$<br>9567 LW   |
| 3) Frei drehendes Prüfsystem (Reihe 3)                                    |   | Zst. -Nr.: 42<br>Ri. -Nr.: A18<br>$T_1 = 140 \text{ Nm}$<br>$M_{\text{Servo}} = 0 \text{ Nm}$<br>26683 LW   |
| 4) Frei drehendes Prüfsystem bei Einleitung eines Servomomentes (Reihe 4) |  | Zst. -Nr.: A104<br>Ri. -Nr.: A46<br>$T_1 = 70 \text{ Nm}$<br>$M_{\text{Servo}} = 30 \text{ Nm}$<br>35553 LW |

## 6.2 Vorbetrachtung für den Pulsatorversuch

Die Untersuchung des Kontaktverhaltens zwischen den Zahnstangenzähnen und dem Pulsatordruckstück war der Hauptbestandteil der Abschlussarbeit von [GERM12]. Gerscheid ermittelte anhand des Pulsatorversuches nach Abschnitt 5.2.2 verschiedene Zahnfußbruch-Wöhlerlinien für geradzahnzahn Zahnstangenzähne.

Durch die Verwendung eines speziellen Kontrastmittels, bestehend aus Glycerin, Zinkoxid und Ethanol, kann sowohl das Tragbild dargestellt werden als auch eine Risserkennung und -fortschreitung bei laufendem Versuch detektiert werden. Die Anwendung des Kontrastmittels wird anhand der Abbildung 6.5 deutlich. Während sich der Kontaktbereich zwischen Zahn und Gegenhalter im Prüflauf kaum verändert, führen die Kapillarkräfte am beginnenden Anriss des Zahnfußes bereits zu einer sichtbaren Markierung unterhalb der Zahnfußnutzlinie  $\Gamma_{N2}$ . Mit zunehmender Versuchsdauer schreitet die Rissentstehung voran und der Ausschlag des Kontrastmittels verstärkt sich. Das Risswachstum kennzeichnet den späteren Zahnfußbruch bereits in einem sehr frühen Versuchsstadium. Auch eine FEM-Kontaktanalyse zwischen dem Zahnstangenzahn und dem Gegenhalter weist eine gute Übereinstimmung zur Markierung des Kontrastmittels auf. Im Zahnfußbereich stellt sich bei Kraftereinleitung von 10 kN in axialer Spurstangenrichtung sowie unter Verwendung der konjugierten Verzahnung ein Beanspruchungsniveau von etwa  $\sigma_{F2} = 1450 \text{ N/mm}^2$  ein.



**Abbildung 6.5: Versagensmechanismus beim Pulsatorversuch aus [GERM12]**

### 6.3 Auswertung der Wöhlerlinien des Lauf- und Pulsatorversuches

#### 6.3.1 Statistische Versuchsauswertung am Beispiel der Versuchsreihe Nr. 3

Die Berücksichtigung der statistischen Versuchsstreuung der Wöhlerversuche erfolgt in Anlehnung an den FVA-Bericht Nr. 304. Für die Ermittlung der Streuung beziehungsweise der Streuungsverteilung werden eine Normalverteilung, eine logarithmische Normalverteilung sowie eine zweiparametrische Weibullverteilung untersucht.

Die statistische Auswertung von Versuchen der sogenannten Perlschnur- oder Treppenstufenmethode kann wegen der geringen Versuchsanzahl je Lasthorizont nicht nach üblichem Vorgehen durchgeführt werden. Daher werden nach [FVA304] bzw. [DIN50100] sämtliche Versuchspunkte auf einen gemeinsamen Lasthorizont verschoben, wodurch ein Horizontenverfahren imitiert wird. Somit werden sowohl die jeweiligen Spannungsamplituden  $\sigma_{a,i}$  als auch die zugehörigen Bruchlastspielzahlen  $N_i$  der Perlschnurmethode auf einen gemeinsamen Lasthorizont  $\sigma_{\text{äqv}}$  verschoben, um die Streuung unabhängig vom Lasthorizont bestimmen zu können. Diese Verschiebung bedingt ebenfalls eine Anpassung der Bruchlastspielzahlen ( $N_i$ ) jedes Wöhlerpunktes auf die Bruchlastspielzahl am Äquivalenzpunkt ( $N_{\text{äqv}}$ ). Nun kann die Standardabweichung  $\sigma(N_i)$  der Bruchlastspielzahlen  $N_i$  in Bezug auf den Erwartungswert  $\mu(N_i)$  berechnet werden. Die Größe  $t$  wird als Abstand vom Mittelwert bezeichnet und nach Gl. 6–5 aus [FVA304] bei einer standardisierten Normalverteilung als Vielfaches der Standardabweichung  $\sigma$  ausgedrückt:

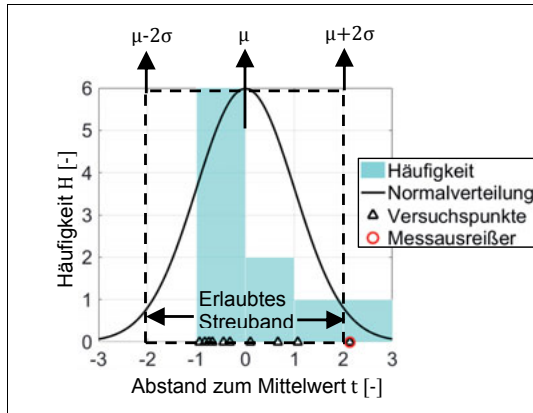
$$t = \frac{N_i - \mu}{\sigma} \quad , \text{ wobei} \quad \begin{array}{l} \mu \dots \text{Erwartungswert} \\ \sigma \dots \text{Standardabweichung} \end{array} \quad (6-5)$$

Die Gl. 6–6 beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte- beziehungsweise Verteilungsdichtefunktion  $f(t)$  für eine Normalverteilung:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (6-6)$$

In der Abbildung 6.6 wird die Streuung jedes Wöhlerpunktes um den Erwartungswert  $\mu$  durch die Häufigkeit  $H$  am Beispiel der Versuchsreihe Nr. 3 dargestellt. Falls sich ein Wöhlerpunkt im Streuband  $-2 \leq \sigma \leq 2$  befindet, wird der Versuch als gültig definiert. Alle Wöhlerpunkte über

dieses Streuband hinaus werden als Messausreißer detektiert und für die Ermittlung der Spannungswöhlerlinie ausgeschlossen. Bei der vorliegenden Versuchsreihe Nr. 3 kann ein Versuchspunkt (rote Markierung) mit einer Standardabweichung  $\sigma = + 2,13$  ausgeschlossen werden.



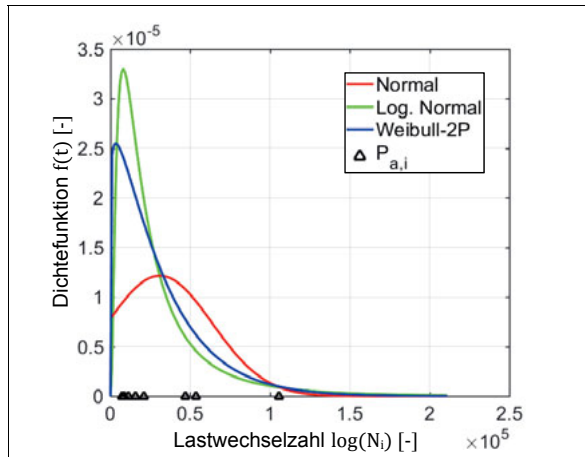
**Abbildung 6.6: Häufigkeitsverteilung exemplarisch an der Versuchsreihe Nr.3**

Laut [FVA304] steht die Darstellung in der Abbildung 6.6 wegen der Festlegung auf eine Normalverteilung häufig in der Diskussion. Die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmodelle zur Darstellung der Grundgesamtheit werden in der Abbildung 6.7 näher erläutert. Hierfür werden den Ausfallpunkten der Versuchsreihe Nr.3 die Dichtefunktionen  $f(t)$ , wobei  $t = N_1$  entspricht, der jeweiligen Verteilungen gegenübergestellt. Die deutlich höhere Ausfallwahrscheinlichkeit bei geringen Lastwechselzahlen bzw. bei großen Antriebsmomenten wird an der Lage der Ausfallpunkte entlang der Abszisse besonders hervorgehoben. Dieses charakteristische Verhalten spiegelt sich in den Dichtefunktionen der logarithmischen Normalverteilung und zweiparametrischen Weibull-Verteilung deutlich besser wieder. Laut Bertsche und Lechner in [BERT04] definiert sich die Verteilungsfunktion  $F(t)$  als Integral über der Dichtefunktion  $f(t)$ .

Um die statistische Auswertung auf eine solide Basis zu setzen, bietet sich die Darstellung der Verteilungsfunktionen  $F(t)$  im Wahrscheinlichkeitsnetz an. Eine gute Abbildungsqualität einer Grundgesamtheit bezüglich des Stichprobenumfanges zeichnet sich durch eine hohe, lineare Approximation der Ranggrößen aus. Für die unterschiedlichen Verteilungen werden die



jeweiligen Verteilungsfunktionen  $F(t)$  mit den Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_{A,i}$  der einzelnen Ranggrößen des Stichprobenumfanges  $i=1\dots n$  im Wahrscheinlichkeitsnetz verglichen.



**Abbildung 6.7: Dichtefunktionen der verschiedenen Ansätze für die Versuchsreihe Nr.3**

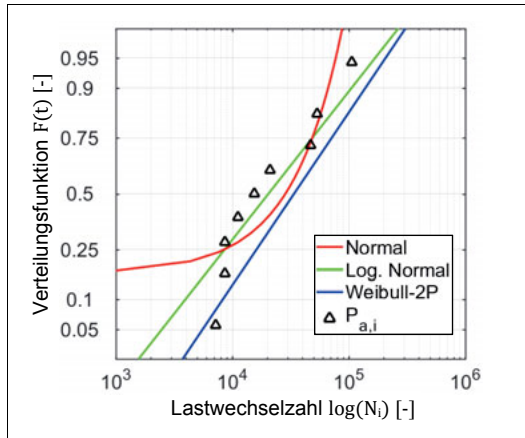
Hierfür lassen sich die einzelnen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_{A,i}$  nach [FVA304], [BERT04] aus dem Stichprobenumfang der  $n$  Versuche nach Gl. 6–7 wie folgt ermitteln:

$$P_{A,i} = \frac{3i - 1}{3n + 1} \quad \text{mit } i = 1 \dots n \quad (6-7)$$

Die Verteilungsfunktion  $F(t)$  einer Normalverteilung lässt, aufgetragen in dem Wahrscheinlichkeitsnetz der Abbildung 6.8, keine eindeutige lineare Abhängigkeit im Vergleich zu den ermittelten Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_{A,i}$  nach Gl. 6–7 erkennen. Insbesondere in den Lastwechselzahlbereichen  $0,1 \cdot 10^5 \text{ LW} < N_i < 0,8 \cdot 10^5 \text{ LW}$  werden deutliche Abweichungen zwischen den Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_{A,i}$  und der Normalverteilung sichtbar. Dagegen erzielt die Hinterlegung einer logarithmischen Normalverteilung oder einer zweiparametrischen Weibull-Verteilung in der Abbildung 6.8 eine sehr gute Approximation zu den Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_{A,i}$ . Die Weibull-2P-Verteilung eignet sich im Vergleich zur log-Normalverteilung besonders für Wahrscheinlichkeiten  $P_{A,i} \geq 95\%$ . Um den Stichprobenversuch im

Wahrscheinlichkeitsbereich  $P_{A,i} \leq 5\%$  weiter zu verbessern, wäre eine Weibull-3P-Verteilung als Verteilungsfunktion denkbar.

Da die Ableitung der Zahnfußfestigkeitswöhlerlinie im nachfolgenden Kapitel 6.3.2 auf Basis einer Ausfallwahrscheinlichkeit von  $P_A = 10 \dots 50 \dots 90\%$  erfolgt, ist hierfür die Anwendung der log-Normalverteilung ohne Einschränkung möglich.



**Abbildung 6.8: Wahrscheinlichkeitsnetz für die Versuchsreihe Nr. 3 in Abhängigkeit zur Verteilungsfunktion**

**Tabelle 6-6: Parameter der Verteilungsfunktionen**

| Normalverteilung | log-Normalverteilung | Weibull-2P-Verteilung |
|------------------|----------------------|-----------------------|
| $\mu = 32426$    | $\mu = 9,977$        | $A = 34086$           |
| $\sigma = 33073$ | $\sigma = 0,937$     | $B = 1,130$           |

### 6.3.2 Darstellung der Zahnfußfestigkeitswöhlerlinien

Nach der Ermittlung der Versuchsstreuung und der Eliminierung der Versuchspunkte über das zulässige Streuband können nun die  $\sigma_{\text{Fillm-N}}$ -Wöhlerlinien berechnet werden. Ausgehend von den  $T_1$ -N-Wöhlerlinien wird für die Abschätzung des Beanspruchungswertes das Vorgehen zur Tragfähigkeitsermittlung aus Kapitel 3 angewendet. Die Beanspruchungsermittlung eines

jeden Wöhlerpunktes erfordert die Berücksichtigung der Verzahnungs- und Umfeldabweichungen, der Tragbildverlagerung infolge der Elastizitäten des Verzahnungsumfeldes sowie der elastischen Nachgiebigkeiten am Ritzel-Zahnstangenpaar. Weiterhin bewirken die experimentell eingestellten Druckstückspiele  $\Delta s$  und Kippmomente  $M_{\text{Kipp}}$  eine Änderung des Beanspruchungsniveaus. Eine Schlüsselgröße für die Ermittlung der Lastverteilungsfaktoren ist die wirksame Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  aus Abschnitt 3.6, deren Anteile aus den Fertigungsabweichungen  $f_{\beta z}$  sowie aus der Verdrehabweichung  $f_{\beta \omega}$  für jeden Wöhlerversuch zu berechnen sind. Die geometrischen Lageabweichungen der Ritzellagerung  $f_{z\beta}$  werden bei allen Versuchen als konstant angenommen. Die Abweichungen infolge elastischer Umfeldverformung sind in Abhängigkeit von der wirkenden Belastung gemäß DIN 3990 zu ermitteln.

Bei einem zwangsverdrehen Prüfsystem muss die Verdrehabweichung  $f_{\beta \omega}$  als Maß des Kippwinkels  $\omega_{\text{kippp}}$  in der Berechnung der wirksamen Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  berücksichtigt werden. Falls sich die Prüfzahnstange bezüglich der Verdrehneigung, wie in der Versuchsreihe Nr. 3 um die Hubachse rotieren kann, stellt sich bei dem Abwälzen ein stetig veränderlicher Kippwinkel  $\omega_{\text{kippp}}$  ein. Trotz einer vergleichbaren Zahnstangenverkipfung bei den verschiedenen Prüfsystemen, steigt die ertragbare Lastwechselzahl, wie in der Abbildung 6.3 gezeigt, insbesondere bei der freiverdrehbaren Zahnstange deutlich an. Die freie Rotation der Zahnstange wirkt sich positiv auf die Breitenlastverteilung aus, da die mögliche Verdrehung um die Hubachse den Einfluss der Verdrehabweichung  $f_{\beta \omega}$  erheblich abmindern kann. Das heißt, dass sich die Zahnstange bei aufkommenden Lastspitzen entsprechend eines Lastausgleiches verdreht, sodass sich der Breitenfaktor  $K_{H\beta}$  reduziert. Diese positive Wirkung beschränkt sich auf den Fall, dass sich die Lage des Tragbildes noch nicht an den Stirnkanten befindet.

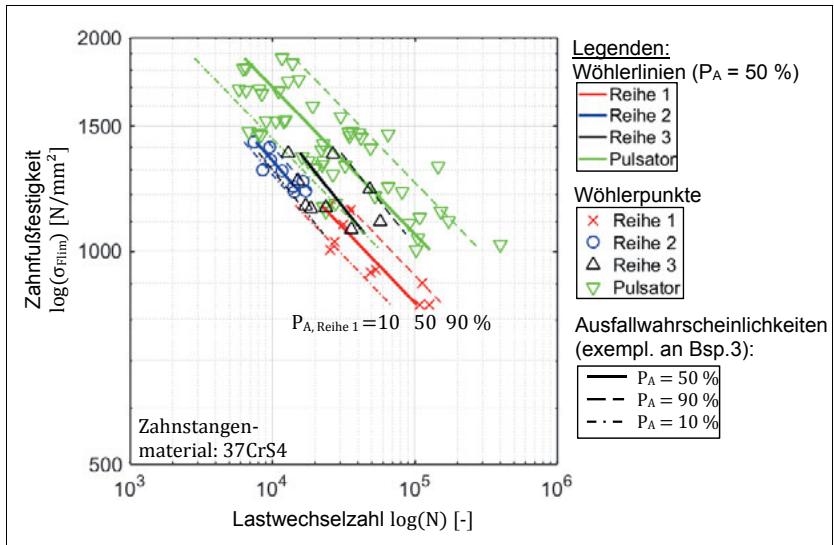
Für die normative Berechnungsmethode bedeutet das den Wegfall der Verdrehabweichung  $f_{\beta \omega}$  als Anteil an der wirksamen Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$ , falls sich die Zahnstange bezüglich der Verdrehneigung selbst einstellen kann. Übertragen auf die Ritzel-Zahnstangenpaare im Lenkgetriebe folgt, dass die Verdrehabweichung  $f_{\beta \omega}$  nur bei den Sensorverzahnungen von EPSdp und EPSapa (siehe Abbildung 2.12) zu beachten ist, da in diesen Fällen der Kippwinkel  $\omega_{\text{kippp}}$  stets von der servoseitigen Antriebseinheit vorgegeben wird.

Die so ermittelten Spannungswöhlerlinien werden für die Prüfsysteme 1 bis 3 anhand einer normierten Zahnfußfestigkeit  $\sigma_{\text{Flim}}$  in der Abbildung 6.9 vergleichend zu den Pulsatorversuchen dargestellt. Zu den Versuchswöhlerlinien ( $P_A = 50\%$ ) werden in dem Diagramm die abgeleiteten Ergebnisse für die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_A = 10; 90\%$  als gestrichelte

Linien angezeigt. Einerseits finden die Wöhlerlinien der Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_A = 10\%$  häufig Verwendung in der Verzahnungsauslegung, beispielsweise als Basis einer Lebensdauerabschätzung. Andererseits soll so ein Maß für die Versuchsstreuung der jeweiligen Versuchsreihe graphisch hervorgehoben werden.

Bei dem Vergleich des Wöhlerlinienexponenten  $k$  von der ersten Versuchsreihe ( $\omega_{\text{kipp}} = 0^\circ$ ; zwangsverdreh) und der zweiten Versuchsreihe ( $\omega_{\text{kipp}} = 0,6^\circ$ ; zwangsverdreh) wird offensichtlich, dass beide Wöhlerliniensteigungen annähernd identisch sind. Daneben führt der größere Beitrag der Verdrehabweichung  $f_{\beta\omega}$  an der wirksamen Flankenlinienabweichung  $F_{\beta\gamma}$  an den Zähnen der zweiten Versuchsreihe zu einem höheren Beanspruchungsniveau. Im Gegensatz zu den Prüfsystemen mit festeingestellten Kippwinkeln  $\omega_{\text{kipp}}$  liegt die Zahnfußfestigkeit  $\sigma_{\text{Flim}}$  bei der dritten Versuchsreihe ( $\omega_{\text{kipp, m}} \approx \pm 0,6^\circ$ , freiverdrehbar) auffallend höher. Durch die sich selbststellende Zahnstangenverkippung um die Hubachse innerhalb der dritten Versuchsreihe ändert sich der Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}}$  in Abhängigkeit zur Eingriffsstellung, zum Antriebsmoment  $T_1$  und zu den wirkenden Fertigungsabweichungen. Der Einflüsse von der Eingriffsstellung und des Antriebsmomentes auf die Kippwinkelausschläge wurden bereits in der Abbildung 6.2 aufgezeigt, wobei der Abstand zwischen dem maximalen und mittleren Kippwinkel nur aus der Eingriffsstellung verursacht wird. Vorübergehend geringere Kippwinkelausschläge verringern das Beanspruchungsniveau in der dritten Versuchsreihe über eine Eingriffsteilung zum Teil erheblich. Demzufolge steigt die ertragbare Bruchlastspielzahl an. Die Grübchenfestigkeit  $\sigma_{\text{Hlim}}$  bleibt von der Kippwinkeländerung bei den freiverdrehend gelagerten Prüfsystemen unbeeinflusst. Durch die Tragbildreduzierung und –verlagerung in Richtung der Zahnstirnseiten ist ein größerer Verschleißabtrag an den Zahnflanken als Folge von höheren Hertzschen Pressungen zu erwarten.

Darüber hinaus fällt die größere Streubreite der Wöhlerpunkte innerhalb der dritten Versuchsreihe auf, die auf die unterschiedlichen Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}}$  bei den jeweiligen Wöhlerversuchspunkten zurückzuführen sind. Zwar lassen sich die Einflüsse von den Fertigungsabweichungen auf den Kippwinkel  $\omega_{\text{kipp}}$  nahezu vernachlässigen, doch geringe Abweichungen in der Druckstückspieleinstellung können die Zahnstangenverkippung (siehe auch Abbildung 3.14) im Betrieb beeinflussen. Im Prüfstandsversuch erfolgt die anfängliche Justierung des Druckstückspieles zwischen  $50 \mu\text{m} \leq \Delta s \leq 100 \mu\text{m}$ , wobei der exakte Wert in Bezug zum Wöhlerversuch unbekannt ist. Somit ist es erforderlich, dass ein Wert des Druckstückspieles  $\Delta s$  innerhalb des obigen Bereiches für die Nachrechnung der einzelnen Versuchspunkte angenommen wird. Die Wöhlerlinien der Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_A = 10\%$  sind für die ersten drei Versuchsreihen nahezu deckungsgleich.



**Abbildung 6.9: Zahnfußfestigkeit  $\sigma_{\text{Flim}}$  des Zahnstangenzahnes in Abhängigkeit zur Betriebsart**

Im Pulsatorversuch stellen sich im Vergleich zu den Laufversuchen über das gesamte Beanspruchungsspektrum höhere Lastwechselzahlen bis zum Zahnfußbruch ein. Dennoch bleibt der Wöhlerlinienexponent  $k$  nahezu unverändert. Die Berechnung der Zahnfußbeanspruchung erfolgt unter Verwendung der Pulsatorkraft nach [TOBI01]. Der Stirnfaktor  $K_{Fa}$ , der Dynamik- ( $K_v$ ) und der Anwendungsfaktor ( $K_A$ ) sowie der Schrägenfaktor  $Y_\beta$  können bei den vorliegenden Pulsatorversuchen vernachlässigt werden. Die auffällig große Streuung ist auf den Prüfstands Aufbau zurückzuführen, da sowohl die Einstellung des Zahneingriffes als auch die Einbringung der Gegenhaltekraft  $F_S$  (siehe Abbildung 5.3) manuell erfolgte.

In der Arbeit von [MAUC99] wird ein Umrechnungsfaktor von  $f_{\text{Korr}} = 0,90$  zwischen Lauf- und Pulsatorversuchen für ungestrahlte und gestrahlte Zahnräder angegeben. Wird nun an einer beliebigen Lastwechselzahl der Quotient der Zahnfußfestigkeiten des Lauf- und des Pulsatorversuches (Versuchswöhlerlinien,  $P_A = 50\%$ ) gebildet, erhält man den Umrechnungsfaktor von  $f_{\text{Korr}} = 0,81$  bei  $N = 24.000$  LW. Der Umrechnungsfaktor tendiert zu  $f_{\text{Korr}} = 0,85$  bei  $N = 40.000$  LW, falls sich der Kippwinkel  $w_{\text{kipp}}$  im Laufversuch frei um die Zahnstangenhubachse einstellen kann.

## 7 Zusammenfassung, Fazit und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Anwendbarkeit der Gesetzmäßigkeiten von Stirnradverzahnungen auf Zahnstangenverzahnungen im Hinblick auf das Vorgehen der normativen Tragfähigkeitsberechnung der DIN 3990 beziehungsweise ISO 6336 sowie auf die Übertragbarkeit der örtlichen Betrachtungsweise der Belastung und Beanspruchung aus [LINK10] untersucht.

Es konnte gezeigt werden, dass das normative Verfahren im Hinblick auf eine beanspruchungsgerechte Verzahnungsauslegung von Zahnstangengetrieben nicht ausreichend ist. Hierbei war, insbesondere für die Abbildung einer Zahnstangenlenkung, die Erweiterung des Verzahnungsumfeldes erforderlich. Die Zahnstangenlagerung über zwei angefederte Druckstücke ermöglicht sowohl eine Zahnstangenverdrehung entlang der Hubachse, als auch die Achsabstandsänderung im Betrieb. Über eine äquivalente Erhöhung der Zahnumfangskraft wurde so die Einleitung eines Kippmomentes oder die Entstehung einer Klemmkraft in der Tragfähigkeitsberechnung berücksichtigt. Hierbei stellte sich in FEM-Berechnungen heraus, dass sich die Klemmkraft größtenteils an der Lastflanke abstützt. Weiter zielte eine genauere Berechnung der Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit für Zahnstangengetriebe sowohl auf die Abbildung eines Ritzel-Zahnstangen-Kontaktes als auch auf die Berücksichtigung der Zahnstangengeometrie. Auf die Verwendung des Zahnstangenzahnes als Ersatzstirnrad mit großer Zähnezahl konnte weitgehend verzichtet werden.

Ausgehend von der analytischen Abschätzung des Kippwinkels  $\omega_{\text{kipp}}$  in Abhängigkeit eines gegebenen Druckstückspiels  $\Delta s$  wurde eine analytische Methode zur Berechnung des lastfreien Kippwinkels definiert. Diese Näherungslösung wies bei Betriebslasten sehr gute Übereinstimmungen zur FEM-Berechnung und zur Kippwinkelmessung am Prüfstand auf. Abweichungen der analytischen Abschätzung traten erst bei einer tragenden Breite  $b_T > 0,5 b_{2m}$  auf. Ab diesem Zeitpunkt änderte sich das Vorzeichen des Kippmomentes  $M_{vz}$  und ein Zurückdrehen der Zahnstange wurde initiiert. Die Wirkung eines Kippwinkels  $\omega_{\text{kipp}}$  konnte als Maß einer Verdrehabweichung  $f_{\beta\omega}$  auf die wirksame Flankenlinienabweichung  $F_{\beta y}$  und demzufolge auch auf die Breitenlastverteilungsfaktoren  $K_{H\beta}$ ,  $K_{F\beta}$  umgerechnet werden. Diese Vorgehensweise wurde zunächst durch eine FEM-Untersuchung verifiziert, wobei sich eine hohe Korrelation beider Methoden bestätigte. Zusätzlich erfolgte ein Nachweis der analytischen Modifikationen über den Vergleich zwischen den normativen Breitenfaktoren und

der experimentellen Breitenlastverteilung, die durch Tragbilder bei verschiedenen Teillasten und Betriebszuständen bestimmt wurden.

Weiter galt es, die hergeleiteten Einflüsse aus der Zahnstangenlagerung (Kipp- und Klemmeffekte, variabler Achsabstand, Kippmomente) für die Umfelderverweiterung der DIN 3990 und ISO 6336 durch Wöhlerversuche mit einstellbaren Umfeldparametern zu bestätigen. Der Lenkungsprüfstand für Zeitfestigkeitsversuche wurde am IMM der TU Dresden so konzipiert, dass Wöhlerversuche für die Ritzel-Zahnstangenpaarungen unter verschiedenen Randbedingungen des Verzahnungsumfeldes, insbesondere für unterschiedliche Freiheitsgrade der Zahnstangenlagerung, einstellbar waren. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Auswertung der Zahnfußbruch-Wöhlerversuche am Zahnstangenzahn.

Auf der Grundlage von den experimentellen Untersuchungen konnte das Verständnis über die Kreuzinflüsse zwischen den unterschiedlichen Freiheitsgraden der Zahnstange hinsichtlich Verkippung und Achsabstandsänderung sowie dem Vorhandensein von Kippmomenten  $M_{\text{Kipp}}$  ( $M_{\text{vz}}$ ,  $M_{\text{servo}}$ ) auf die Zahnbelastung und -beanspruchung entscheidend verbessert werden. Die Richtigkeit der Integration des Verzahnungsumfeldes in die Tragfähigkeitsberechnung konnte nachgewiesen werden. Die ertragbaren Bruchlastspielzahlen bei den Prüfsystemen ohne zusätzliche Einleitung eines Kippmomentes  $M_{\text{Kipp}}$  verdeutlichen einen positiven Effekt der freien Zahnstangenverdrehung ( $\omega_{\text{kipp}} = \pm 0,6^\circ$ ) auf die Bauteillebensdauer im Vergleich zu der Zahnstangenführung in einer Zwangsverdrehung ( $\omega_{\text{kipp}} = 0^\circ; 0,6^\circ$ ). Bei Einleitung eines zusätzlichen Kippmomentes  $M_{\text{Kipp}}$  um die Zahnstangenhubachse konnten ebenfalls die Einflüsse auf die Tragbildausbildung und -verlagerung sowie auf die Flanken- und Zahnfußtragfähigkeit dargestellt werden. Die Annahmen für die normativen Berechnungsverfahren zeigten eine hohe Abbildungsgenauigkeit bei der Abschätzung der Breitenfaktoren  $K_{\text{H}\beta}$  im Vergleich zu den experimentellen Breitenlastverteilungen. Zudem wurden die Festigkeitswerte  $\sigma_{\text{Flim}}$  des Zahnstangenzahnes aus den Wöhlerversuchen mit den Beanspruchbarkeiten des Zahnfußes bei einem Pulsatorversuch verglichen. Dadurch konnte nach [MAUC99] ein Umrechnungsfaktor von Lauf- zu Pulsatorversuch von  $0,81 \leq f_{\text{Korr}} \leq 0,85$  errechnet werden.

Ein weiterer Aspekt der vorliegenden Arbeit bezieht sich auf die örtliche Betrachtungsweise der Belastung und Beanspruchung am Ritzel-Zahnstangenpaar. Bei dem Vergleich zwischen den Zahnradern der Lenkverzahnung und den typischen Stirnradzähnen nach [LINK10] ergaben sich Unterschiede sowohl in der Abklingbreite der Verformungseinflussfunktion und in der örtlichen Steifigkeitssituation in Zahnrandnähe des Zahnstangenzahnes als auch im Bereich des freien beziehungsweise gebundenen Verzahnungsauslaufes des Lenkritzels.

Zudem wurde eine alternative, numerische Berechnungsmethode für die Verformungseinflussfunktion eines Stirnrad- oder Zahnstangenzahnes, basierend auf einer eingespannten Platte, untersucht.

Die so berechnete Verformungseinflussfunktion für allgemeine Plattenprofile gemäß [HERT63] wies für das Lenkritzell bei zunehmender Berechnungsdauer eine höhere Übereinstimmung zu FEM-Ergebnissen auf als die allgemeine Verformungseinflussfunktion nach [LINK10]. In den untersuchten Eingriffsstellungen zeigten die Berechnungen der Last- und Spannungsverteilungen jedoch nur geringe Auswirkungen der Verformungseinflussfunktion auf das jeweilige Ergebnis. Somit kann die allgemeine Verformungseinflussfunktion aus [LINK10] auch für ein unendlich breites Ritzel-Zahnstangenpaar angewendet werden.

Die örtlichen Belastungen im Zahnkontakt sowie die Beanspruchungen der Zahnflanke und des Zahnfußes werden bei Tragbildverlagerung in Richtung der Zahnstirnseiten maßgeblich durch die Stirnseitengeometrie des Zahnstangenzahnes beeinflusst. Ein besonderes Augenmerk dieser Arbeit lag auf der Einflussbestimmung einer trapezförmigen Stirnseitengeometrie auf die Last- und Spannungsverteilung sowie deren Abbildung als prototypenähnlicher Methodenträger. Hierfür wurde der Reflexionsgrad basierend auf der Zustandsfunktion der Zahnverformung  $f_{\text{Rand1}}$  aus [KUNE99] eingeführt und dessen Verhalten im Hinblick auf eine Änderung der örtlichen Steifigkeit an der Spiegelungs- beziehungsweise Reflexionsebene definiert. Später wurde die Änderung des Reflexionsgrades  $f_{\text{Rand1}}$  sowohl an verschiedenen trapezförmigen Stirnseitengeometrien in Abhängigkeit des Stirnseitenwinkels  $\theta$  als auch an verschiedenen Verzahnungsausläufen in Abhängigkeit des Auslaufwinkels  $\gamma$  mithilfe von FEM-Berechnungen nachgewiesen. Somit konnte das Reflexionsverhalten an der Reflexionsebene in Form einer analytischen Näherungslösung für  $f_{\text{Rand1}} = f(\theta, \gamma)$  abgeleitet werden.

Die charakteristische Stirnseitengeometrie des Zahnstangenzahnes beeinflusst auch die Randeinflussfunktion der Zahnverformung  $f_{\text{Rand2}}$  nach [KUNE99] beziehungsweise die Korrekturfunktion  $W_f$  nach [KLIN08]. Die Randeinflussfunktion  $f_{\text{Rand2}}$  wurde durch eine Einzelasteinleitung in Zahnrandnähe einer spitzen oder stumpfen Zahnstirnseite exemplarisch für ein typisches Zahnstangen-Rundprofil ( $\theta = 60^\circ$ ) in der FEM ermittelt. Im Vergleich zu den schrägverzahnenden Stirnrädern ließ sich am Zahnstangenzahn infolge der geneigten Stirnkante ein deutlich geringerer Einfluss an der spitzen und stumpfen Stirnseite feststellen, sodass eine Anpassung zum standardisierten Vorgehen aus [LINK10] erforderlich wurde. Während für die stumpfe Stirnseitengeometrie des Zahnstangenzahnes ein konstanter Wert der Randeinflussfunktion von  $f_{\text{Rand2}} = 1,15$  eine gute Näherung bedeutet, wurde für die spitze Stirnseiten-



geometrie eine Polynomfunktion 2. Grades ermittelt. Die Polynomfunktion ersetzt am Zahnstangenzahn die Randeinflussfunktion der Zahnverformung  $W_f$  (bzw.  $f_{\text{Rand}2}$ ) nach [KLIN08], [KUNE99]. Analog zum standardisierten Vorgehen enthält die Polynomfunktion die Einflüsse des Schrägungswinkels und des Randabstandes der Lasteinleitungsstelle zur Reflexionsebene im untersuchten Parameterbereich  $0^\circ \leq \beta_{\text{spitz}} \leq 40^\circ$  sowie  $0 \leq x_j^* \leq 2$ .

Weiterhin wurde die Auswirkung eines angrenzenden Verzahnungsauslaufes am Beispiel einer lokalen Steifigkeitserhöhung auf den Reflexionsgrad untersucht. Ein negativer Reflexionsgrad  $f_{\text{Rand}1} < 0$ , abgeleitet aus den FEM-Berechnungen, bestätigte die vorhergehende Definition des Reflexionsverhaltens. Durch die Erweiterung der Faktoren  $f_{\text{Rand}1,2}$  als ein Bestandteil der Verformungseinflussfunktion können derartige Steifigkeitseffekte in der örtlichen Betrachtungsweise der Belastung und Beanspruchung zukünftig bei Lenkgetrieben berücksichtigt werden.

Zusammenfassend erzielen sowohl die Anpassungen der Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeitsberechnung für Zahnstangengetriebe als auch die Erweiterungen der örtlichen Betrachtung der Last- und Spannungsverteilung eine deutliche, beanspruchungsgerechtere Auslegung eines Ritzel-Zahnstangenpaares. Die modifizierte Beanspruchungsermittlung und die Bereitstellung von Bauteilwöhlerlinien bildet die zukünftige Basis einer genaueren Lebensdauerabschätzung.

## 7.2 Fazit und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde die beanspruchungsgerechte Auslegung eines Zahnstangengetriebes auf Basis der normativen Tragfähigkeitsberechnungen der [DIN3990] und [ISO6336] überprüft und für eine genauere Abbildung des Zahnstangengetriebes modifiziert. Somit können die Auswirkungen von den Verzahnungsabweichungen, beispielsweise nach der DIN 3962, von der Zahnstangenverkippung um die Zahnstangenhubachse infolge der Druckstücklagerung sowie die Kippmomenteneinleitung bereits in der Verzahnungsauslegung berücksichtigt werden. Durch die genaue Kenntnis dieser Einflussparameter auf die Beanspruchungssituation im Ritzel-Zahnstangenpaar kann zukünftig für jede Verzahnungsvariante ein individuelles Toleranzband für die Fertigung empfohlen werden. Durch die verbesserte Abschätzung der Stirn- und Breitenlastverteilungsfaktoren werden diejenigen Verzahnungsauslegungen für die Erprobung bevorzugt, die sich im Betriebszustand in Bezug auf die Tragfähigkeit besonders robust verhalten.

Zudem erforderten die charakteristischen Besonderheiten der örtlichen Steifigkeiten in Zahnrandnähe an einem geräumten Zahnstangen- und wälzgefrästen Ritzelzahn eine Erweiterung der Betrachtungsweise der Verformungseinflussfunktion um den Reflexionsgrad. Ein Vergleich zwischen dem prototypenähnlichen Methodenträger und der FEM zeigte im Einzeleingriff einer geradverzahnten Zahnpaarung eine maximale Abweichung von ca. +10 % in der Zahnfußbiegespannungsverteilung beziehungsweise von ca. +3 % bei einer schrägverzahnten Zahnpaarung. Durch das nachgewiesene Verhalten des Reflexionsgrades  $f_{\text{Rand1}}$  im Bereich von  $f_{\text{Rand1}} = 0 \dots 1$  kann der prototypenähnliche Methodenträger zur Berechnung der Last- und Spannungsverteilung in Zukunft um die Stirnseiteneffekte bei getaumelten Zahnstangen erweitert werden. Im Gegensatz zu den untersuchten Zahnstangen verhält sich die Stirnkante bei getaumelten Zahnstangen als Folge unvollständiger Zahnausformung deutlich undefinierter.

Zukünftig gilt es neben der beanspruchungsgerechten Verzahnungsauslegung auch eine fertigungsgerechte Verzahnungsgeometrie bereitzustellen. Hierbei ist im Besonderen das Taumelverfahren in der Zahnstangenfertigung zu erwähnen, da die Wahl der Verzahnungsparameter die Ausformungsqualität des Zahnstangenzahnes, speziell im Bereich der Stirnkanten beeinflussen kann. Eine genaue Kenntnis von Vorhaltewerten in Abhängigkeit von der Verzahnungsgeometrie und von dem Fertigungsverfahren würde die Aussagefähigkeit in Bezug auf die Tragfähigkeit und Lebensdauer nochmals erhöhen.

Weiterhin würde die Erweiterung des prototypenähnlichen Methodenträgers von dem Einzelzahnpaar hin zu einer Verzahnungspaarung mit mehreren Zahnkontaktpaaren eine genauere Berechnung der Belastung und Beanspruchung einer Ritzel-Zahnstangenpaarung bewirken. Die so resultierende Eingriffsfedersteifigkeit anstelle der Einzelfedersteifigkeit in Abhängigkeit zum Ritzeldrehwinkel würde eine bessere Bewertung des Laufverhaltens ermöglichen. Darüber hinaus würde die Berechnung des Tragbildes unter Last eine örtliche Verschleißberechnung erlauben.

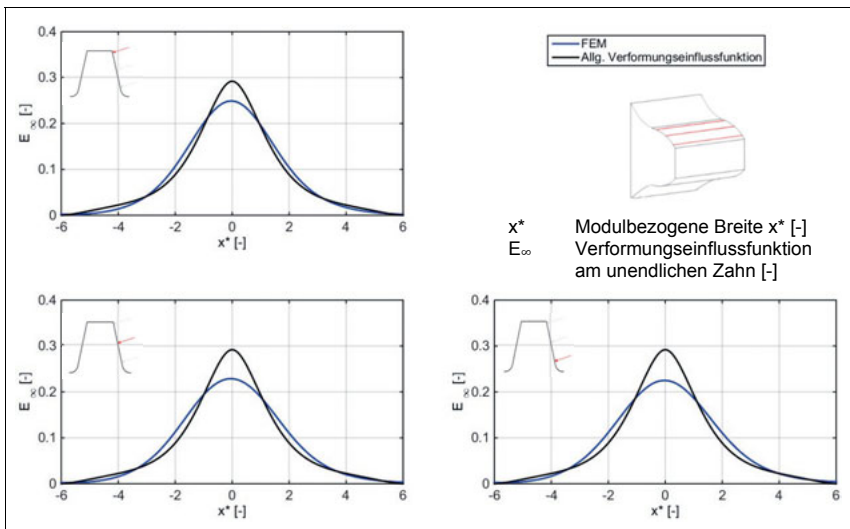
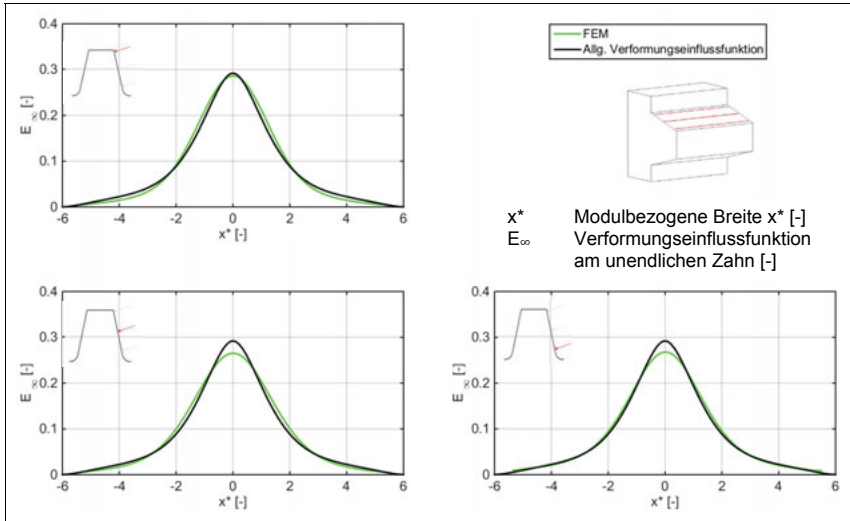
## Anhang A: Verzahnungsdatenblätter A-E

| Allgemeine Größen     | Symbol     | Einheit       | A      | B     | C     | D     | E     | F      |
|-----------------------|------------|---------------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
|                       |            |               | 09006  | 01059 | 11111 | 10071 | 06120 | 08003  |
| Übersetzung           | Hub/n      | [mm/2 $\pi$ ] | 46,82  | 54,50 | 60,81 | 49,01 | 63,93 | 58,75  |
| Normalmodul           | $m_n$      | [mm]          | 1,85   | 1,70  | 2,12  | 1,95  | 1,85  | 1,85   |
| Achsabstand           | a          | [mm]          | 17     | 16,50 | 19    | 16    | 18    | 18     |
| Normaleingriffswinkel | $\alpha_n$ | [°]           | 25     | 25    | 20    | 20    | 25    | 25     |
| Gehäusewinkel         | $\delta$   | [°]           | -15,00 | 13,00 | 26,00 | 15,00 | 10,57 | -22,00 |

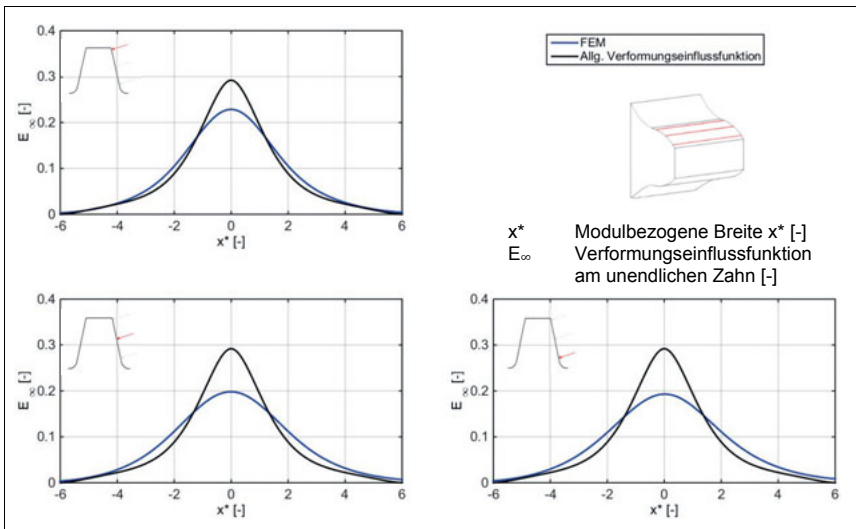
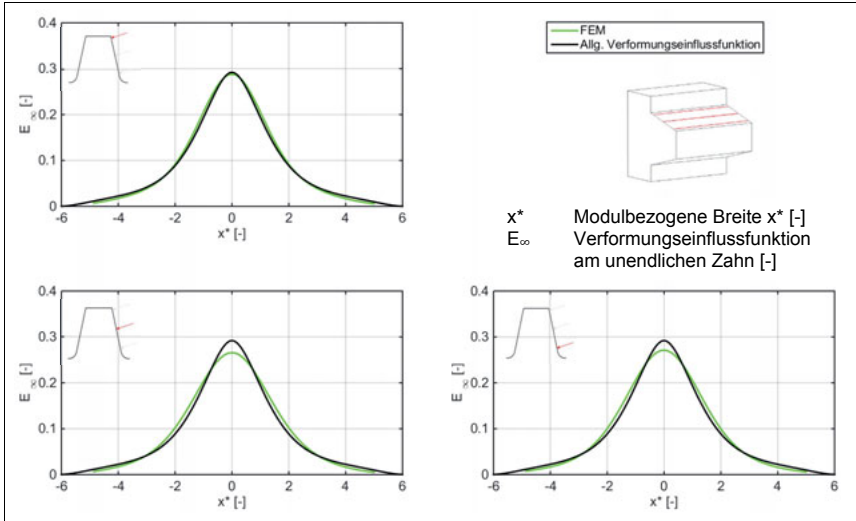
| Ritzelgrößen              | Symbol       | Einheit | A      | B     | C     | D     | E     | F      |
|---------------------------|--------------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
|                           |              |         | 09006  | 01059 | 11111 | 10071 | 06120 | 08003  |
| Zähnezahl                 | $z_1$        | [-]     | 8      | 10    | 9     | 8     | 11    | 10     |
| Schrägungswinkel          | $\beta_1$    | [°]     | -21,70 | 24,50 | 15,80 | 15,00 | 10,57 | -13,60 |
| WZ-Kopfhöhenfaktor        | $h_{aP01}^*$ | [-]     | 1,20   | 1,10  | 1,50  | 1,20  | 1,50  | 1,10   |
| Kopfgrundspielfaktor      | $c_1^*$      | [-]     | 0,27   | 0,34  | 0,25  | 0,25  | 0,28  | 0,25   |
| Profilversch.faktor       | $x_{n1}$     | [-]     | 0,50   | -0,15 | 0,80  | 0,57  | 0,40  | 0,05   |
| Teilkreis- $\emptyset$    | $d_1$        | [mm]    | 15,93  | 18,68 | 19,80 | 16,15 | 20,70 | 19,03  |
| Grundkreis- $\emptyset$   | $d_{b1}$     | [mm]    | 14,24  | 16,63 | 18,52 | 15,11 | 18,70 | 17,16  |
| Kopfkreis- $\emptyset$    | $d_{a1}$     | [mm]    | 20,55  | 20,21 | 25,60 | 21,30 | 24,84 | 21,99  |
| Kopfnutkreis- $\emptyset$ | $d_{Na1}$    | [mm]    | 19,90  | 19,62 | 24,86 | 20,62 | 24,19 | 21,34  |
| Fußnutkreis- $\emptyset$  | $d_{Nf1}$    | [mm]    | 14,55  | 16,69 | 18,59 | 15,20 | 18,77 | 17,22  |
| Fußkreis- $\emptyset$     | $d_{f1}$     | [mm]    | 13,34  | 14,43 | 16,84 | 13,69 | 16,63 | 15,15  |
| Zahnkopfdicke             | $s_{an1}$    | [mm]    | 1,01   | 1,73  | 1,40  | 1,07  | 1,27  | 1,45   |

| Zahnstangengrößen        | Symbol         | Einheit | A     | B     | C     | D     | E     | F     |
|--------------------------|----------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                          |                |         | 09006 | 01059 | 11111 | 10071 | 06120 | 08003 |
| Zahnstangen- $\emptyset$ | $d_z$          | [mm]    | 26    | 24    | 27    | 26    | 26    | 26    |
| Schrägungswinkel         | $\beta_2$      | [°]     | 6,7   | -11,5 | 10,20 | 0     | 0     | -8,4  |
| WZ-Kopfhöhenfaktor       | $h_{aP02}^*$   | [-]     | 1,02  | 0,80  | 0,82  | 1,00  | 1,00  | 1,00  |
| Kopfgrundspielfaktor     | $c_2^*$        | [-]     | 0,20  | 0,30  | 0,25  | 0,26  | 0,25  | 0,25  |
| Teillinie                | $\Gamma_2$     | [mm]    | 8,11  | 7,41  | 7,41  | 6,81  | 6,91  | 8,39  |
| Kopflinie                | $\Gamma_{a2}$  | [mm]    | 10,06 | 8,87  | 10,15 | 8,75  | 9,33  | 10,06 |
| Kopfnutzlinie            | $\Gamma_{Na2}$ | [mm]    | 9,96  | 8,77  | 10,05 | 8,65  | 9,23  | 9,96  |
| Fußnutzlinie             | $\Gamma_{Nf2}$ | [mm]    | 7,31  | 6,45  | 7,21  | 6,28  | 6,05  | 7,29  |
| Fußlinie                 | $\Gamma_{f2}$  | [mm]    | 6,22  | 6,05  | 5,67  | 4,86  | 5,06  | 6,54  |
| Zahnkopfdicke            | $s_{an2}$      | [mm]    | 1,09  | 1,31  | 1,33  | 1,66  | 0,66  | 1,35  |
| Zahnfußdicke             | $s_{fn2}$      | [mm]    | 4,67  | 3,94  | 4,57  | 4,48  | 4,63  | 4,63  |
| Fußrundungsradius        | $\rho_{fn2}$   | [mm]    | 0,90  | 1,10  | 1,47  | 1,17  | 0,93  | 0,93  |
| Mittlere Zahnbreite      | $b_{2m}$       | [mm]    | 21,07 | 19,37 | 24,42 | 23,0  | 22,10 | 21,67 |

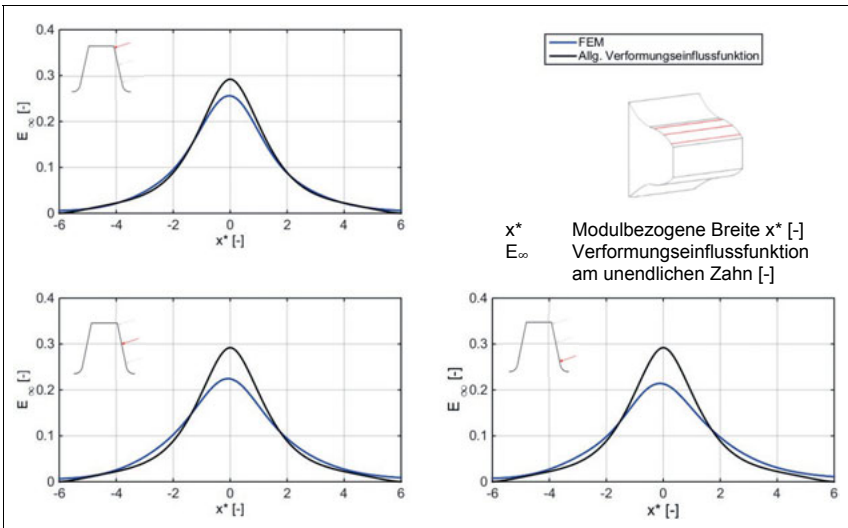
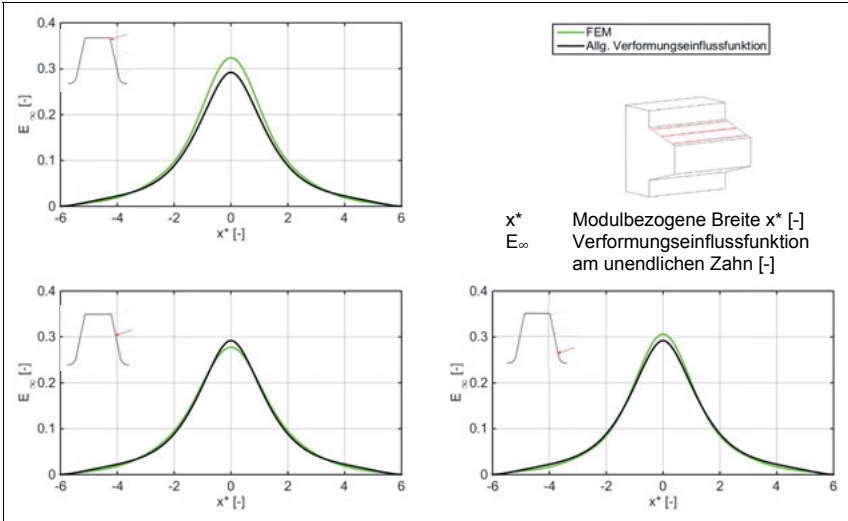
**Anhang B.1: Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn, Paarung B**



**Anhang B.2: Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn, Paarung C**



**Anhang B.3: Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn, Paarung D**



## Anhang C.1: Biegelinien für das trapezförmige Profil

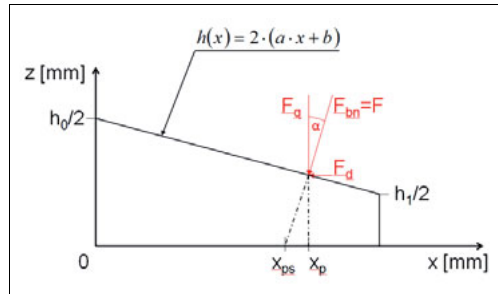


Abbildung C-1: Größen am Zahnstangenprofil

$$M_b(x) = -F_q \cdot (x_{ps} - x)$$

$$I(x) = \frac{b \cdot h(x)^3}{12} = \frac{b \cdot 8 \cdot (a \cdot x + b)^3}{12}$$

## Biegelinie infolge Biegemoment

$$w_b'' = \frac{M_b(x) \cdot (1-\nu^2)}{I(x) \cdot E} = \frac{3 \cdot F_q \cdot (1-\nu^2)}{2 \cdot E} \cdot \frac{x_{ps} - x}{(a \cdot x + b)^3}$$

$$k_1 = \frac{3 \cdot F_q \cdot (1-\nu^2)}{2 \cdot E}$$

$$w_b' = k_1 \cdot \int \frac{x_{ps} - x}{(a \cdot x + b)^3} dx$$

$$w_b' = k_1 \cdot \left[ \frac{1}{a^2 \cdot (a \cdot x + b)} - \frac{a \cdot x_{ps} + b}{2 \cdot a^2 \cdot (a \cdot x + b)^2} - C_1 \right]$$

$$C_1 = \frac{b - a \cdot x_{ps}}{2 \cdot a^2 \cdot b^2}$$

$$w_b = k_1 \cdot \int \left[ \frac{1}{a^2 \cdot (a \cdot x + b)} - \frac{a \cdot x_{ps} + b}{2 \cdot a^2 \cdot (a \cdot x + b)^2} - C_1 \right] dx$$

$$w_b = k_1 \cdot \left[ \frac{\ln(a \cdot x + b)}{a^3} + \frac{a \cdot x_{ps} + b}{2 \cdot a^3 \cdot (a \cdot x + b)} - \frac{(b - a \cdot x_{ps}) \cdot x}{2 \cdot a^2 \cdot b^2} - C_2 \right]$$

$$C_2 = \frac{a \cdot x_{ps} + b + 2 \cdot b \cdot \ln(b)}{2 \cdot a^3 \cdot b}$$

### Anhang C.1: Biegelinien für das trapezförmige Profil

| Biegelinie infolge Querkraft                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w_q = \int \gamma_{xz} = 2 \cdot \chi \cdot (1 - \nu^2) \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{F_q}{E} \cdot \int \frac{1}{2 \cdot (a \cdot x + b)} dx$           |
| $w_q = \chi \cdot (1 - \nu^2) \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{F_q}{E} \cdot \left[ \frac{\ln(a \cdot x + b)}{2 \cdot a} - \frac{\ln(b)}{2 \cdot a} \right]$ |

| Biegelinie infolge Druckkraft                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w_d = \int \varepsilon_z = (1 - \nu^2) \cdot \frac{F_d}{E} \cdot \int \frac{1}{2 \cdot (a \cdot x + b)} dx$                 |
| $w_d = (1 - \nu^2) \cdot \frac{F_d}{E} \cdot \left[ \frac{\ln(a \cdot x + b)}{2 \cdot a} - \frac{\ln(b)}{2 \cdot a} \right]$ |



## Anhang C.2: Biegelinien für das quadratische Ersatzpolynom nach [BAUM90]

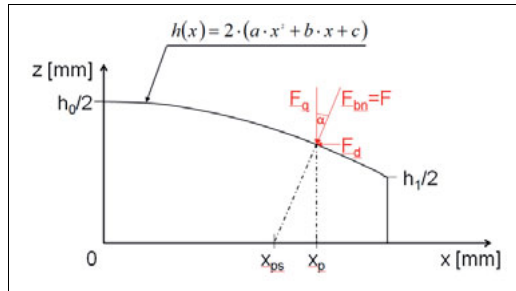


Abbildung C-2: Größen am Stirnradzahnprofil

$$M_b(x) = -F_q \cdot (x_{ps} - x)$$

$$I(x) = \frac{b \cdot h(x)^3}{12} = \frac{2 \cdot b \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)^3}{3}$$

| Biegelinie infolge Biegemoment                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $w_b'' = -\frac{M_b(x) \cdot (1-\nu^2)}{I(x) \cdot E} = -\frac{3 \cdot F_q \cdot (1-\nu^2)}{2 \cdot E} \cdot \frac{x_{ps} - x}{(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)^3}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  |
| $k_1 = \frac{3 \cdot F_q \cdot (1-\nu^2)}{2 \cdot E}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |
| $h_1 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |  |
| $h_2 = 2 \cdot a \cdot x + b$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| $\Delta = 4 \cdot a \cdot c + b^2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
| $w_b' = k_1 \cdot \int \frac{x_{ps} - x}{(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)^3} dx$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| $w_b' = k_1 \cdot \left[ x_{ps} \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{h_2}{(h_1)^2} + \frac{3 \cdot a}{\Delta^2} \cdot \frac{h_2}{h_1} + \frac{6 \cdot a^2}{\Delta^2 \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{ \Delta }}{h_2 + \sqrt{ \Delta }} \right) \right) + \left( \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{b \cdot x + 2 \cdot c}{(h_1)^2} + \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2} \cdot \frac{h_2}{h_1} + \frac{3 \cdot a \cdot b}{\Delta^2 \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{ \Delta }}{h_2 + \sqrt{ \Delta }} \right) \right) - C_1 \right]$ |  |
| $C_1 = x_{ps} \cdot \left( \frac{b \cdot \Delta + 3 \cdot a \cdot b}{2 \cdot \Delta^2 \cdot c^2} + \frac{6 \cdot a^2}{\Delta^2 \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{b - \sqrt{ \Delta }}{b + \sqrt{ \Delta }} \right) \right) + \left( \frac{4 \cdot \Delta + 3 \cdot b^2}{2 \cdot \Delta^2 \cdot c} + \frac{3 \cdot a \cdot b}{\Delta^2 \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{b - \sqrt{ \Delta }}{b + \sqrt{ \Delta }} \right) \right)$                                                                                                                                   |  |

### Anhang C.2: Biegelinien für das quadratische Ersatzpolynom nach [BAUM90]

$$\begin{aligned}
 w_b &= k_1 \cdot \int \left[ x_{ps} \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{h_2}{(h_1)^2} + \frac{3 \cdot a}{\Delta^2} \cdot \frac{h_2}{h_1} + \frac{6 \cdot a^2}{\Delta^2 \cdot \sqrt{|\Delta|}} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{|\Delta|}}{h_2 + \sqrt{|\Delta|}} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{b \cdot x + 2 \cdot c}{(h_1)^2} + \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2} \cdot \frac{h_2}{h_1} + \frac{3 \cdot a \cdot b}{\Delta^2 \cdot \sqrt{|\Delta|}} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{|\Delta|}}{h_2 + \sqrt{|\Delta|}} \right) \right) - C_1 \right] dx \\
 w_b &= k_1 \cdot \left[ x_{ps} \cdot \left( \frac{3 \cdot a}{\Delta^2 \cdot \sqrt{|\Delta|}} \cdot \left( (h_2 - \sqrt{|\Delta|}) \cdot \ln(h_2 - \sqrt{|\Delta|}) - (h_2 + \sqrt{|\Delta|}) \cdot \ln(h_2 + \sqrt{|\Delta|}) \right) - \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{1}{h_1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3 \cdot a}{\Delta^2} \cdot \ln(h_1) \right) + \left( \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2 \cdot \sqrt{|\Delta|}} \cdot \left( (h_2 - \sqrt{|\Delta|}) \cdot \ln(h_2 - \sqrt{|\Delta|}) - (h_2 + \sqrt{|\Delta|}) \cdot \ln(h_2 + \sqrt{|\Delta|}) \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{x}{h_1} + \frac{1}{2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{|\Delta|}} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{|\Delta|}}{h_2 + \sqrt{|\Delta|}} \right) + \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2} \cdot \ln(h_1) \right) - C_1 \cdot x - C_2 \right] \\
 C_2 &= x_{ps} \cdot \left( \frac{3 \cdot a}{\Delta^2 \cdot \sqrt{|\Delta|}} \cdot \left( (b - \sqrt{|\Delta|}) \cdot \ln(b - \sqrt{|\Delta|}) - (b + \sqrt{|\Delta|}) \cdot \ln(b + \sqrt{|\Delta|}) \right) - \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{1}{c} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3 \cdot a}{\Delta^2} \cdot \ln(c) \right) + \left( \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2 \cdot \sqrt{|\Delta|}} \cdot \left( (b - \sqrt{|\Delta|}) \cdot \ln(b - \sqrt{|\Delta|}) - (b + \sqrt{|\Delta|}) \cdot \ln(b + \sqrt{|\Delta|}) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{x}{c} + \frac{1}{2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{|\Delta|}} \cdot \ln \left( \frac{b - \sqrt{|\Delta|}}{b + \sqrt{|\Delta|}} \right) + \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2} \cdot \ln(c) \right) \Bigg]
 \end{aligned}$$

**Anhang C.2: Biegelinien für das quadratische Ersatzpolynom nach [BAUM90]**

| Biegelinie infolge Querkraft                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w_q = \int \gamma_{xz} = 2 \cdot \chi \cdot (1 - \nu^2) \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{F_q}{E} \cdot \int \frac{1}{2 \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)} dx$                                          |
| $w_q = \chi \cdot (1 - \nu^2) \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{F_q}{E} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{ \Delta }}{h_2 + \sqrt{ \Delta }} \right) - C_1 \right]$ |
| $C_1 = \frac{1}{\sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{b - \sqrt{ \Delta }}{b + \sqrt{ \Delta }} \right)$                                                                                           |

| Biegelinie infolge Druckkraft                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w_d = \int \varepsilon_z = (1 - \nu^2) \cdot \frac{F_d}{E} \cdot \int \frac{1}{2 \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)} dx$                                                        |
| $w_d = (1 - \nu^2) \cdot \frac{F_d}{2 \cdot E} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{ \Delta }}{h_2 + \sqrt{ \Delta }} \right) - C_1 \right]$ |
| $C_1 = \frac{1}{\sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{b - \sqrt{ \Delta }}{b + \sqrt{ \Delta }} \right)$                                                                        |

## Anhang D: Zusammenfassung der verwendeten Grundgleichungen

Heft Grundgleichung für konstanten Querschnitt (1)

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{3} \cdot \left[ (1 - \xi)^3 - 3 \cdot (1 - \xi) + 2 \right]$$

Heft erste Grundgleichung für trapezförmigen Querschnitt (2)

$$\varphi_1(\xi) = \xi^2$$

Heft zweite Grundgleichung für trapezförmigen Querschnitt (3)

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{3} \cdot \xi^2 \cdot (\xi^2 - 4 \cdot \xi + 6)$$

Grundgleichung nach Form aus [WEBA53] für trapezförmigen Querschnitt (4)

$$\varphi_{1_{W/B}}(\xi) = k_1 \cdot \left[ \frac{10,92 \cdot a^3}{k^3 \cdot h_0^3} \cdot (-2 \cdot k \cdot \xi - k^2 \cdot \xi^2) + \frac{10,92 \cdot a^3 + 3,12 \cdot a \cdot k^2 \cdot h_0^2 + 0,2275 \cdot \frac{k^4 \cdot h_0^4}{a}}{k^3 \cdot h_0^3} \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - k \cdot \xi}\right) \right]$$

Grundgleichung nach Form aus [BAUM90] für trapezförmigen Querschnitt (5)

$$\varphi_{1_{Bau}}(\xi) = k_1 \cdot \left[ \ln(a \cdot \xi \cdot a^* + b) + \frac{a \cdot a^* + b}{2 \cdot (a \cdot \xi \cdot a^* + b)} - \frac{(b - a \cdot a^*) \cdot \xi \cdot a^* \cdot a}{2 \cdot b^2} - \frac{a \cdot a^* + b + 2 \cdot b \cdot \ln(b)}{2 \cdot b} \right]$$

Grundgleichung nach Form aus [BAUM90] mit Quer- und Druckkraftanteil (trapezförmig) (6)

$$\varphi_{1_{Bau}}(\xi) = k_1 \cdot \left[ k_q \cdot \ln(a \cdot \xi \cdot a^* + b) + k_d \cdot \ln(a \cdot \xi \cdot a^* + b) + k_b \cdot \left( \ln(a \cdot \xi \cdot a^* + b) + \frac{a \cdot a^* + b}{2 \cdot (a \cdot \xi \cdot a^* + b)} - \frac{(b - a \cdot a^*) \cdot \xi \cdot a^* \cdot a}{2 \cdot b^2} - \frac{a \cdot a^* + b + 2 \cdot b \cdot \ln(b)}{2 \cdot b} \right) \right]$$

## Anhang D: Zusammenfassung der verwendeten Grundgleichungen

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Grundgleichung nach Form aus [BAUM90] für quadratisches Ersatzpolynom (7)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $\varphi_1(\xi) = k_1 \cdot \left[ \left( \frac{3 \cdot a}{\Delta^2 \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \left( (h_2 - \sqrt{ \Delta }) \cdot \ln(h_2 - \sqrt{ \Delta }) - (h_2 + \sqrt{ \Delta }) \cdot \ln(h_2 + \sqrt{ \Delta }) \right) - \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{1}{h_1} + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{3 \cdot a}{\Delta^2} \cdot \ln(h_1) \right) + \left( \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2 \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \left( (h_2 - \sqrt{ \Delta }) \cdot \ln(h_2 - \sqrt{ \Delta }) - (h_2 + \sqrt{ \Delta }) \cdot \ln(h_2 + \sqrt{ \Delta }) \right) + \right.$ $\left. \left. + \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{\xi \cdot a^*}{h_1} + \frac{1}{2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{ \Delta }}{h_2 + \sqrt{ \Delta }} \right) + \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2} \cdot \ln(h_1) \right) - C_1 \cdot \xi \cdot a^* - C_2 \right]$ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Grundgleichung nach Form aus [BAUM90] mit Quer- und Druckkraftanteil (quadrat. Ersatzpolynom) (8)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $\varphi_1(\xi) = k_1 \cdot \left[ k_q \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{ \Delta }}{h_2 + \sqrt{ \Delta }} \right) \right) + k_d \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{ \Delta }}{h_2 + \sqrt{ \Delta }} \right) \right) + \right.$ $\left. + k_b \cdot \left( \left( \frac{3 \cdot a}{\Delta^2 \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \left( (h_2 - \sqrt{ \Delta }) \cdot \ln(h_2 - \sqrt{ \Delta }) - (h_2 + \sqrt{ \Delta }) \cdot \ln(h_2 + \sqrt{ \Delta }) \right) - \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{1}{h_1} + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{3 \cdot a}{\Delta^2} \cdot \ln(h_1) \right) + \left( \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2 \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \left( (h_2 - \sqrt{ \Delta }) \cdot \ln(h_2 - \sqrt{ \Delta }) - (h_2 + \sqrt{ \Delta }) \cdot \ln(h_2 + \sqrt{ \Delta }) \right) + \right.$ $\left. \left. + \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \frac{\xi \cdot a^*}{h_1} + \frac{1}{2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{ \Delta }} \cdot \ln \left( \frac{h_2 - \sqrt{ \Delta }}{h_2 + \sqrt{ \Delta }} \right) + \frac{3 \cdot b}{2 \cdot \Delta^2} \cdot \ln(h_1) \right) - C_1 \cdot \xi \cdot a^* - C_2 \right]$ |

**Anhang E: Zusammenfassung der verwendeten Gleichungsfolgen**

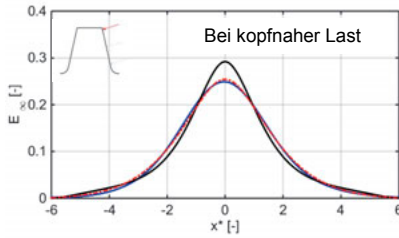
| Gleichungsfolge für konstanten Querschnitt (I) |                                                                                          |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2.                                             | $\varphi_2(\xi) = \frac{1}{3} \cdot [(1 - \xi)^4 - 4 \cdot (1 - \xi) + 3]$               |
| 3.                                             | $\varphi_3(\xi) = \frac{1}{4} \cdot [(1 - \xi)^5 - 5 \cdot (1 - \xi) + 4]$               |
| n-te                                           | $\varphi_n(\xi) = \frac{1}{n+1} \cdot [(1 - \xi)^{n+2} - (n+2) \cdot (1 - \xi) + (n+1)]$ |

| Gleichungsfolge für trapezförmigen Querschnitt (Heft erste Grundgleichung) (II) |                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 2.                                                                              | $\varphi_2(\xi) = \xi^2 \cdot (2 \cdot \xi - 1)$                         |
| 3.                                                                              | $\varphi_3(\xi) = \xi^2 \cdot (3 \cdot \xi - 1) \cdot (3 \cdot \xi - 2)$ |
| n-te                                                                            | $\varphi_n(\xi) = \xi^2 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (n \cdot \xi - k)$       |

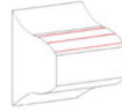
| Gleichungsfolge für alle anderen Grundgleichungen (III) |                                                                          |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 2.                                                      | $\varphi_2(\xi) = \xi^2$                                                 |
| 3.                                                      | $\varphi_3(\xi) = \xi^2 \cdot (2 \cdot \xi - 1)$                         |
| 4.                                                      | $\varphi_4(\xi) = \xi^2 \cdot (3 \cdot \xi - 1) \cdot (3 \cdot \xi - 2)$ |
| n-te                                                    | $\varphi_n(\xi) = \xi^2 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (n \cdot \xi - k)$       |

**Anhang F: Vergleich der Verformungseinflussfunktionen (unendlicher Zahn)**

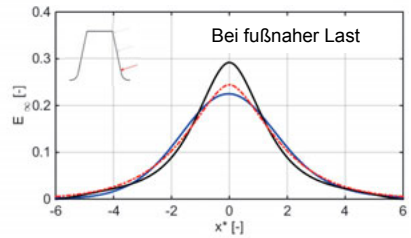
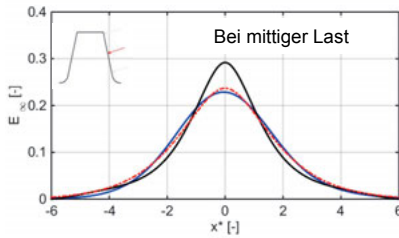
a) Verformungseinflussfunktion am Stirrad (Verzahnungspaarung B)



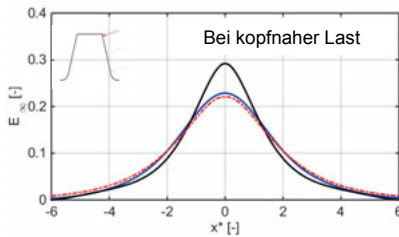
— FEM  
— Allg. Verformungseinflussfunktion  
- - - Analytische Berechnung



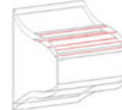
$x^*$   
 $E_{\infty}$  Modulbezogene Breite  $x^* [-]$   
Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn  $[-]$



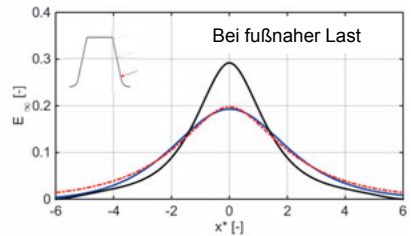
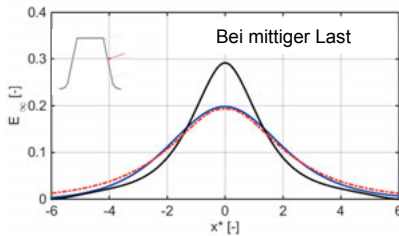
b) Verformungseinflussfunktion am Stirrad (Verzahnungspaarung C)



— FEM  
— Allg. Verformungseinflussfunktion  
- - - Analytische Berechnung

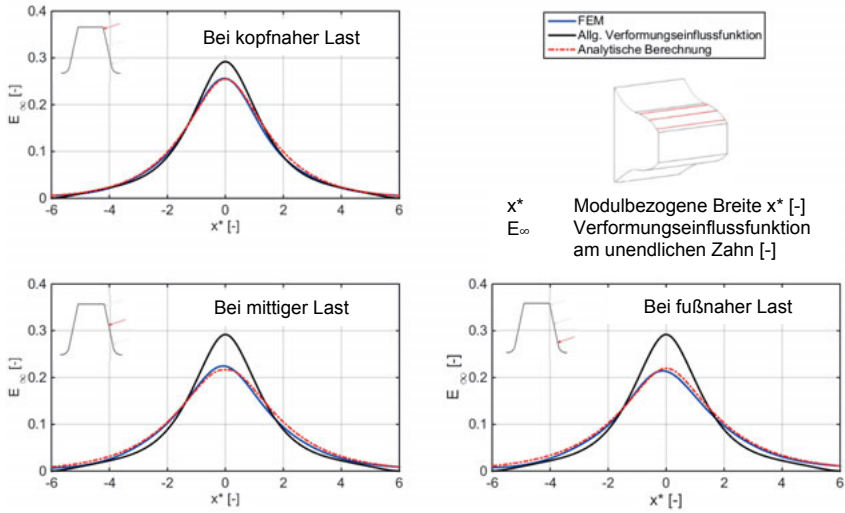


$x^*$   
 $E_{\infty}$  Modulbezogene Breite  $x^* [-]$   
Verformungseinflussfunktion am unendlichen Zahn  $[-]$



**Anhang F: Vergleich der Verformungseinflussfunktionen (unendlicher Zahn)**

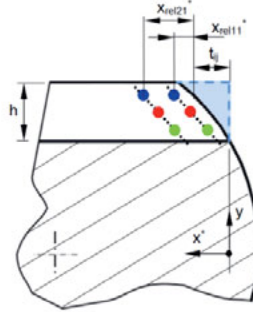
c) Verformungseinflussfunktion am Stirrad (Verzahnungspaarung D)



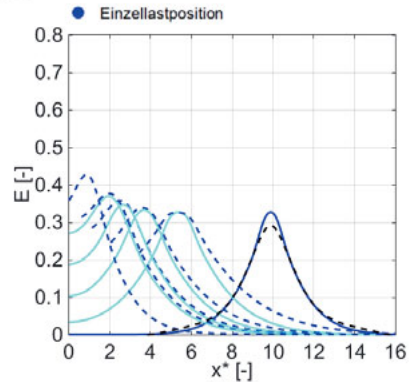
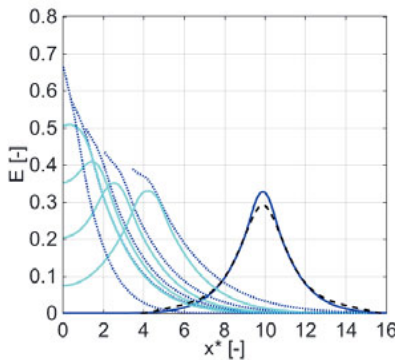


**Anhang G: Reflexionsgrad am endlichen Zahnstangenzahn in Abh. von  $\theta$**

a) Lasteinleitung bei  $r_{Na2}$



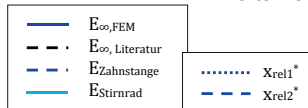
• Skizze:



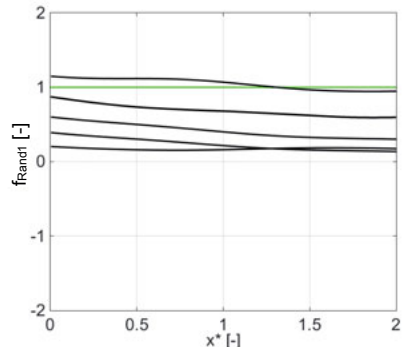
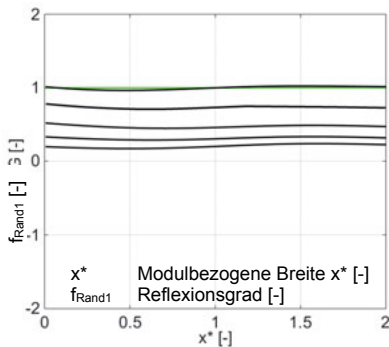
Krafteinleitung bei  $x_{rel1}^*$

Krafteinleitung bei  $x_{rel2}^*$

$x^*$  Modulbezogene Breite  $x^* [-]$   
 $E$  Verformungseinflussfunktion am endlichen Zahn  $[-]$

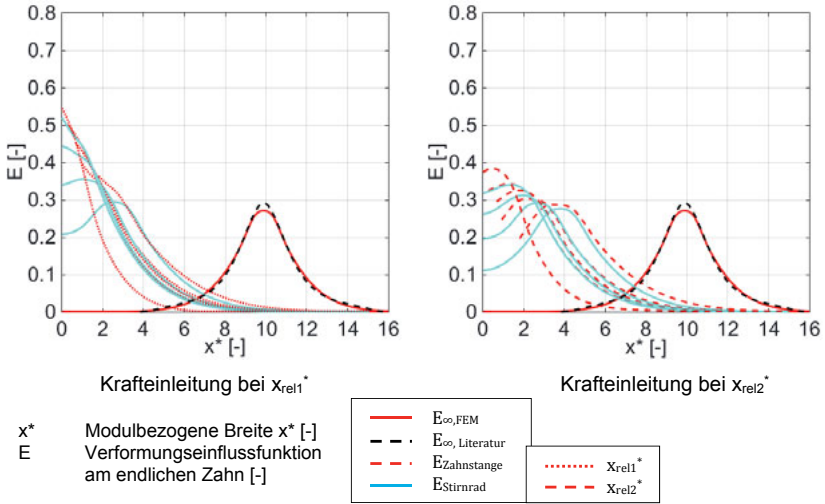


• Aus den Verformungseinflussfunktionen abgeleitete Reflexionsgrade:



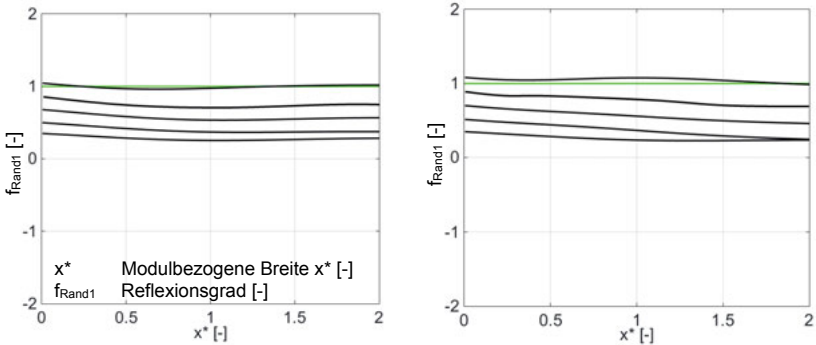
### Anhang G-2: Reflexionsgrad am endlichen Zahnstangenzahn in Abh. von $\theta$

b) Lasteinleitung bei  $r_{m2}$



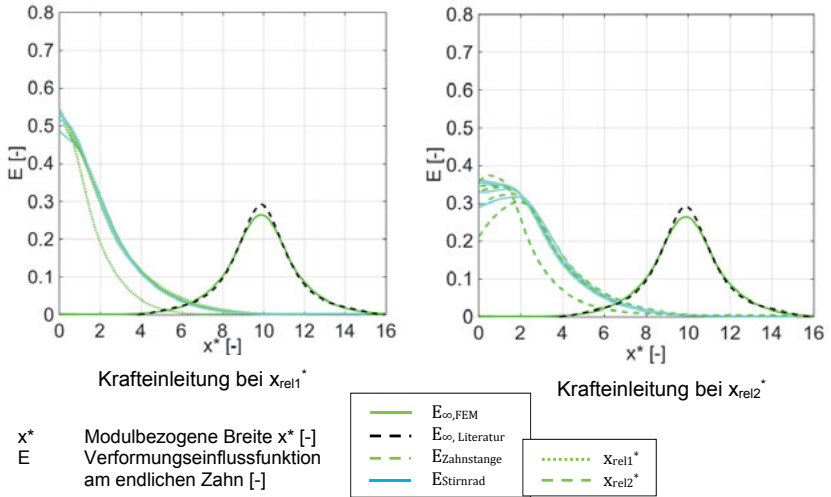
$x^*$  Modulbezogene Breite  $x^* [-]$   
 $E$  Verformungseinflussfunktion am endlichen Zahn  $[-]$

- Aus den Verformungseinflussfunktionen abgeleitete Reflexionsgrade:

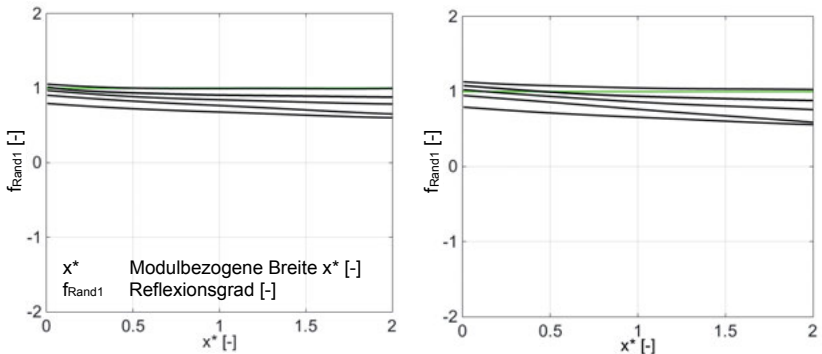


**Anhang G-3: Reflexionsgrad am endlichen Zahnstangenzahn in Abh. von  $\theta$**

c) Lasteinleitung bei  $r_{Nf2}$

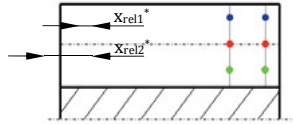


- Aus den Verformungseinflussfunktionen abgeleitete Reflexionsgrade:

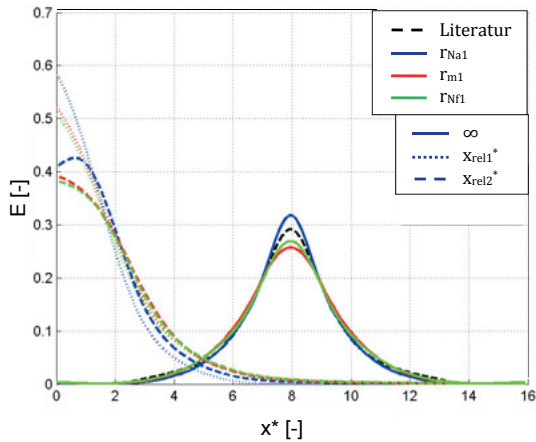


### Anhang H: Reflexionsgrad am endlichen Stirnradzahn (geradverzahnt)

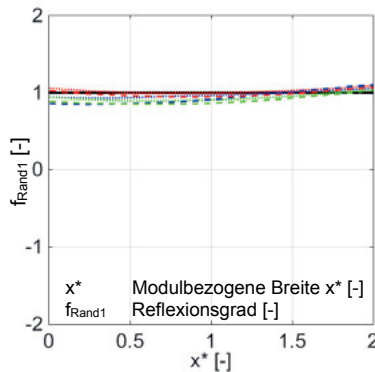
- Skizze:



- Verformungseinflussfunktionen mit  $x^*$  Modulbezogene Breite  $x^* [-]$   
E Verformungseinflussfunktion am endlichen Zahn  $[-]$



- Aus den Verformungseinflussfunktionen abgeleitete Reflexionsgrade:



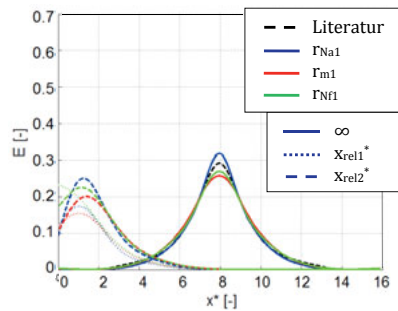
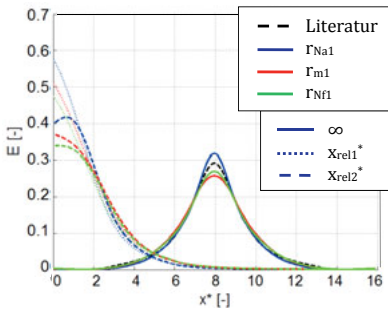
**Anhang H-2: Reflexionsgrad an endlichen Ritzelwellen**

- Skizzen:

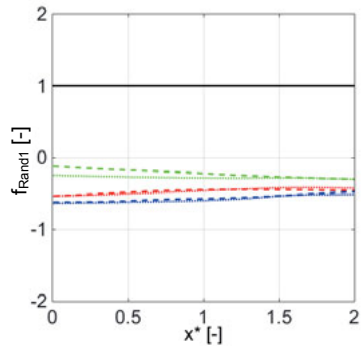
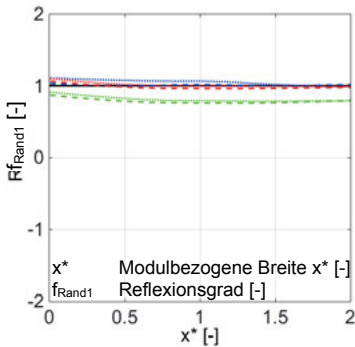
- a) Stirnradzahn mit Welle  $d_A=d_{f1}$  ( $\gamma=0^\circ$ )      b) Stirnradzahn mit Welle  $d_A=d_{a1}$  ( $\gamma=90^\circ$ )



- Verformungseinflussfunktionen mit  $x^*$       Modulbezogene Breite  $x^*$  [-]  
E      Verformungseinflussfunktion am endlichen Zahn [-]

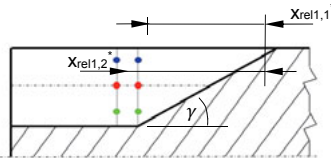


- Aus den Verformungseinflussfunktionen abgeleitete Reflexionsgrade:



### Anhang H-3: Reflexionsgrad an endlichen Ritzelwellen

- Skizze:

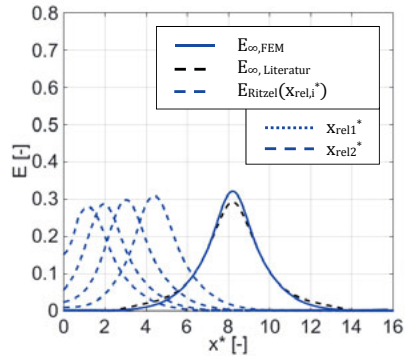
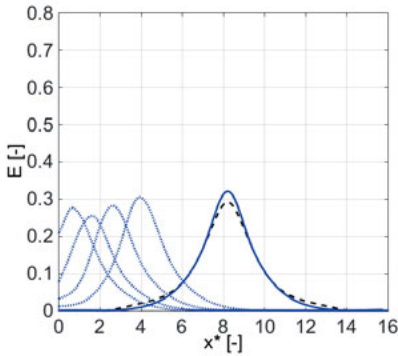


$X_{rel,i}^*$  analog

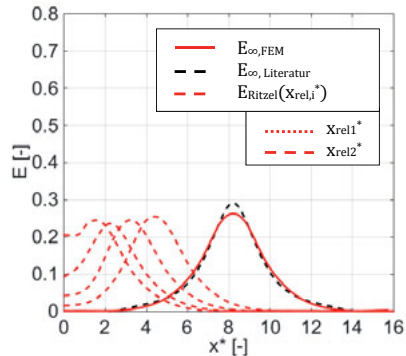
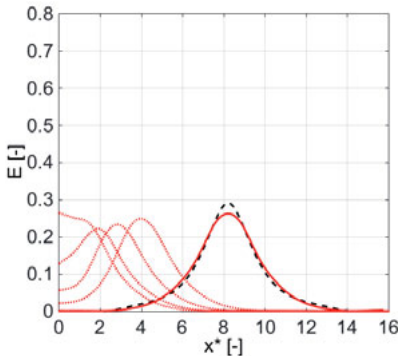
$\gamma = 20^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 65^\circ$

- Verformungseinflussfunktionen mit  $x^*$  Modulbezogene Breite [-]
- E Verformungseinflussfunktion am endlichen Zahn [-]

a) Lasteinleitung bei  $r_{Na1}$

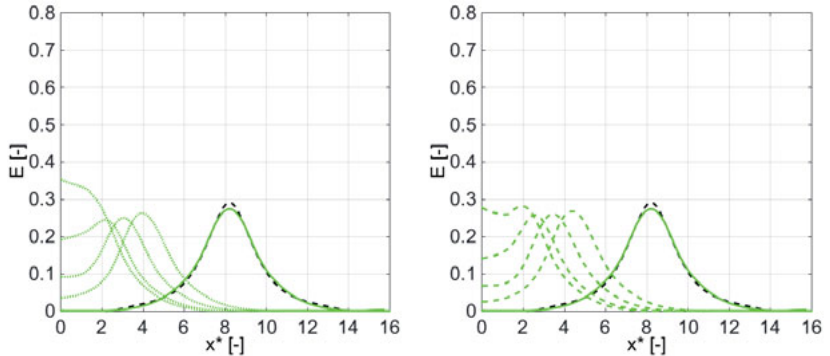


b) Lasteinleitung bei  $r_{m1}$

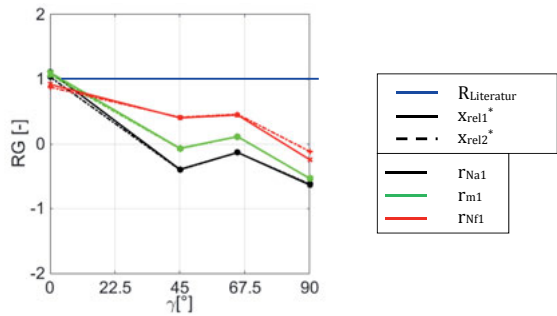


**Anhang H-4: Reflexionsgrad an endlichen Ritzelwellen**

c) Lasteinleitung bei  $\Gamma_{Nf1}$



- Aus den Verformungseinflussfunktionen abgeleiteter Reflexionsgrad an der Stirnkante bei  $\Gamma_{Na1}$ ,  $\Gamma_{m1}$ ,  $\Gamma_{Nf1}$



## Anhang J: Werkstoffzusammensetzung der Prüfverzahnungen

### Zahnstangen:

chemische Zusammensetzung  
nach DIN EN 10083-3:2006

| Soll [%] |               | Zahnstange<br>A | Zahnstange<br>B |
|----------|---------------|-----------------|-----------------|
| C        | 0,34 - 0,41   | 0,385           | 0,395           |
| Si       | max. 0,40     | 0,24            | 0,24            |
| Mn       | 0,60 - 0,90   | 0,74            | 0,73            |
| P        | max. 0,025    | 0,012           | 0,011           |
| S        | 0,020 - 0,040 | 0,033           | 0,033           |
| Cr       | 0,90 - 1,20   | 1,00            | 0,99            |

### Ritzel:

chemische Zusammensetzung  
nach ZF 6:2008

| Soll [%] |               | Ritzel A | Ritzel B |
|----------|---------------|----------|----------|
| C        | 0,13 - 0,18   | 0,173    | 0,169    |
| Si       | max. 0,30     | 0,19     | 0,19     |
| Mn       | 1,00 - 1,30   | 1,12     | 1,12     |
| P        | max. 0,025    | 0,008    | 0,008    |
| S        | 0,020 - 0,035 | 0,024    | 0,024    |
| Cr       | 0,80 - 1,10   | 1,04     | 1,04     |
| Ni       | max. 0,30     | 0,09     | 0,09     |
| B        | 0,001 - 0,003 | 0,002    | 0,001    |
| Cu       | max. 0,30     | 0,10     | 0,10     |
| Al       | 0,02 - 0,05   | 0,03     | 0,02     |



## Literaturverzeichnis

### Normen und Richtlinien

- [AGMA2001] Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth / AGMA 2001-C95 (2001)
- [DIN3960] Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderpaare) mit Evolventenverzahnung / DIN 3960 (1987)
- [DIN3961] Toleranzen für Stirnradverzahnungen - Grundlagen / DIN 3961 (1978)
- [DIN3962] Toleranzen für Stirnradverzahnungen - Abweichungen / Teil 1-3 / DIN 3962 (1978)
- [DIN3963] Toleranzen für Stirnradverzahnungen - Toleranzen für Wälzabweichungen / DIN 3963 (1978)
- [DIN3990] Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern / Teil 1-5 / DIN 3990 (1987)
- [DIN10083] Steels for quenching and tempering / Part 1-3 / DIN EN 10083 (2006)
- [DIN50100] Schwingfestigkeitsversuch - Durchführung und Auswertung von zyklischen Versuchen mit konstanter Lastamplitude für metallische Werkstoffproben und Bauteile / DIN 50100 (2015)
- [ISO643] Steels - Micrographic determination of the apparent grain size / ISO 643 (2012)
- [ISO6336] Calculation of load capacity of spur and helical gears / Part 1-3 / ISO 6336 (2006)
- [ÖN6725] Zylinder-Schraubräder und Schraubradtriebe mit Evolventenverzahnung / Geometrie, Kinematik / ÖNORM M 6725 (1989)

### Zeitschriftenpublikationen, Patentschriften

- [ALEX07] Alexandru, P.: The rack-pinion gears for steering gear box with variable transmission ratio / The 12th World Congress on Mechanism and Machine Science, Besancon, France (2007), pp. 353-359
- [ALIP06] Alipiev, O.; Antonov, S.: Generalized Basic Rack in the Theory of Involute Tooth System / Journal Mechanik der Maschinen (2006), pp. 121-125
- [ARSL10] Arslan, G.: Optimierung der Zahnfußausrundung an Zahnstangen durch parameterbasierte und freie FE-Analysen / Institutsmittteilung Nr. 35, TU Clausthal (2010), S. 57-66
- [ARSL11] Arslan, G.: Numerische Bestimmung des Zahnkopffaktors für kreisförmige Fußausrundung an Zahnstangen / Institutsmittteilung Nr. 36, TU Clausthal (2011), S. 21-28
- [AVED03] Andersson, A./ Vedmar L.: A dynamic model to determine vibrations in involute helical gears / Journal of Sounds and Vibrations/ 260 (2003)

- [BAXT01] Baxter, J.; Wou, S.J.; Oste, T.D.: Modelling of Mesh Friction and Mechanical Efficiency of Rack and Pinion Steering Design / Steering and Suspension Technology Symposium (2001)
- [BISH21] Bishop, A.: Improvements in or relating to steering gear for mechanically propelled vehicles / Patentschrift GB183961 (1921)
- [BISH46] Bishop, A.: Improvements in or relating to steering gear for road vehicles / Patentschrift GB605745 (1946)
- [BISH57] Bishop, A.: Steer Damper / Patentschrift US3052912 (1957)
- [BISH61] Bishop, A.: Variable ratio steering gear / Patentschrift US3064491 (1961)
- [BISH72] Bishop, A.: Lenkgetriebe für Fahrzeuge / Patentschrift DE2141205
- [BISH85] Bishop, A.E.; Baxter, J.: New Rack and Pinion Steering Design and Manufacturing Technology / SAE Transactions (1985)
- [BRAU08] Braun, O.; Tosatt, E.: Rack-and-pinion effects in molecular rolling friction / Journal of Philosophical Magazine Letters, Vol. 8 (2008), Issue 7, pp. 509-517
- [CONR71] Conry, T.F.; Seireg, A.: A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact / Journal of Applied Mechanics, Vol. 6 (1971), pp. 387-392
- [DAVI46] Davis, F.W.: Power Steering for Automotive Vehicles / SAE Paper 450181 (1946)
- [FVA304] Zenner, H.; Mauch, H.; Fischer, W.: Statistische Methoden zur Beurteilung von Bauteillebensdauer und Zuverlässigkeit und ihre beispielhafte Anwendung auf Zahnräder / FVA Forschungsvorhaben Nr.304 (1999)
- [HASA15] Hasan, N.N.A.; Mahmoud, M.M.; Mousa, M.O.: Stress Concentration Factor of Metallic Rack-Pinion Drive / 3. Int. Conf. for Advanced Trends in Engineering, Minia, Egypt (2015)
- [HERT83] Hertz, H.: Über die Berührung fester, elastischer Körper / Journal für die reine und angewandte Mathematik, Nr.92, (1881), S.156-171
- [HERT63] Heft, J.: Elastische Verformungen an einer dünnen Platte unter Einzellast/Applications of Mathematics, Vol. 8, No. 6 (1963), S. 411-441
- [KAMB03] Kamble, N.; Saha, S.K.; Priyadarshi, R.: Virtual Prototype of Rack and Pinion Steering - Gear Meshing / SAE Technical Paper (2003)
- [KAMB05] Kamble, N.; Saha, S. K.: Evaluation of Torque Characteristics of Rack and Pinion Steering Gear Using ADAMS Model / SAE World Congress (2005), Detroit, Michigan, pp.1-6
- [KAMB07] Kamble, N. and Saha, S.K.: Developing a Virtual Prototype of a Rack and Pinion Steering System / Int. J. Vehicle Systems Modelling and Testing (2007), Vol. 2, No. 1, pp. 61–79

- [KADI14] Kadilnikova, T.M.; Sushko, L.F.: Rationale of the Evaluation and Selection of Kinematic and Tribological Characteristics of the System Pinion-Gear Rack of Cold-Pilgering Mills / Wissenschaft und Fortschritt für Fahrzeuge, National University of Railway Transport, Dnepropetrovsk, Ukraine (2014), Nr. 1 (49), S. 105-111
- [KASA05] Kamble N. and Saha S. K.: Effect of Pinion Profile Modification on Rack and Pinion Steering Gear / Proc. Steering and Suspensions, Tire and Wheels (2005), Nr.1, pp. 83-90.
- [KUMA14] Kumar, S.; Chabra, D.; Kumar, P.: Design and Stress Analysis of Steering Rack Using CAE Tool / International Journal of Advances in Engineering Sciences Vol. 4 (2014), Issue 3, pp. 12-15
- [KOBA09] Kobayashi, T.; Shibata, H.: Estimation of Rack Swing Torque for Rack and Pinion Steering Gear / JTEKT Engineering Journal English Edition No.1006E (2009), S. 23-30
- [LOHR10] Lohrengel, A.; Arslan, G.; Schäfer, G.: Minimierte Zahnfußbiegespannungen an Zahnstangen durch optimierte Zahnfußausrundung / Deutsche SIMULIA-Konferenz (2010), Heidelberg
- [RASA08] Rao, T.G.; Saha, S.K.; Kar, I.N.: Sensor-Actuator Based Smart Yoke for a Rack and Pinion Steering System / 5th International Mobility Conference on Emerging Automotive Technologies (2008), pp. 358-364
- [RBAS15] Reuter, St.: Servoelectric – Elektromechanisches Lenksystem für ein dynamisches Fahrgefühl und hochautomatisierte Funktionen / Interne Dokumentation der Robert Bosch Automotive Steering GmbH (2015)
- [RITZ09] Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik / J. Reine Angew. Math., Bd. 135 (1909), S.1-61
- [ROTH74] Roth, K.: Stirnradpaarungen mit 1 bis 5-zähligen Ritzeln im Maschinenbau / Konstruktion 26 (1974), Heft 11
- [SÄUB02] Säuberlich, A.; Säuberlich, H.: Achterbahn in Panama. Treidelloks an der Zahnstange / München / GeraNova Zeitschriftenverlag / Lok Magazin, Nr. 252, Jahrgang 41 (2002), S. 64-65
- [SCLU10] Schlunegger, H.: Neue Lokomotiven für Zahnstangenbetrieb auf der Strecke Santos – Jundiá in Brasilien. / Eisenbahn-Revue international 7 (2010)
- [TIMO13] Timofeyev G.A.; Sashchenko, D.V.; SamoiloVA, M.V.: Rack and Pinion Self-locking Gears / Journal of Maschinenbau (2013), Nr. 4, S.17-23
- [VAUJ09] Vaujany, J.; Guingand, M.: Geometry, Kinematics and load sharing of pinion rack gear with variable ratio / JSME International Conference on Motion and Power Transmissions (2009)
- [ZFLS07] Ziegele, A.: 75 Jahre Lenkungstechnik im ZF-Konzern, 70 Jahre Standort Schwäbisch Gmünd / ZF Lenksysteme aktuell, Nr. 38, (2007)

Bücher, Studienarbeiten, Dissertationen.

- [BART00] Barton, P.: Tragfähigkeit von Schraubrad- und Schneckengetrieben der Werkstoffpaarung Stahl/Kunststoff / Diss. Ruhr-Universität Bochum (2000)
- [BAUM90] Baumann, V.: Untersuchungen zur Last- und Spannungsverteilung an bogenverzahnten Kegelrädern / Diss. TU Dresden (1990)
- [BERT04] Bertsche, B.; Lechner, G.: Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau / Ermittlung von Bauteil- und System-Zuverlässigkeiten / 3. Auflage / Berlin, Heidelberg, New York / Springer Verlag (2004)
- [BURG12] Burger, M.: Untersuchung der Toleranzeinflüsse von Verzahnungsparametern bei Ritzel-Zahnstangenverzahnungen / Internes Dokument / Bachelorarbeit Hochschule Ulm (2012)
- [DUDZ05] Dudzinski, P.: Lenksysteme für Nutzfahrzeuge / Berlin Heidelberg / Springer Verlag (2005)
- [ECKE02] Eckermann, E.: Vom Dampfwagen zum Automobil / 1. Auflage / Bielefeld / Delius Klasing (2002)
- [FRON71] Fronius, St.: Maschinenelemente / Antriebsselemente / Berlin / VEB Verlag Technik (1971)
- [FUCH12] Fuchs, M.: Ermittlung von Verformungseinflussfunktionen für Zahnprofile / Internes Dokument / Bachelorarbeit Hochschule Ulm (2013)
- [GERM12] Gerscheid, Chr.: Untersuchung zahnkontaktrelevanter Versuche mit Ritzel-Zahnstangen-Paarungen / Internes Dokument / Bachelorarbeit Hochschule Bonn-Rhein-Sieg (2012)
- [GRUE13] Grünewald, T.: Untersuchung der mechanischen Spiegelung bei endlichen Verzahnungen in Abhängigkeit zur lokalen Steifigkeitssituation / Internes Dokument / Bachelorarbeit Hochschule Merseburg (2013)
- [HEFT71] Hefti, Walter: Zahnradbahnen der Welt / Birkhäuser, Basel (1971)
- [KAMB06] Kamble, N.D.: Studies and Analysis of the Rack and Pinion Steering Gear / Dissertation Indian Institute of Technology, Delhi (2006)
- [KLIN08] Klingenberg, J.: Kegelräder –Grundlagen, Anwendungen / Berlin Heidelberg / Springer-Verlag (2008)
- [KOEN08] König, H.: Maschinen im Bautrieb / 2. Auflage / Wiesbaden / Vieweg & Teubner Verlag (2008)
- [KONI15] Konietzny, L.: Implementierung des Klemmlastfalles in die Tragfähigkeitsberechnung der ISO 6336 und Validierung mit der FEM / Internes Dokument / Praktikumsbericht Hochschule Aalen (2015)
- [KUNE99] Kunert, J.: Experimentell gestützte Untersuchungen zum Verformungs- und Spannungsverhalten an außenverzahnten Stirnrädern für eine verbesserte Beanspruchungsanalyse / Dissertation TU Dresden (1999)

- [KUNZ02] Kunze, G.: Baumaschinen: Erdbau- und Tagebaumaschinen / Vieweg & Sohn / Braunschweig, Wiesbaden (2002)
- [KURT82] Kurt-Elli, H.: The Mechanics of the Steered Wheels of a Road Vehicle / Ph.D., Cranfield Institute of Technology (1982)
- [LINK10] Linke, H.: Stirnradverzahnung – Berechnung, Werkstoffe, Fertigung / München – Wien / 2. Auflage / Carl Hanser Verlag (2010)
- [LUCK87] Luck, K.: Taschenbuch Maschinenbau / Band 3 / 1. Auflage / Verlag Technik, Berlin (1987)
- [LUNK14] Lunkeit, D.: Ein Beitrag zur Optimierung des Rückmelde- und Rückstellverhaltens elektromechanischer Servolenkungen / Dissertation Universität Duisburg-Essen (2014)
- [MATT14] Matt, P.: Einfluss der Stirnkanten auf die Tragfähigkeit von Verzahnungen / Dissertation Technische Universität München (2014)
- [MATS07] Matschinsky, W.: Radführungen der Straßenfahrzeuge – Kinematik, Elasto-Kinematik und Konstruktion / 3.Auflage / Berlin, Heidelberg, New York / Springer Verlag (2007)
- [MAUC99] Mauch, H.: Statistische Methoden zur Beurteilung von Bauteillebensdauer und Zuverlässigkeit und ihre beispielhafte Anwendung auf Zahnräder. FVA-Forschungsheft Nr. 580, Forschungsvereinigung Antriebstechnik e. V., Frankfurt/Main, 1999.
- [MESS71] Messerschmidt, W.: Zahnradbahnen, gestern, heute, in aller Welt. Die Geschichte der Zahnradbahnen / Stuttgart / Verlag Franckh (1972)
- [NIEM86] Niemann, G.; Winter, H.: Maschinenelemente, Band 2, 3 / 2. Auflage / Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo / Springer-Verlag (1986)
- [NEUG12] Neugebauer, R.: Werkzeugmaschinen / Berlin Heidelberg / Springer-Verlag (2012)
- [PECH11] Pech, M.: Tragfähigkeit und Zahnverformung von Schraubradgetrieben der Werkstoffpaarung Stahl/Kunststoff / Dissertation Ruhr-Universität Bochum (2011)
- [PERO02] Perovic, B.: Bauarten spanender Werkzeugmaschinen: Steifigkeiten, Steuerungen und Bauformen / Renningen / Expert Verlag (2002)
- [PERO09] Perovic, B.: Spanende Werkzeugmaschinen – Ausführungsformen und Vergleichstabellen / Berlin, Heidelberg / Springer Verlag (2009)
- [PFEF13] Pfeffer, P.; Harrer, M.: Lenkungshandbuch / 2. Auflage / Wiesbaden / Springer Vieweg (2013)
- [POES12] Poestgens, U.: Servolenksysteme für Pkw und Nutzfahrzeuge / 2. Auflage / München / Süddeutscher Verlag (2012)
- [PONO56] Ponomarev, S. D.: Strength calculations in machine construction / Mashgiz Vol.1-3, Moskau (1956)

- [RADE67] Rademacher, J: Untersuchungen über den Einfluss wirksamer Flankenrichtungsfehler und kreisförmiger Breitenballigkeit auf die Tragfähigkeit von Stirnradgetrieben / Diss. TH Aachen (1967)
- [REIC06] Reichardt, A.: Numerische Untersuchung über die Allgemeingültigkeit der Verformungseinflussfunktion bei geradverzahnten Stirnrädern / Großer Beleg TU Dresden (2006)
- [RICH12] Richter, S.: Untersuchung von dynamischen Effekten und Eingriffsstörungen in einer Ritzel-Zahnstangen-Verzahnung mithilfe der Mehrkörpersimulation / Großer Beleg, TU Dresden (2012)
- [RITZ09] Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik / Journal Reine Angewandte Mathematik Nr. 135 (1909), S.1-61
- [ROEG64] Rögnitz, H.: Getriebe für Geradwege an Werkzeugmaschinen / 2. Auflage / Berlin Heidelberg / Springer Verlag (1964)
- [SCHL10] Schlecht, B.: Maschinenelemente 2 / Getriebe - Verzahnungen - Lagerungen / 1. Auflage / München / Pearson Studium (2010)
- [SCHU08] Schudy, J.: Flankentragfähigkeit von innen- und außenverzahnten Stirnrädern bei geringen Umfangsgeschwindigkeiten / FVA-Forschungsvorhaben Nr. 482/I, FVA-Heft Nr. 867, Frankfurt (2008)
- [SCHU12] Schultheiss, M.: Untersuchung zur Anwendbarkeit allgemeiner Einflussfunktionen für die semi-numerische Ermittlung des Kontaktverhaltens von Ritzel-Zahnstangenverzahnungen / Internes Dokument / Bachelorarbeit Hochschule Darmstadt (2012)
- [SCHU14] Schlecht, B.; Schulze, T.: Abschlussbericht Lenkungsprüfstand für die ZF Lenksysteme GmbH, Wöhlerlinien 1-3 / TU Dresden (2014)
- [SENF77] Hohrein, A.; Senf, M.: Untersuchungen zur Last- und Spannungsverteilung an schrägverzahnten Stirnrädern / Dissertation TU Dresden (1977)
- [STOLL09] Stoll, R. D.; Niemann-Delius, C.: Braunkohletagebau / Berlin, Heidelberg / Springer Verlag (2009)
- [SZAB01] Szabó, I.: Höhere Technische Mechanik / Berlin, Heidelberg, New York / Springer Verlag (2001)
- [TRAG15] Schlecht, B.; Tragsdorf, M.: Abschlussbericht Lenkungsprüfstand für die ZF Lenksysteme GmbH, Wöhlerlinie 4 / TU Dresden (2015)
- [TOBI01] Tobie, T.; Oster, P.; Höhn, B.-R.: Einfluss der Einsatzhärtetiefe auf die Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit großer Zahnräder / Abschlussbericht Forschungsvorhaben Nr.271, FVA-Heft 622 (2001)
- [VEDM81] Vedmar, L.: On the Design of External Involute Helical Gears / Transaction of Machine Elements Division / Technical University Lund, Sweden (1981)
- [WALZ97] Walz, W.: Daimler Benz – Wo das Auto anfang / 6.Auflage / Konstanz / Verlag Stadler (1997)

- [WASS05] Wassermann, J.: Einflussgrößen auf die Tragfähigkeit von Schraubradgetrieben der Werkstoffpaarung Stahl/Kunststoff / Diss. Ruhr-Universität Bochum (2005)
- [WEBA53] Weber, C.; Banaschek, K.: Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern / Schriftreihe Antriebstechnik / Heft 11 / Braunschweig / Vieweg u. Sohn (1953)
- [WIES13] Wiese, H.: Entwicklung einer analytischen Methode zur Berücksichtigung lokaler Spannungen bei der Dimensionierung von Zahnstangen / Internes Dokument / Bachelorarbeit Hochschule Karlsruhe (2013)
- [WOHN94] Wohnhaas, A.T.: Simulation von Kraftfahrzeug-Lenkungen unter besonderer Berücksichtigung von Reibung und Spiel / Diss. Uni Stuttgart (1994)
- [WOLF09] Wolfien, A.: Überprüfung der BECAL-Zahnverformungsberechnung bei Kegelrädern / Großer Beleg TU Dresden (2009)





---

## Lebenslauf

Arian Wolfien

---

### Persönliche Angaben

Geburtsdatum 25. Januar 1984  
Geburtsort Magdeburg  
Nationalität deutsch  
Familienstand ledig, 2 Kinder

---

### Bildungs- und Arbeitsweg

seit 08/2013 Berechnungsingenieur bei der Robert Bosch Automotive Steering GmbH, Fachbereich: Verzahnungsentwicklung

02/2011 SFI- Lehrgang (SLV Halle) mit den Abschlüssen:  
**Schweißfach-Ingenieur (SFI), European Welding Engineer (EWE) und International Welding Engineer (IWE)**

08/2010 – 08/2013 **Promotionsstudent** in Kooperation zwischen der ZF Lenksysteme GmbH und dem IMM (TU Dresden)

10/2004 – 07/2010 **Studium des Allgemeinen u. konstruktiven Maschinenbaus**  
Institut für Maschinenelemente und –konstruktion (IMM)  
Technische Universität Dresden  
Abschluss des Hochschulstudiums als **Dipl.-Ing.**

Diplomarbeit:  
*„Mögliche Auswirkungen periodischer Formabweichungen auf die Lastverteilung, Tragfähigkeit und das Geräusch bei Kegelrädern“*

03/2003 **Allgemeine Hochschulreife** nach 12,5 Jahren  
Friedrich-Ludwig-Jahn-Gymnasium, Haldensleben

---

### Wichtige Praktika

01/2009 – 08/2009 Großer Beleg, TU Dresden  
*„Überprüfung der BECAL- Zahnverformungsberechnung bei Kegelrädern“*

09/2007 – 02/2008 **Rolls Royce Deutschland Ltd & Co KG, Dahlewitz**  
Fachpraktikum mit Projektarbeit unter dem Thema:  
*„Untersuchungen an der Internal Gearbox eines Triebwerks“*

06/2001 Maschinenbaupraktikum, Otto- Von- Guericke Universität, Magdeburg

Schwäbisch Gmünd, Februar 2018



Online-Shops



Fachliteratur und mehr -  
jetzt bequem online recher-  
chieren & bestellen unter:  
[www.vdi-nachrichten.com/](http://www.vdi-nachrichten.com/)  
Der-Shop-im-Ueberblick



Täglich aktualisiert:  
Neuerscheinungen  
VDI-Schriftenreihen



Im Buchshop von vdi-nachrichten.com finden Ingenieure und Techniker ein speziell auf sie zugeschnittenes, umfassendes Literaturangebot.

Mit der komfortablen Schnellsuche werden Sie in den VDI-Schriftenreihen und im Verzeichnis lieferbarer Bücher unter 1.000.000 Titeln garantiert fündig.

Im Buchshop stehen für Sie bereit:

**VDI-Berichte** und die Reihe **Kunststofftechnik**:

Berichte nationaler und internationaler technischer Fachtagungen der VDI-Fachgliederungen

**Fortschritt-Berichte VDI**:

Dissertationen, Habilitationen und Forschungsberichte aus sämtlichen ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen

**Newsletter „Neuerscheinungen“:**

Kostenfreie Infos zu aktuellen Titeln der VDI-Schriftenreihen bequem per E-Mail

**Autoren-Service:**

Umfassende Betreuung bei der Veröffentlichung Ihrer Arbeit in der Reihe Fortschritt-Berichte VDI

**Buch- und Medien-Service:**

Beschaffung aller am Markt verfügbaren Zeitschriften, Zeitungen, Fortsetzungsreihen, Handbücher, Technische Regelwerke, elektronische Medien und vieles mehr – einzeln oder im Abo und mit weltweitem Lieferservice

## Die Reihen der Fortschritt-Berichte VDI:

- 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
- 2 Fertigungstechnik
- 3 Verfahrenstechnik
- 4 Bauingenieurwesen
- 5 Grund- und Werkstoffe/Kunststoffe
- 6 Energietechnik
- 7 Strömungstechnik
- 8 Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik
- 9 Elektronik/Mikro- und Nanotechnik
- 10 Informatik/Kommunikation
- 11 Schwingungstechnik
- 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
- 13 Fördertechnik/Logistik
- 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
- 15 Umwelttechnik
- 16 Technik und Wirtschaft
- 17 Biotechnik/Medizintechnik
- 18 Mechanik/Bruchmechanik
- 19 Wärmetechnik/Kältetechnik
- 20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE CAQ, CIM ...)
- 21 Elektrotechnik
- 22 Mensch-Maschine-Systeme
- 23 Technische Gebäudeausrüstung

ISBN 978-3-18-344201-0