

Reihe 5

Grund- und
Werkstoffe/
Kunststoffe

Nr. 759

Dipl.-Ing. (FH) Rolf Winkler,
Aalen

Experimentelle und numerische Bestimmung strukturmechanischer und akustischer Eigen- schaften von metalli- schen Hohlkugelstruk- turen

**Experimentelle und numerische Bestimmung
strukturmechanischer und akustischer Eigenschaften
von metallischen Hohlkugelstrukturen**

Dissertation

zur Erlangung des

Doktorgrades der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

des

Zentrums für Ingenieurwissenschaften
der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg,

vorgelegt

von Herr Dipl.-Ing. (FH) Rolf Winkler
geb. am 18. Mai 1983 in Aalen (Baden-Württemberg)

Gutachter:

1. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Holm Altenbach
2. Prof. Dr.-Ing. Markus Merkel
3. Prof. Dr. rer. nat. Burkhard Heine

Tag der Verteidigung: 4. Juni 2015

Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 5

Grund- und
Werkstoffe/
Kunststoffe

Dipl.-Ing. (FH) Rolf Winkler,
Aalen

Nr. 759

Experimentelle und
numerische Bestimmung
strukturmechanischer
und akustischer Eigen-
schaften von metalli-
schen Hohlkugelstruk-
turen

VDI verlag

Winkler, Rolf

Experimentelle und numerische Bestimmung strukturemechanischer und akustischer Eigenschaften von metallischen Hohlkugelstrukturen

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 5 Nr. 759. Düsseldorf: VDI Verlag 2016.

218 Seiten, 120 Bilder, 17 Tabellen.

ISBN 978-3-18-375905-7, ISSN 0178-952X,

€ 76,00/VDI-Mitgliederpreis € 68,40.

Für die Dokumentation: Zellulare Metalle – Metallische Hohlkugelstruktur – Homogenisierung – Strukturmechanik – Elastizitätsmodul – Anisotropie – Schallabsorption – Computertomografie – Schwingung – Stochastische Kugelanordnungen

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Charakterisierung mechanischer und akustischer Eigenschaften von metallischen Hohlkugelstrukturen. Dieser relativ junge zellulare Werkstoff kennzeichnet sich durch seine besondere Zellmorphologie aus. Im Gegensatz zu bisher bekannten Metallschäumen weist der Strukturaufbau mit Hohlkugeln geringere Abweichungen in der Zellgröße und -anordnung auf. Ausgehend von geringeren Unregelmäßigkeiten in ihrem Strukturaufbau werden die Eigenschaften der Hohlkugelstrukturen oftmals als isotrop angenommen. Die meisten bisherigen analytischen und numerischen Betrachtungen beschränkten sich auf ideale Hohlkugelanordnungen, während sich der Großteil der experimentellen Untersuchungen mit zufälligen Anordnungen beschäftigt. Aus dieser Diskrepanz heraus ergibt sich die Motivation dieser Arbeit. Der Schwerpunkt liegt in der Analyse des anisotropen mechanischen und akustischen Verhaltens unter dem Einfluss unregelmäßiger bzw. beliebiger Hohlkugelanordnungen.

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie (German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at <http://dnb.ddb.de>.

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 2016

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-952X

ISBN 978-3-18-375905-7

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Zentrum für virtuelle Produktentwicklung der Hochschule Aalen.

Die Betreuung der Promotion übernahm Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Holm Altenbach. Ich danke Ihm für die Unterstützung und die konstruktive Zusammenarbeit. Prof. Dr.-Ing. Markus Merkel gab mir im Rahmen eines Forschungsprojektes (Baden-Württemberg Stiftung) die Möglichkeit, an den Inhalten dieser Dissertation zu arbeiten. Ihm danke ich für das entgegengebrachte Vertrauen und die Freiheit, die ich in den letzten Jahren erfolgreich nutzen konnte. Die beiden oben genannten Professoren erstellten zusammen mit Prof. Dr. rer. nat. Burkhard Heine die Gutachten. Ihm gebührt ebenfalls besonderer Dank.

Ich danke alle Kollegen und Kolleginnen, die zum Gelingen dieser Arbeit mitgewirkt haben. Besonderen Dank gilt Dipl.-Inf. Janina Schulz von der Universität Freiburg für die Unterstützung im Bereich digitale Bildverarbeitung. Zudem danke ich Prof. Dr.-Ing. Dr. rer. nat. habil. Drs. h.c. Dietrich Stoyan und Dr.-Ing. Antje Elser von der Technische Universität Bergakademie Freiberg für die Bereitstellung eines Packungsalgorithmus. Dankenswerterweise unterstützte mich Prof. Dr. Wolfram Pannert im Bereich Akustik. Ein herzlicher Dank gilt Prof. Dr. rer. nat. Burkhard Alpers für die mathematische Unterstützung in dieser Zeit. Darüber hinaus danke ich allen Korrekturleser und -leserinnen für ihr Engagement.

An dieser Stelle möchte ich fern der wissenschaftlichen Ausarbeitung all den Menschen meinen persönlichen Dank aussprechen, die an mich glaubten und mich in dieser Zeit unterstützten. Für die manchmal nötige Ablenkung von der Arbeit danke ich meinem Freundeskreis und den Kameraden der Freiwilligen Feuerwehr.

Ganz besonderer Dank gilt Veronika und unseren Familien. Ihr stetiger Rückhalt und ihre unendliche Geduld waren sehr wichtig für mich.

Aalen, im August 2015
Rolf Winkler

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	2
1.2	Zellulare Materialien	4
1.2.1	Zellulare Metalle	5
1.2.1.1	Offenporige zellulare Metalle	6
1.2.1.2	Geschlossenporige zellulare Metalle	6
1.2.2	Metallschäume	7
1.2.3	Hohlkugelstrukturen	8
1.3	Stand der Forschung	10
1.4	Ziel und Inhalt der Arbeit	15
2	Theoretische Grundlagen	17
2.1	Mechanische Grundlagen	17
2.1.1	Verzerrungen, Spannungen und Bilanzgleichungen	18
2.1.2	Materialgesetze	18
2.2	Mechanische Kontinuumschwingungen	18
2.3	Akustische Grundlagen	19
2.3.1	Schallwellenausbreitung und akustische Kenngrößen	19
2.3.1.1	Schallwellen	19
2.3.1.2	Schallfelder	20
2.3.1.3	Impedanz und Admittanz	20
2.3.1.4	Schallintensität und Schallleistung	21
2.3.1.5	Ebene und stehende Welle	21
2.3.2	Mechanismen der Schallabsorption	22
2.3.2.1	Schallabsorptionsgrad	22
2.3.2.2	Schallreflektionskoeffizient	23
2.3.2.3	Schalltransmissionsgrad	24
2.3.2.4	Schalldissipationsgrad	24
2.3.2.5	Wandimpedanz	24
2.3.2.6	Gesetz von Darcy	25
3	Methoden zur Charakterisierung	27
3.1	Geometriemodellbildung	27
3.1.1	Untersuchung realer Strukturen	27
3.1.1.1	Computertomografie	27
3.1.1.2	Rekonstruktion- und Rückführ-Algorithmus	28
3.1.2	Reguläre Packungen - Gitterstrukturen	29
3.1.3	Zufällige Kugelpackungen	31

3.1.4	Hohlkugel-Mesomodell	32
3.1.4.1	Geklebtes Modell	32
3.1.4.2	Gesintertes Modell	33
3.1.5	Stochastischer Kugelgenerator	34
3.1.5.1	Kugelmodelle	34
3.1.5.2	Kugelpackungsmodelle	34
3.1.6	Algorithmen zur Kugelpackungengenerierung	36
3.1.7	Kenngrößen zur Charakterisierung zufälliger Kugelpackungen	37
3.1.7.1	Lokale Dichte	38
3.1.7.2	Koordinationszahl	40
3.1.7.3	Bindungswinkel	40
3.1.7.4	Paarkorrelation	41
3.1.7.5	Kovarianz	42
3.1.8	Geometrisches Volumenmodell	42
3.1.8.1	Reguläres Modell	43
3.1.8.2	Stochastisches Modell	43
3.2	Elastizitätswerte	45
3.2.1	Homogenisierung	45
3.2.2	Materialsymmetrie	48
3.2.3	Negative Querkontraktion	50
3.2.4	Lastfälle	50
3.2.5	Periodische Randbedingungen	51
3.3	Schwingungsanalyse	54
3.3.1	Numerische Modalanalyse	55
3.3.2	RITZsches Verfahren	55
3.3.3	Experimentelle Modalanalyse	57
3.3.3.1	Versuchsaufbau und Messtechnik	58
3.3.3.2	Probenvorbereitung	59
3.3.3.3	Signalverarbeitung	59
3.4	Schallabsorption	59
3.4.1	Absorptionsmechanismus	60
3.4.2	Charakterisierende Materialeigenschaften und -größen	61
3.4.2.1	Porosität	61
3.4.2.2	Strömungswiderstand	61
3.4.2.3	Porenformfaktor und charakteristische Längen	62
3.4.2.4	Tortuosität	64
3.4.3	Äquivalentes Fluid-Modell	64
3.4.3.1	DELANY-BAZLEY-Modell	64
3.4.3.2	JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell	65
3.4.4	Akustische Messungen	67
4	Ergebnisse	71
4.1	Zufällige Kugelpackungen	71
4.1.1	Reale Kugelpackungen	71
4.1.2	Erzeugte Kugelpackungen	74
4.2	Statik	78
4.2.1	Einachsige Belastung	79
4.2.2	Mehrachsige Belastung - Materialsymmetrien	85

4.2.3	Einfluss der Randbedingungen	92
4.2.4	Vergleich und Diskussion	94
4.3	Schwingungen	99
4.3.1	Versuchsdurchführung	99
4.3.2	Bestimmung der Materialkennwerte	100
4.3.3	Vergleich	102
4.4	Verifizierung	104
4.5	Akustik	108
4.5.1	Zwei-Mikrophon-Methode	108
4.5.2	Vier-Mikrophon-Methode	109
5	Schlussbetrachtung	113
5.1	Zusammenfassung	113
5.2	Modellerweiterungen und neue Einsatzgebiete	115
5.3	Ausblick	116
Anhang		117
A	Theoretische Grundlagen	117
A.1	Mechanische Grundlagen	117
A.1.1	Bezugssysteme, Verschiebungen und Verzerrungen	117
A.1.2	Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfelder	120
A.1.3	Belastungen und Spannungen	121
A.1.4	Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen	122
A.1.5	Bilanzgleichungen	123
A.1.5.1	Massenbilanz	123
A.1.5.2	Impulsbilanz	124
A.1.5.3	Drehimpulsbilanz	124
A.1.5.4	Mechanische Energiebilanz	124
A.1.5.5	Thermomechanische Energiebilanz	125
A.1.6	Materialverhalten	126
A.1.6.1	Linear-elastische Festkörper	127
A.1.6.2	Ideales Gas	131
A.1.6.3	Linear-viskose Fluide	131
A.1.7	Anfangs-Randwertproblem und HAMILTONSches Prinzip	132
A.2	Plattenschwingungen	133
A.2.1	KIRCHHOFFSche Plattentheorie	134
A.2.2	MINDLINSche Plattentheorie	139
A.2.3	Weitere und höhere Plattentheorien	142
A.3	Grundlagen zur Akustik	143
A.3.1	Allgemeine lineare Wellengleichung in viskosen Fluiden	143
A.3.2	Schallgeschwindigkeit	146
A.3.3	Gesetz von Hagen-Poiseuille	147
A.3.4	Lineare Wärmeleitungsgleichung	149
A.3.5	Schallausbreitung in zylindrischen Röhren	149

B	Charakterisierungsmethoden	155
B.1	Homogenisierungstheorie	155
B.2	Periodische Randbedingung: FEM	157
B.3	Mindlin-Platte: PB2-RITZ-Methode	159
B.4	Kenngößen geordneter Kugelpackungen	162
B.5	Akustische Messmethoden	164
B.5.1	Zwei-Mikrofon-Methode	164
B.5.2	Vier-Mikrofon-Methode	164
B.5.3	Two-Load-Methode	166
B.5.4	One-Load-Methode	167
B.5.4.1	Bestimmung der akustischen Parameter	167
B.6	JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-PRIDE-LAFRAGE-Modell	168
C	Resultate	171
C.1	Sonderfall: Periodische Randbedingung für ideale Anordnung	171
C.1.1	Kubische Elementarzellen	171
C.1.2	Hexagonal dichtest gepackte Elementarzelle	171
C.2	Sinterstellenwinkel	172
C.2.1	Kubisch-Primitiv	173
C.2.2	Kubisch-Raumzentriert	173
C.2.3	Kubisch-Flächenzentriert	174
C.2.4	Hexagonal-Dichtest-Gepackt	174
C.3	Schallabsorption	178
C.4	Schallgeschwindigkeitskörper	183
	Literaturverzeichnis	196

1 Einleitung

Eine ständig wachsende Weltbevölkerung und das Bestreben unserer modernen, hochtechnisierten Konsumgesellschaft nach weiterer technischer Entwicklung und Wohlstand stellt eine zentrale Herausforderung der Menschheit dar. Dabei greift der Mensch zum Wohle des Fortschritts immer stärker in das natürliche Ökosystem unserer Erde ein, mit teils katastrophalen Auswirkungen. Zudem zwingt ein globaler Markt Unternehmen jeglicher Industriebereiche zu einer Erarbeitung günstiger Technologien zur Sicherung ihrer nationalen und internationalen Wettbewerbsfähigkeit. Diese Problematik macht sich auch in der Materialwissenschaft bemerkbar. Die Anforderungen an technische Konstruktionen steigen ständig, jene müssen an Leichtigkeit gewinnen, sollen dabei höhere Nutzlasten tragen, umweltverträglich sein, einen steigenden Komfort und eine höhere Unfall- und Ausfallsicherheit gewährleisten und nicht zuletzt wirtschaftlich hergestellt werden. Der gleichzeitig wachsende Anspruch unserer Gesellschaft nach einer energie-, ressourcenschonenden und nachhaltigen Lebensweise führt zu einem enormen Forschungsbedarf und stellt eine nicht leicht zu erfüllende Optimierungsaufgabe dar. In der Materialforschung und -entwicklung steckt großes Potential, um die primären Ziele der Nachhaltigkeit, wie maximale Energie- und Rohstoffeinsparung unter ökologischen und ökonomischen Randbedingungen zu erreichen. Neue Materialien müssen nicht nur leicht sein, sondern gleichzeitig noch eine Vielzahl anderer Funktionen erfüllen.

Die Natur hat sich dieser Herausforderung gestellt und in einem Jahrmillionen dauernden Evolutionsprozess durch Verwendung zellulärer Materialien diese Problematik gelöst. Zelluläre Materialien, wie zum Beispiel Knochen, Holz oder Kork, begegnen uns in unserem Alltag ständig und stellen keine Besonderheit mehr dar. Um die genialen Baupläne der Natur in technische Lösungen umzusetzen, muss sich die Wissenschaft noch mancher Herausforderung stellen. Zum Teil wurden diese Konzepte bereits erkannt und werden nun in vielen Bereichen der Technik - zum Beispiel mittels Wabenstrukturen und Polymerschäumen - realisiert. Diese Materialien mit zellularem Aufbau vereinen hohe Steifigkeit mit geringem spezifischem Gewicht und haben zudem eine hohe Energiedissipation. Schon vor mehreren Jahrzehnten hat man diesen Ansatz auch bei metallischen Materialien verfolgt. Durch gezieltes Weglassen von Material bzw. das Einbringen von Poren in metallische Festkörper entstand so eine neue Materialklasse, die Metallschäume.

Dank neuer und kostengünstiger Herstellungsmethoden und zwischenzeitlich besserer Kenntnis ihres Materialverhaltens erweitern diese zellulären Metalle das Einsatzspektrum technischer zellulärer Materialien. Ihre technisch schwierigere und noch kostenintensivere Herstellung im Vergleich zu Kunststoffschäumen, sowie die teils großen Inhomogenitäten und ungenügende Reproduzierbarkeit aktuell kommerziell erhältlicher Metallschäume verhindern noch eine weite Verbreitung. Allerdings gibt es einige wenige Bereiche, in denen Metallschäume heute schon zum Einsatz kommen. Dies sind Anwendungsbereiche in denen Kunststoffschäume an ihre Grenzen kommen - sei es in Festigkeit, Temperaturbeständigkeit oder Umweltverträglichkeit. Dies betrifft die Sektoren der Transport-, Luft- und Raumfahrtindustrie ebenso wie schon erste Konsumgüter und die Werkzeugmaschinenindustrie, wo eine ständige Nachfrage nach neuen Leichtbaukonzepten herrscht. So werden zelluläre Metalle als Crash-Absorber in diversen Fahrzeugen und Zügen, als Schwingungsdämpfer an Robotern oder in Filtern in Industrieanlagen eingesetzt. Ebenfalls

bei Gebrauchsgütern, wie zum Beispiel Türgriffen, lassen sich Materialeinsparungen und damit Kostensenkungen realisieren.

Allerdings wartet man bis heute noch auf den kommerziellen Durchbruch der zellularen Metalle, insbesondere der Metallschäume. Dies kann nur gelingen, wenn die Wirtschaftlichkeit der zellularen Metalle steigt und die Eigenschaften verbessert werden. Eine Verbesserung der Eigenschaft bedeutet nicht nur mehr Multifunktionalität, sondern auch eine geringe Streuung der Materialkennwerte und damit verbundene Reproduzierbarkeit. Einen gewissen Teil hierfür kann das relativ neue und innovative zellulare Metall, metallische Hohlkugelstrukturen, durch seine Zellenform und gut reproduzierbare Zellengrößen, beitragen. Allein diese Eigenschaft genügt jedoch nicht, um der Verbreitung des Materials Genüge zu tragen. Zusätzlich müssen grundlegende Kenntnisse über physikalisches und mechanisches Materialverhalten gewonnen werden. Zudem wäre es von Vorteil, eine kostengünstige Vorhersage des Materialverhaltens für verschiedene Lastannahmen mittels numerischer Simulation zu erhalten, um die Anforderungen optimal an die Leistungsfähigkeit des zellularen Metalls anzupassen. Des Weiteren sollten dem Konstrukteur einfach handhabbare Materialkennwerte übergeben werden, um eine zügige und sichere Realisierung zu ermöglichen.

1.1 Motivation

„When modern man builds large load-bearing structures, he uses dense solids, steel, concrete, glass. When nature does the same she generally uses cellular materials: wood, bone, coral. There must be good reason for it.“

M.F. Ashby

Ausgehend von dieser Feststellung begannen in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts Bemühungen mit der Zielsetzung zellulare Materialien künstlich zu erzeugen, die eine Nachbildung der Natur darstellen sollen und die klassischen Baumaterialien teilweise ablösen können. Die vielfältigen Möglichkeiten der zellularen Materialien ergeben ein breites Einsatzspektrum, aufgrund der, in gewissen Ausmaßen, Beeinflussung durch Abwandlung der Zellgeometrie und -abmaße. Durch die Variabilität des Strukturaufbaus dieser Werkstoffe ist es möglich eine Vereinigung von mehreren förderlichen Materialeigenschaften zu bilden und folglich ein multifunktionales Material zu erschaffen.

Bis zum heutigen Tag werden in der Massenproduktion nur kunststoffbasierte Schäume und Schwämme, wie beispielsweise Polystyrol- oder Polyethanschaum, hergestellt und verarbeitet. Eigenschaften, wie geringe Steifigkeiten oder große Empfindlichkeit bei hohen Temperaturen, setzen diesen Materialien Grenzen in ihrer Anwendbarkeit. Diese Defizite versucht man seit Jahrzehnten durch Erforschung zellulärer Metallen zu kompensieren. Die bisherigen Untersuchungen bescheinigen den zellularen Metallen eine hohe Fähigkeit zur kinetischen Energieabsorption (Crash) [58, 136], gute Schwingungsdämpfung [76, 77, 156], sehr gute Schalldämpfung bzw. -absorption [87, 139], exzellente Wärmeisolation [138, 165] und hohe spezifische Steifigkeit [9, 63]. Mit diesen hervorragenden Materialeigenschaften zeichnen sich die zellularen Metalle als multifunktionale Leichtbauwerkstoffe aus. Jedoch bedarf es mehr als der zum Teil brillanten Materialeigenschaften für eine industrielle Verbreitung der zellularen Metalle. 1999 wurde vom Chemnitzer Fraunhofer Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik IWU eine Befragung [93], unter deutschen Unternehmen aus dem Bereich Maschinenbau durchgeführt. Sie ergab, dass die Verbreitung von zahlreichen Faktoren abhängt, wie zum Beispiel dem Preis oder der fehlenden exakten Kenntnisse der Materialeigenschaften. Die Erhebung produzierte aufschlussreiche Ergebnisse. Das direkte Interesse der Befragten an geschäumten Metallen war allgemein nur mäßig, was sich auch in ihrem Bekanntheitsgrad widerspiegelt. Stellte man jedoch die Frage nach Werkstoffen

mit innerhalb gewissen Grenzen einstellbaren Eigenschaften, war die Aufgeschlossenheit bzw. das Interesse erheblich größer. Die Möglichkeit, dass sich Werkstoffkennwerte nach den vorliegenden Anforderungen richten, erweitert die Auswahlmöglichkeiten und die Variationsvielfalt deutlich und ist deshalb in aller Regel wünschenswert. Zelluläre Metalle, unter anderem Metallschäume, sind ebenfalls Werkstoffe mit einstellbaren Eigenschaften. Über die Variation der Zellgröße, -form oder -wanddicke, die wiederum die Dichte des Materials beeinflusst, können alle technischen Eigenschaften wie Elastizitätsmodul, Streckgrenze oder Zugfestigkeit, eingestellt werden. Dennoch ist das allgemeine Interesse gering. Wahrscheinlich begründet sich dies damit, dass viele Ingenieure mit dem Begriff „Schaum“ die Eigenschaften weich und wenig steif assoziieren [93]. Aus dieser Erkenntnis lässt sich eine weitere Aufklärung als Konsequenz ziehen.

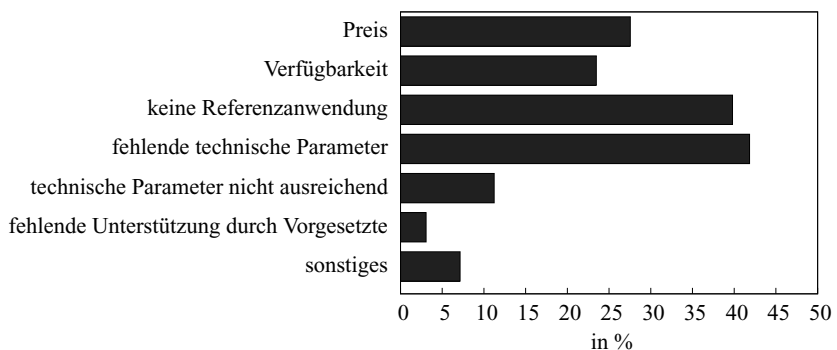


Abbildung 1.1: Hemmnisse für den Einsatz zellulärer Metalle nach [93].

Eine Tendenz, sich mit zellulären Metallen zu beschäftigen, zeigt sich vor allem in besonders innovativen Arbeitsgebieten wie der Luft- und Raumfahrt sowie der Automobilindustrie. Zelluläre Metalle bieten aber ebenso Vorteile im Bereich der Konsumgüter, wie erste Referenzanwendungen zeigen. Legt man besonderes Augenmerk auf die Hemmnisse für den Einsatz zellulärer Metalle bzw. Metallschäume in Abb. 1.1, wird deutlich, dass das Fehlen von Referenzanwendungen und technischer Parameter die Haupthindernisse sind. Gerade grundlegende Materialkennwerte wie Elastizitätsmodul oder Druckfestigkeit, die vor allem konstruktionsrelevant sind, sind für die industrielle Verbreitung notwendig. Erst mit dem tieferen Verständnis des Materialverhaltens zellulärer Metalle wurden erste Referenzanwendungen möglich.

Die metallischen Hohlkugelstrukturen stellen eine noch relativ neue Gruppe im Bereich der zellulären strukturierten Metalle dar. Während auf dem Gebiet der Metallschäume ungefähr 150 Institutionen forschen und seit der Jahrtausendwende die Zahl der Publikationen in diesem Bereich jährlich um ungefähr 20% wächst [129], sind die Forschungsaktivitäten im Sektor der metallischen Hohlkugelstrukturen überschaubarer. Allerdings können die gewonnenen Forschungserkenntnisse aus dem Bereich der Metallschäume auf die Hohlkugelstrukturen teilweise angewendet bzw. übertragen werden, was wiederum zu einer Beschleunigung der Forschung in diesem Gebiet führt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den einstellbaren Größen, wie Zellanordnung, -größe und -wandstärke, von metallischen Hohlkugelstrukturen und ihren Auswirkungen auf die technischen und physikalischen Parameter der linearen Elastizität und der akustischen Absorption.

1.2 Zellulare Materialien

1665 beobachtete Robert Hooke mit einem simplen Mikroskop den natürlichen Werkstoff Kork. Dabei entdeckte er eine kastenförmige Struktur [96]. Diese Struktur nannte er *cellulae* (lat.), was im Deutschen einer kleinen Kammer entspricht. Daraufhin konstruierte Anton van Leeuwenhoek sein eigenes Mikroskop und untersuchte natürliche Substanzen wie Milch, die eine einzellige Struktur aufwiesen [128]. So entstand der heutige Begriff der Zelle.

Zellulare Materialien findet man in großer Anzahl und Vielfalt in der Natur. Aber warum verwendet die Natur solche zellularen Strukturen? Der Nutzen dieser Strukturen liegt darin, dass sie eine relativ geringe Masse besitzen und zudem oft weitere Funktionen, wie Nährstofftransport oder Nervenleitungen, beinhalten. Die geringe Masse birgt vor allem dann Vorteile, wenn die Struktur beschleunigt oder verzögert werden muss, dabei aber auch eine hohe Steifigkeit aufweisen sollte. Solche Strukturen wurden in der Natur in einem Zeitraum von Jahrmillionen optimiert. Ein typisches Beispiel stellt der Knochen dar. Er besitzt eine recht geringe Masse bei einer hohen Steifigkeit. Dies ist notwendig, um den Körper mit seinen Muskeln im Gleichgewicht zu halten. In der Regel weisen zellulare Materialien ein günstiges Verhältnis zwischen Masse und Steifigkeit auf. Seit Jahrtausenden versucht der Mensch, sich diese Eigenschaften der zellularen Materialien zunutze zu machen. Zu Beginn verwendete der Mensch die in der Natur vorkommenden zellularen Materialien wie Holz oder Kork. Mit der Zeit erlangte er die Fähigkeit, selbst künstlich zellulare Materialien herzustellen. Heutzutage sind diese zellularen Materialien, insbesondere Schäume, aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken. Beispielsweise ist Styropor in technischen Anwendungen sowie im täglichen Leben selbstverständlich geworden. Bereits in den 40er Jahren des letzten Jahrhunderts wurde die Idee zu einem neuen Werkstoff geboren, der zum einen hohe Steifigkeit und zum anderen die Leichtigkeit eines Naturschwamms aufweisen sollte. Ein weiterer Meilenstein in der Geschichte folgte in den 50er Jahren als geschmolzenes Aluminium in Natrium-Chlorid-Negativformen gegossen wurde. So stellte man 1959 erstmals pulvermetallurgisches Halbzeug mit Treibmittel her und es gelang 1963 das direkte Aufschäumen einer Schmelze. Jedoch begann die eigentliche technische Verwendung vor allem von zellularen Metallen, insbesondere Metallschäumen, erst in den letzten Jahren. Es wurden neue und einfachere Herstellungsverfahren entwickelt und diese Werkstoffe können kosteneffizienter produziert werden. Heutzutage lassen sich nahezu alle Materialien einem Schäumungsprozess unterziehen. Dank der neuen Herstellungsverfahren lassen sich nun Eigenschaften eines beliebigen Grundmaterials, wie zum Beispiel jene von Metallen, mit den Eigenschaften einer zellularen Struktur verbinden und somit Gebiete neuer Materialeigenschaften erschließen.

Abbildung 1.2 zeigt den Elastizitätsmodul als Funktion der Dichte für zellulare und konventionelle Materialien. Hierbei steht der Elastizitätsmodul als ein Teil des Maßes für die Steifigkeit und die Dichte als ein Maß für die Masse. Auf Grund des Verhältnisses der beiden Größen zueinander werden zellulare Materialien vor allem im Leichtbau eingesetzt.

Diese neuen Materialien mit ihren besonderen Eigenschaften, eröffnen auch verschiedene neue Anwendungsgebiete, in denen zellulare Materialien eingesetzt werden können. Prädestinierte Bereiche hierfür sind die Luft- und Raumfahrtindustrie aber auch die Rüstungsindustrie, wie zum Beispiel zum Unterbodenschutz von Panzern gegen Minen. Heute ist zu beobachten, dass die Anwendungsbereiche mehr in die zivile Nutzung übergehen. Die folgende Aufzählung soll einen kleinen Einblick in das aktuelle Einsatzgebiet zellulärer Materialien geben. Zellulare Materialien werden zum Beispiel als Crashelemente für die Fahrzeug- und Schienentechnik, als Träger von Katalysatoren (aufgrund ihrer großen Oberfläche), als Filter, als Auftriebskörper im Schiffsbau, als Biomaterial für Implantate, als Wärmeisolator im Brandschutz und Wohnungsbau, als Kern in Sandwich-Konstruktionen, als Schwingungsdämpfer in Roboterarmen und Maschinenbetten,

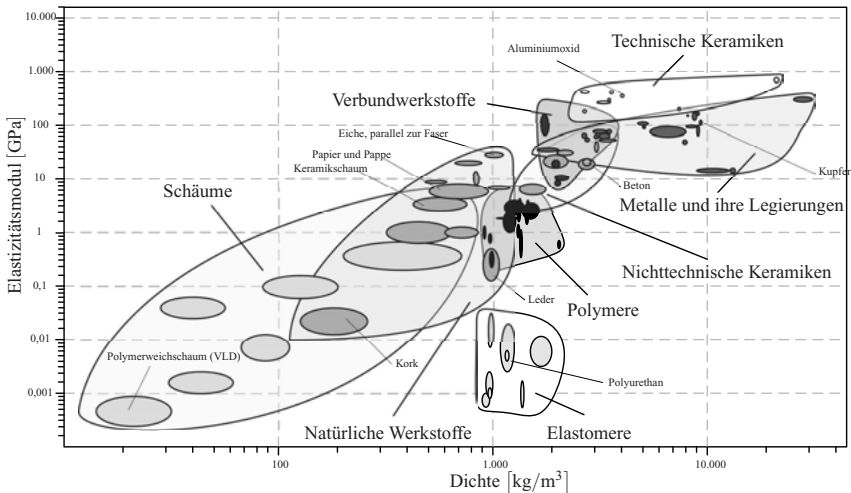


Abbildung 1.2: Elastizitätsmodul und Dichte für verschiedene Materialien nach [79].

im Leichtbau als Trägerelemente, als Akustikabsorber oder neuerdings als moderne Kunst und Schmuck verwendet.

1.2.1 Zellulare Metalle

Poröse metallische Werkstoffe, auch als zellulare Metalle bezeichnet, bestehen im Allgemeinen aus zwei Phasen: Zum einen aus metallischen und zum anderen aus einer großen Menge mikro- und makroskopisch verteilten Gases (meist Luft). Die Erscheinungsform der zellularen Metalle ist vielfältig. Eine eindeutige Klassifikation gestaltet sich schwierig [116].

Einerseits kann man die zellularen Metalle aufgrund ihres Strukturaufbaus wie in Abb. 1.3 klassifizieren, andererseits kann man sie anhand der möglichen Herstellungsverfahren, wie in Abb. 1.4 dargestellt, einteilen. Zu den zellularen Metallen gehören offen- und geschlossenporige Metallschäume ebenso wie Bienenwabenstrukturen, metallische Hohlkugel- und Faserstrukturen oder im Verbundguss gefertigte Werkstoffe. Auch syntaktische Schäume, die sich aus zwei festen und einem gasförmigen Stoff (meist Luft) zusammensetzen, gehören zu dieser Gruppe der Leichtbauwerkstoffe. Gegenwärtig ist die Nutzung von leichten metallischen Strukturen hauptsächlich durch metallische Schäume gekennzeichnet. Doch stellen aus metallischen Hohlkugeln aufgebaute Strukturen eine neue, interessante Variante dieser leichten Materialien dar.

Alle zellularen Metallstrukturen weisen gewisse Analogien auf: Sie bieten ein gutes Masse-Volumen-Verhältnis und eine hohe Steifigkeit, sind temperaturbeständig, wärmedämmend, recycelbar und verbinden eine geringe Dichte mit einem hohen Energieabsorptions- und Dämpfungsvermögen. Die verschiedenen anwendungsspezifischen Eigenschaften können zudem miteinander kombiniert werden.

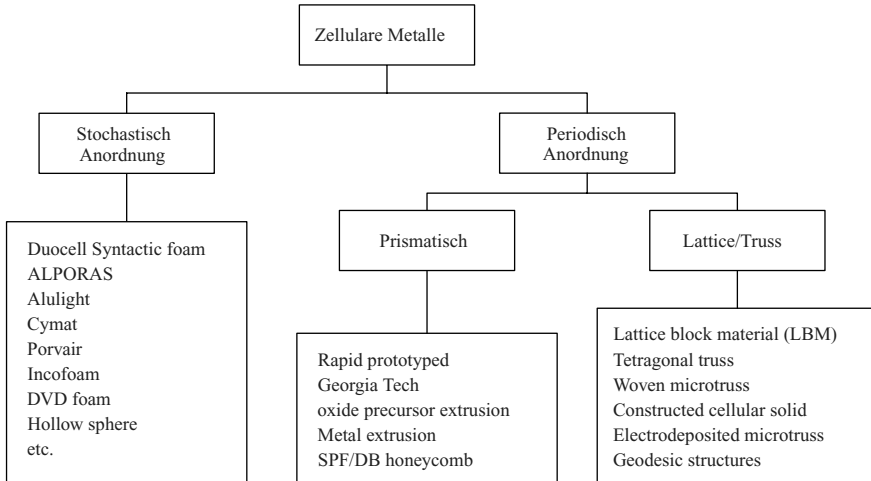


Abbildung 1.3: Klassifizierung von zellularen Metallen mittels des Strukturaufbaus nach [219].

1.2.1.1 Offenporige zellulare Metalle

Weisen die Zellen in einer metallischen Struktur Öffnungen auf, durch welche Gase und Fluide strömen können, so liegt ein offenzelliges zelluläres Metall vor, auch offenzelliger Schaum genannt [55]. Offenzelliges zelluläres Metall zeichnet sich aus durch eine hohe Permeabilität, große spezifische Oberfläche und niedrige spezifische Dichte sowie gute Verformbarkeit. Bei entsprechender Werkstoffwahl können gute korrosions- und oxidationsbeständige Schäume dieser Art hergestellt werden. Einsatzgebiete für diesen Werkstoff finden sich in der Fluid- und Verfahrenstechnik zum Beispiel bei Filtern, Schalldämpfern, Wärmetauschern, Sieben, Abscheiden, Brennern, Explosionsschutz, Flammendurchschlagsicherungen und Katalysatorträgern, aber auch in medizinischen Produkten, wie zum Beispiel bioanalogen Knochenersatzmaterialien. Stellvertretend für offenzellige zelluläre Metalle kann man offenzellige pulvermetallurgische Schäume und perforierte metallische Hohlkugelstrukturen erwähnen.

1.2.1.2 Geschlossenporige zellulare Metalle

Ist die einzelne, fluid- bzw. gasgefüllte Zelle geschlossen und bilden solche Zellen die Gesamtstruktur, so liegt ein geschlossenporiges zelluläres Metall vor. Einsatzgebiete geschlossenzelliger Materialien sind beispielsweise Leichtbauteile im Anlagen-, Maschinen-, Fahrzeug-, Flugzeug- und Schiffbau, Elemente zur Schall- und Wärmedämmung im Bauwesen, Energieabsorber als Crash-Elemente in Kraftfahrzeugen, als Sicherheitselemente und Schutzeinrichtungen zum Beispiel an Hochgeschwindigkeitswerkzeugmaschinen sowie Anwendungen zur Schwingungs- bzw. Explosionsdämpfung und im Brandschutz. Weitere Einsatzgebiete ergeben sich im Bereich der Elektrotechnik zur elektromagnetischen Abschirmung bzw. als Elektroden. Außerdem zeichnen sich Anwendungen für den Einsatz in schnell bewegten Baugruppen von Fertigungsanlagen (zum Beispiel Maschinentische, Handling-Systeme), als Kerne für Gussformen sowie als Implantatwerkstoffe ab. Zu den geschlossenporigen zellulären Metallen zählen syntaktische

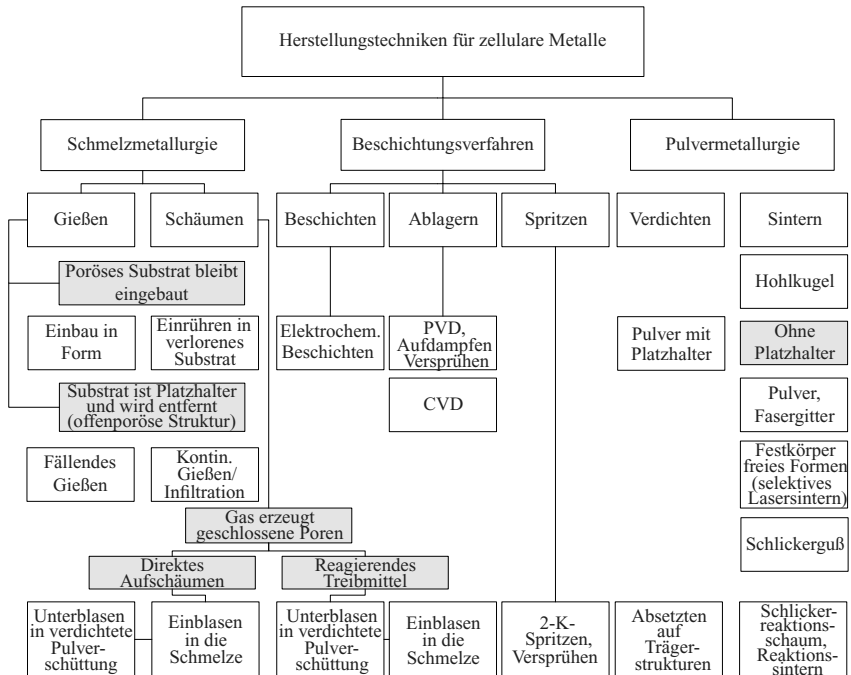


Abbildung 1.4: Herstellungsverfahren von diversen zellulären Metallen nach [45].

Metallschäume genauso wie Metallschäume, poröse Metalle und metallische Hohlkugelstrukturen, um nur einige Vertreter dieser Familie der zellulären Metalle zu benennen.

1.2.2 Metallschäume

Schon Mitte des letzten Jahrhunderts wurde die Idee für einen neuen Werkstoff geboren, der zum einen die hohe Steifigkeit von Metallen und zum anderen die Leichtigkeit eines Naturschwamms vereinen sollte. Die ersten technischen Umsetzungen dieses Konzepts der Metallschäume kamen in den 70er Jahren des vorhergehenden Jahrhunderts auf [15, 28, 154]. Die eigentliche kommerzielle Nutzung begann jedoch erst später. Der Schaum lässt sich auf verschiedene Weise erzeugen. So wurde bereits in den 50er Jahren des 19. Jahrhunderts geschmolzenes Aluminium in Kochsalz-Negativformen gegossen. Als weiteren Meilenstein stellte 1959 die Firma United Aircraft Corporation erstmals pulvermetallurgische Halbzeuge mit Treibmittel her. Im Jahre 1963 gelang Hardy und Peisker das direkte Aufschäumen einer Schmelze [83]. Durch die ab 1990 zunehmende industrielle Nutzung stieg die Zahl der Firmen und Institute, die sich mit diesem Themengebiet beschäftigen. Metallschäume lassen sich wie die zellulären Metalle in geschlossen- und offenporiger Struktur einteilen. Oftmals bezeichnet man den offenporigen Metallschaum auch als Metallschwamm. Metallschäume kennzeichnen sich durch stark zufällige Porengröße und -verteilung. Äquivalent gilt dies beim Netzaufbau von Metallschwämmen.

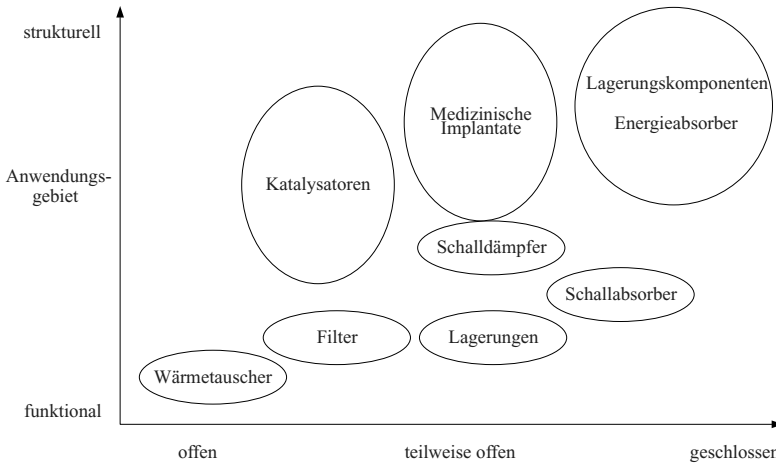


Abbildung 1.5: Mögliche Anwendungsgebiete zellulärer Metalle in Abhängigkeit von der Art der Porosität nach [12].

1.2.3 Hohlkugelstrukturen

Pulvermetallurgisch hergestellte metallische Hohlkugeln stellen eine vergleichsweise neue Variante innerhalb der zellulären Metalle dar. Mit metallischen Hohlkugeln können verklebte, versinterte und verlötete zelluläre Strukturen aufgebaut werden. Weiterhin ist es möglich, durch einen speziellen Formgebungsprozess aus den mit Metallpulver beschichteten Styroporkugeln einen Formkörper herzustellen, der nach der Wärmebehandlung eine versinterte zelluläre Hohlkugelstruktur ergibt. Gegenüber anderen zellulären Materialien, wie zum Beispiel Metallschäumen, zeichnen sich metallische Hohlkugelstrukturen sowohl durch eine hohe Reproduzierbarkeit im Strukturaufbau mit nahezu isotropen Eigenschaften aus, die durch die definierte Geometrie der Hohlkugeln bedingt sind. Darüber hinaus verfügen sie über eine große Werkstoffflexibilität aus. Der besondere Vorteil metallischer Hohlkugelstrukturen besteht darin, dass selbst bei ungeordneten Strukturen die Porengröße nur geringfügig variiert. Hohlkugelstrukturen sind somit im Vergleich zu stochastischen Schäumen besser berechenbare Leichtbauwerkstoffe, die durch die genannten Vorzüge sehr gute Voraussetzungen für eine werkstoffmechanische Modellierung des Bauteilverhaltens bieten. Neben einer deutlichen Gewichtseinsparung können durch metallische Hohlkugelstrukturen weitere anwendungsspezifische Eigenschaften umgesetzt werden, die insbesondere durch die Zellmorphologie und den Werkstoff einstellbar sind. Hierzu zählen Wärmeisolation, ausgeprägtes Schall- und Energieabsorptionsvermögen, mechanische Dämpfung, katalytische Effekte sowie eine hohe spezifische Oberfläche. Die metallische Hohlkugelstruktur ermöglicht selbsttragende Konstruktionen und bietet mechanische Festigkeit auch bei stärkerer Beanspruchung. Falls erwünscht können metallische Hohlkugeln ebenso in jegliche freie Form injiziert werden, da Kugeln im Allgemeinen über sehr gute Schütt- und Fließeigenschaften verfügen und außerdem eine hohe Packungsdichte haben. Ferner ist der Einsatz im Sandwichverbund mit beliebigen Fasermatten oder Platten kombiniert realisierbar. Bedingt durch die bereits erwähnte große Werkstoffvielfalt sowie die Variationsmöglichkeiten der Hohlkugelgeometrie und die daraus herstellbaren Hohlkugelstrukturen ergeben sich zahlreiche Anwendungsgebiete und Einsatzfelder.

Dies sind Kraftfahrzeugbau, Luft- und Raumfahrt, chemische Verfahrenstechnik, Geräte- und Anlagenbau sowie die Medizintechnik. Die Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten metallischer Hohlkugeln und daraus hergestellter metallischer Hohlkugelstrukturen steht noch am Anfang ihrer industriellen Verwendbarkeit.

Zur Herstellung der Hohlkugelstrukturen gibt es verschiedene Verfahren und Werkstoffe, wobei die Struktur generell aus kugelförmigen Zellen enger Durchmesser- und Dichtenverteilung aufgebaut ist. Aufgrund ihres Aufbaus aus einzelnen Kugeln lassen sich durch Variation der Kugelwanddicke und des Kugeldurchmessers unterschiedlichste mechanische Eigenschaften und Dichten generieren. Die üblichen Werte schwanken hierbei zwischen 0,3 und $1,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Abhängig von der Gestaltung des Herstellungsverfahrens lassen sich die Wände der kugelförmigen Zellen entweder dicht oder auch offen porös ausführen. Durch die Auswahl des entsprechenden Herstellungsverfahrens, der Parameterwahl und des Werkstoffes lassen sich die Strukturen an die verschiedensten Betriebsbeanspruchungen, wie beispielsweise Hochtemperatur- oder Korrosionsbeständigkeit, anpassen. Im Allgemeinen werden für die metallischen Hohlkugelstrukturen folgende Werkstoffe eingesetzt: niedrig legierter Stahl, Edelstähle (z.B. 1.4404, 1.4841, 1.4767), Nickel und Nickellegierungen, intermetallische Verbindung, Molybdän, Wolfram und Edelmetalle.

Prinzipiell gibt es zwei unterschiedliche Verfahren: Das galvanische Verfahren und Wirbelbettbeschichtungsverfahren. Auf letzteres soll nur kurz eingegangen werden. Für das galvanische und weitere Verfahren wird auf [37] verwiesen. Aktueller Stand der Technik ist die Herstellung von Hohlkugelstrukturen mittels Wirbelbettbeschichtungsverfahren. Hierbei handelt es sich um ein spezielles pulvermetallurgisches Verfahren, das sich, im Vergleich zum galvanischen Verfahren, als wesentlich effizienter erweist und gemäß Abb. 1.6 funktioniert. Auf ein geeignetes Trägermaterial, wie beispielsweise Polystyrolkugeln (EPS), wird in einer Wirbelbettbeschichtungsanlage eine Metallpulver-Binder-Suspension aufgebracht. In einer nachgelagerten, mehrstufigen Wärmebehandlung werden der Binder und gleichzeitig das Trägermaterial entfernt und aus dem Metallpulver werden dichte Kugelschalen gesintert. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass das Trägermaterial kommerziell verfügbar und der spezifische Durchmesser beliebig einstellbar ist, wobei üblicherweise die Durchmesser 0,5 bis 10 mm, bei einer Wanddicke der Kugeln von 20 bis 500 μm betragen. Durch eine entsprechende Auswahl der Teilchenform sowie die gezielte Einstellung der Prozessparameter lassen sich dicht-poröse und offen-poröse Hohlkugelschalen herstellen. Vorteilhaft ist dieses Verfahren, weil alle pulverförmigen, sinterbaren Werkstoffe hiermit zu Hohlkugeln verarbeitet werden können. Aus den einzelnen Hohlkugeln lassen sich durch Sintern, Löten oder Kleben nun Halbzeuge und Normteile fertigen, wobei zelluläre Strukturen mit offener wie auch geschlossener Porosität produziert werden können. Abhängig von den gewählten Einzelhohlkugeln ist es zudem möglich ungeordnete, geordnete oder auch gradiert aufgebaute zelluläre Strukturen herzustellen. Üblicherweise werden gesinterte Hohlkugelstrukturen in einem Net-Shape-Prozess hergestellt, indem die beschichteten Kugeln in ein spezielles Formgebungswerkzeug gefüllt und mehr oder weniger stark deformiert und anschließend zu einer einsatzfähigen, zellulären metallischen Struktur gesintert werden.

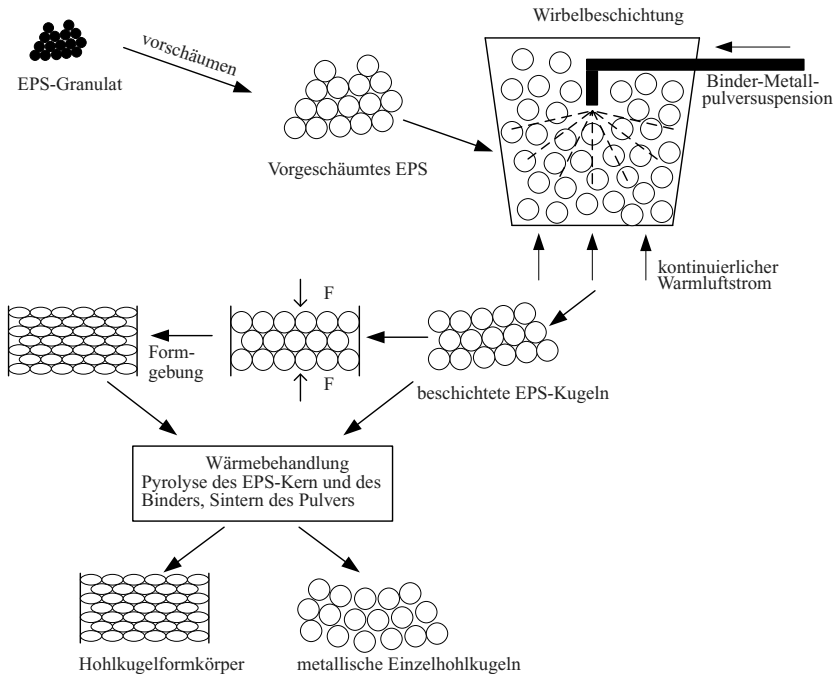


Abbildung 1.6: Herstellung metallischer Hohlkugeln mit dem Wirbelschichtverfahren (nach Glatt GmbH, Dresden).

1.3 Stand der Forschung

Ein umfassender Überblick über Herstellung, Charakterisierung, Eigenschaften und Anwendungsbereiche von offen- und geschlossenenporigen Schäumen ist in folgenden Büchern und Artikeln [9, 12, 45, 56, 75, 92] zu finden. Öchsner und Augustin [37] geben weitgehende Zusammenfassungen im Bereich der metallischen Hohlkugelstrukturen wieder. Die Qualität der zellularen Materialien, die sich beispielweise in der Wiederherstellbarkeit, Streuung der Zellgröße und -verteilung ausdrückt, bestimmt maßgeblich ihre Eigenschaften und ihr Verhalten und die damit verbundenen Einsatzmöglichkeiten. Diese Eigenschaften können durch analytische und (halb-) phänomenologische Modelle, Simulationen und experimentelle Messungen beschrieben bzw. bestimmt werden. Die Literatur zur Beschreibung des Verhaltens zellulärer Werkstoffe und zur Bestimmung der jeweiligen Materialeigenschaften, mit dem Ziel ihre Eigenschaften bzw. ihr Verhalten vorherzusagen, lassen sich grob in vier Richtungen unterteilen [36]. Es sind dies der Gebrauch von phänomenologischen Modellen, die Verwendung von Formulierungen, welche für Verbundwerkstoffe entwickelt wurden, die Analyse von Modellstrukturen, die den Aufbau der physikalischen Struktur repräsentieren und die Untersuchungen von realen Strukturen, die beispielsweise auf Computertomografie-Bildern basieren.

Die einfachste Methode zur Beschreibung des Verhaltens von Materialien mit Meso- oder Mikrostruktur basieren auf der Theorie von Materialien ohne Strukturaufbau. Das Material des zu

untersuchenden Körpers wird als homogen angenommen. Es werden alleinig die Materialparameter bzw. die Stoffgesetze, wie das Elastizitätsgesetz, das Fließkriterium, die Fließregel oder das Verfestigungsgesetz an die experimentell bestimmten Werte des jeweiligen Stoffes angepasst. Diese phänomenologischen Materialmodelle bilden das elastisch-plastische Verhalten (komplettes Spannungs-Dehnungsverhalten) strukturaufbautechnisch unmotiviert ab. Solche Materialmodelle sind Grundlage für viele kommerzielle Finite-Element-Programme. In den Programmen kann mittels Vorgabe der Spannungs-Dehnungskurve das experimentell bestimmte Materialverhalten hinterlegt werden. Einen guten Überblick über die Vielfalt an Modellen für Metallschäume liefert die Veröffentlichung von Hanssen et al. [82]. Angewendete Modelle für Hohlkugelstrukturen können beispielsweise [37] entnommen werden. Als Grundlage und Referenz der meisten phänomenologischen Arbeiten in diesem Gebiet dient das Werk von Despande und Fleck [48].

Analog entstanden in der Akustik phänomenologische Modelle zur Schallabsorption von porösen Materialien. Das Material bzw. Fluid des zu untersuchenden Körpers wird wiederum als homogen angesehen. Das wohl bekannteste Modell zur Schallabsorption ist das sogenannte äquivalente Fluid Modell, das durch die frequenzabhängigen Größen effektive Dichte und effektives Kompressionsmodul beschrieben wird. Für hochporöse Materialien hat sich das einfache Modell nach Delany und Bazley [46] etabliert, das auf experimentell bestimmten Daten basiert, etabliert. Dieses Schallabsorbermodell wurde später durch Miki [147] verfeinert.

Die bisher genannten phänomenologischen Material- und Akustikmodelle berücksichtigen keineswegs, dass das zu untersuchende Material eine Meso- oder Mikrostruktur aufweist, die Einfluss auf sein Verhalten hat. Eine Möglichkeit, dies zu umgehen, besteht darin, Materialmodelle zu verwenden, die das Verhalten der Meso- bzw. Mikrostruktur durch neue Materialparameter abbildet. In der Mechanik handelt es sich hierbei um eine Erweiterung des klassischen Kontinuumsmodells. Den unendlich vielen Materialpunkten des klassischen Kontinuumsmodells wird über die translatorischen Freiheitsgrade hinaus noch ein kleines Starkkörpervolumen mit rotatorischen Freiheitsgraden zugewiesen. So entstehen bei diesem sogenannten COSSERAT- oder Mikropolar-Kontinuum für jeden Materialpunkt sechs Freiheitsgrade. Dies bedeutet, dass translatorische und rotatorische Felder unabhängig sind und das Kräfte und gekoppelte Spannungen auftreten. Lakes [120, 122] präsentierte experimentelle Werte auf Basis des COSSERAT-Kontinuums für diverse poröse Materialien. Diebels und Steeb [50, 51, 52] bzw. Dillard et al. [53] nutzen diese Theorie zur Beschreibung des Verhaltens von Schäumen. Altenbach und Eremeyev [7, 8] entwickelten eine Plattentheorie auf Basis der COSSERAT-Gleichungen, bei der in ihre Dickenrichtung ein heterogenes Materialverhalten berücksichtigt ist. Ein solches Materialverhalten findet man auch bei Laminaten oder „Functionally Graded Materials“.

Die bisher genannten Verfahren betrachten die Meso- bzw. Mikrostruktur nur über Materialparameter. In einigen Fällen spielt jedoch die Meso- bzw. Mikrostruktur eine entscheidende Rolle und kann durch die aufgeführten Verfahren nicht ausreichend genau abgebildet werden. Demgegenüber ist das komplette Modellieren der Meso- und Mikrostruktur als weitere Verfahrensmöglichkeit für reale makroskopische Bauteile viel zu aufwendig [110]. Selbst die heutigen rechnerischen Ressourcen lassen noch keine effiziente Berechnung zu. Aus diesem Grund wurden Ansätze entwickelt, die den meso- bzw. mikroskopischen Strukturaufbau in ihrer Betrachtung mit einbeziehen und zudem effektiv anwendbar sind. Solche Verfahren werden im Allgemeinen als Multiskalen-Methoden bezeichnet. Diese Methoden verknüpfen die Effektivität der Makroebene mit der Genauigkeit der Mesoebene [110].

In der multiskalen Werkstoffmodellierung von zellularen Materialien ist es gebräuchlich, die Untersuchungstiefe in drei verschiedene Größenskalen einzuteilen. Dabei wird auf geometrischer Ebene zwischen Mikro-, Meso- und Makromodellierung unterschieden [141]. Abbildung 1.7 veranschaulicht diese Einteilung. Während die Mikroebene einzelne Atome, die Moleküle,

Kristalle und ihre Fehlstellen berücksichtigt, befasst sich die Modellierung in der Makroebene zumeist mit Ingenieur Anwendungen, wie beispielsweise die Beschreibung von Tragwerken durch die Kontinuumsmechanik. Die Mesoebene stellt einen Zwischenbereich dar, der zur Beschreibung von Mikrostrukturen, Zellen, Körnern, harten Einschlüssen etc. in der Materialwissenschaft dient [141]. Die Modellierung in der Mikroebene, die zum Beispiel zur Simulation von Diffusions- und Reaktionsvorgängen dient, kann vor allem in den Gebieten der Physik, Chemie und der Kristallografie von Bedeutung sein. Zur Beschreibung mechanischer Eigenschaften von Verbundwerkstoffen [86] und insbesondere zellularen Festkörpermaterialien [187] wird der Modellierung in der Mikroebene zumeist keine Beachtung geschenkt. Die einzelnen Methoden unterscheiden

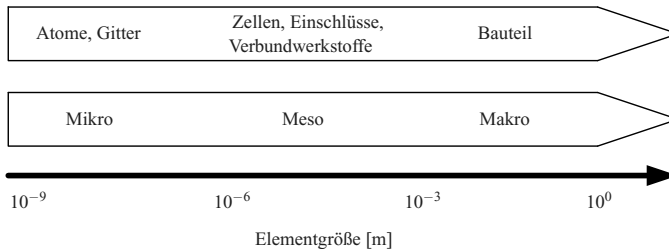


Abbildung 1.7: Ebenen der Materialmodellierung und -simulation.

sich dahingehend, wie die Struktur in einer ungeordneten Betrachtungsebene (z.B. Mikrostruktur) abgebildet wird, wie die Betrachtungsebene (z.B. makroskopische Ebene) modelliert wird und wie der Übergang zwischen den zwei betrachteten Ebenen formuliert wird. Dieser Übergang zwischen den Ebenen findet durch Mittelungsprozesse, zumeist einer Volumenmittelwertbildung, statt. Hierbei soll die Verzerrungsenergie der heterogenen Struktur in der unteren Ebene gleich der Energie sein, die nach der Volumennittelung im betrachteten Volumen gespeichert ist. Diese Vorgehensweise wird als Homogenisierung bezeichnet [81]. So kann die Homogenisierung als gedankliche Verschmierung einer heterogenen Struktur auf der Mikro- oder Mesoebene und der Bildung von effektiven Materialeigenschaften auf der nächst höheren Betrachtungsebene, beispielsweise Makroebene, verstanden werden. Eine Voraussetzung für die Homogenisierung ist die Untersuchung einer Struktur, die sich translatorisch periodisch wiederholt bzw. statistisch repräsentativ für den untersuchten realen Werkstoff ist. In diesem Zusammenhang spricht man von einem repräsentativen Volumenelement (RVE). Eine genauere Betrachtung der Homogenisierung wird in Kapitel 3.2.1 gegeben.

Die erste und einfachste Methode, die das Verhalten des mikro- oder mesoskopischen Strukturaufbaus berücksichtigt, ist das sogenannte Elementarzellen-Modell oder auch als Einheitszellen-Modell (engl. „unit cell“) bekannt. Die Elementarzelle stellt die kleinste translatorisch periodische Einheit einer unendlichen homogenen Struktur dar. Die aus der Physik, Chemie oder Kristallografie bekannten BRAVAIS-Gitter lassen sich in 14 mögliche Formtypen der Einheitszelle einteilen. Gemäß der inhärenten Symmetrieelemente der Elementarzellen lassen sich die BRAVAIS-Gitter in sieben Kristallsysteme klassifizieren, bezeichnet als triklin, monoklin, orthorhombisch, tetragonal, kubisch, trigonal und hexagonal. Zumeist werden kubische oder hexagonale Kristallsysteme für die Elementarzellen von homogenen Hohlkugelstrukturen gleicher Kugelgröße verwendet, begründet durch die einfache und vor allem teilweise (packungs-)stabile Anordnung.

Bei Verwendung der analytischen Homogenisierungsmethoden werden die effektiven elastischen Materialkonstanten basierend auf mikro- bzw. mesomechanischen Zusammenhängen berechnet.

Die einfachsten Strukturaufbauten, die zur modellhaften Beschreibung von Metallschäumen verwendet werden, sind zwei- oder dreidimensionale Elementarzellenmodelle. Die Abmessungen dieser Elementarzellen entsprechen in etwa der gemessenen Kantenlänge einer Zelle des betrachteten Metallschaums selbst. Sie bilden meist offenzellige Strukturen ab. Im Fall der analytischen Modelle ist die Beschreibung durch geschlossene mathematische Lösungen nur für wenige, sehr einfache Strukturen möglich. Für reale Strukturen bedarf es einer starken Vereinfachung bzw. Abstraktion. Aus diesem Grund gibt es nur wenige Modelle für Schäume. Das wohl bekannteste Modell hierfür ist das kubische Modell von Gibson und Ashby [75], das in vielen Veröffentlichungen als Referenz genannt wird. Es besteht hauptsächlich aus Balken, die die Kanten eines Würfels abbilden. Werden die Würfelflächen durch Platten bzw. Schalen interpretiert, so bildet dieses Modell das Verhalten eines geschlossen porigen Schaums nach. Durch diese sehr einfachen Modellannahmen können Zusammenhänge zwischen dem Elastizitätsmodul oder der Fließgrenze und der relativen Dichte hergeleitet werden.

Ein analytisches Modell für gleich große Hohlkugeln mit dünner Wandung in einer kubischen Anordnung wurde von Grenestedt [80] entwickelt. Es beruht auf den Untersuchungen von Reissner [172, 173] und beschreibt das elastische Verhalten. Weiterführend betrachtet Grenestedt zufallsbehaftete, verteilte Hohlkugeln mit unterschiedlicher Größe auf Basis des Modells von Hashin und Shtrikman [84], das auf Variationsprinzipien beruht. Mit dem Näherungsmodell von Hashin und Shtrikman lässt sich für die effektiven Materialparameter eine obere und untere Schranke zuweisen. Unter der Annahme konstanter Dehnungen bzw. konstanter Spannungen im heterogenen Material lassen sich die exakten Schranken (äußersten Extremalwerte) für die effektiven Materialeigenschaften angeben. Der obere Extremalwert unter Annahme konstanter Dehnungen wird als VOIGT-Schranke, der untere Grenzwert unter Annahme konstanter Spannungen als REUSS-Schranke bezeichnet. Auf diese beiden Schranken wird in Abschnitt 3.2.1 genauer eingegangen. Die Kugeln der analytischen Betrachtung nach Grenestedt stehen im belastungsfreien Zustand in einem punktförmigen Kontakt, was nicht den realen Bedingungen von Hohlkugelstrukturen entspricht.

Ähnlich wie bei der mechanischen Betrachtung gibt es nur analytische Modelle für die Schallabsorption, bei Strukturen bestehend aus Regelgeometrien. Die Modelle von Kirchhoff [113], Zwikker und Kosten [228] beschreiben beispielsweise die Schallausbreitung in zylindrischen Rohren unter der Berücksichtigung viskoser und thermischer Effekte. Je nach Frequenz überwiegt der eine oder andere Effekt. Bei der Homogenisierung von heterogenen, offenporigen Strukturen (z.B. Schäumen) wird die mikroskopische NAVIER-STOKES-Bedingung in das makroskopische Gesetz von Darcy überführt [71]. Daraus entstand die wohl bekannteste Theorie, die des quasi-homogenen Schallabsorbers [152]. Diese Theorie setzt voraus, dass das Skelett des porösen Absorbers starr ist und die inneren Strukturabmessungen sehr klein im Verhältnis zur Wellenlänge der einfallenden Schallwellen sind. Der Absorber wird als quasi-homogenes Material mit viskosen Verlusten angesehen. Während das Schallabsorbermodell für poröse Materialien nach Delany und Bazley nicht auf den Strukturaufbau eingeht und beim Modell des quasi-homogenen Schallabsorbers oftmals die thermodynamischen Effekte vernachlässigt werden, berücksichtigt das halbphänomenologische JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell [1] sowohl den Strukturaufbau als auch die viskosen und thermalen Effekte im porösen Medium. Fünf Parameter werden hierfür benötigt: die Porosität, die Tortusität, der längenbezogene Strömungswiderstand, die charakteristische thermische und viskose Länge der gesamten Struktur. Mit diesen Parametern lässt sich der Absorptionskoeffizient einfach als Funktion der Frequenz bestimmen. Dieser Ansatz, auch äquivalenter Fluid-Ansatz bezeichnet, geht von einem starren strukturellen Gerüst des porösen Mediums aus und bildet ausschließlich die Ausbreitung der Kompressionswelle ab. Weiterführend gibt Biot, basierend auf Untersuchungen bodenmechanischer Probleme eine Formulierung zur Beschreibung

der Wellenausbreitung in gesättigten Medien mit deformierbarem Strukturgerüst (poroelastische Materialien) [44]. Biot dehnt zusätzlich die Beschreibung auf die akustische Wellenausbreitung [26] aus. Die Modellierung beinhaltet eine Longitudinalwelle und zwei Transversalwellen. Das BIOT-Modell liefert für ein großes Spektrum praktischer Problemstellungen gute Ergebnisse. Zur Beschreibung des Absorptionsverhaltens von Schäumen [56, 125], insbesondere von Hohlkugelnstrukturen [60, 166] erwies sich das JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell als ausreichend. Experimentelle Werte für das Schallabsorptionsvermögen von Hohlkugelnstrukturen präsentieren Hübelt [88, 87], Pannert et al. [166] und Gasser [71].

Gestaltet sich der Strukturaufbau derart, dass keine analytische Lösung möglich ist, bietet sich die Analyse des Materialverhaltens mittels numerischer Simulationsmethoden an. Ein etabliertes numerisches Näherungsverfahren in der Ingenieur Anwendung stellt die Finite-Elemente-Methode (FEM) dar. Mit dieser Methode lassen sich Modelle mit komplexen Geometrien abbilden und somit auf die Imperfektionen des Strukturaufbaus eingehen. Als weitere numerische Näherungsmethoden können beispielsweise die Randelementmethode (BEM) für akustische Probleme, Diskrete-Element-Methode (DEM) in der Partikelverfahrenstechnik oder LAGRANGE-MONTE-CARLO-Simulation zur Beschreibung von Strömungen aufgeführt werden. Es besteht keine Vollständigkeit bei den aufgeführten numerischen Methoden und in dieser Arbeit wird auch nicht weiter auf sie eingegangen.

Mit diesen numerischen Methoden können sowohl Strukturen mit einem periodischen Aufbau als auch Strukturen mit einem beliebigen oder zufälligen Aufbau untersucht werden. Die Untersuchungen können in zwei- oder dreidimensionaler Betrachtung stattfinden. Allerdings erhöht sich bei der letztgenannten der Rechenaufwand deutlich gegenüber der erstgenannten Betrachtung und die Aussagefähigkeit einer zweidimensionalen Betrachtung beschränkt ist. Im Fall periodischer Strukturen, wie der Elementarzelle, erlauben periodische Randbedingungen eine Berechnung einer unendlich ausgedehnten Struktur. Auf periodische Randbedingungen wird in dieser Arbeit ausführlich in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.5 eingegangen. So untersuchte Sanders und Gibson [183, 185] das elastische Verhalten einer unendlich ausgedehnten geklebten Hohlkugelnstruktur mit kubisch primitiver, kubisch raumzentrierter und kubisch flächenzentrierter Anordnung. Dabei wurde die Variation der Kugelnwanddicke berücksichtigt. Gasser analysierte geklebte Strukturen und bestätigte die Ergebnisse von Sanders [73, 71]. Marcadon und Feyel [142], Fiedler und Öchsner [64, 37] und Vesenjak et al. [212] erweitern ihre elementarzellenbasierenden Untersuchungen auf das plastische bzw. dynamische Verhalten. Die Elementarzelle mit hexagonal dichtest gepackter Anordnung wird nur in wenigen Fällen betrachtet [37, 70].

Für Schüttungen von Hohlkugeln bzw. daraus folgenden Hohlkugelnstrukturen stellen sich in der Regel keine perfekten, wie bei den Elementarzellen dargestellten, regelmäßigen (theoretischen) Packungen ein. Um realistische Strukturen mit ihrem unregelmäßigen Aufbau nach- bzw. abzubilden, gibt es mehrere Ansätze. Zum einen existieren Methoden, die sich auf die real vorkommenden Gegebenheiten stützen, zum anderen gibt es Vorgehensweisen, die eine unregelmäßige Struktur auf Basis physikalisch-technischer Effekte erzeugen. Bei der erst angeführten Methode kommt meist das etablierte und zerstörungsfreie Messverfahren der Computertomografie zum Zug. Erstmals untersuchte Illerhaus mit der dreidimensionalen Computertomografie eine zylinderförmige Probe aus gesinterter metallischer Hohlkugelnstruktur und bestimmte die Größenverteilung der Hohlkugeln [97]. Caty et al. nutzt die Computertomografie zur Bildung eines finiten Schalenmodells zur Bestimmung der Ermüdungsdauer [32, 31]. Die Gruppe um Fiedler beschäftigt sich mit numerischem Untersuchen von zellulären Metallen mittels Computertomografie. Ein Schwerpunkt liegt auf dem thermischen Materialverhalten [66], wobei auch das mechanische Verhalten von metallischen Hohlkugelnstrukturen untersucht wird [65, 67, 213]. Winkler et al. präsentieren eine Rekonstruktionsmethode von Hohlkugelnstrukturen, mit der sich die Kugeldurchmesserverteilung

und -position bestimmen lässt [225]. Diese Methode wird in Abschnitt 3.1.1 genauer erläutert. Ebenfalls untersucht Fallet unregelmäßige Hohlkugelstrukturen mit Hilfe der Computertomografie auf mechanische und teilweise akustische Eigenschaften [59, 60]. Grundlage hierfür bildet die Arbeit von Gasser, der den längenbezogenen Strömungswiderstand aus inversen Elementarzellen zur Schallabsorption bestimmt [71]. Zudem charakterisiert Fallet die Eigenschaften von Hohlkugelstrukturen mit Hilfe von Modellen, deren Kugelpackungen künstlich erzeugt werden. Die Kugelpackungen werden mit Hilfe der Diskreten-Elementen-Methode, die aus der Molekulardynamik stammt, bestimmt.

Neben der numerischen Charakterisierung wurden zahlreiche experimentelle Untersuchungen veranlasst, die teilweise zur Verifizierung der aufgeführten Modelle dienen. Statische Druckversuche wurden beispielsweise von Friedl et al. [68] und Lim et. al [133] durchgeführt. Winkler et al. untersuchten experimentell das Schwingverhalten plattenförmiger Hohlkugelstrukturen und die Ausbreitung des Körperschalls [223, 222, 224]. Die Einsatzmöglichkeit zellulärer Metalle im Automobilbereich gibt die Untersuchung von Heine et al. [89] wieder. In dieser Studie zeigen Hohlkugelstrukturen ein gutes Potenzial durch ihr gutes Schallabsorptionsverhalten und durch ihre voraussagbaren isotropen mechanischen Eigenschaften [37].

Diese isotropen Eigenschaften von Hohlkugelstrukturen werden in vielen Publikationen aufgeführt. Es gibt allerdings noch keine dem Autor bekannte Arbeit, die sich genauer mit dem iso- bzw. anisotropen Verhalten von unregelmäßig angeordneten Hohlkugelstrukturen beschäftigt. Des Weiteren wurden keine Arbeiten gefunden, die reale Hohlkugelstrukturpackungen anhand von Kennwerten analysieren und die daraus ermittelten Werte mit zufällig erzeugten Packungen verglichen haben. Viele bisherige Modelle basieren rein auf realen Strukturen oder auf fiktiv erstellten Packungen. Die auf realen Strukturen basierenden Methoden bilden zwar exakt den Aufbau der zu untersuchenden Hohlkugelstruktur ab, sind aber sehr aufwendig. Die Untersuchung einer Vielzahl von Proben ist somit noch unmöglich und eine Variation der Geometrie, beispielsweise Änderung der Wanddicke, ist sehr komplex und folglich mit einem großen zeitlichen Aufwand verbunden. Für die Anordnung von Kugeln gibt es heute schon eine Vielzahl diverser Algorithmen zur Erstellung fiktiver Hohlkugelstrukturen. Ein Vergleich von realen und fiktiv erstellten Hohlkugelstrukturen wäre für die Vorhersehbarkeit von Nutzen. Dem Autor ist ebenfalls unbekannt, dass es weitreichende Parameterstudien für regelmäßig geordnete und zufällig geordnete Modelle gesinterter Hohlkugelstrukturen gibt. Neuartig dürfte auch das Schalltransmissionsverhalten von Hohlkugelstrukturen sein.

1.4 Ziel und Inhalt der Arbeit

An der Fülle der zum Teil im Abschnitt 1.3 benannten Untersuchungen von zellulären Werkstoffen ist ersichtlich, dass insbesondere der Bereich Metallschäume bereits ein gut untersuchter Werkstoff ist. Aus den schon bestehenden Untersuchungen von Metallschäumen sollen die gewonnenen Erkenntnisse auf den noch relativ jungen zellulären Werkstoff Hohlkugelstrukturen übertragen und angewendet werden. Wie in der Einleitung erwähnt, weisen Hohlkugelstrukturen in ihrer Zellmorphologie geringere Abweichungen auf als bei Metallschäumen und erweisen sich dadurch in der Struktur als weniger heterogen. Durch geringere Unregelmäßigkeit in ihrem Strukturaufbau werden die Eigenschaften von Hohlkugelstrukturen oftmals als isotrop angenommen.

Ziel dieser Arbeit ist eine weiterführende Charakterisierung mechanischer und akustischer Eigenschaften metallischer Hohlkugelstrukturen unter dem Einfluss unregelmäßiger Kugelanordnung. Insbesondere soll ein Augenmerk auf das isotrope bzw. anisotrope mechanische Verhalten geworfen werden. Des Weiteren wird das Schallabsorptions- und Schalltransmissionsverhalten betrach-

tet. Zu Beginn werden in Kapitel 2 die für die Arbeit relevanten Grundlagen der Elastizitätstheorie und Akustik erläutert. Diese wesentlichen Auszüge werden genutzt, um das Materialverhalten zu formulieren, um die Modelle von Tragwerkselementen, wie die Platte, abzuleiten und um die Mechanismen der Schallabsorption beschreiben zu können. Die Methoden zur Charakterisierung werden ausführlich in Kapitel 3 aufgezeigt. Zunächst wird auf die Modellierung der Strukturgeometrie eingegangen. Es wird eine Methode zur Rekonstruktion realer Hohlkugelstrukturen und mehrere Algorithmen zur Regenerierung von Kugelpackungen präsentiert. Im Speziellen werden zufällige Kugelpackungen betrachtet und ihre Charakterisierung anhand von Kennwerten aufgezeigt. Als Ergebnis der Geometriemodellierung wird ein vollparametrisches Volumenmodell für Hohlkugelstrukturen vorgestellt.

Einen weiteren Schwerpunkt in diesem Kapitel stellen die Methoden zur Bestimmung der Elastizitätskennwerte dar. Zur Bestimmung dieser Werte wird eine Homogenisierungstheorie eingeführt und ausführlich erläutert. Um die aus der Homogenisierung gewonnenen Ergebnisse später besser interpretieren zu können, wird kurz auf Materialsymmetrien und beispielsweise auch auf negative Querkontraktion eingegangen. Zusätzlich wird im Speziellen ein Finite-Elemente-Metode (FEM) basierendes Berechnungsmodell mit besonderen Randbedingungen aufgezeigt.

Um die aus den Modellen bestimmten Elastizitätskennwerte zu verifizieren, soll das Schwingungsverhalten von Hohlkugelstrukturen experimentell untersucht werden. Hierbei können die homogenisierten Elastizitätskennwerte aus den aufgeführten Plattentheorien ermittelt werden. Zur Lösung dieses Schwingproblems werden das RITZsche Verfahren und die FEM herangezogen. Zur Messung der Eigenfrequenzen und -formen nutzt man die experimentelle Modalanalyse mittels Festlaser und Impulshammer. Der Versuchsaufbau und die Durchführung werden detailliert erläutert.

Als weiterer Bestandteil des Methodenkapitels sind die Verfahren zur experimentellen und modellbehafteten Bestimmung zum Schallabsorptionsverhalten von Hohlkugelstrukturen zu nennen. Zum einen werden die Messungen mittels Impedanzrohr, zum anderen die phänomenologischen Modellbildungen von porösen Absorbern und deren Kenngrößen aufgeführt. Bei den versuchstechnischen Bestimmungen wird eine neuartige Methode zum Transmissionsverhalten vorgestellt. Das vorletzte Kapitel geht auf die ermittelten Ergebnisse ein. Es werden zuerst die realen Packungen von Hohlkugeln untersucht und die ermittelten charakterisierenden Kennwerte dargelegt. Später werden die charakterisierenden Kennwerte der zufällig erzeugten Packungen mit den realen verglichen. Im Anschluss werden die Erkenntnisse aus den linear-elastischen Untersuchungen bereitgestellt und diskutiert. Die einachsige Betrachtungsweise wird hierbei auf eine mehrachsige ausgeweitet und somit die kompletten Steifigkeitstensoren der homogenisierten Strukturen bestimmt. Aus den ermittelten Steifigkeitstensoren können Rückschlüsse auf das Materialverhalten, Symmetrieebenen und Anisotropie gezogen werden. Zudem wird der Einfluss der Randbedingungen diskutiert und ein Maß für die Anisotropie präsentiert.

In Kapitel 4 werden ebenfalls die homogenisierten Elastizitätswerte aus der experimentellen Modalanalyse gezeigt. Die aus dem Versuch ermittelten Werte dienen zur Verifizierung der vorgestellten Berechnungsmodelle, die auf zufällig erzeugten Packungen basieren. Abschließend betrachtet dieses Kapitel die Resultate der akustischen Messung mit dem Impedanzrohr und stellt die approximierten Parameter für das phänomenologische Modell vor. Die Arbeit endet mit einer Schlussbetrachtung, die eine Zusammenfassung beinhaltet, mögliche Modellerweiterungen und neue Einsatzgebiete aufzeigt und einen Ausblick gibt. Umfassende Herleitungen zu den Modellen und Berechnungen sind dem Anhang zu entnehmen.

2 Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel behandelt die Grundlagen der Kontinuumsmechanik und der technischen Akustik, die in dieser Arbeit Verwendung finden. Die Darstellung der mathematischen Zusammenhänge orientiert sich an der Nomenklatur gegenwärtiger Literatur [4, 21, 85, 152]. Allerdings besitzen manche der hier verwendeten Symbole in den jeweiligen Quellen unterschiedliche Bedeutung. Aus diesem Grund soll zu Beginn eine Darstellung aller eingeführten Schreibweisen erfolgen: Skalare, reelle Größen werden in kursiver Schrift dargestellt: a ; Tensoren erster Stufe bzw. Vektoren werden klein und fett geschrieben: \mathbf{a} ; Tensoren zweiter Stufe bzw. Matrizen werden groß und fett geschrieben: \mathbf{A} ; Tensoren vierter Stufe werden folgendermaßen notiert: $\mathbf{\mathbb{A}}$; für die Indizes i, j, k oder l gilt die EINSTEINSche Summenkonvention¹. Werden Indizes durch ein Komma getrennt, weist dies auf eine Differentiation nach dem Indize nach dem Komma hin $A_{ij,j}$. Werden sonstige Indizes durch Kommatrennung einer Größe zugeordnet, wird die Größe durch die Bedeutung aller einzelnen Indizes charakterisiert: $\lambda_{L,St}$ und die EULER-Zahl wird mit e und die imaginäre Einheit mit j abgekürzt.

2.1 Mechanische Grundlagen

Die mechanischen Grundlagen werden nach folgendem Ablaufschema erarbeitet, wie sie in Abb. 2.1 dargestellt sind. Hierbei spricht man von Gleichgewichtsgleichungen, Materialgesetzen, Spannungen, Verschiebungen, Verzerrungen, allgemeinen Anfangs-Randwertproblemen und dem Prinzip von Hamilton. Diese Begrifflichkeiten werden in den anschließenden Abschnitten erörtert. Die hier aufgeführten Herleitungen basieren auf [3, 6, 5, 4, 17, 21, 90, 152, 190, 195, 204, 220].

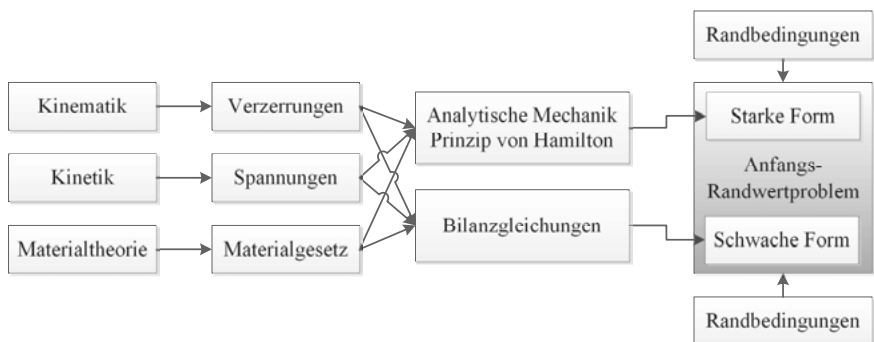


Abbildung 2.1: Herleitungsprinzip in der Kontinuumsmechanik nach [190]

¹Diese Konvention beschreibt, dass über allen doppelt auftauchenden Indizes aufsummiert wird.

2.1.1 Verzerrungen, Spannungen und Bilanzgleichungen

Durch Einführen von körper- und raumbezogene Bezugssystemen können durch äußere Kräfte deformierte Körper beschrieben werden. Als quantifizierte Maße gelten Verschiebung u und Verzerrung ε . Eine genauere Betrachtung kann dem Anhangsteil A.1.1 entnommen werden. Für die Strömungsmechanik spielen die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfelder, die im Anhangsteil A.1.2 näher aufgeführt, eine bedeutende Rolle. Belastungen und die daraus resultierenden werkstoffunabhängige Spannungen σ werden in A.1.3 beschrieben. Eine grundlegende Betrachtungsweise in der Mechanik wird in den Anhangsteilen A.1.4 und A.1.5 aufgezeigt sind. Die Bilanzierung von Kräften, Momenten, Impulsen, Spannungen und Energien ist hierbei von zentraler Bedeutung.

2.1.2 Materialgesetze

Den Zusammenhang zwischen Spannung σ und Verzerrung ε geben die werkstoffabhängigen Konstitutivgleichungen wieder (siehe Anhang A.1.6). In der Arbeit werden folgende Materialtheorien näher eingegangen: linear-elastische Festkörper, ideales Gas und viskoses Fluid. Erstaufgeführte wird in Form des verallgemeinerten HOOKEschen Gesetzes (Anhangsteil A.1.6) zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften metallischer Hohlkugelstrukturen verwendet. Die beiden anderen Materialtheorien, ideales Gas (Anhang A.1.6.2) und viskoses Fluid (A.1.6.3) dienen zur Modellbildung eines porösen akustischen Absorbers.

2.2 Mechanische Kontinuumsschwingungen

Reale Körper, Bauteile und Bauwerke sind in der Regel komplexe Geometrien. Diese lassen sich nur in wenigen Fällen exakt analytisch berechnen. Hingegen lassen sich Problemstellungen mit geometrischen Regelgeometrien oftmals analytisch geschlossen lösen. Sind eine oder zwei räumliche Ausdehnungen eines Körpers wesentlich kleiner als die anderen Ausdehnungen, lässt sich in der Regel die Beziehung zwischen Verschiebungen u und Verzerrungen ε bzw. Spannungen σ vereinfachen. Diese Körper haben ebenfalls eine räumliche Ausdehnung, lassen sich aber aufgrund ihrer Abmessungen als zwei- oder eindimensionale Tragelemente idealisieren.

Ist eine Abmessung viel kleiner im Vergleich zu den beiden anderen, liegt ein flächenartiger Körper vor. Stellt sich die Fläche als gekrümmt dar, spricht man von einer Schale. Bei ebenen Flächentragwerken unterscheidet man nach ihrer Belastung zwischen Platten und Scheiben. Während Scheiben in ihrer Ebene belastet werden, wirkt die Belastung bei Platten senkrecht zur Plattenmittelfläche. Linienförmige Tragelemente kennzeichnen sich dadurch, dass zwei Abmessungen des Körpers wesentlich kleiner sind als die dritte. Derartige Tragelemente werden als Stäbe oder Balken bezeichnet.

In dieser Arbeit wird auf die Theorien von schubstarren und schubweichen Platten eingegangen (siehe Abschnitt A.2.1 und A.2.2)). Einige weiterführende Plattentheorien werden anschließend erwähnt.

Diese Plattentheoriemodelle können ebenfalls zur Schwingungsanalyse genutzt werden. In dieser Arbeit werden die Eigenformen und -frequenzen von Platten genutzt zur Ermittlung effektiver Materialkennwerte, wie Elastizitätsmodul oder Querkontraktionszahl.

2.3 Akustische Grundlagen

Akustik ist die Lehre vom Schall und seiner Ausbreitung. Das Wissenschaftsgebiet hat viele unterschiedliche Gesichtspunkte - beginnend bei der Entstehung und Erzeugung über die Ausbreitung und Auswirkungen bis hin zur Beeinflussung und Analyse von Schall. Akustik beschreibt ein interdisziplinäres Fachgebiet, welches in den Bereichen Physik, Materialwissenschaften und sogar in der Psychologie von Interesse ist. Nachfolgend werden die physikalischen Grundlagen behandelt, die den Schall betreffen. Diese sollen zum Verständnis der Wirkungsweise von akustischer Absorption und des KUNDTschen Rohres (Impedanzrohr) dienen.

2.3.1 Schallwellenausbreitung und akustische Kenngrößen

Der Schall ist eine Energieform, die sich durch Kollision von Atomen und Molekülen überträgt. Die Schallausbreitung erfolgt über Longitudinal- und Transversalwellen bei Fluiden. Während in Festkörpern beide Wellentypen auftreten, können sich in Gasen aufgrund der fehlenden Scherkräfte nur Longitudinalwellen ausbreiten. Deren Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von den elastischen Eigenschaften (Kompressionsmodul) und der Dichte des Mediums ab. Das menschliche Ohr ist für Frequenzen von 20 Hz bis 20 kHz sensibel. Dieser Bereich entspricht in der Luft, bei Umgebungstemperatur von 20°C, einer Wellenlänge von 17 mm bis 17 m.

2.3.1.1 Schallwellen

Schallwellen lassen sich auf verschiedene Weisen beschreiben:

- die Druckschwankung p_{\sim} ,
- die Dichteschwankung ρ_{\sim} und
- die Auslenkung ξ eines Gaspartikels x aus seiner Ruhelage x_0 .

Durchläuft eine Schallwelle ein Ausbreitungsmedium, so werden die Gasmoleküle aus ihrer Ruhelage x_0 um ξ ausgelenkt. Die Geschwindigkeit der Moleküle ist die Schallschnelle v . Durch die Auslenkung entstehen Gebiete mit erhöhten und geringen Dichten. Somit lassen sich Schallwellen durch Dichteschwankungen beschreiben. Mit den Dichteschwankungen einhergehenden Druckschwankungen im Medium gibt es eine weitere Beschreibungsmöglichkeit einer Schallwelle:

$$\tilde{p}(t) = p_0 + p_{\sim}(t). \quad (2.1)$$

Hierbei ist p_0 der Umgebungsdruck, auch Atmosphärendruck p_a genannt und $p_{\sim}(t)$ der Schalldruck. Im Allgemeinen genügt es, den Schalldruck zur Schallausbreitung zu betrachten und die eindimensionale Wellengleichung in x -Richtung zu formulieren:

$$\frac{\partial^2 p_{\sim}}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 p_{\sim}}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Dabei ist K das Kompressionsmodul, welches folgendermaßen definiert ist:

$$dp = -K \frac{dV}{V} \quad (2.3)$$

K stellt einen Proportionalfaktor dar, der aussagt, wie sich eine Volumenänderung auf den Druck auswirkt. ρ_0 ist die Dichte des Gases bei Atmosphärendruck $p_0 = p_a$ und Raumtemperatur T . Die

Tabelle 2.1: Schallfeldgrößen.

Dichte:	$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho_{\sim}(\mathbf{x}, t)$	$\rho_{\sim}(\hat{=} \rho)$:Schalldichte
Druck:	$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = p_0 + p_{\sim}(\mathbf{x}, t)$	$p_{\sim}(\hat{=} p)$:Schalldruck
Schnelle:	$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\sim}(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{v}_{\sim}(\hat{=} \mathbf{v})$:Schallschnelle

Wellengleichung für Schallwellen ist analog zur Wellengleichung für transversale Schwingungen aufgebaut. Die Herleitung der allgemeinen linearen Wellengleichung für ein viskoses Fluid findet man in Anhang A.3.1. Die Phasengeschwindigkeit c dieser Welle wird Schallgeschwindigkeit genannt. Eine ausführliche Definition der Schallgeschwindigkeit und deren Bestimmung werden im Anhangsteil A.3.2 bereitgestellt.

2.3.1.2 Schallfelder

Die grundlegenden Differentialgleichungen der Schallfelder mit ihren Schallfeldgrößen (Tabelle 2.1) in gasförmigen Medien sind die Kraftgleichung oder Impulsgleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad}(p) \quad (2.4)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \text{div}(\mathbf{v}). \quad (2.5)$$

Dabei sind p und ρ die Wechselanteile des Drucks und der Dichte im Schallfeld. ρ_0 ist die statische Luftdichte. Mit Annahme eines Zeitfaktors in der Form $e^{i\omega t}$ ergibt sich für die beiden Grundgleichungen:

$$j\omega\rho_0\mathbf{v} = -\text{grad}(p), \quad (2.6)$$

$$j\omega\rho = -\rho_0 \text{div}(\mathbf{v}). \quad (2.7)$$

Hierbei ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz. Als dritte Grundgleichung kommt die Zustandsgleichung des Mediums hinzu.

2.3.1.3 Impedanz und Admittanz

In der Schwingungslehre versteht man unter dem Begriff Impedanz einen Widerstand, der der Ausbreitung von Schwingungen entgegenwirkt. Im Fachgebiet der Akustik unterscheidet man drei verschiedene Arten von Impedanzen:

- die akustische Flussimpedanz,
- die akustische Feldimpedanz und
- die mechanische Impedanz.

Die Flussimpedanz, nach Norm nur akustische Impedanz genannt, definiert sich über den Quotienten aus Schalldruck p und Schallschnelle \mathbf{v}

$$Z_a = \frac{p}{A\mathbf{v}_m} = \frac{p}{\mathbf{q}}, \quad (2.8)$$

wobei \mathbf{v}_m die über die Fläche A gemittelte Schallschnelle und \mathbf{q} der Schallfluss sind. Die am häufigsten vorkommende Art ist die Feldimpedanz, auch als spezifische Impedanz bezeichnet. Die Feldimpedanz berechnet sich durch

$$Z_s = \frac{p}{\mathbf{v}}. \quad (2.9)$$

Die dritte Art der Impedanzen ist ein Quotient aus einer Kraft und einer Schnelle

$$Z_m = \frac{pA}{\mathbf{v}} \quad (2.10)$$

und wird als mechanische Feldimpedanz bezeichnet. Von nun an wird die akustische Feldimpedanz nur noch mit Z benannt. Dem aufmerksamen Leser werden einige Abweichungen gegenüber dem bisher Gewohnten aufgefallen sein. Dies beruht auf der Geschichte der Akustik, die nicht immer logisch verlief. Der Begriff Impedanz wurde aus der Elektrodynamik, die wiederum wesentlich von der Mechanik geprägt wurde, übernommen. So entstand ein Term „Skalar p dividiert durch einen Vektor \mathbf{v} “, der in der Mathematik nicht definiert ist. Dieses Problem kann umgangen werden, indem man den Kehrwert von Z nutzt, auch Admittanz \mathbf{G} genannt. \mathbf{G} ist definiert durch die Relation

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}p, \quad (2.11)$$

wobei \mathbf{G} nun wirklich ein Vektor ist und zwar in die gleiche Richtung wie \mathbf{v} geichtet.

2.3.1.4 Schallintensität und Schalleistung

Eine weitere Kenngröße ist der Schallfluss

$$q = \int_A \mathbf{v} d\mathbf{A}. \quad (2.12)$$

Der Schallfluss setzt sich zusammen aus dem Integral der Schallschnelle \mathbf{v} über eine gleichsinnig durchströmte, gerichtete Fläche \mathbf{A} . Des Weiteren lässt sich die Schallintensität mit

$$\mathbf{I}_s = p\mathbf{v} \quad (2.13)$$

anführen. Die Schallintensität bildet sich aus dem Produkt des Schalldrucks und der Schallschnelle und beschreibt die Energiemenge, die an einem Ort im Schallfeld pro Zeiteinheit mit der Schnelle pro Flächeneinheit durchströmt wird. Aus der Schallintensität kann die Schalleistung P einer Schallquelle gewonnen werden, indem man die Intensitätsbeiträge der Flächenelemente $d\mathbf{A}$ einer um die Quelle gelegten Fläche A integriert

$$P = \int_A \mathbf{I}_s d\mathbf{A}. \quad (2.14)$$

2.3.1.5 Ebene und stehende Welle

Hängt der momentane Zustand einer Schallwelle lediglich von einer einzigen Richtung ab, so spricht man von einer ebenen Welle. Sie lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$p(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (2.15)$$

wobei f und g beliebige, durch die Art der Schallanregung gegebene Funktionen sind. Der erste Term f der rechten Seite beschreibt die Störung (Schallwelle), die sich mit der Schallgeschwindigkeit unter der Beibehaltung von Form und Stärke in Richtung der positiven Richtungsachse

ausbreitet. Dementsprechend ist g der Wellenteil, der sich in die negative Ausbreitungsrichtung fortplanzt.

Eine stehende Welle entsteht durch Superposition zweier gegenläufig fortschreitender Wellen mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude. Solche Wellen können aus zwei verschiedenen Erregern stammen oder durch Reflexion einer Welle an einem Hindernis entstehen.

2.3.2 Mechanismen der Schallabsorption

Als Schallabsorption bezeichnet man die Umwandlung von Schallenergie in Wärme. Die Schallabsorption geschieht bei offenporigen und faserigen Schichten durch Reibung der Luftteilchen, bei weichen geschlossenporigen Stoffen durch Kompressionsvorgänge und den damit verbundenen Verlusten. Im Folgenden wird genauer auf die Leistungsverteilung einer Schallwelle beim Auftreffen auf ein absorbierendes Hindernis eingegangen. Trifft eine Schallwelle mit der Leistung P_e , dem Schalldruck p_e , der Schallschnelle v_e und der Frequenz f auf ein gegenüber ihrer Wellenlänge sehr großes Hindernis, wird diese teilweise reflektiert, unter Umständen auch gebeugt und gestreut, durchgelassen, als Körperschall fortgeleitet, aber auch absorbiert. Eine Leistungsbilanz kann nach Abb. 2.2 wie folgt

$$P_e = P_r + P_t + P_a \quad (2.16)$$

aufgestellt werden. Wird diese grundlegende Betrachtung der Raumakustik für das Impedanzrohr angewendet, kann der Einfluss des Körperschalls vernachlässigt werden, $P_t \rightarrow 0$. Dies beruht auf der Annahme, dass die Masse des Impedanzrohres groß gegenüber der mitbewegten Luftmasse ($m_{\text{Rohr}} \gg m_{\text{Luft}}$) der auftreffenden Welle ist. So vereinfacht sich die Gleichung (2.16) zu

$$P_e = P_a + P_r + P_a \quad (2.17)$$

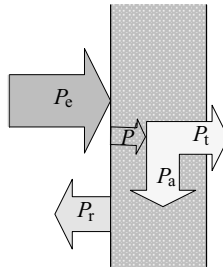


Abbildung 2.2: Leistungsverteilung des Schalls beim Auftreffen auf ein Absorbermaterial.

2.3.2.1 Schallabsorptionsgrad

Zur Beschreibung solcher Absorber werden hinsichtlich ihrer Wirksamkeit für die Sendeseite die Summe aus P_a und P_t mit P_e ins Verhältnis gesetzt. Der sogenannte Schallabsorptionskoeffizient, oder auch Schallabsorptionsgrad bezeichnet, kann gemäß

$$\alpha = \frac{P_a + P_t}{P_e} = \frac{P_e - P_r}{P_e} = \frac{P'}{P_e} = 1 - \frac{P_r}{P_e} \quad (2.18)$$

berechnet werden. Die Werte für α liegen zwischen 0 und 1.

2.3.2.2 Schallreflektionskoeffizient

Fällt eine ebene Schallwelle, wie in Abb. 2.3, auf eine unendlich ausgedehnte glatte Wand, wird sie an dieser nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Dabei verringert sich im Allgemeinen ihre Amplitude, zugleich ändert sich die Phase. Wird die unter dem Winkel ν auftreffende Welle durch

$$p_e(x, y, t) = \hat{p}_e e^{j(\omega t - kx \cos \nu - ky \sin \nu)} \quad (2.19)$$

festgelegt, gilt für die reflektierte Welle

$$p_r(x, y, t) = \hat{p}_r e^{j(\omega t - kx \cos \nu - ky \sin \nu)} \quad (2.20)$$

mit dem Schallreflektionskoeffizient

$$r_{ak} = \frac{p_r}{p_e}. \quad (2.21)$$

Die Schallleistung, die nicht die Oberfläche der Einfallsseite passiert, wird reflektiert. Für die

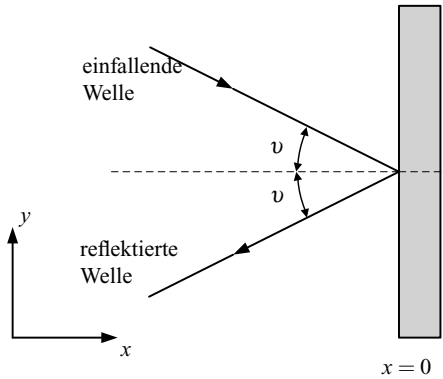


Abbildung 2.3: Reflexion einer Schallwelle an einer ebenen Fläche

Beschreibung dieser reflektierten Leistung wird der sogenannte Schallreflektionskoeffizient oder auch kurz Schallreflektionsgrad berechnet. Er kann anhand der Schalldrücke p_e und p_r hergeleitet werden.

Bei der Reflexion der senkrecht $\nu = 0$ einfallenden Schallwelle wird ihre Amplitude geschwächt, zugleich ändert sich die Phase. Mit

$$p_e = \hat{p}_e e^{j(kx - \omega t)} \quad (2.22)$$

wird die einfallende Schallwelle bezeichnet. Für die reflektierte Schallwelle ergibt sich

$$p_r = \hat{p}_e r_{ak} e^{j(kx - \omega t)}. \quad (2.23)$$

Durch die genannte Phasenverschiebung ist der Reflektionskoeffizient komplexwertig. Wird die Schalleistung betrachtet, muss die Beziehung folgendermaßen lauten:

$$|r_{ak}|^2 = \frac{P_r}{P_e} = \frac{p_r^2}{p_e^2}. \quad (2.24)$$

Die einfallende Leistung P_e teilt sich wie in Abb. 2.2 ersichtlich in P_r und P' auf. Normiert man die Größen auf die einfallende Leistung P_e , kann der Zusammenhang zwischen Reflektions- und Absorptionskoeffizient hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\frac{P_e}{P_e} &= \frac{P_r}{P_e} + \frac{P'}{P_e}, \\ 1 &= |r_{ak}|^2 + \alpha.\end{aligned}\quad (2.25)$$

2.3.2.3 Schalltransmissionsgrad

Des Weiteren wird die durch die Probe transmittierte Leistung mit dem sogenannten Schalltransmissionskoeffizienten beschrieben. Der Koeffizient kann ähnlich wie der Reflektionskoeffizient hergeleitet werden. Auch bei der Schalltransmission wird die Amplitude der Schallwelle geschwächt und zugleich findet eine Phasenverschiebung statt. Die Phasenverschiebung beruht darauf, dass die spezifische Schallimpedanz und die damit verbundene Schallgeschwindigkeit des Prüfmaterials abweichen. Der Schalltransmissionskoeffizient wird folgendermaßen bestimmt

$$t_{ak} = \frac{p_t}{p_e}. \quad (2.26)$$

Betrachtet man den Schalltransmissionskoeffizienten mit Hilfe der Schallleistung bekommt man folgende Beziehung

$$|t_{ak}|^2 = \frac{P_t}{P_e} = \frac{P_t^2}{P_e^2}. \quad (2.27)$$

2.3.2.4 Schalldissipationsgrad

Zur Quantifizierung der Wirksamkeit hinsichtlich der Dissipationseigenschaft des Prüflings wird der Dissipationskoeffizient verwendet. Der Dissipationskoeffizient gibt eine Aussage über die Leistung, welche im Prüfmateriale geschluckt wird. Der Koeffizient lässt wie folgt bestimmen

$$d_{ak} = \frac{P_a}{P_e} = \frac{P_e - P_r - P_t}{P_e} = 1 - |r_{ak}|^2 - |t_{ak}|^2 = \alpha - |t_{ak}|^2. \quad (2.28)$$

2.3.2.5 Wandimpedanz

Die Wandimpedanz Z ist eine Größe, die den speziellen Aufbau einer reflektierenden Einrichtung charakterisiert. Unter der Wandimpedanz versteht man das Verhältnis aus Druck und Schallschnelle auf der Wandoberfläche $x = 0$:

$$Z = \frac{p_{x=0}}{v_{x=0}}. \quad (2.29)$$

Der Zusammenhang zwischen der aufbaubeschreibenden Größe Z und den wirkungsbeschreibenden Größen β , α und t_{ak} soll kurz erklärt werden. Mit der günstigen Wahl des Koordinatensystems (wie Abb. 2.3), bei dem dessen Nullpunkt auf der Wandoberfläche liegt, erhält man:

$$p = p_0 \left(e^{jkx} + r e^{jkx} \right) \quad (2.30)$$

und

$$v = \frac{j}{\omega \rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_0}{\rho c} \left(e^{jkx} - r_{ak} e^{jkx} \right). \quad (2.31)$$

im Bereich $x < 0$ vor der Wand. So kann die Wandimpedanz mit dem Reflektionskoeffizienten folgendermaßen verknüpft werden:

$$\frac{Z}{\rho c} = \frac{1 + r_{ak}}{1 - r_{ak}}. \quad (2.32)$$

In der Regel verwendet man statt des Reflektionskoeffizientens fast immer den Absorptionsgrad. Aus diesem Grund soll hier noch der Zusammenhang zwischen dem Verlustgrad β und der Wandimpedanz Z erwähnt werden. Dafür löst man die Gl. (2.32) nach r auf

$$r = \frac{\frac{Z}{\rho c} - 1}{\frac{Z}{\rho c} + 1}, \quad (2.33)$$

und bestimmt den Verlustgrad β

$$\beta = 1 - |r_{ak}|^2 = \frac{4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{Z}{\rho c} \right\}}{\left[\operatorname{Re} \left\{ \frac{Z}{\rho c} \right\} + 1 \right]^2 + \left[\operatorname{Im} \left\{ \frac{Z}{\rho c} \right\} + 1 \right]^2}. \quad (2.34)$$

Aus der Gleichung wird ersichtlich, dass wenn $Z = \rho c$ wird, ein maximaler Verlustgrad β erreicht wird. Tritt der Fall auf, dass keine Schalltransmission $t_{ak} = 0$ stattfindet, kann der Absorptionsgrad dem Verlustgrad $\alpha = \beta$ gleichgesetzt werden.

2.3.2.6 Gesetz von Darcy

Bei der Schallabsorption poröser Stoffe spielt die Permeabilität eine zentrale Rolle. Die Permeabilität charakterisiert die Durchströmbarkeit eines porösen Stoffes und ist eine reine Stoffkonstante dieses Materials. Das DARCY-Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Potentialgefälle:

$$v_{\text{Darcy}} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{m}}{\rho A} = -\frac{k_p}{\mu} \operatorname{grad}(p) \quad \text{und} \quad (2.35)$$

$$v_m = \frac{v_{\text{Darcy}}}{\phi},$$

wobei v_{Darcy} die DARCY-Geschwindigkeit (fiktive oder Filtergeschwindigkeit) des Strömungsmediums ist, v_m die mittlere reale Geschwindigkeit in den Poren, k_p der Durchlässigkeitsbeiwert, ϕ die Porosität und \dot{V} der Volumenstrom. Es wird von einer laminaren Strömung ausgegangen. Bei diesem Gesetz handelt es sich um eine spezielle Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichung.

Als ein einfacher poröser Stoff kann ein Körper mit runden Röhren angenommen werden. Die Permeabilität lässt sich durch die Gesetzmäßigkeit von Hagen-Poiseuille bestimmen (siehe Anhang A.3.3). Neben der Permeabilität spielt in der Akustik der Wärmeaustausch zwischen Fluid und der porösen Struktur eine entscheidende Rolle. Eine Betrachtung des Wärmehaushalts ist im Anhangteil A.3.4 beigelegt. Wie sich die Einflüsse der Permeabilität und des Wärmeaustausch auf die Schallausbreitung in zylindrischen Röhren auswirkt, zeigt der Anhangteil A.3.5.

3 Methoden zur Charakterisierung

In diesem Kapitel soll die für diese Arbeit notwendige Methodik zur Charakterisierung mechanischer und akustischer Eigenschaften von Hohlkugelstrukturen vorgestellt werden. Zuerst wird auf die allgemeinen Modellbildungen, basierend auf realen und künstlich erzeugten Strukturen, eingegangen. Nachfolgend werden die statisch-, dynamisch-mechanisch und akustikspezifischen Methoden zur jeweiligen Charakterisierung behandelt.

3.1 Geometriemodellbildung

In diesem Abschnitt wird die für diese Arbeit genutzte geometrische Modellierung von Hohlkugelstrukturen beschrieben. Dabei wird auf ideale, theoretische und reale sowie auf stochastisch erzeugte Strukturen eingegangen.

3.1.1 Untersuchung realer Strukturen

Um das Verhalten von Hohlkugelstrukturen zu beschreiben und vorherbestimmen zu können, ist es notwendig, reale Proben mit ihren unregelmäßigen Strukturen zu untersuchen. Hierbei kann auf eine Vielzahl zerstörender und zerstörungsfreier Methoden zurückgegriffen werden. Des Weiteren hängt die Methode auch vom Probenkörpermateriale und seiner Größe ab. Die Eigenschaften beeinflussen Auflösungsbereich und -tiefe. Hierbei ist zu beachten, dass die Größe der untersuchten Probenkörper stark abhängig von der gewünschten Auflösungstiefe ist. So ist es beispielsweise fast unmöglich große makroskopische Bauteile als Ganzes im Nanobereich zu untersuchen. Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung bzw. Untersuchung der unregelmäßigen Packung in realen Hohlkugelstrukturen. Um einen möglichst großen und aussagefähigen Bereich der Hohlkugel zu erfassen, wird die Ortsauflösung so gewählt, dass alle relevanten Hohlkugelwände im Auflösungsbild sichtbar sind.

3.1.1.1 Computertomografie

Ein aus der diagnostischen Medizin bekanntes Standardverfahren ist die RÖNTGEN-Computertomografie (altgriechisch *tome* - Schnitt und *graphein* - schreiben). Heutzutage ist dieses Verfahren im technischen Umfeld ebenfalls nicht mehr wegzudenken. Es hat sich beispielsweise im Bereich der zerstörungsfreien Bauteilprüfung und Produktentwicklung etabliert.

Dieses moderne Verfahren basiert auf der Entdeckung der sogenannten Röntgenstrahlung¹ im Jahr 1895, das nach dem Entdecker Wilhelm Conrad Röntgen benannt wurde. So bestand zum ersten Mal die Möglichkeit in das Innere des menschlichen Körpers zu blicken, ohne diesen zu sezieren. Bei der RÖNTGEN-Strahlung handelt es sich um langwellige elektromagnetische Strahlen (10^{-8} bis 10^{-12} m) mit einer Photonenenergie E_{Photon} zwischen 100 eV und einigen MeV - wobei die Wellenlänge $\lambda_{R\delta}$ von der elektrischen Energie abhängig ist, welche sie erzeugt. Sie entsteht, wenn

¹Englisch: X-ray

schnell fliegende Elektronen auf einen festen Stoff auftreffen und dadurch abgebremst werden. Eine ausführliche Einführung in die Computertomografie kann [30] und [107] entnommen werden.

3.1.1.2 Rekonstruktion- und Rückführ-Algorithmus

Im Folgenden wird eine neue Methode zur Lokalisierung der genauen Position von Kugeln und zugleich deren Kugelradiusbestimmung aus dreidimensionalen Computertomografiebildern vorgestellt. Diese Kugelerkennungsmethode verwendet das Haar-Integration Framework (Programmiergerüst), das für generische (allgemeine) Objekterkennung und -klassifikation in zwei- und dreidimensionalen Bildern genutzt wird. Diese Integrationsmethode wurde in Schulz-Mirbach [189] eingeführt und unter anderem von Fehr et al. [62] weiterentwickelt. In dieser Arbeit handelt es sich um Kugeln, die sich durch eine Reihe von Bildpunkten (Pixel bzw. Voxel), die einen Abstand r zum Kugelzentrum \mathbf{c} haben, wobei r als Kugelradius ausgenutzt werden kann. Bei dieser Erkennungsmethode wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt, dass ein beliebiger Bildpunkt das Zentrum einer Kugel ist. Diese Punkte mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten werden als Kugelzentren selektiert. Die sogenannte Wahrscheinlichkeitskarte (engl.: probability map) für alle Punkte im dreidimensionalen Bild gibt den Bereich der möglichen Radien an, die in der Zeit $O(N)$ berechnet werden können. Dabei stellt N die Anzahl der Voxels im Bild dar. Für Kugeln mit nahezu gleichem Radius ist nur ein Rechendurchlauf durch das dreidimensionale Bild notwendig. Abgesehen von Schnelligkeit ist der Algorithmus besonders robust gegenüber Störungen, wie deformierte Kugeln oder nicht völlig geschlossene Kugeln in der Kugelstruktur. Zusätzlich beruht diese Methode nur auf der relativen Grauwertänderung. Der mathematische Hintergrund dieser Kugelerkennungsmethode wird hier kurz erläutert. Als Erstes werden die Merkmale der Invarianten vorgestellt, die für die Lokalisierung der Hohlkugeln verwendet werden. Die Invarianten basieren auf der Idee der Berechnung lokaler Grauwertinvarianten, wie sie in [189] eingeführt wurden. Grauwertinvarianten sind Haar-Integrale, d.h. eine Invariante I berechnet sich aus

$$I(f, \mathcal{X}) = \int_G f(g\mathcal{X}) dg \quad (3.1)$$

mit G als Transformationsgruppe, unter der die berechneten Invarianten invariant sein sollen, f einer Kernfunktion und dem Bild \mathcal{X} . Durch die Integration über alle Transformationen $g\mathcal{X}$ des Bildes \mathcal{X} entsteht pro Bild eine Invariante. Diese Haar-Integration kann angewendet werden, um ganze Bilder oder beliebige Ausschnitte von n -dimensionale Bilder unabhängig von einer gegebenen Transformationsgruppe zu beschreiben. Das Ergebnis $I(f, \mathcal{X})$ ist identisch für das Bild \mathcal{X} mit all ihren Transformationen unter der Transformationsgruppe G . Dieses Resultat kann als invarianter Transformationkennwert dienen. Im besonderen Fall der Erkennung von kugelförmigen Strukturen im dreidimensionalen Raum berechnet sich der rotationsinvariante Kennwert I wie folgt:

$$I(\mathcal{X}, \mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = \int_{O_3} \mathbf{R}^{-1} \frac{\nabla \mathcal{X}(\mathbf{R}\mathbf{r} - \mathbf{x}_0)}{|\nabla \mathcal{X}(\mathbf{R}\mathbf{r} - \mathbf{x}_0)|} |\mathbf{r}| d\mathbf{R}. \quad (3.2)$$

Hierbei stellt der Wert ein direktes Maß für die Wahrscheinlichkeit dar, dass der Punkt \mathbf{x}_0 ein Zentrum einer Kugel mit dem Radius $|\mathbf{r}|$ ist. Die Transformationsgruppe O_3 ist die Gruppe der Rotationen, die Rotationsmatrix \mathbf{R} kann eine beliebige Rotation im dreidimensionalen Raum sein und $\nabla \mathcal{X}$ entspricht dem Gradientenbild von \mathcal{X} . Die Integration über alle Rotationsmatrizen $\mathbf{R} \in O_3$ ist sehr zeitaufwändig. Eine schnelle Approximation über die erwähnten rotationsinvarianten Funktionen können aus Schulz et al. [188] entnommen und für die dreidimensionale Kugelerkennung angewendet werden. Dieses Verfahren basiert auf einem Bewertungschema,

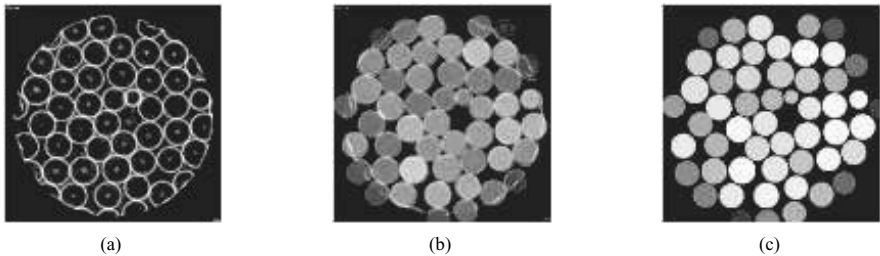


Abbildung 3.1: Schnitt durch ein dreidimensionales Computertomografie-Bild mit a) Akkumulatorkarte und b) mit erfassten Kugeln, c) erfasste Kugeln ohne Überlagerung.

welches dem in der Hough Transformation [11] verwendeten Verfahren ähnelt. Jeder Voxel \mathbf{x}_0 in einem dreidimensionalen Bild „stimmt“ für den Punkt \mathbf{x}_c ab, welcher in der Richtung des Gradienten von \mathbf{x}_0 im Abstand $|\mathbf{r}|$ liegt. Daraus folgt, dass für jeden Punkt \mathbf{x}_0 auf der Oberfläche einer Kugel, der Punkt \mathbf{x}_c das Kugelzentrum ist. Der resultierende Akkumulator stellt ein vierdimensionales Feld mit den Größen x, y, z und $|\mathbf{r}|$ dar. Die anschließende Anwendung eines vierdimensionalen GAUSS-Filters ermöglicht eine weitere Erhöhung der Robustheit gegen Störungen in der Kugelstruktur. Lokale Maxima im Akkumulator entsprechen den Kugelzentren im originalen dreidimensionalen Bildbereich. Beispielhaft zeigt die Abb. 3.1 die Kugelerkennung im Schnitt eines Computertomografie-Bildes. Dabei kann man in Abb. 3.1a die Überlagerung des Originalbildes mit der Akkumulatorkarte erkennen. Die lokalen Maxima der Kugelzentren werden dabei deutlich sichtbar. Die aus den lokalen Maxima extrahierten Kugeln werden in Abb. 3.1b überlagert und mit dem Originalbild abgebildet. Abbildung. 3.1c zeigt die aus der Erkennung resultierenden Kugeln. Mit dieser Methode können Position und Größe von Hohlkugeln aus realen Proben mit hoher Zuverlässigkeit und Genauigkeit ermittelt werden. Um die Leistungsfähigkeit dieses Algorithmus unter Beweis zu stellen, wurde eine reale Probe mit den Abmaßen $330 \times 110 \times 30 \text{ mm}^3$ mit Hilfe eines Computertomografen gescannt und rekonstruiert. Dabei konnten über 40000 Kugeln detektiert werden. Hierbei wurden über 99,7% richtig erfasst. Abbildung 3.2 zeigt die rekonstruierte Volumengeometrie.

3.1.2 Reguläre Packungen - Gitterstrukturen

Reguläre Packungen, auch theoretische Gitterstrukturen genannt, sind schon seit langem aus der Chemie und der Atomphysik bekannt. Diese regulären Kugelpackungen bestehen aus periodischen und durch bestimmte Regeln aneinander gesetzte Elementarzellen mit gleich großen Kugeln. Hierbei stellt die Elementarzelle die kleinste Untereinheit der Packung dar. Setzt man die Elementarzellen periodisch aneinander, bildet sich ein unendliches Gitter.

Die regulären Packungen sind translationsinvariant, d. h. ihre Elemente lassen sich durch Verschiebung deckungsgleich aufeinander abbilden. Außerdem besitzen diese Packungen Rotations-symmetrie, die abhängig von der zugrunde liegenden Elementarzelle zwei-, drei- oder vierzählig sein kann. Die meisten Festkörpermateriale kristallisieren in solchen Anordnungen oder in etwas komplexeren Mischformen der regulären Packungen. So befasst sich die Kristallografie mit der Einstufung natürlicher, aber auch zum Teil künstlicher kristalliner Werkstoffe in bestimmten Kristallstrukturformen. Diese Einstufung ergibt sich aus der geometrischen Anordnung der darin enthaltenen Atome. Dabei werden die Atome als Punkte oder Kugeln approximiert. Kugeln

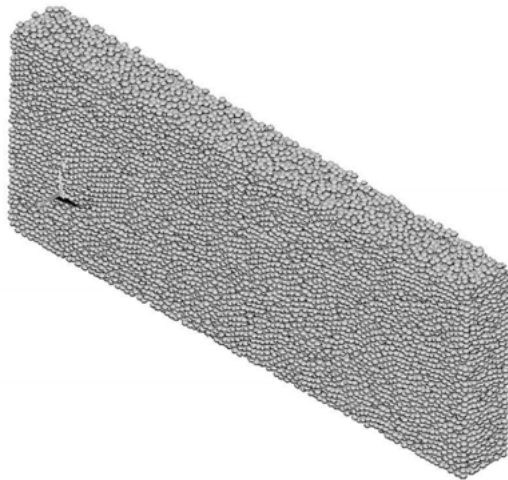


Abbildung 3.2: Rekonstruiertes Volumenmodell einer realen Probe auf Basis der bildverarbeiteten Kugelerkennung.

gleicher Größe lassen sich auf verschiedene Weise zu regelmäßigen Strukturen zusammenführen, die im Folgenden erklärt werden.

Aus direkt orthogonal übereinander gestapelten Kugeln ist die kubisch-primitive Packung (KP), oder auch simple cubic packing genannt, aufgebaut. Ihr Volumenanteil ist relativ niedrig mit $V_V = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$. Die Koordinationszahl (KZ) gibt an, wie viele direkte Nachbarn eine Kugel in der Gitterstruktur besitzt. Für diesen Packungsfall beträgt die Koordinationszahl sechs. Dieser Gitter- bzw. Packungstyp ist nicht stabil gegen Verschiebungen. Es gibt auch nur wenige Werkstoffe bzw. Elemente, wie beispielsweise Quecksilber, die eine derartige Gitterstruktur aufweisen.

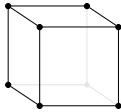
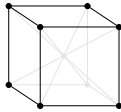
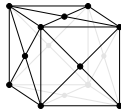

Einen stabilen Packungstyp stellt die kubisch raumzentrierte Packung (KRZ) oder auch body centered cubic packing genannt dar. Die kubisch raumzentrierte Packung weist einen Volumenanteil von $V_V = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \approx 0,68$ auf. Diesen Packungs- bzw. Gittertyp trifft man häufig bei Metallen an, wie beispielsweise bei Chrom, Wolfram und Molybdän. Metalle mit diesem Gittertyp weisen eine mittelgroße Dichte bei relativer großer Zähigkeit auf.

Im Jahre 1611 stellte sich Kepler die Frage nach der dichtesten möglichen Packung gleich großer Kugeln [111]. Diese KEPLERSchen Packungen gehören ebenfalls zu den regulären Packungen und haben die höchste, überhaupt von einer regulären Packung im dreidimensionalen Raum erreichbare Dichte von $V_V = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,68$. Diese regulären Packungen nach Kepler umfassen wiederum verschiedene Vertreter. Die bekanntesten sind die kubisch flächenzentrierte Kugelpackung (KFZ) oder im englischen Sprachraum face centered cubic genannte Packung und die hexagonal dichteste Kugelpackung (HDP), im englischen Sprachraum auch als hexagonal close packed bezeichnet. Der Unterschied zwischen den verschiedenen Vertretern der dichtesten Packung liegt allein in der Anordnung ihrer Schichten.

Eine Übersicht über die aufgeführten Packungs- und Gitterstrukturen gibt Tabelle 3.1. Auf weitere Gittermodelle, auch in der Literatur als BRAVAIS-Gitter bezeichnet, wird nicht weiter eingegangen. Sie sind [27] und [137] zu entnehmen.

Als Sonderstellung soll nur kurz die quasiperiodische Packung erwähnt werden. Reale quasiperi-

Tabelle 3.1: Reguläre Kugelpackungen.

Packung	KP	KRZ	KFZ	HDP
				
Volumen -anteil V_V	$\frac{\pi}{6}$ $\approx 0,52$	$\frac{\pi}{8}\sqrt{3}$ $\approx 0,68$	$\frac{\pi}{6}\sqrt{2}$ $\approx 0,74$	$\frac{\pi}{6}\sqrt{2}$ $\approx 0,74$
Koordinationszahl (KZ)	6	8	12	12

odische Anordnungen aus Kugeln wurden in Metallen beobachtet. Bei den Untersuchungen wurden fünf-, sieben- oder zehnzählige Symmetrien festgestellt, die sich nur durch quasiperiodische Anordnung der Atome erklären lassen. Solche ikosaedrischen Anordnungen von Atomen treten oft als strukturelle Komponente der sogenannten Quasikristalle auf. Ihr Volumenanteil kann örtlich begrenzt höher sein, als bei regulären dichtesten Packungen (KFZ und HDP). Im Gegensatz zu den regulären Packungen besitzen quasiperiodische Packungen keine Translationsinvarianz. Es gibt aber eine lokale Rotationssymmetrie, die im Vergleich zu den regulären Packungen fünf-, sieben- oder zehnzählig sein kann. Quasiperiodische Packungen können nicht nur aus einer Art von Elementarzellen gebildet werden.

3.1.3 Zufällige Kugelpackungen

Die zufälligen Kugelpackungen kennzeichnen sich dadurch, dass die Zentren der gepackten Körper, hier Kugeln, weder periodische noch quasi-periodische Anordnung aufweisen. So besitzen diese keine Translationinvarianz und keinerlei Rotationssymmetrien. Zusätzlich wurde durch Bernal [19, 191] beobachtet, dass sich für eine reale, völlig zufällig dichte Packung ein Volumenanteil von ca. $V_V = 0,636$ einstellt. Packungen mit einem höheren Volumenanteil weisen bereits partiell geordnete Strukturen auf, so dass sie nicht mehr als vollkommen zufällig betrachtet werden können. Auch bei zufälligen, mittels Simulation erzeugten Packungen stellt sich ein ähnlicher Effekt ein. Eine genaue und vollständige Definition der Eigenschaft “zufällig dicht gepackt“ konnte bis dato nicht gefunden werden [208]. Sämtliche Packungsformen lassen sich mit Hilfe mathematischer Kenngrößen charakterisieren. Zu diesen Kenngrößen (Parametern) gehören unter anderem der Volumenanteil V_V der Packung, die Anzahl der nächsten Nachbarn, die Winkelverteilung zu den Nachbarn, diverse Korrelationsfunktionen sowie bei regulären Packungen die Kantenlänge der Einheits- bzw. Elementarzelle. Die begrenzte Anzahl der Kenngrößen zur Charakterisierung gewährleistet keine eindeutige Reproduzierbarkeit der zufälligen Packungen. Der Volumenanteil einer Hartkugelpackung

$$V_V = \frac{1}{V_{\text{Zelle}}} \sum_{i=1}^N V_{\text{Kugel},i}$$

(3.3)

beschreibt das Verhältnis der Summe der Kugelvolumina zum Volumen der betrachteten Raumelemente. Er wird in der Literatur auch Raumauffüllung oder Dichte genannt. Die Volumenanteile für

die regulären Kugelpackungen können Tabelle 3.1 entnommen werden. In manchen Quellen wird anstatt des Volumenanteils die Porosität ϕ angegeben. Diese Größe gibt den Anteil des Volumens an, der sich nicht aus den Kugeln zusammensetzt und berechnet sich aus $\phi = 1 - V_V$.

3.1.4 Hohlkugel-Mesomodell

Auf Basis realer Hohlkugelstrukturen werden vereinfachte Hohlkugelpaar-Modellgeometrien in der Mesoebene erzeugt [37, 183]. Dabei wurde darauf geachtet, dass die Modelle geometrisch, wie auch in ihrer Parametervielfalt, so einfach wie möglich gestaltet wurden. Diese Modelle werden zur weiteren FEM-Berechnung genutzt.

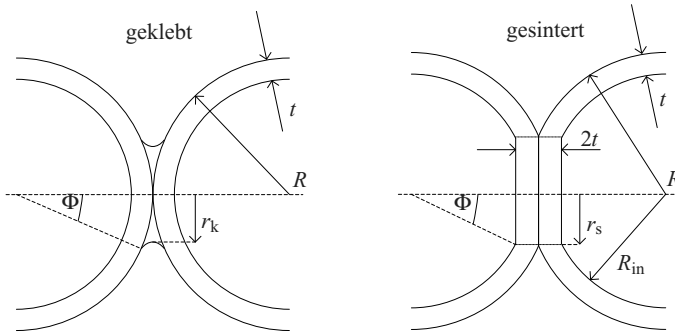


Abbildung 3.3: Idealisiertes, geklebtes und gesintertes Hohlkugelmodell mit den Parametern: R äußerer Radius, R_{in} innerer Radius, r_s Sinterstellenradius, r_k Klebestellenradius und t Wanddicke

3.1.4.1 Geklebtes Modell

Das geklebte Modell wurde Öchsner [37] bzw. Sanders und Gibson [183] entnommen. Die Modellgeometrie eines verklebten Hohlkugelpaares mit verjüngter Verbindungsstelle wird in Abb. 3.3 verdeutlicht. Hierfür lässt sich folgende Beziehung aufstellen:

$$\frac{r_k}{R} = \tan \Phi + \frac{\cos \Phi - 1}{\cos \Phi} \quad (3.4)$$

wobei R der äußere Radius, t die Wandstärke und r_k den Radius der Verjüngung darstellt. Der Winkel zwischen den Verjüngungsstellen beträgt 2Φ . Obwohl es einfacher ist, die Größe der geklebten Bindungsstelle zu messen als den Winkel Φ , ergeben sich Vorteile bei der Berechnung. Die relative Dichte der Hohlkugelstruktur setzt sich aus der Summe des Beitrags der beiden Kugeln und der geklebten Verbindungsstelle zusammen

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)_{\text{Hohlkugel}} + \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)_{\text{Klebestelle}}, \quad (3.5)$$

wobei ρ^* die Dichte der gesamten Hohlkugelstruktur und ρ_s des Strukturmaterials, wie beispielsweise Stahl, darstellt [183]. Nimmt man die Vernachlässigung der unterschiedlichen Dichten vom

Kleber- und Hohlkugelmateriale an [183], kann folgende Beziehung

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = PD \left(3 \left(\frac{t}{R} \right) - 3 \left(\frac{t}{R} \right)^2 + \left(\frac{t}{R} \right)^3 \right) + \left(\frac{KZ}{2} \frac{V_{\text{Klebestelle}}}{V_{EZ}} \right) \quad (3.6)$$

aufgestellt werden. Dabei ist PD die Packungsdichte und KZ die Koordinationszahl. Die entsprechenden Werte für verschiedene Packungen können aus Tabelle 3.2 abgelesen werden. Das Volumen der Klebestelle lässt sich nach [183] folgendermaßen berechnen:

$$V_{\text{Klebestelle}}(R, \Phi) = 2\pi R^3 \left(\frac{1}{\cos \Phi} - 1 \right)^2 (1 - \tan \Phi \arcsin(\cos \Phi)). \quad (3.7)$$

Modelle mit einem Spalt zwischen dem Kugelpaar werden hier nicht behandelt und können [37] entnommen werden.

Tabelle 3.2: Geometrische Eigenschaften verschiedener Kugelpackungen.

Packung	PD	KZ	V_{EZ}
KP	0,52	6	$8R^3$
KRZ	0,68	8	$\frac{64\sqrt{3}R^3}{9}$
KFZ	0,74	12	$16\sqrt{2}R^2$

3.1.4.2 Gesintertes Modell

Bei dem gesinterten Hohlkugelmolell geht man von einer konstanten Wanddicke t aus, welche zweifach wanddickenstarke Sinterstellen hervorrufen. Durch die Abplattung an den Sinterstellen entsteht gegenüber der idealen Hohlkugel eine geringe Abnahme des Volumens, welche im Weiteren diskutiert wird. Die geometrischen Abmaße können aus Abb. 3.3 entnommen werden. Die relative Dichte lässt sich aus den drei geometrischen Grundformeln [29] für das Volumen einer Kugel V_K , einer Kugelkalotte V_{KK} und Kugelschale V_{KS}

$$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V_{KK} = \frac{h^2\pi}{3}(3R-h) \quad \text{und} \quad V_{KS} = \frac{4}{3}\pi(R^3 - (R-t)^3) \quad (3.8)$$

mit der Beziehung

$$h = R - \sqrt{R^2 - r_s^2} \quad \text{bzw.} \quad r_s = R \sin \Phi \quad (3.9)$$

bestimmen. Zieht man das Volumen der äußeren Kugelkalotte von der inneren ab, so erhält man das Volumen einer Hohlkugel mit einer Sinterstelle

$$V_{\text{HK,ges}} = \frac{1}{3}\pi t(9R^2 - 12Rt + 4t^2 - 3R^2 \cos^2 \Phi - 6R^2 \cos \Phi). \quad (3.10)$$

Daraus ergibt sich folgende absolute bzw. relative Volumenänderung pro Sinterstelle:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{HK,ges}} &= -\pi R^2 t (1 + \cos^2 \Phi - 2 \cos \Phi) \quad \text{bzw.} \\ \Delta V_{\text{HK,ges,rel}} &= -\frac{3}{4} \frac{\pi R^2 t (1 + \cos^2 \Phi - 2 \cos \Phi)}{3R^2 - 3Rt + t^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tabelle 3.3: Geometrische Eigenschaften verschiedener gesinterter Hohlkugelstruktur-Elementarzellen.

Packung	Einheitszellen-volumen	Koordinationszahl	Kugeln pro Elementarzelle
KP	$8R^3 \cos^3 \phi$	6	1
KRZ	$\frac{64\sqrt{3}R^3}{9} \cos^3 \phi$	8	2
KFZ	$16\sqrt{2}R^3 \cos^3 \phi$	12	4
HDP	$8\sqrt{2}R^3 \cos^3 \phi$	12	2
Parameter	V_{EZ}	KZ	N_{EZ}

Somit lässt sich für jegliche Kugelpackung das Volumen pro Elementarzelle folgendermaßen

$$V_{\text{HKS,ges,solid}} = N_{EZ} * (V_{KS} + KZ\Delta V_{\text{HK,ges}}) \tag{3.12}$$

bestimmen, wobei N_{EZ} die Anzahl der Kugeln in einer Elementarzelle ist. Schlussendlich lässt sich die relative Dichte der gesinterter Packung festlegen

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{V_{\text{HKS,ges,solid}}}{V_{EZ}}. \tag{3.13}$$

In Tabelle 3.3 können die Werte zur Berechnung der Dichte für verschiedene Packungen entnommen werden

3.1.5 Stochastischer Kugelgenerator

Die computergestützte Generierung und Analyse zufälliger Kugelpackungen erfordert den Einsatz geeigneter Algorithmen bzw. Softwareprogramme. Die Entwicklung solcher Simulationssysteme, mit denen der gesamte Prozess von der Erzeugung bis hin zur statistischen analytischen Auswertung, kann beispielhaft [57] und [134] entnommen werden. Diese Simulationssysteme basieren auf Methoden der räumlichen Statistik.

3.1.5.1 Kugelmodelle

Bei den regulären Kugelpackungen wird von einem konstanten Kugelradius ausgegangen, sprich einer monodispersen Packung. Es besteht auch die Möglichkeit mit zwei unterschiedlichen oder mit einer Vielzahl von verschiedenen Kugelradien Packungen zu erstellen. Dann spricht man von bidispersen oder polydispersen Kugelpackungen. Die Kugelradien können durch verschiedene Dichtefunktionen anteilig in der Packung vorhanden sein. Die Abb. 3.4 zeigt exemplarisch jeweils eine mono-, bi- und polydisperse Packung.

3.1.5.2 Kugelpackungsmodelle

Neben den schon erwähnten regulären (theoretischen) Kugelpackungen gibt es noch weitere, auf Kugeln basierende Modelle. In dieser Arbeit geht es vor allem um sogenannte zufällige Hartkugelpackungen im dreidimensionalen Raum. Hartkugelpackungen sind dadurch gekennzeichnet (siehe Abb. 3.5a), dass die Kugeln sich nicht überschneiden oder gegenseitig verformen. Anschaulich betrachtet bestehen die Kugeln aus ideal starrem bzw. hartem Material, das sich unter Krafteinfluss

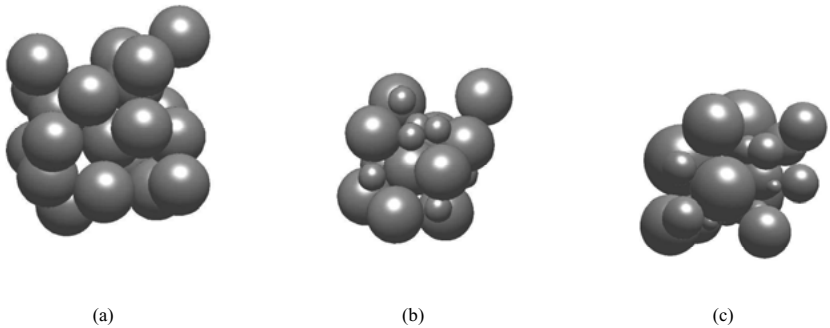


Abbildung 3.4: Kugelmodelle mit unterschiedlichen Kugelradien: a) mono-, b) bi- und c) polydisperse Packung.

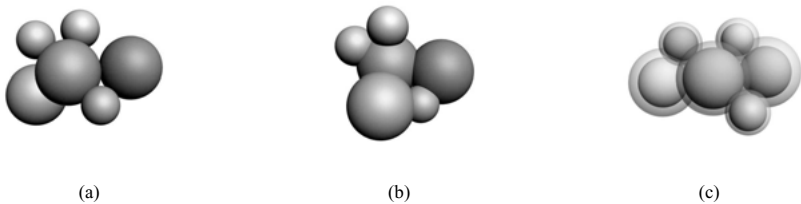


Abbildung 3.5: Prinzipskizzen: a) Hartkugel-, b) BOOLEschen Modell und c) Kirsch-Kern-Modell.

nicht deformiert. Hierbei wird ersichtlich, dass es sich um ein theoretisches Modell handelt. Im Folgenden werden Hartkugelpackungen vereinfacht als Kugelpackung bezeichnet.

Als weiteres Modell soll kurz das Boolesche Kugelpackungsmodell in Abb. 3.5b aufgeführt werden. Es wird oft als Vergleichsmaßstab in der stochastischen Geometrie für andere Modelle herangezogen, da sich einige Kenngrößen analytisch bestimmen lassen. Das Modell definiert sich durch Vereinigung aus vielen unabhängigen Kugeln mit beliebigen Kugelzentren. Dabei wird unterschieden zwischen monodispersen Booleschen Kugelsystemen, deren Kugeln identische Durchmesser besitzen, und polydispersen Booleschen Kugelsystemen, bei denen die Durchmesser der Kugeln Zufallsgrößen sind.

Bei einer Vielzahl von Anwendungen treten nicht nur harte Kugeln oder völlig zufällige Kugelanordnungen auf. Es müssen auch beschränkte Überlappungen bzw. Durchdringung berücksichtigt werden, zum Beispiel bei der Simulation offenporiger Materialien mit kugelförmiger Pore. Bei diesem Modell gibt es einen harten, nicht deformierbaren Kugelkern und eine äußere Kugelschale, die durchdringbar ist (siehe Abb. 3.5c und 3.6). Dieses Modell bezeichnet Torquato [207] als cherry-pit model und Elsner [57] als Kirschkern-Modell. Dieses sogenannte Kirschkern-Modell ist zugleich für gesinterte Hohlkugelstrukturen geeignet, da sich beim Sinterprozess eine gewisse Durchdringung bzw. Verformung der Kugel einstellt. Für die in dieser Arbeit erstellten gesinterten Hohlkugel-Geometriemodelle wurde jedoch das Hartkugelmodell genutzt und nachträglich eine definierte Durchdringung erzeugt. Letztendlich entspricht wieder dem Kirschkern-Modell.

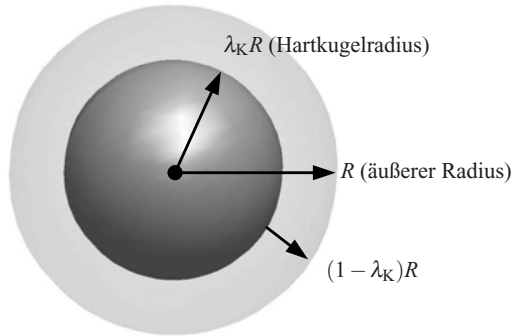


Abbildung 3.6: Kugelradien beim Kirsch-Kern-Modell nach [57].

3.1.6 Algorithmen zur Kugelpackungengenerierung

Es gibt eine Vielzahl gut untersuchter und ausgearbeiteter Ansätze für Packungsalgorithmen, im Speziellen für Hartkugelpackungen. Einige dieser Algorithmen können auch nicht kugelförmige bzw. sogar unregelmäßige Körper packen. In diesem Abschnitt soll eine kleine Auswahl von verschiedenen Ansätzen für die Generierung zufälliger dichter Kugelpackungen vorgestellt werden und die Auswahl eines Algorithmus begründet werden. Auf eine detaillierte Beschreibung der Algorithmen wird bewusst verzichtet. Diese kann den angegebenen Literaturverweisen entnommen werden. Im Folgenden wird eine kleine Auswahl von Kugelgeneratoren zur Erzeugung von zufälligen Packungen vorgestellt.

Eine einfache Methode zur Produktion von Kugelpackungen ist der intuitive Ansatz. Dabei wird ein zufälliges Feld mit Kugelzentren erzeugt. Jedem dieser Zentren wird ein kleiner Kugelradius zugeordnet und dieser dann schrittweise vergrößert. Berühren sich zwei benachbarte Kugeln, so stoppt ihr Wachstum und der Radius der Kugeln wird fixiert. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist die geringe Einflussnahme auf die Durchmesserverteilung. Des Weiteren liegen die Volumenanteile nur bei ca. $V_V = 0,15$ und sind damit äußerst gering. In der räumlichen Statistik ist diese Realisierungsmethode auch als dreidimensionales STIENEN-Modell [200] bekannt.

Als weitere Gruppe der Kugelpackungsalgorithmen kann die sequentielle Methode aufgeführt werden. Im Gegensatz zum intuitiven Ansatz werden hier schrittweise Elemente (Kugeln) einer Packung hinzugefügt. Die Unterschiede innerhalb dieser Algorithmengruppe liegen in den Strategien des Hinzufügens von Elementen und in den Randbedingungen, die beispielsweise die Form des Packungsvolumens bestimmt. Exemplarisch kann der Sedimentationsalgorithmus für diese Algorithmengruppe aufgeführt werden. Das Prinzip dieses Algorithmus lehnt sich an den natürlichen Vorgang der Sedimentation an, bei dem sich Partikel der Schwerkraft folgend sequentiell ablagern [209, 210]. Hierbei wird ein beliebiges Behältnis, in der Regel ein Quader, und ein virtuelles Kraftfeld (Gravitation) vorgegeben, welchem die Kugeln folgen müssen. Als Initialbedingung wird eine Schicht zufälliger Kugeln am Behälterboden platziert, dabei dürfen die Kugeln sich nicht überlappen. Nun wird in jedem weiteren Simulationsschritt eine Kugel erzeugt. Diese folgt der vorgegebenen Richtung des Kraftfeldes. Trifft nun diese Kugel auf schon vorhandene Kugeln im System wird durch Rollen eine stabile Position ermittelt. Als stabile Kugelposition gilt, wenn eine Kugel drei Berührungspunkte besitzt - sei es durch Nachbarkugeln oder Behälterwand. Kommt es nach einer bestimmten Anzahl von Schritten zu keinem stabilen Zustand, wird diese Kugel verworfen

und eine neue Kugel wird erzeugt [106, 143]. Eine weitere Vorgehensweise dieser Methode ist das schalenweise Wachstum um ein Zentrum, welches einer Anlagerung von Kugeln um einen zentralen Punkt entspricht. Der durchschnittliche Volumenanteil bei gleich großen Kugeln beträgt für die Sedimentationsalgorithmen ca. 0,59 [215]. Er liegt somit noch unter dem Volumenanteil $V_V = 0,636$ der zufällig dichten Packung nach Bernal [19]. Dies kann unter anderem auf den Effekt zurückgeführt werden, dass die Kugel zumeist die erstmögliche stabile Position einnimmt und nicht die optimale. Ein weiterer Nachteil kann in der starken Inhomogenität liegen. Somit scheidet dieser Algorithmus für hochverdichtete zufällige Kugelpackungen aus.

Ein weiterer Vertreter dieser Gruppe stellt der Random Sequential Addition (RSA) Algorithmus dar. Der Ansatz ähnelt den Sedimentationsalgorithmen, jedoch unterliegen die Kugeln keinem virtuellen Kraftfeld. Bei dieser Methode werden schrittweise Kugeln in einem vorgegebenen Volumen erzeugt und auf Durchdringung geprüft. Bei Durchdringung wird die Kugel verworfen und eine neue zufällige Kugel wird erzeugt. Nachteil dieser Vorgehensweise sind wiederum eine geringe Packungsdichte $V_V < 0,636$ [221] und relativ lange Rechenzeiten.

Eine weitere und grundlegend verschiedene Herangehensweise zu den bisher beschriebenen Algorithmen stellen die Kollektiven-Umordnungsalgorithmen dar. Im Gegensatz zum sequentiellen Hinzufügen steht die Anzahl der Elemente schon zu Beginn der Berechnung fest und bleibt auch während des Packprozesses konstant. Des Weiteren ist die Anordnung der Kugelzentren nicht statisch, sondern die Kugeln werden während der Berechnung in jedem weiteren Schritt verschoben. Dies ermöglicht eine platzsparende Anordnung der Kugeln, so dass sich die Gesamtdichte tendenziell erhöht. Die einzelnen Algorithmen unterscheiden sich vor allem durch die Herangehensweise der Umordnung der Kugelzentren.

Zu dieser Gruppe gehört der Algorithmus nach Jodrey und Tory [102, 103], der speziell für gleich große Kugeln entwickelt wurde. Bei diesem Algorithmus dürfen die Kugeln geringfügig während des Packungsvorganges überlappen. Dabei wird bei der Neuordnung auf die Minimierung der Überlappungen durch Abstoßung geachtet. Eine Erweiterung dieses Algorithmus wurde durch Bargiel et al. [14] und Moscinski et al. [151] entwickelt und ist unter den Namen Force-Biased-Algorithmus bekannt. Mit diesen Algorithmen lassen sich sehr dichte Kugelpackungen erzeugen. Dabei können in den erzeugten Packungen gleich großer Kugeln sogar hohe Anteile geordneter Strukturen enthalten sein und dabei Volumenanteile bis zu $V_V = 0,72$ erreicht werden. Eine genaue Beschreibung des Force-Biased-Algorithmus kann Bargiel et al. [14] und Elsner [57] entnommen werden.

Des Weiteren soll noch der LUBACHEVSKY-STILLINGER-Algorithmus [54, 140], der Wechselwirkung durch elastische Stöße und die Molekulardynamik berücksichtigt, erwähnt werden. Bei der Molekulardynamik geht es vorrangig um die physikalischen Wechselwirkungen der Atome und deren zeitliche Bewegung. Die Packungen sind nur ein Nebenprodukt.

In dieser Arbeit wird zur Erzeugung dichter zufälliger Kugelpackungen der Force-Biased-Algorithmus genutzt. Der Algorithmus ist im Simulationsprogramm SpherePack implementiert, das dankenswerterweise durch Professor Dr. Dietrich Stoyan von der Technischen Universität Freiberg bereitgestellt wurde. Dieser Algorithmus erzeugt dichte zufällige und zugleich periodische Kugelpackungen bei einer gewünschten Anzahl von Kugeln.

3.1.7 Kenngrößen zur Charakterisierung zufälliger Kugelpackungen

In diesem Abschnitt sollen mit Hilfe einer kleinen Anzahl ausgewählter Kenngrößen der räumlichen Statistik mit dem Force-Biased-Algorithmus zufällig erzeugte Kugelpackungen, sowie rekonstruierte Kugelpackungen aus realen Hohlkugelstrukturen untersucht werden. Zu Beginn wird auf die Kenngrößen spezifischer Oberflächen- und Volumenanteile, auch Packungsdichte genannt,

eingegangen.

Die spezifische Oberfläche A_V und der Volumenanteil V_V eines Kugelsystems sind sogenannte Kenngrößen erster Ordnung. Im Allgemeinen beschreibt die Kenngröße V_V den Volumenanteil der Materialphase Φ_K der Kugeln bezüglich des Gesamtvolumens des Beobachtungsfensters W_B :

$$V_V = \frac{V(\Phi_K)}{V(W_B)}. \quad (3.14)$$

Entsprechend definiert sich die spezifische Oberfläche A_V als Quotient aus Oberfläche von Φ_K und des Gesamtvolumens des Beobachtungsfenster W_B :

$$A_V = \frac{A(\Phi_K)}{V(W_B)}. \quad (3.15)$$

Für Hartkugelpackungen sind diese Kenngrößen einfach und exakt bestimmbar. Der Volumenanteil für diese Packungsart mit beliebiger Radienverteilung berechnet sich aus der Summe der Kugelvolumina bezogen auf die mittlere Anzahl Kugeln pro Volumeneinheit, auch Anzahldichte ρ_n genannt:

$$V_V = \frac{4}{3} \pi \bar{R}^3 \rho_n. \quad (3.16)$$

Analog hierzu ergibt sich die spezifische Oberfläche aus Summe der Oberflächen aller Kugeln:

$$A_V = 4\pi \bar{R}^2 \rho_n. \quad (3.17)$$

Die Größen \bar{R}^2 und \bar{R}^3 beschreiben hier das zweite bzw. dritte Moment der Radienverteilung der Kugel. Für BOOLEsche Kugelpackungen und das Kirschkeim-Modell wird eine Schätzmethode eingesetzt [57, 134].

Im Weiteren werden ausgewählte Kenngrößen zur Charakterisierung aufgeführt, die Aufschluss über die Ordnung der Packung wiedergeben. Die Kenngrößen sollen Erkenntnisse über die zu untersuchende Packung zeigen, ob ein eher amorph- oder kristallähnlicher Ordnungszustand vorliegt. Zur Veranschaulichung werden die Charakterisierungsgrößen an einer zufällig generierten periodischen Kugelpackung aufgezeigt.

3.1.7.1 Lokale Dichte

In zufälligen Kugelpackungen gibt es meist Bereiche mit weniger dicht und mehr dicht angeordneten Kugeln. Zufällige Kugelpackungen können auch geordnete Bereiche aufweisen, die beispielsweise als Hinweis auf Vorhandensein regulärer Strukturen dienen können. Um diese lokalen Bereiche untersuchen zu können, bedarf es einer Kenngröße, mit der sich die lokalen Veränderungen aufspüren lassen. Eine Kenngröße hierfür stellt die lokale Dichte einer Kugel in einer Packung dar. Die Definition der lokalen Dichte basiert auf der VORONOI-Zerlegung bzw. bei ungleich großen Kugeln auf der LAGUERRE-Zerlegung von Kugelpackungen [105, 135, 180, 181]. Die lokale Dichte einer Kugel ist definiert aus dem Verhältnis Volumen der Kugel zum Volumen der sie umgebenden VORONOI-Zelle:

$$\rho_{\text{lokal}} = \frac{V_i}{V_{\text{Vor},i}}. \quad (3.18)$$

Die Abb. 3.7 zeigt die Vorgehensweise zur Erstellung einer VORONOI-Zelle im zweidimensionalen Raum. Die lokale Dichte kann Aufschluss über Schwankungen in der Dichteverteilung der

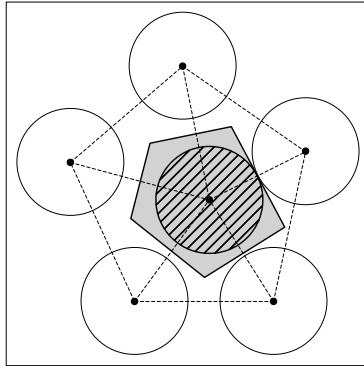
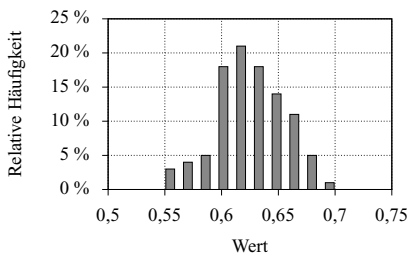
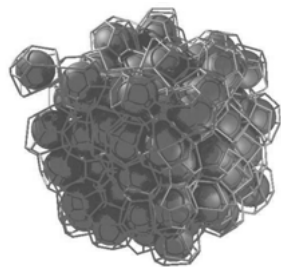


Abbildung 3.7: Konstruktion einer VORONOI-Zelle, hier beispielhaft für monodisperse Kreisscheiben gezeigt. Die der VORONOI-Zelle zugehörige Kugel ist schraffiert dargestellt.

Packung geben, wie sie zum Beispiel durch Clusterbildung hervorgerufen werden. In monodispersen Kugelpackungen kann die lokale Dichte auf lokale strukturelle Anomalien hinweisen, beispielsweise Kristallisationsbereiche. Zudem können mit Hilfe der lokalen Dichte potenzielle ikosaedrische Anordnungen entdeckt werden, da die lokale Dichte für die zentralgelegene Kugel in einer ikosaedrischen Anordnung mit $\rho_{\text{lokal}} = 0,76$ über derjenigen der KRZ- bzw. HDP-Struktur liegt. Bei dieser Anordnung entstehen Lücken, die es unmöglich machen, solche Strukturen raumfüllend periodisch anzuordnen. Diese Lücken verringern die lokalen Dichten für die Kugeln um das Ikosaederzentrum. Dadurch bleibt die globale oder auch mittlere Packungsdichte der gesamten Packung immer unter dem Wert der dichtest möglichen Anordnung. Abbildung 3.8a zeigt exemplarisch die Verteilung der lokalen Dichte für eine Packung mit 100 Kugeln.



(a) Histogramm



(b) Dreidimensionale Darstellung

Abbildung 3.8: Zufällige Kugelpackung: a) Histogramm der lokalen Dichte und b) dreidimensionale Darstellung einer Kugelpackung mit 100 gleich großen Kugeln inklusive des VORONOI-Gitters bei einer Dichte von $V_V = 0,62$.

3.1.7.2 Koordinationszahl

Ein weiterer topologischer Parameter einer Kugelpackung ist die Koordinationszahl KZ , sie beschreibt die direkten Kontakte einer Kugel zu ihren Nachbarn. Für reale monodisperse Kugelpackungen bestimmten beispielsweise Bernal et al. [20] die mittlere Koordinationszahl für direkte Kontakte $\langle KZ \rangle = 6,4$ für eine zufällige dichte Packung mit $PD = 0,62$ und $\langle KZ \rangle = 5,5$ für eine zufällige lose Packung mit $PD = 0,6$. Des Weiteren ermittelte Bernal et al. [20] die mittlere Koordinationszahl für direkte und nahe² Kontakte für die dichte Packung $\langle KZ \rangle = 8,5$ und die lose Packung $\langle KZ \rangle = 7,1$. Gotoh und Finney [78] gaben eine mittlere Koordinationszahl von 6 für eine ungeordnete Packung mit $PD = 0,58$. Smith et al. [197] ermittelte mittlere Koordinationszahlen von $KZ = 6,92$ bis $9,51$ bei Packungsdichten von $0,553$ und $0,628$.

Bei Packungen, die mit dem Forced-Biased-Algorithmus simuliert oder beschriebenen Rekonstruktionsalgorithmus berechnet wurden, wird die Bestimmung der Koordination dadurch erschwert, dass die Kugeln in den Packungen nicht im direkten Kontakt zueinander stehen. Um dieses Problem zu umgehen, wird beispielsweise bei den aus der Simulation gewonnenen Packungen ein Toleranzparameter ϵ_K eingeführt [22]. Dabei werden alle Kugeln mit einem Abstand kleiner als ϵ_K als in direktem Kontakt betrachtet. In [22] wird ϵ_K als 1% des mittleren Radius festgelegt. Im Fall der gewonnen Kugelpackungen aus dem Rekonstruktionsalgorithmus nach [188] werden größere Werte für ϵ_K genutzt. Für die exemplarische Kugelpackung in Abb. 3.8b wurde eine mittlere Koordinationszahl von $6,0$ bei $\epsilon_K = 0,01$ des mittleren Kugelradius ermittelt und die Verteilung kann aus Abb. 3.9 entnommen werden.

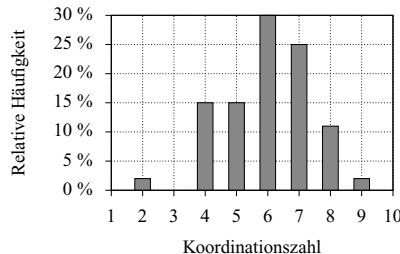


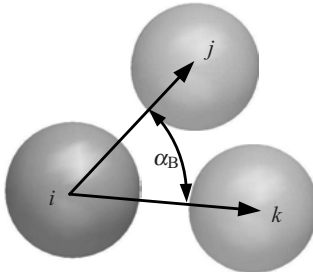
Abbildung 3.9: Histogramm der Koordinationszahl einer Kugelpackung mit 100 gleich großen Kugeln.

3.1.7.3 Bindungswinkel

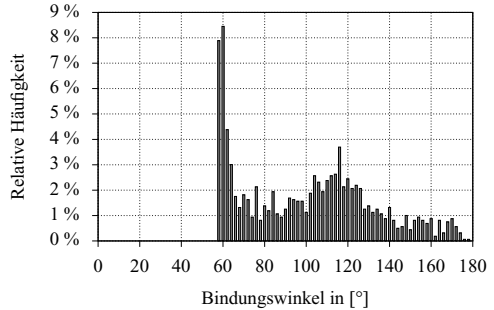
Eine in Physik und Chemie weit verbreitete und oft genutzte Methode zur Strukturcharakterisierung von Kugelpackungen bzw. atomaren Systemen ist die Betrachtung der Bindungswinkel, beispielhaft aufgeführt in [69, 117, 226]. Als Bindungswinkel wird der Winkel bezeichnet, der zwischen den Verbindungsvektoren einer Kugel und zwei ihrer Nachbarn aufgespannt wird. Abbildung 3.10a verdeutlicht die Bestimmung des Bindungswinkel α_B einer Kugel mit zwei benachbarten Kugeln j und k . Die Verteilung dieser Bindungswinkel reagiert merklich auf die Struktur der Kugelpackung: Während in einer ungeordneten Kugelpackung verschiedenste Winkel zwischen 0 und 180° vorkommen, treten bei kristallinen Strukturen jeweils nur gewisse Bindungswinkel auf. Die Winkelverteilung wird im Fall der kristallinen Anordnung diskret mit großen Werten bei

²bei 5% Durchmesserzuwachs

den für die jeweilige Kristallstruktur typischen Bindungswinkeln. So beschreibt die Verteilung der Bindungswinkel ein Maß für Ordnung einer Kugelpackung. Es treten beispielsweise bei der KP Anordnung nur 90° und 180° Winkel auf. Indessen sind es bei der HDP Anordnung überwiegend 60° und 120° . Es zeigen sich aber auch Winkel von 90° , $109,47^\circ$ und $146,44^\circ$.



(a) Schematische Darstellung



(b) Histogramm

Abbildung 3.10: Bindungswinkel: a) Schematische Darstellung eines Bindungswinkels α_B zwischen der Kugel i und ihren Nachbarn j und k , b) Histogramm des Bindungswinkels einer Kugelpackung mit 100 gleich großen Kugeln.

3.1.7.4 Paarkorrelation

Eine aus der Physik und räumlichen Statistik bekannte Kenngröße zur Beschreibung von Kugelpackungen ist die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$. Sie wird auch radiale Verteilungsfunktion genannt. Die Paarkorrelationsfunktion basiert auf der bekannten Größe zweiter Ordnung, der RIPLEYSchen $K(r)$ Funktion [176, 202]. Diese Funktionen werden zumeist auf Punktfelder angewandt. Da die Zentren der Kugeln als Punktprozess interpretiert werden können, wird diese Funktionen bezüglich der Kugelzentren bestimmt. Ist ρ_K die Intensität eines Punktprozesses, so kann die Größe $\rho_K K(r)$ als die mittlere Anzahl von Kugeln im Radius r um eine zufällige Kugel in der Packung angesehen werden. Die Paarkorrelationsfunktion ist definiert durch

$$g(r) = \frac{\partial K(r)}{\partial r} \frac{1}{nb_n r^{n-1}}, \quad r \geq 0. \quad (3.19)$$

Hierbei ist b_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel. Die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$ einer Kugelpackung beschreibt die Häufigkeit der Abstände von Kugelzentren in der Packung. Das heißt die Paarkorrelationsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zentren zweier Kugeln den Abstand r haben. Für unmögliche Zwischenachsabstände, bei Packungen mit gleich großen Kugeln ohne Überlappung entspricht dies für Abstände r kleiner als der Kugeldurchmesser D , gilt $g(r) = 0$. Der Abstand $\frac{r}{D} = 1$ wird auch als Hardcore-Abstand bezeichnet. An dieser Stelle weist die Paarkorrelationsfunktion für dichte Packungen harter Kugeln ein ausgebildetes Maximum auf. So lassen sich an der Form der Paarkorrelationsfunktion Veränderungen der Nahordnung in einem Kugelpackungssystem erkennen. Zudem findet man für Packungen mit kristalliner Struktur Maxima bei der Kristallstruktur typischen Abständen, beispielhaft bei HDP-Packung in den Abständen $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$, usw. Der Grad der Ausprägung dieser Maxima gibt Auskunft darüber, wie gut die

Ordnung der betrachteten Kugelpackung ist. Für $r \rightarrow \infty$ geht der Wert der Paarkorrelationsfunktion zu Eins. In Abb. 3.11a ist erkennbar, dass eine örtliche Nahordnung vorhanden ist. Erkennlich wird dies durch schwach ausgeprägte Maxima an den Stellen $r = \sqrt{3}$ und $r = 2$.

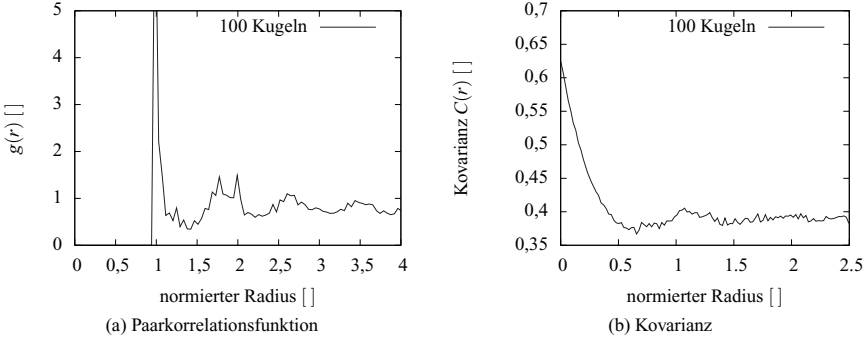


Abbildung 3.11: Kenngrößen: a) Paarkorrelationsfunktion und b) Kovarianz einer Kugelpackung mit 100 gleich großen Kugeln bei einer Dichte von $V_V = 0,62$.

3.1.7.5 Kovarianz

Eine weitere nennenswerte Kenngröße in der räumlichen Statistik ist die Kovarianz, oft auch als Zweipunktwahrscheinlichkeit bezeichnet [207]. Die Kovarianz $C(r)$ charakterisiert die Vereinigungsmenge aller Kugeln in einer Packung und beschreibt somit die Variabilität des Volumenanteils der Kugel in der Packung. $C(r)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass zwei Kugeln mit dem Abstand r in der Vereinigungsmenge aller Punkte liegen. Folgende Eigenschaften

$$C(0) = V_V \quad (3.20)$$

und

$$C(\infty) = V_V^2 \quad (3.21)$$

besitzt die Kovarianz. Weitere Eigenschaften können [98, 202] und [207] entnommen werden. Die Bestimmung der Kovarianz erfolgt in der Regel durch eine Schätzung mit Hilfe des MONTE-CARLO-Algorithmus. Die Abb. 3.11b zeigt den Verlauf der Kovarianz für die beispielhafte Kugelpackung (siehe Abb. 3.8b). Die Form der Schwankungen im Graph wird durch die jeweilige Radienverteilung in bi- bzw. polydispersen Kugelpackungen bestimmt und reflektiert bevorzugte lokale Anordnungen von Kugel in der Packung [134]. Bei monodispersen Kugelpackungen sind die Schwankungen am größten ausgeprägt [134, 207]. Weitere Parameter bzw. Kenngrößen zur Charakterisierung zufälliger Kugelpackungen können [57, 134] und [207] entnommen werden.

3.1.8 Geometrisches Volumenmodell

Die Modellierung der Hohlkugeln und auch der Elementarzellen geschieht in dieser Arbeit mit Hilfe von Computer Aided Design (CAD) Programmen, im Speziellen mit der kommerziellen Kontruktionsoftware ProEngineer®. Die Modellierung basiert auf den aufbereiteten Daten des Kugelpackungsprogramms SpherePack oder Kugelerkennungssoftware von Janina Schulz. Reguläre

Packungen werden direkt im CAD-Programm erstellt, es bedarf keinerlei Vorbereitungssoftware. In dieser Arbeit wird implizit nur auf Volumenmodelle eingegangen. Dies hat den Vorteil, dass Volumenüberschneidungen wie bei flächigen oder linienförmigen Tragwerken verhindert werden [43]. Als Nachteil wird ein höherer Modellierungsgrad und -aufwand in Kauf genommen.

3.1.8.1 Reguläres Modell

Für die parametrische Modellierung werden die Geometriegrößen des Hohlkugel-Mesomodells herangezogen. Dies sind im Einzelnen der Kugeldurchmesser D , der Sinterwinkel Φ bzw. Sinterstellenradius r und die Wanddicke t . Als reguläre Gitter werden die drei kubischen (KP, KRZ und KFZ) und hexagonale (HPD) Regelgitterstruktur genutzt. Aus diesen Vorgaben lässt sich für jede Gitteranordnung eine geometrische Elementar- bzw. Einheitszelle bilden, die sich periodisch zu einer unendlichen Struktur zusammenfügen lässt. Einen Überblick über die erstellten Elementarzellen zeigt die Abb. 3.12. Für die Weiterverarbeitung bzw. das Erstellen eines homogenen und

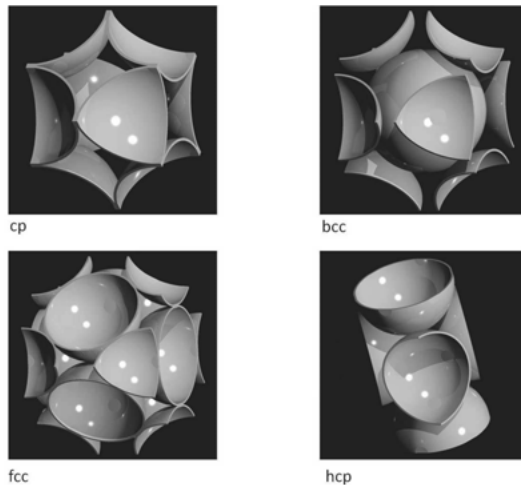


Abbildung 3.12: Überblick aller erstellten Elementarzellen.

strukturierten Finite-Element-Netzes ist eine Segmentierung der Geometrie notwendig.

3.1.8.2 Stochastisches Modell

Im Gegensatz zum regulären Modell ist beim stochastischen Modell eine gewisse Vorbereitung vor der Geometrieerzeugung im CAD-Programm erforderlich. Zu Beginn wird eine zufällige Kugelpackung mit dem Programm Spherpac erzeugt und die Daten, wie die Koordinaten der Kugelzentren und der Radius, in einer Textdatei an das Mathematikprogramm MATLAB[®] übergeben. Analog können auch Daten aus den rekonstruierten Kugelpackungen übergeben werden. Diese Vorbereitung ist notwendig, um eine stochastische und zugleich auch periodische Struktur zu erzeugen. Aus dem Kugelpackungsprogramm SpherePack erhält man jeweils die Kugelzentren mit entsprechenden Radien innerhalb eines definierten Volumens. Schneidet man entlang der Oberfläche des definierten Volumens, hier ein Würfel, erkennt man Fehlstellen bzw. eine nicht

periodische Struktur. Grund hierfür sind Segmente von Kugeln, die ihre Kugelzentren außerhalb des definierten Volumens haben und noch teilweise in das definierte Volumen ragen. Um dieses Problem zu lösen, wird eine weitere Schicht von Kugeln, die die Periodizität erfüllt, um das definierte Volumen gepackt und dann erst wieder an der Oberfläche des definierten Volumen geschnitten. Des Weiteren werden die Kugeln definiert vergrößert, so dass sich eine bestimmte Durchdringung bzw. im Falle der gesinterten Hohlkugel ein bestimmter Sinterwinkel einstellt. Zudem werden vorbestimmte Parameter übergeben, um eine konstante Wanddicke gemäß dem Hohlkugel-Mesomodell nach Abschnitt 3.1.4 zu gewährleisten. Damit diese Parameter sowie die Geometriedaten zügig, sicher und bequem übergeben werden können, wurde die Software SmartAssembly von der b&w software genutzt. Die Abb. 3.13 zeigt den kompletten CAE-Prozess für die Erstellung der Volumengeometrie bzw. der Simulation.

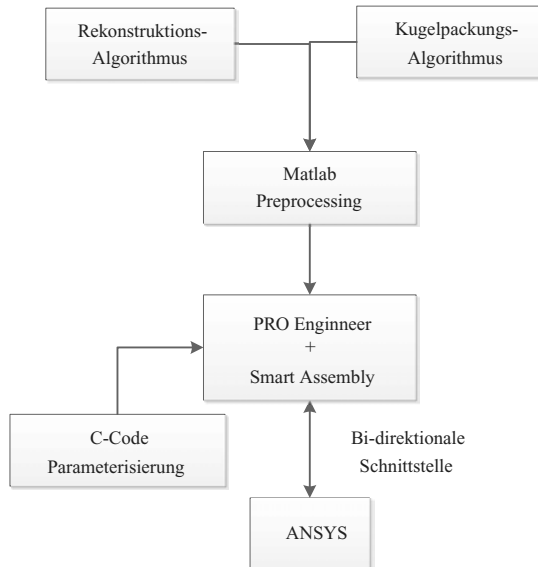


Abbildung 3.13: CAE-Prozess des stochastischen Modells

3.2 Elastizitätswerte

Dieser Abschnitt behandelt die Methoden zur Bestimmung der elastischen Materialkennwerte. Zum Anfang wird auf die Homogenisierung eingegangen, dann folgt die Charakterisierung der gewonnenen Materialkennwerte. Hierbei wird kurz ein Sonderfall der negativen Querkontraktion behandelt. Des Weiteren werden die Lastfälle zur Bestimmung der Kennwerte erläutert und die genaue Umsetzung dieser beschrieben.

3.2.1 Homogenisierung

Eine Möglichkeit zur Charakterisierung der Materialeigenschaften eines Bauteils mit zellularem Aufbau stellt die sogenannte Homogenisierung dar. Ziel der Homogenisierung ist es, ein effektives Materialverhalten eines homogenen Ersatzmediums zu finden, welches sich ähnlich verhält wie das zu untersuchende heterogene Medium. Dieser Homogenisierungsprozess über die Skalen wird durch eine geeignete Mittelwertbildung vollzogen [81, 43]. Eine klassische Homogenisierung kann auf zwei Arten durchgeführt werden. Entweder ist die Mikrostruktur periodisch und kann so durch ein Einheitszellenmodell angenähert werden. Oder das betrachtete Volumenelement (VE) ist so groß, dass es eine quasi-unendliche Anzahl von Mikrostrukturelementen (z.B. Körner, Einschlüsse, Kugeln, Inhomogenitäten) beinhaltet. Wird das betrachtete Volumenelement groß genug gewählt, kann die Probe als statistisch homogen angesehen werden [164]. Die Grundlagen der Homogenisierung für diese Arbeit werden in Anlehnung an [81, 43, 164] und [190] hergeleitet und zusammengefasst.

Bei der Anwendung der zuletzt erwähnten Homogenisierungsmethode wird vorausgesetzt, dass die charakteristische Größe der Heterogenität in einer Skala (beispielsweise Mikroebene) gegenüber der nächst höheren Skala (beispielsweise Mesoebene) so klein ist, dass sie nicht mehr wahrgenommen werden kann und somit das Material als homogen bezeichnet wird. Trifft dieser Fall zu, können drei Skalen, die Mikroskala als Skala der Körner des Vollmaterials, die Mesoskala als Skala der betrachteten Volumenelemente (VE) und die Makroskala als Größenordnung der Bauteile, aufgeteilt werden. Es gilt

$$d_{\text{mikro}} \ll \tilde{d} \ll d_{\text{makro}}, \quad (3.22)$$

wobei d der charakteristischen Länge der jeweiligen Skalaebene entspricht. Hierbei bezeichnet $(\tilde{\cdot})$ die Größe auf der Mesoebene, die auf der Mikrostruktur betrachtet wird. In der Literaturstelle [164] wird zur Erfüllung dieser Bedingung ein dimensionsloser Parameter

$$\delta_1 = \frac{\tilde{d}}{d_{\text{mikro}}} \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

eingeführt. Die Größe d_{mikro} beschreibt dabei die charakteristische Länge einzelner Körner, Einschlüsse und sonstiger Mikrostrukturelemente. Lassen sich die Skalen nach Gl. (3.22) bzw. (3.23) deutlich voneinander trennen, existiert ein repräsentatives Volumenelement (RVE) und das Homogenisierungsschema, wie in Abb. 3.14 dargestellt, kann angewendet werden. Ein Punkt der heterogenen Struktur kann durch zwei Koordinaten bezeichnet werden (Abb. 3.14). Zum einen mit der makroskopischen Koordinate $\mathbf{x}_{\text{makro}}$, die auch der Punkt im homogenen Ersatzmedium beschreibt, zum anderen mit der mesoskopischen Koordinate \mathbf{x}_{meso} , welche den Ort der Umgebung der Heterogenität beschreibt. So lässt sich mit Hilfe der Lokalisierungstensoren \mathbb{A} bzw. \mathbb{B} ein makroskopischer Verzerrungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}$ bzw. makroskopischer Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ auf die

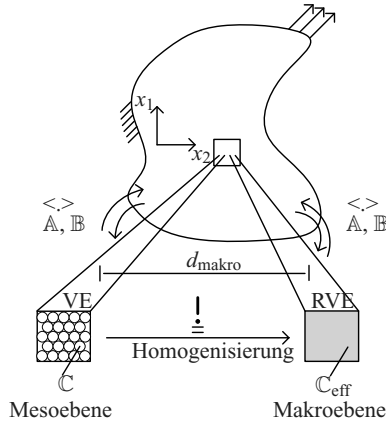


Abbildung 3.14: Schema der Homogenisierung mit charakteristischen Längen.

Mesoskala projizieren. Ein Herleitungsweg wird im Anhang B.1 vorgestellt. Zusammengefasst erhält man die HILL-Bedingung in folgender Form

$$0 = \frac{1}{V} \int_{\partial B} (\tilde{\mathbf{t}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \cdot \mathbf{n}) (\tilde{\mathbf{u}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \cdot \mathbf{x}) dA. \quad (3.24)$$

In dieser Form kann die HILL-Bedingung so interpretiert werden, dass die in einem heterogenen Material auf den Rand des Volumenelements fluktuierenden Verzerrungs- und Spannungsfelder im energetischen Sinne gleichwertig sind zu ihren Mittelwerten (Abb. 3.15). Um diese Randbedin-

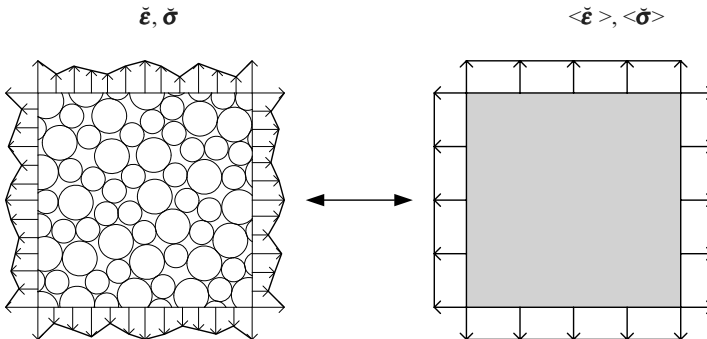


Abbildung 3.15: Auf den VE-Rand fluktuierende Mesofelder und ihre Mittelwerte.

gungen zu erfüllen, gibt es drei verschiedene Möglichkeiten [112]:

- Randbedingungen aus uniformen Verschiebungen $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^0 \cdot \mathbf{x}$, weil für die uniforme Verschiebungen

$$\boldsymbol{\epsilon} = \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^0 \rangle = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^0 \quad (3.25)$$

gilt und somit der Term in der zweiten Klammer in Gl. (B.20) zu Null wird. Die Randbedingungen aus dieser Klasse werden kinematisch uniforme Randbedingungen (KURB) genannt.

- Randbedingungen aus uniformen Spannungen $\check{\mathbf{t}} = \check{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{n}$, weil für die uniforme Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \check{\boldsymbol{\sigma}}^0 \rangle = \check{\boldsymbol{\sigma}}^0 \quad (3.26)$$

gilt und somit der Term in der ersten Klammer in Gl. (B.20) zu Null wird. Die Randbedingungen aus dieser Klasse werden statisch uniforme Randbedingungen (SURB) genannt.

- Periodische oder orthogonal gemischte Randbedingungen, bei der keine der beiden Klammern einzeln in Gl. (B.20) verschwindet, sondern die Bedingungen gemeinsam erfüllt. Bei dieser Klasse der Randbedingungen werden jeweils die gegenüberliegenden Seiten derart gekoppelt, dass sie sich äquivalent zueinander verhalten und somit eine Verformung eines quasi unendlich großen Volumens entsteht.

Für homogene Materialien ohne Mikro- bzw. Mesostruktur sind die drei verschiedenen Randbedingungen äquivalent zueinander. Dabei ruft ein uniformer Verzerrungszustand einen uniformen Spannungszustand und umgekehrt hervor. Wird zum Beispiel ein repräsentatives Volumelement (RVE) einer periodischen Struktur betrachtet, ist dies nicht mehr der Fall. So kann ein uniformer Spannungszustand eine Randverschiebung hervorrufen, die nicht konstant ist, oder ein uniformer Verzerrungszustand kann Spannungen im Inneren hervorrufen, die ebenfalls nicht konstant sind. Damit sind beide Zustände nicht ineinander überführbar. Diese beiden Zustände stellen eine untere bzw. obere Grenze der effektiven Materialeigenschaften dar [91] und können zur Abschätzung des Effektivwertes helfen.

Zieht man unter allen Verschiebungsrandbedingungen kinematisch zulässige Verzerrungsfelder in Betracht, so wird nach dem Prinzip der minimalen Energie das elastische Potential (A.66) am kleinsten, das den wahren Verzerrungen angehört [217]. Setzt man nach Voigt [216] ein uniformes Verzerrungsfeld $\check{\boldsymbol{\epsilon}}^0$ voraus, kann man den dazugehörigen Steifigkeitstensor \mathbb{C}^V bestimmen, der sich nach dem Extremalprinzip größer als die tatsächlichen Steifigkeitseigenschaften darstellt

$$\mathbb{C}_{\text{eff}} \leq \mathbb{C}^V = (\mathbb{S}^V)^{-1}. \quad (3.27)$$

Somit bildet dieser Steifigkeitstensor eine obere Schranke. Der zugehörige Lokalisierungstensor \mathbb{A} wird zum \mathbb{I} Tensor.

Betrachtet man nach Reuss [175] alle unter Spannungsbedingungen zulässigen Spannungsfelder und das Prinzip der Komplementärenergie, ergibt sich analog ein Nachgiebigkeitstensor \mathbb{S}^R , der größer ist als der wahre Nachgiebigkeitstensor. Er bildet deshalb ebenso eine Schranke:

$$\mathbb{S}_{\text{eff}} \leq \mathbb{S}^R = (\mathbb{C}^R)^{-1}. \quad (3.28)$$

Zusammengefasst erhält man die Schranken für die effektiven Materialeigenschaften

$$(\mathbb{S}^R)^{-1} \leq \mathbb{C}_{\text{eff}} \leq \mathbb{C}_V \quad \text{oder} \quad (\mathbb{C}^V)^{-1} \leq \mathbb{S}_{\text{eff}} \leq \mathbb{S}_R. \quad (3.29)$$

Weil die VOIGT- und REUSS-Schranken oftmals sehr weit auseinanderliegen, besteht ein pragmatischer Ansatz zur Bestimmung der effektiven Materialwerte unter der Verwendung ihres Mittelwerts [81] oder in anderen linearen Kombinationen [38, 35]. Aus vielen numerischen Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die periodische Randbedingung (PRB) das effizienteste Konvergenzverhalten mit zunehmender Größe des repräsentativen Volumelements (RVE) aufweist

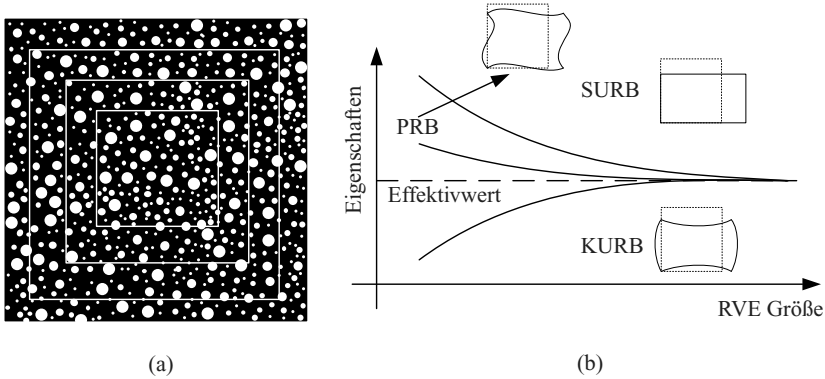


Abbildung 3.16: Veranschaulichung der Konvergenz mit der RVE-Größe nach [205]: a) Repräsentatives Volumenelement (RVE) mit unterschiedlicher Größe, b) Konvergenz der durchschnittlichen Eigenschaften mit zunehmender RVE Größe für unterschiedlichen Randbedingungstypen: SURB, KURB und periodische Randbedingungen

[109, 123, 205] (siehe Abb. 3.16). Dementsprechend erhält man mit den periodischen Randbedingungen (PRB) bei gleicher Größe des repräsentativen Volumenelements (RVE) einen Wert, der näher am Effektivwert liegt als bei SURB und KURB. Die VOIGT- und REUSS-Schranken haben trotz ihrer Nachteile infolge des unrealistischen homogenen Spannungs- bzw. Verzerrungsfeldes eine breite Verwendung gefunden. Die Vorteile liegen in ihrer einfachen Berechnung und in den qualitativen Aussagen zu den elastischen Eigenschaften.

3.2.2 Materialsymmetrie

Eine elementare Fragestellung bei der Untersuchung der Mesostrukturen (Hohlkugelmodelle) betrifft die Materialsymmetrie bzw. die Isotropie. Die Frage nach der Isotropie wurde in diversen Literaturen diskutiert und hierfür auch Maße eingeführt. So haben beispielsweise Benouali et al. [18] das Verhältnis $\frac{E_i}{E_j}$ zur Untersuchung der Abweichung von Elastizitätsmodulen in zwei verschiedenen Raumrichtungen i und j eingeführt, wobei der kleinere Elastizitätsmodul immer im Nenner steht. Im Gegensatz dazu führen Kanaun und Tkachenko [108] das Verhältnis $\frac{2(1+\nu)\bar{G}}{E}$ ein, das für den isotropen Fall (vgl. Tabelle A.2) gegen eins konvergiert. Ein weiteres Maß zur Beschreibung, inwieweit sich das mechanische Verhalten vom isotropen Fall unterscheidet, ist der Anisotropiefaktor [179]

$$A_{\text{aniso}} = \frac{2(S_{11} - S_{12})}{S_{44}}. \quad (3.30)$$

So ist bei einem Wert $A_{\text{aniso}} = 1$ das Material isotrop und bei $A_{\text{aniso}} > 1$ oder $A_{\text{aniso}} < 1$ anisotrop. Eine weitere Methode zur Untersuchung auf Symmetrie ist es, die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitstensoren (\mathbb{C} und \mathbb{S}) selbst zu betrachten und mittels ihrer Einträge auf Symmetrien zu schließen. Eine mit dem Auge gut erkennbare Methode zur Überprüfung der Symmetrie stellen die Elastizitätsmodulkörper dar [179]. Diese grafische Methode zur Darstellung der beiden Materialtensoren kann [25] und [145] entnommen werden. Dabei wird die Steifigkeit bzw. die Nachgiebigkeit in alle Raumrichtungen \mathbf{d} über nacheinander in diese Raumrichtung virtuell durchgeführte Zugversuche abgebildet. So ergibt sich für folgende Projektionsformel für den Elastizitätsmodul

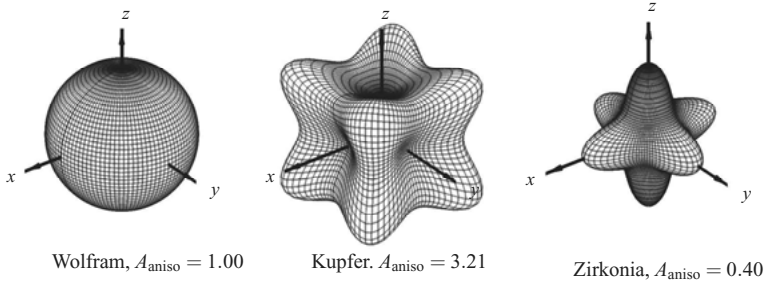


Abbildung 3.17: Elastizitätsmodulkörper: Richtungsabhängigkeit der Elastizitätsmoduln einiger Werkstoffe [145, 179]. In jede Raumrichtung gibt der Abstand der Oberfläche vom Koordinatenursprung die Größe des Elastizitätsmoduls an.

nach [25]

$$\frac{1}{E(\mathbf{d})} = \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \cdot \mathbb{S} \cdot \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (3.31)$$

Die jeweilige Form der entstehenden Oberfläche, auch Elastizitätsmodulkörper genannt, bzw. ihre Symmetrie entscheidet über ihre jeweilige Materialsymmetrie (vgl. Abb. A.1).

Abbildung 3.17 zeigt exemplarisch drei Werkstoffe mit unterschiedlichen Materialverhalten. Der Elastizitätsmodulkörper des Schwermetalls Wolfram stellt dabei eine ideale Kugel dar. Aus der kugelförmigen Oberfläche wird ersichtlich, dass der Elastizitätsmodul richtungsunabhängig ist und somit der Isotropie entspricht. Ein deutlich anderes Verhalten weist das Buntmetall Kupfer auf. Schon mit Hilfe des Anisotropiefaktors kann eine deutliche Anisotropie erkannt werden, jedoch nicht auf die Symmetrieebenen zurückgeschlossen werden. Mit Hilfe des Elastizitätsmodulkörpers wird ersichtlich, dass der Elastizitätsmodul in Raumdiagonalenrichtung wesentlich größer als in Achsenrichtung ist. Zudem lässt sich eine kubische Symmetrie erkennen. Ein invertiertes Verhalten des richtungsabhängigen Elastizitätsmoduls zeigt im Gegensatz die mineralische Keramik Zirkonia. Der maximale Elastizitätsmodul wird in Achsenrichtung erreicht. Jedoch hat Zirkonia wie auch Kupfer kubische Symmetrie.

Betrachtet man die anderen Materialparameter, wie Schubmodul, Kompressionsmodul und Querkontraktion in Abhängigkeit der Raumrichtung, ergeben sich mit Hilfe der Projektionsformeln [25]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G(\mathbf{d}, \mathbf{n})} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{d}) \cdot \mathbb{S} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{d}), \\ \frac{\nu(\mathbf{d}, \mathbf{n})}{E(\mathbf{d})} &= -\mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \cdot \mathbb{S} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \text{und} \\ \frac{1}{E(\mathbf{d})} &= \mathbf{I} \cdot \mathbb{S} \cdot \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.32)$$

die gleichen Ergebnisse. Dabei ist zu beachten, dass der Schubmodul und die Querkontraktionszahl vom Normalenvektor \mathbf{n} der betrachteten Grundfläche abhängen. Deren Orientierung ist wiederum

an die Raumrichtung \mathbf{d} geknüpft.

3.2.3 Negative Querkontraktion

In mehreren Variationsberechnungen traten bei kleinen Verhältnissen von Wanddicken zu Durchmesser für die makroskopische Querkontraktionszahlen negative Werte auf. Dieser Effekt kann gut an Metallschäumen mit Hinterschnitten veranschaulicht werden [121]. Abbildung 3.18 zeigt exemplarisch die Verformung einer Zelle mit Hinterschnitt, die sich unter Belastung anders als gewöhnliche Werkstoffe verformen würde. Dies führt bei einer Zugbelastung zu einer Ausdehnung

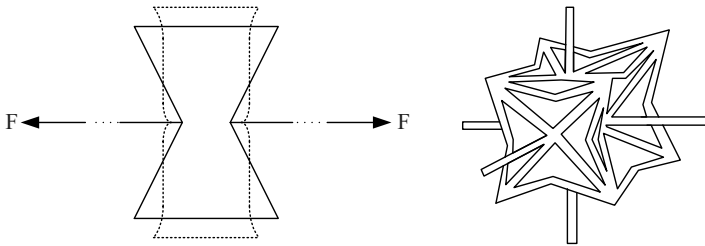


Abbildung 3.18: Metallschaumzellen mit Hinterschnitt nach [121].

in Querrichtung. Bei Metallschäumen kann der Bereich der Querkontraktionszahlen im Bereich von -0,7 bis 0,5 liegen [95, 94]. Bei syntaktischen und verklebten Hohlkugelstrukturen wurde ein Bereich der Querkontraktionszahlen von -0,3 bis 0,4 beobachtet [72, 183, 203]. Nach Pasternak und Dyskin [168, 167, 194] können sich Extremwerte für Hohlkugelstrukturen mit hexagonaler Anordnung und sehr dünnen Wanddicken mit bis zu -1 einstellen. Selbst bei kubisch elementaren Metallen können sich negative Querkontraktionen einstellen [16].

3.2.4 Lastfälle

Zur Bestimmung des Materialverhaltens und der im Grundlagenkapitel 2 eingeführten Materialparametern wie Elastizitätsmodul E , Schubmodul G , Kompressionsmodul K oder der Querkontraktionszahl ν , werden gemäß der zuvor vorgestellten Methodik Lastfälle definiert, mit denen die 21 Unbekannten der Materialtensoren berechnet werden können. Hierfür werden pro Randbedingungsart sechs Lastfälle benötigt. Ein siebter Lastfall, wie z.B. der zur Ermittlung des Kompressionsmoduls K , kann zur Überprüfung herangezogen werden. Ähnliche Vorgehensweisen können [108, 112, 183, 190] und [199] entnommen werden.

Die einfachste Vorgehensweise zur Ermittlung der Unbekannten ist es, sechs Lastfälle zu erzeugen, in denen nur ein Eintrag mit dem Betrag eins im Spannungs- bzw. Verzerrungsvektor der Gl. (A.68) entsteht. Dabei sind alle anderen Einträge gleich Null gesetzt. Diese Lastfälle für Verzerrungen sind repräsentativ für ein homogenes Material in Abb. 3.19 dargestellt, wobei bei der linear elastischen und geometrisch linearen Berechnung der elastischen Materialparameter zwischen Zug- und Druckverhalten nicht zu unterscheiden ist. Wird das zu untersuchende Volumenelement oder die zu untersuchende Elementarzelle mittels einer dieser Fälle belastet, können durch Messen der entsprechenden Einträge des Ergebnisfeldes eine Spalte der zugehörigen Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix \mathbb{C} bzw. \mathbb{S} bestimmt werden. Nachfolgend ist dies beispielhaft für den 11-Lastfall aufgeführt (SURB oder bei periodischer Randbedingung mit uniformer und homogenisier-

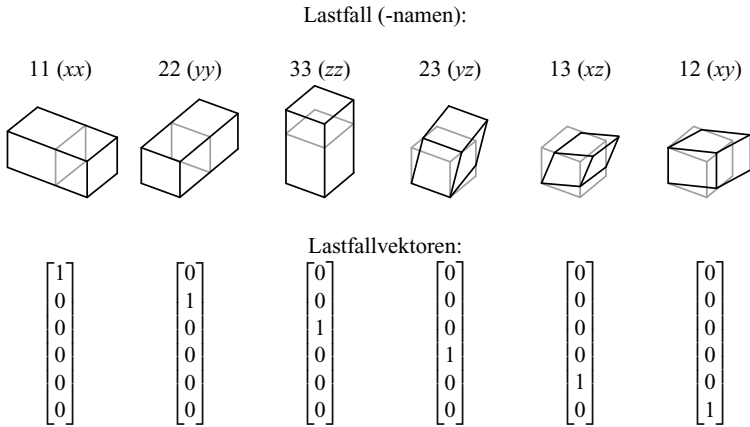


Abbildung 3.19: Sechs Grundlastfälle zur Bestimmung der Materialkonstanten nach [190].

ter Spannung)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} S_{ijkl} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} \\ S_{2211} \\ S_{3311} \\ S_{2311} \\ S_{1311} \\ S_{1211} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

3.2.5 Periodische Randbedingungen

Mit den gewonnen Erkenntnissen aus den zuvor behandelten Abschnitten lassen sich Volumenelemente bilden, die einen regelmäßigen oder periodisch stochastischen Strukturaufbau aufweisen. Mit Hilfe der Homogenisierung versucht man einen durchschnittlichen Wert zu bestimmen, der möglichst nahe am Effektivwert einer realen Struktur liegt. Es hat sich gezeigt, dass periodische Randbedingungen diesem Effektivwert bei gleicher Größe der Elementarzelle näher kommen als bei anderen Randbedingungen [43, 205]. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit näher auf diese Form der Randbedingung eingegangen. Es wird zuerst allgemein im zweidimensionalen und dreidimensionalen Raum und danach speziell auf die Anforderung der Finite-Element-Modellierung eingegangen.

Im Folgenden wird die Formulierung einer periodischen Randbedingung für das Verschiebungsfeld am Rand einer rechteckigen Einheitszelle beschrieben. Abbildung 3.20 zeigt die undeformierte und deformierte Struktur einer rechteckigen zweidimensionalen Elementarzelle. Der Rand der rechteckigen Elementarzelle besteht aus vier Kanten, die mit N, O, S und W bezeichnet werden, sowie vier Eckpunkten, markiert und abgekürzt mit NO, NW, SO und SW. Die Namensgebung orientiert sich an den Himmelsrichtungen Nord, Süd, Ost und West.

Bei der Definition der Randbedingungen ist zu beachten, dass Starrkörperbewegungen unterbunden werden. Im Fall der Abb. 3.20 ist die Translations- und Rotationsbewegung durch das Festlager am Eckpunkt SW und das Loslager am Eckpunkt SO beschränkt. Kurz gesagt, es ist eine statisch bestimmte Lagerung zu erreichen. Bei der Lagerung muss des Weiteren darauf geachtet werden, dass die Bedingung der geometrischen Periodizität, wie beispielsweise Dehnung

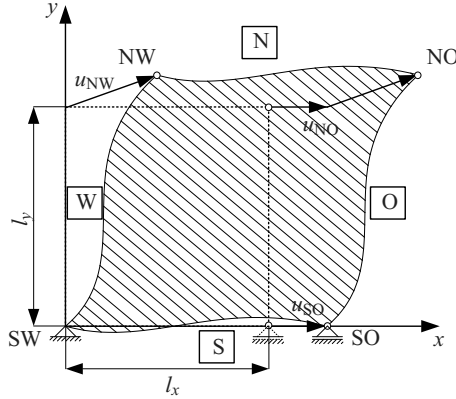


Abbildung 3.20: Idealisierte zweidimensionale Elementarzelle nach [43].

und Stauchung im Zug-, Druck- und Schubfall, nicht verletzt werden. Es ist zweckmäßig, diese globalen Deformationsfälle auf ausgewählte Verschiebungskomponenten von bestimmten Finite-Element-Knoten an den Ecken des Modells zu beziehen. Diese Knoten werden auch Masterknoten genannt. Die Knoten NW und SO in der Abb. 3.20 stellen Masterknoten dar und ihr Beitrag zum Deformationsfeld der Elementarzelle ist durch Pfeile angedeutet.

Zur Aufrechterhaltung der geometrischen Periodizität im deformierten Zustand einer rechteckigen Elementarzelle sind die Verschiebungen der gegenüberliegenden Begrenzungskanten zu koppeln. Die Freiheitsgrade (FG) einer dieser gekoppelten Kanten bleiben ungezwungen. Diese Freiheitsgrade sind die sogenannten Master-Freiheitsgrade. Die Knoten auf der gegenüberliegenden Seite, dem Slave-Rand der Elementarzelle, haben Partner-Knoten auf der Master-Kante und sind mit den Master-Knoten hinsichtlich ihrer Verschiebung in x und y -Richtung gekoppelt. Darüber hinaus wird ein zusätzlicher Verschiebungsvektor überlagert. Er beruht auf dem Verschiebungsbereich der Slave-Knoten. Dieser Verschiebungsvektor bezieht sich auf die makroskopischen Freiheitsgrade der Elementarzelle. In der idealisierten Elementarzelle aus Abb. 3.20 sind jeweils die Verschiebungsvektoren für die Kanten N und O gegeben durch $\mathbf{u}_{NW} = [u_{NW} \ v_{NW}]^T$ und $\mathbf{u}_{SO} = [u_{SO} \ 0]^T$. Die Komponenten dieser Verschiebungsvektoren werden auf den makroskopischen Verzerrungstensor bezogen, der durch den Vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]^T$ mit seinen Komponenten

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_{SO}}{l_x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{u_{NW}}{l_y}, \quad \text{und} \quad \gamma_{xy} = \frac{u_{NW}}{l_y} \quad (3.34)$$

beschrieben werden kann. Zu beachten ist, dass die Verschiebung an Ecken nicht die einzig mögliche Master- und Slave-Einheit bildet. Alle geeigneten Freiheitsgrade in einem Finite-Elemente-Modell können als eine Master- und Slave-Einheit verwendet werden. Sonst würde ein automatisches Generierungsschema für die periodischen Randbedingungen scheitern, sobald sich keine Finite-Element-Knoten in den Ecken der Elementarzelle befinden.

Die Kopplungsbedingungen müssen getrennt für Slave-Kantenknoten und Slave-Eckknoten definiert werden. Im aufgeführten zweidimensionalen Beispiel sind die Verschiebungen des Eckknotens völlig festgehalten zur Verhinderung der Starrkörpertranslation. Die vertikale Verschiebung des Eckknotens SO ist unterbunden, um eine Starrkörperrotation der Elementarzelle zu unterdrücken. Der horizontale Freiheitsgrad der Eckknoten SO bezieht sich auf die makroskopische

Normaldehnung in x -Richtung. Die horizontale und vertikale Verschiebung des Knoten NW definiert die makroskopische Schubdehnung und die makroskopische Normaldehnung in y -Richtung. Die Master-Kanten S und W bleiben ungezwungen. Dagegen werden die Verschiebungen der Slave-Kanten N und O über die Kopplungsgleichungen

$$\mathbf{u}_O(y) = \mathbf{u}_W(y) + \mathbf{u}_{SO} \quad (3.35)$$

und

$$\mathbf{u}_N(x) = \mathbf{u}_S(x) + \mathbf{u}_{NW} \quad (3.36)$$

vorgegeben. Der Verschiebungsvektor des Eckknotens NO ist eine Linearkombination aus den Verschiebungsvektoren \mathbf{u}_{NW} und \mathbf{u}_{SO} der zwei Masterknoten NW und SO

$$\mathbf{u}_{NO} = \mathbf{u}_{NW} + \mathbf{u}_{SO}. \quad (3.37)$$

Bei Linien- und Flächentragwerkselementen, wie Balken und Schalenelementen, in der Finiten-Elemente-Methode ist zu beachten, dass es einen weiteren Freiheitsgrad der Rotation an den Knoten gibt. Um weiterhin die geometrische Periodizität zu erfüllen, werden weitere Kopplungsgleichungen benötigt. Im Falle einer rechteckigen zweidimensionalen Elementarzelle sind die Rotationswinkel an den Ecken identisch

$$\varphi_{NO} = \varphi_{NW} = \varphi_{SO} = \varphi_{SW}. \quad (3.38)$$

Dabei agiert der Freiheitsgrad φ_{SW} als Master-Freiheitsgrad für den Rotations-Freiheitsgrad in den vier Ecken der Elementarzelle. Die Rotations-Freiheitsgrade der gegenüberliegenden Kanten müssen wie folgt

$$\varphi_W(y) = \varphi_O(y) \quad \text{und} \quad \varphi_N(x) = \varphi_S(x) \quad (3.39)$$

gekoppelt sein. Da die Verschiebungen aller Knoten entlang der Slave-Kanten am Rand der Elementarzelle an einzelne Master-Freiheitsgrade gekoppelt werden, wirken die von außen aufgebrachten Kräfte auf diese Master-Freiheitsgrade über die ganze Kante verteilt, die der Master-Freiheitsgradbewegung folgt. Dies bedeutet, dass die aufsummierten Oberflächenspannungen entlang der Slave-Kante der resultierenden Kraft auf die Master-Freiheitsgrade entspricht. Dementsprechend bringen die Reaktionskräfte an den Lagerstellen die Elementarzelle in ein statisches Gleichgewicht und entsprechen der Summe der Oberflächenspannungsvektoren an den Master-Kanten.

So reagiert das Elementarzellenmodell auf konzentrierte Lasten, die auf die Master-Freiheitsgrade wirken, wie eine infinite periodische Struktur auf eine homogenisierend angewendete Spannung reagieren würde [196, 43]. Daraus können ähnlich wie in Gl. (3.21) folgende Beziehungen

$$\sigma_{xx} = \frac{H_{SO}}{l_y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{H_{NW}}{l_x}, \quad \text{und} \quad \sigma_{xy} = \frac{H_{NW}}{l_x} \quad (3.40)$$

zwischen der homogenisierten Spannung $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \rangle$ und konzentrierten Knotenkräften (Kraft pro Elementdicke) H und V formuliert werden.

Das bisher beschriebene Schema kann auf eine dreidimensionale Elementarzelle erweitert werden. Abbildung 3.21 zeigt Namenskonventionen zur Identifizierung der Ecken, Kanten und Flächen einer kubischen Elementarzelle. Hierfür werden zusätzlich zwei weitere Bezeichner Deckel und Boden eingeführt zur Beschreibung der dritten Raumrichtung. Dabei bezeichnen Abkürzungen mit drei Buchstaben Eckpunkte, jene mit zwei Buchstaben beschreiben Kanten und einzelne Buchstaben stehen für Flächen. Abbildung 3.21b zeigt eine kubische dreidimensionale Elementarzelle im

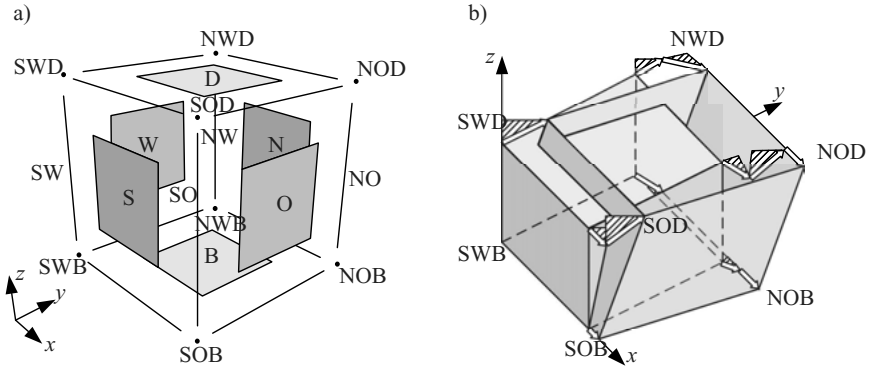


Abbildung 3.21: Dreidimensionale Elementarzelle nach [43]: a) vorgegebene Bezeichnung für die Knotensätze einer kubischen Elementarzelle und b) allgemeiner Deformationszustand eines Einheitswürfels.

Zustand einer allgemein makroskopischen Deformation mit drei Normal- und Schubverformungs-freiheitsgraden. So kann beispielweise die komplexe Zwangsbedingung in Bezug auf die Anzahl der unabhängig beteiligten Freiheitsgrade für die x -Verschiebung u_{NOD} der Ecke NOD bestimmt werden

$$u_{NOD} = u_{SOB} + u_{NWB} + u_{SWD}. \quad (3.41)$$

Die Bestimmung der Verschiebung bzw. Verzerrungen der Kanten, Eckkanten und Flächen erfolgen analog dem zuvor beschriebenen Beispiel einer zweidimensionalen rechteckigen Elementarzelle. Die Umsetzung der periodischen Randbedingungen in einem Finite-Elemente-Code wird im Anhang B.2 vorgestellt.

3.3 Schwingungsanalyse

Die Schwingungsanalyse erfasst und untersucht auftretende Schwingungen nach Art und Ausmaß. Eine besondere Form der Schwingungsanalyse stellt die Modalanalyse dar. Sie ist ein Verfahren zur Beschreibung der natürlichen dynamischen Eigenschaften wie Eigenfrequenzen, Dämpfungen und Schwingungs-Eigenformen einer Struktur. Zur Ermittlung dieser Parameter können sowohl rechnerische als auch experimentelle Methoden eingesetzt werden. Bei beiden rechnerisch aufgeführten Verfahren wird die reale Struktur auf ein idealisiertes lineares mathematisches Modell zurückgeführt [114, 220].

Mit dem ersten CAUCHY-EULERSchen Bewegungsgesetz (A.36) ergibt sich die allgemeine Bewegungsgleichung mit einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}^m - k_v \dot{\mathbf{u}} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^m(t), \quad (3.42)$$

wobei k_v einen Dämpfungskoeffizienten darstellt. $\mathbf{f}^m(t)$ ist der zeitlich abhängige Massenlastvektor.

Das Eigenschwingproblem von Platten kann entweder mit partiellen Differentialgleichungen oder mit Hilfe der Energiefunktionen aus Abschnitt 2.2 gelöst werden. Beide Lösungsstrategien versuchen, analytische und numerische Standardverfahren zu nutzen. Zu den verfügbaren Verfahren

gehören die Finite-Elemente-Methode (FEM), die Finite-Differenzen-Methode, die Randwert-Element-Methode, die Differential-Quadrature-Methode, die GALERKINSche Methode und die RITZsche Methode [132]. Jedoch ist dem Autor nicht bekannt, dass sich alle 21 möglichen Lastfälle für eine Rechteckplatte, insbesondere für den Fall mit vier freien Rändern, geschlossen analytisch berechnen lassen. In dieser Arbeit wird das RITZsche Verfahren wegen seiner einfachen numerischen Umsetzung verwendet. Des Weiteren werden die gewonnenen Ergebnisse mittels eines kommerziellen FEM-Programms auf Plausibilität geprüft.

3.3.1 Numerische Modalanalyse

In der FEM ergibt sich die Bewegungsgleichung nach der Diskretisierung zu folgender Eigenwertgleichung in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{\text{damp}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}(t), \quad (3.43)$$

wobei \mathbf{u} den Verschiebungsvektor, \mathbf{M} die Massenmatrix, \mathbf{C} die Dämpfungsmatrix, \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{f}(t)$ den zeitlich abhängigen Lastvektor darstellt. Für eine freie Eigenschwingung ist der Lastvektor $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$, es entsteht eine homogene Differentialgleichung. Da die Lastfunktionen oft nicht genau bekannt sind und auch die Vorgabe von Dämpfungswerten schwierig ist, werden sehr häufig anstelle transienter Berechnungen nur dämpfungsfreie Eigenfrequenzberechnungen durchgeführt. Ziel ist es, eine Struktur so abzustimmen, dass ihre Eigenfrequenzen nicht mit den Lastfrequenzen zusammenfallen und so dynamische Einflüsse reduziert oder gar ausgeschaltet werden. Die Eigenfrequenzen bzw. -formen ergeben sich aus den Eigenwerten bzw. -vektoren der Gleichung.

3.3.2 RITZsches Verfahren

Das RITZsche Näherungsverfahren stellt die verallgemeinerte Version der RAYLEIGH-Methode dar. Die RAYLEIGH-Methode basiert auf dem Prinzip, dass bei Eigenschwingungen ein völliger Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie ohne Dissipationseffekte stattfindet. Somit beruht das RAYLEIGH-Verfahren auf der schwachen Formulierung des Eigenwertproblems. Mit einer Testfunktion für die Schwingungsformen, die die geometrischen Randbedingungen erfüllt und unter der Annahme einer harmonischen Schwingung ergeben sich die Eigenschwingungsfrequenzen. Die daraus resultierenden Eigenfrequenzen stellen eine obere Schranke dar, es sei denn, die exakte Eigenfunktion der freien Schwingung wird als Testfunktion angenommen.

Ritz verallgemeinerte das RAYLEIGH-Verfahren durch die Annahme einer Reihe von zulässigen Testfunktionen, die jeweils unabhängige Amplitudenkoeffizienten haben [177]. Er zeigte dabei, dass eine engere obere Schranke für die Eigenfrequenzen, durch die Minimierung des Energiefunktionals in Bezug auf die Koeffizienten erreicht werden kann. Ritz demonstrierte seine Methode für eine völlig lagerungsfreien quadratische Platte, für die es keine exakt analytische Lösung gibt [132].

In dieser Arbeit wird das RITZsche Verfahren zur Eigenschwingungsanalyse von MINDLIN-Platten angewendet. Bei der RITZschen Methode nähert man die Verschiebungsfunktion $R(x, y)$ durch eine endliche Anzahl von Linearkombination der Form

$$R(x, y) = \sum c_i \phi_i(x, y) \quad (3.44)$$

an, wobei $\phi_i(x, y)$ die Näherungsfunktionen sind, die die individuellen geometrischen Randbedingungen erfüllen. Die unbekannten Koeffizienten c_i werden durch das Extrema des Energiefunktional (Gl. A.88)

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial c_i} = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.45)$$

bestimmt, welches einen Satz homogener Gleichungen, ausgedrückt durch die Terme mit den Koeffizienten c_i , nach sich zieht. Somit lässt sich das Problem auf folgendes Eigenwert- und Eigenvektorproblem reduzieren:

$$(\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (3.46)$$

dabei ist \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix. Diese definiert sich durch

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{c}} \quad (3.47)$$

und die Massenmatrix \mathbf{M} wird beschrieben durch

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{c}}. \quad (3.48)$$

Gemäß dem RITZschen Verfahren gelangt man zur exakten Lösung bei der Grenzwertbetrachtung $m \rightarrow \infty$ der Gl. (3.45), wenn das System der gewählten Testfunktionen folgende Bedingungen erfüllt:

- die Funktionen $\phi_i(x, y)$ sind linear unabhängig,
- die Funktionen $\phi_i(x, y)$ bilden ein komplettes System von Gleichungen,
- die Funktionen $\phi_i(x, y)$ erfüllen die kinematischen Randbedingungen.

Es ist nicht notwendig, dass die gewählten Testfunktionen den statischen Randbedingungen genügen. Allerdings erwiesen sich diese Testfunktionen bei manchen Berechnungen als effizienter. Es ist unmöglich bzw. unpraktisch, einen unendlichen Wert von m anzunehmen. So werden in der Regel Konvergenzstudien durchgeführt, um mit endlichen Werten von m die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Die Genauigkeit und die Geschwindigkeit der Konvergenz des RITZschen Verfahrens hängen von der Wahl und der Anzahl der Testfunktionen ab, die das Verschiebungsfeld repräsentieren. Es muss wie bei vielen Näherungsverfahren ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit eingegangen werden. Im Allgemeinen liefert dieses Verfahren genaue Eigenwerte mit einer hinreichenden Anzahl von Testfunktionen.

Die wahrscheinlich am häufigsten verwendeten Testfunktionen sind Produkte aus Eigenfunktionen von Balkenschwingungen [177, 130, 42], Spline-Funktionen [148] und balkenähnliche orthogonale Polynome [23, 24, 49]. Weitere RITZsche Funktionen können Leissa [131] entnommen werden. Viele intensive Untersuchungen konzentrieren sich auf die Verwendung von zweidimensionalen Polynomen [24, 124], die entsprechenden Basisfunktionen für die Schwingungsanalyse von Platten zugeordnet werden können. Die Verwendung der letztgenannten Testfunktionen ermöglicht eine Automatisierung der RITZ-Methode für Platten mit allgemeiner Form und allgemeinen Randbedingungen. Zudem erhöht sich die Rechengenauigkeit, da sich Polynome rechnerisch gut differenzieren und integrieren lassen [132].

In dieser Arbeit werden völlig freischwingende Platten untersucht. Aus diesem Grund werden nur auf die Randbedingungen freie Ränder eingegangen. Eine derartige Randbedingung bedeutet, dass die Ränder querkraft- und momentfrei sind. Beschreibt man diese Randbedingungen für

einen beliebig gekrümmten Rand mit den lokalen Randkoordinaten ξ, η , erhält man für den Rand folgende Bedingungen [6]

$$\begin{aligned} m_{\xi, \xi} &= D_{Pl} (\psi_{\xi, \xi} + \nu \psi_{\eta, \eta}) = 0, \\ m_{\xi, \eta} &= D_{Pl} \frac{1 - \nu}{2} (\psi_{\eta, \xi} + \nu \psi_{\xi, \eta}) = 0, \\ q_{\xi} &= Gh\kappa (\psi_{\xi} + w_{, \xi}) = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Das weitere und detaillierte Vorgehen der RITZ-Methode nach Liew [132] kann dem Anhang entnommen werden. Die spezielle Methode wird auch als pb2-RITZ-Methode bezeichnet. Der Buchstabe p bezeichnet die Verwendung von Polynomen. Der Buchstabe b steht für Basisfunktionen. Die 2 deutet auf eine zweidimensionale Betrachtung hin. Die Implementierung des Algorithmus erfolgt in dem Computeralgebra Programm Maple.

3.3.3 Experimentelle Modalanalyse

Die experimentelle Modalanalyse ist ein rechnergestütztes Verfahren. Anhand der experimentellen Modalanalyse ist es möglich eine schwingungsfähige Struktur mit unendlich vielen Freiheitsgraden durch ein diskretes System mit Massenpunkten, Koppelsteifigkeiten und Dämpfungen zu beschreiben. Ziel ist, mit Hilfe von geeigneten Messungen der experimentellen Modalanalyse die Parameter der modellhaften Systemstruktur zu bestimmen. Hierzu wird der zu bestimmende Probenkörper durch breitbandige Anregung in Schwingungen versetzt. Um eine experimentelle Modalanalyse an einem Probekörper durchführen zu können, ist eine weit umfangreichere Ausrüstung als bei der numerischen Modalanalyse erforderlich. Neben dem Messkörper wird eine messtechnische Ausrüstung benötigt. Sie besteht in der Regel aus einem Impulshammer (in der passenden Gewichtsklasse und mit passendem Kopfmaterial), einem oder mehreren Beschleunigungs- bzw. Wegaufnehmern sowie einem mehrkanaligen Aufzeichnungsgerät für die Signale und einem Rechner mit entsprechender Auswertungssoftware. Der Impulshammer spielt eine zentrale Rolle. So beeinflusst die Härte der Impulshammerspitze die dadurch generierte Frequenz der Struktur entscheidend. Neben der Impulshammer-Methode stellt die Shakeranregung eine weitere Möglichkeit der experimentellen Modalanalyse dar. Hier werden die Eigenschaften der Struktur anhand einer Shakeranregung mit einem Signalgenerator in einem definierten Frequenzbereich ermittelt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Impulshammer-Methode zur Strukturuntersuchung angewandt. Anstatt den üblichen Beschleunigungs- bzw. Wegaufnehmern wird ein vorhandener Festlaser genutzt.

Die experimentelle Bestimmung der modalen Parameter erfolgt mit Hilfe des Übertragungsverhaltens der Struktur. Hierzu wird die zu untersuchende Struktur durch breitbandige Anregung mittels Impulshammer in Vibration versetzt. Die Systemantwort wird an verschiedenen Stützstellen der Strukturoberfläche gemessen. Die ermittelten Messwertpaare, wie z. B. Reaktionskraft des Impulshammers und Beschleunigung der Struktur, werden aufeinander bezogen. Sie bilden so die Übertragungsfunktion. Aus den ermittelten Übertragungsfunktionen können die modalen Parameter bestimmt werden. Zur Lösung dieser Aufgabe wurde eine Vielzahl unterschiedlicher Rechen- und Auswertverfahren entwickelt. Die gebräuchlichsten sind die Mehrfreiheitsgradauswertung (Multi Degree of Freedom, MDOF-Methode) und die Einfreiheitsgradauswertung (Single Degree of Freedom, SDOF-Methode). Bei der letzteren wird die Gesamtantwort eines Systems in einem bestimmten Frequenzintervall um eine Resonanzstelle als Antwort eines Schwingers mit einem Freiheitsgrad betrachtet. Aus den gemessenen Transferfunktionen werden rechnerisch über Curve-Fit-Algorithmen die Eigenfrequenzen, die zugehörigen Dämpfungen und die Eigenformen ermittelt. Abbildung 3.22 zeigt den Ablauf der Impulshammer-Methode.

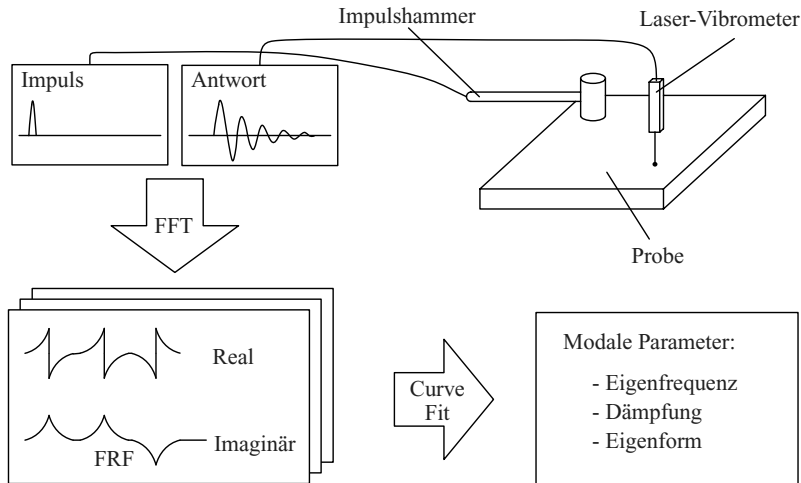


Abbildung 3.22: Impulshammer-Methode: Ablauf der Messung.

3.3.3.1 Versuchsaufbau und Messtechnik

Die Messung sollte mittels einer entkoppelten und steifen Versuchskonstruktion erfolgen, um mögliche Fehler durch Erschütterungen bzw. Eigenschwingungen des Versuchsaufbaus zu vermeiden. Es wird eine Vorrichtung benötigt, an welcher der Festlager in vertikaler Richtung befestigt werden kann. Da eine frei gelagerte Probe nicht realisiert werden kann, wird ein Gestell aus Aluminiumprofilen verwendet. An diesem Gestell werden Gummiseile befestigt und die Probe wurde auf diese Gummiseile gelegt. Alternativ wurde eine besonders weiche Schaumstoffunterlage, auf der das Probenmaterial platziert wird, als Lagerungsform genutzt. Es zeigten sich keine nennenswerten Unterschiede zwischen den beiden Lagerungsformen. Beide können annähernd als frei-frei gelagert betrachtet werden. Somit konnten die Proben mit einem geringen Lagereinfluss der Schwingungsuntersuchung unterzogen werden.

Mit dem Impulshammer wird die Struktur durch einen definierten Impuls angeregt. Der Impulshammer hat ein Kopfgewicht von 275 g. Am Impulshammer können die Schlagspitzen je nach Material der Struktur ausgewechselt werden. Außerdem kann ein Zusatzgewicht angebracht werden, welches die einzubringende Kraft beeinflusst. Hierdurch wird die Amplitude des Impulses vergrößert. Durch die Wahl der Schlagspitzen wird die einzubringende Kraft folgendermaßen beeinflusst: Harte Spitzen (Stahl) verursachen kurze Impulse und hohe Frequenzen und weiche Schlagspitzen (Gummi) verursachen breitere Impulse und niedrigere Frequenzen. Dazwischen gibt es auch noch Schlagspitzen aus Aluminium und Kunststoff.

Die Auswahl der Schlagspitzen oder der Zusatzgewichte erfolgt entweder auf Basis von Erfahrungswerten oder durch mehrere Versuchsschläge mit verschiedenen Schlagspitzen und Gewichten. Bei der Durchführung der Versuche darf es zu keinen Prellschlägen bzw. Doppelschlägen kommen. Diese würden das Messergebnis massiv verfälschen. Zur statistischen Absicherung wurde in diesen Versuchen jeder Punkt mindestens fünf Mal angeregt und später korreliert. Den kompletten Messaufbau zeigt die Abb. 3.23a.

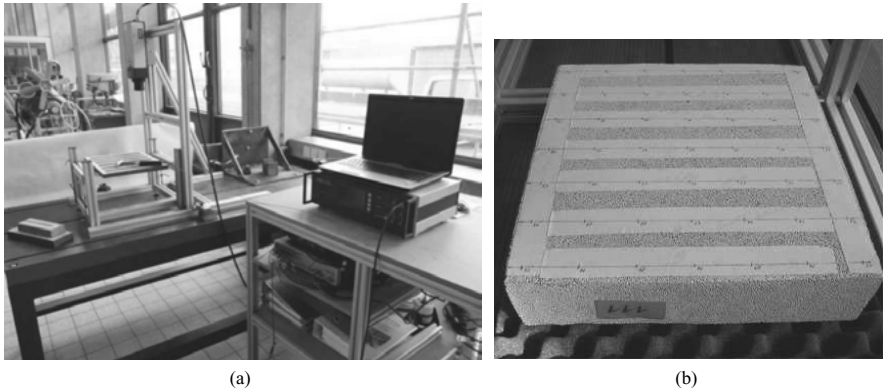


Abbildung 3.23: Experimentelle Modalanalyse: a) Messaufbau, b) Probenvorbereitung.

3.3.3.2 Probenvorbereitung

Alle Proben werden gewogen, vermessen und mit einer Versuchsnummer versehen. Um ein Messgitter für die Proben festlegen zu können, ist vorab zu klären, bis zu welchem Bereich die Eigenschwingungen angeregt werden sollen. Das Ziel dieser Messung ist, auf jeden Fall immer die ersten vier Eigenschwingungsfrequenzen zu erhalten. Das Messgitter orientiert sich an den zu erwartenden Eigenformen, die stark von der Probenform abhängen. Zur Bestimmung steigender Eigenformen werden immer feinere Messgitter benötigt. Für die zu messende Probenkörper entstanden neun bis 56 Messpunkte. Da es durch die unebene Oberfläche nicht möglich ist, die Messpunkte auf der Probe deutlich zu markieren, wurde ein Kreppklebeband auf die Proben geklebt (siehe Abb. 3.23b).

3.3.3.3 Signalverarbeitung

Das von Festlaser und Impulshammer gelieferte Messsignal wird mit einem Signalanalysator digitalisiert. Nun wird vom Messgerät eine FFT³ der Signale (Kraft und Beschleunigung) durchgeführt. Dies liefert ein Spektrum für jeden gemessenen Punkt und die eingeleitete Kraft. Daraus wird aus jedem Spektrum eines Messpunktes (Antwortspektrum) und dem Kraftspektrum (Anregungsspektrum) die Übertragungsfunktion (FRF, Frequency Response Function) gebildet, d.h. ein Spektrum der Beschleunigung in Bezug auf das Krafteinleitungsspektrum. Diese FRFs setzen sich aus einem Real- und einem Imaginärteil zusammen. Ist die Messung abgeschlossen, werden die gewonnenen FRFs in das Auswerteprogramm Test.Lab der Firma LMS geladen und ausgewertet. Hier werden dann über einen Algorithmus Eigenfrequenzen und -formen ermittelt, die auch im Programm grafisch dargestellt und animiert werden.

3.4 Schallabsorption

In diesem Kapitel sollen Methoden zur Charakterisierung von Schallabsorption in porösen Medien, insbesondere Hohlkugelstrukturen, vorgestellt werden. Solch poröse Materialien bestehen aus

³Fast-Fourier-Transformation, Transformation der Messsignale vom Zeitbereich in den Frequenzbereich

einem Netzwerk von Poren, die über viskose und thermische Effekte eine Dissipation der Schallenergie hervorrufen. Dieses Kapitel liefert einen Einblick in die physikalischen Mechanismen, die theoretischen Modellbeschreibungen und die Messung der Schallabsorption in porösen Medien. Der erste Abschnitt gibt eine qualitative Beschreibung von porösen Schallabsorber und Einsatz wieder.

3.4.1 Absorptionsmechanismus

Wenn sich Schall in kleinen Räumen, wie in verbundenen Poren in einem porösen Absorber ausbreitet, wird Schallenergie in Wärme umgewandelt. Diese Energieumwandlung basiert im Wesentlichen auf dem Effekt der viskosen Grenzschicht. Luft ist ein viskoses Fluid. Dementsprechend wird Schallenergie durch Reibung mit den Porenwänden dissipiert. Wenn der Schall durch die unregelmäßigen Poren wandert, entsteht zudem ein Impulsverlust durch Strömungsänderung. Dies zeigt Abb. 3.24. Die Grenzschicht in Luft beläuft sich bei hörbaren Frequenzen im Submillimeter-Bereich. Demzufolge treten viskose Verluste in kleinen Luftschichten mit angrenzenden Porenwänden auf. Neben den viskosen Effekten treten auch thermische Verluste auf, hervorgerufen durch die Wärmeleitung vom Fluid zum Absorbermaterial. Dieser Effekt macht sich vor allem bei niedrigen Frequenzen bemerkbar. Für eine effektive Schallabsorption müssen verbundene Fluidkanäle im Material vorhanden sein, so dass eine offenporige Struktur vorliegt. Verluste über die Vibration des Absorbermaterial können in der Regel vernachlässigt werden, wenn der Schall durch die Poren wandert.

Abbildung 3.25 zeigt den Absorptionskoeffizienten für einen porösen Absorber und verdeutlicht dabei den Einfluss der Materialdicke. Der Absorber befindet sich bei der Messung vor einem schallharten Hintergrund. Die Kurvencharakteristik des Absorptionsgrads ähnelt in erster Nä-

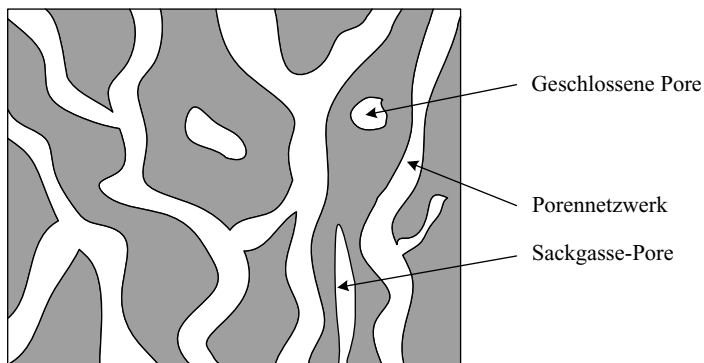


Abbildung 3.24: Schematische Repräsentation eines akustischen porösen Mediums; in weiß dargestellt die Fluidphase bestehend aus das Netzwerk der verbundenen Poren, in grau dargestellt die Festphase.

herung der eines Hochpassfilters. Mit zunehmender Dicke des Absorbermaterials nimmt der Absorptionsgrad bei geringeren Frequenzen zu. Um eine merkliche Absorption zu erreichen, ist im Absorber eine hohe Partikelgeschwindigkeit (Schallschnelle) vonnöten. Die Partikelgeschwindigkeit ist an den Wänden in Räumen für gewöhnlich gleich Null, so dass die wandnahen Bereiche keine nennenswerte Absorption erzeugen. Die von der Wand weiter legenden entfernten Bereiche

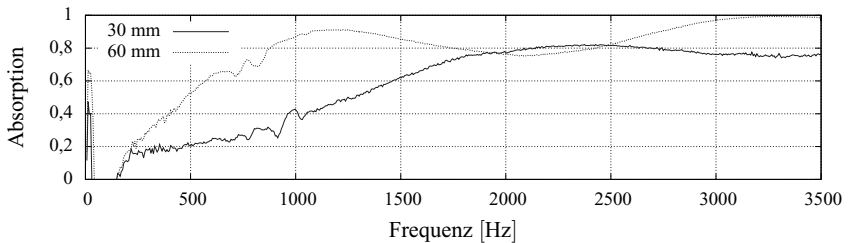


Abbildung 3.25: Absorptionskoeffizient für einen offenporigen Polymerschaum, gemessen für zwei verschiedene Dicken mit schallhartem Abschluss.

des Absorbers sind meist am effektivsten. Die höchsten Partikelgeschwindigkeiten treten bei einer Entfernung von einer Viertel Wellenlänge auf. So entsteht in der Regel das erste Maximum des Absorptionsgrads, wenn die Dicke des Absorbers ein Viertel der Wellenlänge entspricht. Das Spektrum von Absorbermaterialien erstreckt sich von natürlichen Schwämmen über gewöhnliche Stahlwolle oder Fasermaterialien bis hin zu synthetischen Schäumen. Selbst haushaltsübliche Teppiche stellen einen Schallabsorber dar.

3.4.2 Charakterisierende Materialeigenschaften und -größen

In diesem Abschnitt soll auf die wesentlichen, charakterisierenden Größen zur mathematischen Modellierung von porösen Absorbern näher eingegangen werden. Mit den Größen können Eigenschaften wie Wandimpedanz, charakteristische Impedanz und Absorptionkoeffizient bestimmt werden. Die mathematischen Modelle sollen zudem beschreiben, wie Absorption entsteht, und an die gewünschten Anforderungen angepasst werden können. Zunächst jedoch soll auf die wesentlichen Größen eingegangen werden, die maßgeblich die Schallausbreitung in porösen Medien beeinflussen. Dies sind Porosität und Strömungswiderstand. Des Weiteren werden Größen beleuchtet, die die Komplexität der Geometrie erfassen.

3.4.2.1 Porosität

Die akustische Porosität gibt den Anteil des Fluidvolumens im Absorber an und stellt ein Verhältnis zwischen effektivem Porenvolumen und Gesamtvolumen des Absorbers dar. Gewöhnliche Absorber haben eine hohe Porosität, die nahe bei Eins liegt - wie Mineralwolle mit 0,98. Bei der Bestimmung der akustischen Porosität gehen geschlossene Poren, wie Abb. 3.24 verdeutlicht, nicht in das effektive Porenvolumen ein. Diese Poren sind unzugänglich für die Schallausbreitung. Die Porosität ist ein Schlüsselparameter, jedoch liegt sie bei gewöhnlichen Absorbern nahe Eins. Bei alternativen Absorbermaterialien wie Schäumen und insbesondere Hohlkugelstrukturen sieht dies jedoch deutlich anders aus. Da sich Porosität und Strömungswiderstand meist entgegenstehen, ist bei der Auslegung eines Absorbermaterials abzuwägen.

3.4.2.2 Strömungswiderstand

Der Strömungswiderstand gibt an, wie leicht ein Fluid durch einen porösen Körper hindurchströmen und welchen Widerstand das Fluid durch die Struktur erfährt. Somit macht der

Strömungswiderstand eine Aussage darüber, wie viel Schallenergie durch den Grenzschichteffekt innerhalb des Materials in Wärme umgewandelt werden kann. Ausgehend vom Gesetz von Darcy

$$\mathbf{v}_s = -\frac{k_p}{\mu \mathbf{V}} \nabla p = -\frac{1}{\Xi} \nabla p, \quad (3.50)$$

welches im Abschnitt 2.3.2.6 beschrieben wird, kann ein längenbezogener Strömungswiderstand Ξ eingeführt werden, der den effektiven Widerstand pro Materialeinheitsdicke angibt. Gravitationseinflüsse werden dabei vernachlässigt.

3.4.2.3 Porenformfaktor und charakteristische Längen

Die einfachsten theoretischen Modelle des porösen Absorbers basieren auf der Annahme, dass die Struktur, bzw. die feste Phase, steif und bewegungslos sei. Dadurch lassen sich die klassischen Theorien der Schallausbreitung in kleinen Röhren anwenden. Jedoch gibt es nur geschlossene analytische Lösungen für einfache Geometrien, wie ein Verbund aus zylindrischen Röhren. Im Allgemeinen sind diese Formen der Röhren weit von den realen und komplexen Geometrien der meisten Absorbermaterialien entfernt. Infolgedessen wurde ein halb empirischer Ansatz entwickelt. Dieser bestimmt Schlüsseleigenschaften des Materials aus Kombination von Versuchen und Theorie. Die wichtigsten dieser Parameter sind im Anschluss aufgeführt.

Während die Porosität und der Strömungswiderstand für gewöhnlich die wichtigsten Parameter für die Schallabsorption darstellen, gibt es weitere zweitrangige Parameter, wie die Formfaktoren oder die Tortuosität (Gewundenheit). Die Form der Poren hat deutlichen Einfluss auf die Schallausbreitung und dadurch auch auf das Absorptionsverhalten. Unterschiedliche Porenformen haben unterschiedliche Oberflächen und infolgedessen auch unterschiedliches, viskoses und thermisches Verhalten. Wie schon erwähnt lassen sich die realen, willkürlichen Porenformen und somit auch die Porenformfaktoren nicht analytisch bestimmen. Dementsprechend werden diese Formfaktoren für gewöhnlich empirisch durch die bestmögliche Anpassung an die akustische Messung gefunden. Die Formfaktoren sind vom Modell abhängig, das zur Vorhersage der Schallausbreitung im porösen Absorber genutzt wird. Die Formfaktoren c_v und c_t bzw. charakteristische Längen Λ_v und Λ_t werden in den später aufgeführten Ansätzen für die effektive Dichte und den Kompressionsmodul und weiterführend zur Bestimmung der charakteristischen Impedanz und Wellenzahl genutzt. Diese Faktoren beziehen sich ausschließlich auf den dynamischen Fall und repräsentieren die Effekte bei höheren Frequenzen.

Die viskose Wechselwirkung zwischen dem oszillierenden Fluid und den Porenwänden ist bekannt bei niedrigen und hohen Frequenzen. Im dazwischenliegenden Frequenzbereich werden diese Wechselwirkungen mit einer einfachen Funktion approximiert, die den Niedrig- und Hochfrequenzbereich verknüpft [104]. Für ein Absorbermaterial bestehend aus ausschließlich zylindrischen Poren, entspricht die charakteristische Länge dem Radius der Röhre und somit dem hydraulischen Radius der entsprechenden zylindrischen Poren. Johnson [104] gibt eine exakte Beschreibung für die viskose charakteristische Länge

$$\Lambda_v = 2 \frac{\int_V v^2 dV}{\int_A v^2 dA}, \quad (3.51)$$

wobei das Integral im Zähler über ein Volumen geht, das größer als das der Porengröße ist und das Integral im Nenner über die Oberfläche der Poren geht. Die Größe v entspricht der mikroskopischen Geschwindigkeit eines idealen bzw. eines nicht viskosen Fluids durch die Poren.

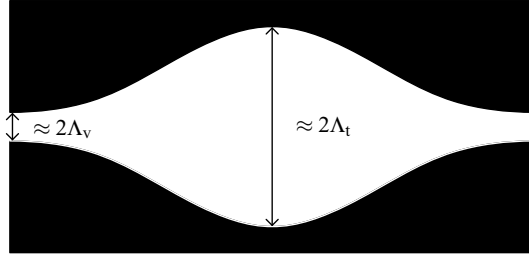


Abbildung 3.26: Schematische Repräsentation einer akustischen Pore; die viskose charakteristische Länge Λ_v ist maßgeblich für die viskosen Effekte und die thermale charakteristische Länge Λ_t wiederum maßgeblich für thermische Effekte verantwortlich, bei hohen Frequenzen entsprechen diese Längen der geometrischen Größe einer Pore

Der Faktor 2 wird genutzt, da die charakteristische Länge dem hydraulischen Radius (siehe Abb. 3.26) einer identischen zylindrischen Pore entspricht. Die charakteristische Länge ist demzufolge ein Verhältnis von Volumen zu Oberfläche gewichtet durch das Quadrat der mikroskopischen Geschwindigkeit. Der viskose Porenfaktor lässt sich wie folgt

$$c_v = \frac{1}{\Lambda_v} \sqrt{\frac{8\alpha_\infty \mu^V}{\phi \Xi}} \quad (3.52)$$

bestimmen. Dabei ist α_∞ die Tortuosität, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird. Für die meisten Absorber liegt der Bereich von c_v zwischen 0,3 und 3. Für einen runden, einen quadratischen und einen dreiecksförmigen Porenquerschnitt ist der Porenformfaktor c_v 1, 1,07 und 1,14, für Spalte 0,78.

Des Weiteren ist eine zusätzliche charakteristische Länge für Materialien mit nicht zylinderförmigen Poren und innerer komplexer Struktur notwendig. Die thermische Wechselwirkung zwischen komprimierter und ausgedehnter Luft und den Porenwänden ist wiederum bekannt für niedrige (isothermisch) und hohe (adiabatisch) Frequenzen. Auf ähnliche Weise, wie im viskosen Fall wird der thermische Effekt im Zwischenfrequenzbereich durch eine analytische Funktion approximiert, die wiederum den Nieder- mit dem Hochfrequenzbereich verbindet [2, 119]. Der Übergang zwischen dem Nieder- und dem Hochfrequenzbereich hängt vom mittleren Abstand ab, den die Wärme bis zu den Poren durchwandern muss. Sie wird charakterisiert durch

$$\Lambda_t = 2 \frac{\int_V dV}{\int_A dA} = 2 \frac{V_P}{A_P}. \quad (3.53)$$

Somit ist die thermisch-charakteristische Länge das Verhältnis zwischen Porenvolumen zu Porenoberfläche. Die thermisch-charakteristische Länge erfährt keine Gewichtung im Gegensatz zur viskosen charakteristischen Länge und wird darum in der Regel gleich oder größer sein als diese. Im Fall eines Absorbers mit geradlinigen zylinderförmigen Poren sind beide charakteristischen Längen gleich groß und entsprechen dem Radius der zylindrischen Pore. Der thermische Porenfaktor ist wie folgt definiert:

$$c_t = \frac{1}{\Lambda_t} \sqrt{\frac{8\alpha_\infty \mu^V}{\phi \Xi}}. \quad (3.54)$$

3.4.2.4 Tortuosität

Die Orientierung der Poren relativ zum einfallenden Schallfeld hat einen Effekt auf die Schallausbreitung im porösen Material. Dieser Effekt wird durch den Parameter Tortuosität ausgedrückt, oft auch als Strukturformfaktor bezeichnet. Je komplexer der Schallausbreitungspfad desto höher die Absorption im Material. Die Komplexität des Pfades kann teilweise durch die Tortuosität beschrieben werden. So charakterisiert die dynamische Tortuosität, meist nur kurz Tortuosität genannt, die teilweise viskosen Effekte im Hochfrequenzbereich, wenn die viskosen Grenzschichten der Strömung klein gegenüber den charakteristischen Größen der Poren sind. Es ist eine dimensionslose Größe und ihre mathematische Beschreibung wurde durch Johnson [104] erarbeitet:

$$\alpha_{\infty} = \frac{\frac{1}{V} \int_V v^2 dV}{\left(\frac{1}{V} \int_V \mathbf{v} dV \right)^2}. \quad (3.55)$$

Dieses Maß gibt eine Art Unordnung des Systems (Material) an [104].

3.4.3 Äquivalentes Fluid-Modell

Sehr viele theoretische und analytische Modelle zur Beschreibung des Verhaltens von porösen Materialien wurden über die letzten Jahre entwickelt. Eine Modellbildung für poröse Materialien, charakterisiert durch ihre feste und flüssige Phase, verlangt zur Beschreibung und Untersuchung nach einer Anzahl von Parametern. Diese Parameter haben alle eine physikalische Bedeutung. Diese kann, je nach Modellbildung, für das jeweilige Material sehr nützlich sein. Im Fall sehr komplexer Modellbeschreibungen erreicht die maximale Anzahl bis zu zehn Parameter [26, 192]. Einfachere Modelle, wie das Modell des äquivalenten Fluides, benötigen nur fünf Parameter zur Charakterisierung der akustischen Wellenausbreitung in porösen Materialien. Wird das Skelett des porösen Materials während der akustischen Wellenausbreitung als steif oder bewegungslos betrachtet, kann das Fluid innerhalb des porösen Mediums durch ein makroskopisch äquivalentes Fluid ersetzt werden. Dieses äquivalente Fluid kann durch die Größen, effektive Dichte ρ_{eff} und effektiven Kompressionsmodul K_{eff} beschrieben werden. Diese Werte stehen in Abhängigkeit zur Frequenz $\omega = 2\pi f$. Zusätzlich sind die Wellenzahl $k(\omega)$ und die charakteristische Impedanz $Z_c(\omega)$ des äquivalenten Fluides frequenzabhängig [1].

In dieser Arbeit werden das Delany-Bazley-Modell [46] und das Johnson-Champoux-Allard-Modell [104, 34] vorgestellt. Das Delany-Bazley-Modell ist sehr einfaches und aussagefähiges Modell für poröse Materialien, bei denen die Porosität nahe Eins ist.

3.4.3.1 DELANY-BAZLEY-Modell

Das DELANY-BAZLEY-Modell [46] basiert auf einer Vielzahl von empirisch gewonnenen Daten. Die komplexe Wellenzahl k und die charakteristische Impedanz Z_c wurden durch Delany und Bazley [46] für viele Fasermaterialien, die einen Porositätsanteil nahe bei eins haben, in einem großem Frequenzbereich gemessen. Gemäß diesen Messungen hängen die Größen des Modells K und Z_c von der Kreisfrequenz ω und dem Strömungswiderstand Ξ des jeweiligen Materials ab. Eine gute Anpassung an die Messwerte k und Z_c lieferte folgender Ausdruck:

$$Z_c = \rho_0 c_0 F_1(X) \quad \text{und} \quad k = \frac{\omega}{c_0} F_2(X) \quad (3.56)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1(X) &= 1 + 0.057X^{-0,754} - j0.087X^{-0,732}, \\ F_2(X) &= 1 + 0.0978X^{-0,700} - j0.189X^{-0,595}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

wobei c_0 und ρ_0 die Schallgeschwindigkeit und die Dichte der Luft sind. Der dimensionslose Parameter X kann aus

$$X = \frac{\rho_0 f}{\Xi} \quad (3.58)$$

bestimmt werden. Dabei ist f die Frequenz. Danley und Bazley empfehlen zur Validierung ihres Gesetzes folgende Grenzen für X :

$$0,01 < X < 1,0. \quad (3.59)$$

Die äquivalente Schallgeschwindigkeit und Dichte lässt sich gemäß diesem Fluidmodell wie folgt berechnen

$$c_{\text{äq}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{F_2(X)} \quad \text{und} \quad \rho_{\text{äq}} = \frac{Z_c}{c_{\text{äq}}} = \rho_0 F_1(X) F_2(X). \quad (3.60)$$

Der Strömungswiderstand eines porösen Materials Ξ ist ein physikalischer Parameter, der sich mit Hilfe des Gesetzes von Darcy bestimmen lässt. Jedoch lässt sich der Strömungswiderstand eines luftdurchströmten, porösen Körpers extrem schwer messen. Der Strömungswiderstand ist eine spezifische Eigenschaft der Mikrogeometrie der Poren und beeinflusst die Ausbreitung und Absorption akustischer Wellen [1].

Diese einfachen Beziehungen, wie im DANLEY-BAZLEY-Modell durch Abhängigkeit von Frequenz und Strömungswiderstand formuliert, genügen jedoch nicht zur exakten und allgemeinen Beschreibung poröser Materialien [1]. Sie wurde schon des Öfteren, wie zum Beispiel durch Komatsu [115] und Miki [147, 146] erweitert und angepasst. Allerdings lässt sich dieses Modell weitläufig nutzen. Es gibt brauchbare Werte für die komplexe Wellenzahl und charakterliche Impedanz wieder.

3.4.3.2 JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell

Neben der empirischen Approximationsmethode nach Danley und Bazley gibt es auch physikalisch theoretische Modellbeschreibungen für steife, bewegungslose und weiche, bewegliche Strukturen. Auf die Modellbeschreibung nach Biot [26] für weiche bzw. bewegliche Strukturen soll nicht näher eingegangen werden, da die Strukturen für metallische Hohlkugeln als steif gegenüber der schwingenden Luftmasse angesehen werden. Eine genaue und ausführliche Modellbeschreibung nach Biot ist in [1] zu finden.

Die Geometrie von Poren in gewöhnlichen porösen Materialien lässt sich nicht einfach beschreiben und eine direkte Berechnung der viskosen und thermischen Wechselwirkungen zwischen Fluid und Festkörper ist im Allgemeinen unmöglich. Aus diesem Grund werden die Poren in manchen Modellbildungen durch einfachere Geometrie ersetzt. Als einfachste Regelgeometrie lässt sich eine Pore durch einen Zylinder beschreiben. Eine theoretische Schallausbreitung in zylindrischen Röhren mit viskosen und thermischen Effekten hat Kirchhoff in seiner Theorie [113] beschrieben. Leider war diese Beschreibung für viele Anwendungen zu kompliziert, vor allem bei Röhren mit nicht kreisrunden Querschnitten. Ein einfacheres Modell, welches thermische und viskose Effekte für kreisrunde Röhrenquerschnitte getrennt behandelt, wurde durch Zwikken und Kosten [228] ausgearbeitet. Der thermische Austauscheffekt in Bezug auf den viskosen Effekt wird im Modell von Stinson [201] beschrieben. Eine Übersicht über die verschiedenen Modelle, die vor 1980 ausgearbeitet wurden, sind in der Arbeit von Attenborough [10] zu finden. Im Allgemeinen fußen

sich alle Modelle auf der Theorie des quasi-homogenen Absorbers, wie in Kapitel 3 beschrieben. All diese Theorien bauen auf der Annahme der linearisierten NAVIER-STOKES-Gleichung für inkompressible Fluide

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \nu^V \Delta \mathbf{v}, \quad (3.61)$$

der linearisierten Wärmeenergiegleichung

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \Delta T + \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.62)$$

der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$p = \rho R_i T = \rho (c_p - c_V) T \quad (3.63)$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$\rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.64)$$

auf, wobei c_p und c_V die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck oder Volumen, λ die Wärmeleitfähigkeit, R_i die spezifische Gaskonstante und T die Temperatur sind. Des Weiteren werden folgende Annahmen getroffen:

- keine Hauptströmung $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- laminare Strömung, keine Wirbel,
- keine innere Wärmezeugung,
- homogenes Medium/Fluid und
- kleine harmonische Schwankungen/Störungen (Druck/Geschwindigkeit).

Folgende Beziehungen werden im Einzelnen zur Bestimmung der effektiven Dichte und des effektiven Kompressionsmoduls des Fluides angegeben. Die charakteristischen Längen zur Berücksichtigung der viskosen und thermischen Verlustmechanismen

$$\Lambda_v = \frac{1}{c_v} \sqrt{\frac{8\alpha_\infty \mu^V}{\phi \Xi}} \quad \text{und} \quad \Lambda_t = \frac{1}{c_t} \sqrt{\frac{8\alpha_\infty \mu^V}{\phi \Xi}} \quad (3.65)$$

ergeben sich aus den physikalisch messbaren Materialparametern Porosität ϕ , dem längenbezogenen Strömungswiderstand Ξ , der dynamischen Viskosität der Luft μ^V , dem Strukturformfaktor α_∞ und den viskosen und thermischen Porenformfaktoren c_v und c_t . Mit den Zwischengrößen

$$G_v(\omega) = \sqrt{1 + \frac{j4\alpha_\infty^2 \mu^V \rho_0 \omega}{\phi^2 \Lambda_v^2 \Xi^2}} \quad \text{und} \quad G_t(\omega) = \sqrt{1 + \frac{j4\alpha_\infty^2 \mu^V \rho_0 \omega Pr}{c_t^4 \phi^2 \Lambda_v^2 \Xi^2}} \quad (3.66)$$

wobei Pr die PRANDTL-Zahl ist und das Verhältnis zwischen der kinematischen Viskosität und der Temperaturleitfähigkeit von Flüssigkeiten oder Gasen beschreibt. Mit Hilfe der Zusatzgrößen

$$\lambda_v = c_v \sqrt{\frac{8\alpha_\infty \rho_0 \omega}{\phi \Xi}} \quad \text{und} \quad \lambda_t = \frac{1}{c_t} \sqrt{\frac{8\alpha_\infty \rho_0 \omega}{\phi \Xi}} \quad (3.67)$$

erhält man die effektive Dichte

$$\rho_{\text{eff}}(\omega) = \rho \alpha_{\infty} \left[1 + \frac{8c_v^2 G_v(\omega)}{j\lambda_v^2} \right], \quad (3.68)$$

und den Kompressionsmodul des äquivalenten Fluides

$$K(\omega) = \frac{\gamma p_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left[1 + \frac{8G_i(\omega)}{-jPr\lambda_i^2} \right]^{-1}}. \quad (3.69)$$

Die dimensionslose Größe γ kennzeichnet hierbei den Adiabatenexponent. Aus der effektiven Dichte und dem Kompressionsmodul lässt sich die charakteristische Impedanz des Mediums

$$Z_c = \sqrt{\rho_{\text{eff}}(\omega) K(\omega)} \quad (3.70)$$

bestimmen. Mit der endlichen Dicke d der porösen Probe lässt sich nun die Impedanz

$$Z = \frac{-jZ_a \cot(k_a d)}{\phi} \quad (3.71)$$

berechnen. Zudem kann die Wellenzahl

$$k_a = \omega \sqrt{\frac{\rho_{\text{eff}}(\omega)}{K(\omega)}} \quad (3.72)$$

im porösen Medium ermitteln werden. Schlussendlich kann mit Hilfe der Wandimpedanz nach Abschnitt 2.3.2.5 der Absorptionsgrad

$$\alpha = \frac{4\text{Re}\left\{\frac{Z}{\rho c}\right\}}{\left[\text{Re}\left\{\frac{Z}{\rho c}\right\} + 1\right]^2 + \left[\text{Im}\left\{\frac{Z}{\rho c}\right\} + 1\right]^2} \quad (3.73)$$

bestimmt werden.

Einen Überblick über die Modelle und eine Erweiterung des JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modells kann dem Anhangteil B.6 entnommen werden.

3.4.4 Akustische Messungen

Grundsätzlich gibt es mehrere Möglichkeiten, die akustischen Eigenschaften eines Materials zu bestimmen. Zum einen kann man das Hallraumverfahren nach DIN52212 [158] einsetzen, das nur für große Probenabmessungen geeignet ist und mit diffusum Schalleinfall arbeitet. Gerade das Messen der akustischen Materialparameter unter den Bedingungen des Schalleinfall von vielen, verteilten Richtungen, führt zu wirklichkeitsnahen Ergebnissen. Um die Messgenauigkeit dieser Methode einzuhalten, muss allerdings die stirnseitige Oberfläche des Prüfgegenstandes mehrere Quadratmeter betragen. Für eine schnellere und einfachere Einschätzung kann auch ein anderes Verfahren eingesetzt werden: die Messung im KUNDTSchen Rohr bzw. im Impedanzrohr nach DIN52215 [159] bzw. ISO10534-1 [160] und ISO10534-2 [162]. Das KUNDTSche Rohr wird zur gezielten Erzeugung ebener Wellen genutzt und stellt eine Messeinrichtung dar zur Charakterisierung von teilweise absorbierenden und teilweise reflektierenden Anordnungen bei

senkrechtem Schalleinfall. Es ist jedoch berücksichtigen, dass die Berechnungsformeln zur Messmethode mit senkrechtem Schalleinfall Annäherungen sind. Dafür ist die Ermittlung der akustischen Materialparameter kleiner Prüfgegenstände in der Größe des Impedanzrohrquerschnitts möglich. Abhängig von den zu untersuchenden Frequenzen können Flächen von bis zu $10 \times 10 \text{ cm}^2$ zum Einsatz kommen. Zur Beurteilung des akustischen Verhaltens von Hohlkugelstrukturen werden Ergebnisse aus Versuchen vorgestellt. Als charakteristische Größen werden Absorption, Transmission und Reflexion untersucht. Die Messungen selbst sind nach den gängigen Methoden durchgeführt. Eingesetzt werden sowohl die Zwei-Mikrophon- nach ISO 10534-2 [162] als auch die Vier-Mikrophon-Methode.

Die Messung der akustischen Materialparameter mit einer ebenen Schallwelle im KUNDTSchen Rohr kann grundsätzlich auf zwei Weisen erfolgen. Die Stehwellenmethode nach ISO 10534-1 [160] und die Übertragungsfunktionsmethode nach ISO 10534-2 [162]. Für die Messung wird in beiden Fällen die Ausbreitung einer eindimensionalen Welle mit senkrechter Reflexion, sprich eine ebene Welle, benötigt. Dieser Fall lässt sich besonders gut in einem Rohr erzeugen, das an beiden Enden senkrecht abgeschlossen ist. Bei den behandelten Messsystemen ist ein Ende durch eine Materialprobe senkrecht abgeschlossen. Das andere Ende wird durch eine über den gesamten Querschnitt möglichst gleich schwingende Kolbenmembran, sprich ein Lautsprecher, angeregt. Mit beiden Methoden lassen sich durch den senkrechten Schalleinfall der Reflektionskoeffizient r , der Absorptionsgrad α und die akustische Impedanz Z_a des Absorbermaterials bestimmen. Um eine derartige Schallwellenausbreitung zu gewährleisten, bedarf es einiger Voraussetzungen, welche im Folgenden diskutiert werden:

- Die Schallverluste im Rohr sind so zu minimieren, dass sich die ebene Welle ohne nennenswerte Abschwächung ausbreiten kann. Folglich nutzt man für den mittleren und hohen Frequenzbereich, der den Lärmschutz im Maschinenbau und Bauwesen betrifft, steife Stahlkonstruktionen für das Rohr. Für niedrige Frequenzen, bis zur Grenze des menschlichen Gehörs (20 Hz), kommen sehr dicke Stahl- oder Betonstahlplatten zum Einsatz.
- Der Rohrquerschnitt sollte einen konstanten Querschnitt über den Messraum aufweisen, in dem die Mikrofone und die Probe platziert sind. Die Form des Querschnitts ist dabei nicht ausschlaggebend. Runde und quadratische Rohrquerschnitte sind am meisten verbreitet. Der runde Querschnitt neigt zur geringen Anfälligkeit bei Quermoden-Problemen, der quadratische Querschnitt bietet Vorteile bei der Probenvorbereitung.
- Der Lautsprecher sollte mehrere Röhrendurchmesser bzw. Röhrenweiten vom nächstliegenden Mikrofon entfernt sein, damit sich eine ebene Welle ausbilden kann. Jedoch sollte die Länge des Impedanzrohres von der Schallquelle bis zur Oberfläche der zu messenden nicht mehr als fünf bis zehn Rohrmesser bzw. -weiten betragen, um Dissipationseffekte der Schallausbreitung nicht unnötig zu erhöhen.
- Die Positionen der Mikrofone sollte nicht zu nahe an der Probe liegen, damit evaneszente Wellen⁴, hervorgerufen durch Reflexion am Absorbermaterial, ausreichend Zeit haben abzuklingen.
- Die höchste theoretische Frequenz $f_{0,t}$ mit der im Impedanzrohr gemessen werden kann, hängt von der Quereigenmodenausbildung des Fluides und somit von den Ausmaßen des Rohrquerschnittes ab [152]. Aus diesem Grund ist eine Frequenz unterhalb der ersten modalen Grenzfrequenz anzustreben $f_{0,t} \leq \frac{c}{2l_q}$, damit sich eine ebene Welle ausbilden kann. Die Größe l_q stellt hierbei den Durchmesser oder die Weite des Rohrs dar.

⁴sich verflüchtigende Wellen

Bei der Stehwellenmethode nach ISO 10534-1 wird mittels eines Schallwandlers eine sinusförmige Schallwelle in das Impedanzrohr eingespeist. Diese Schallwelle breitet sich im Rohr eindimensional aus und wird am Rohrende reflektiert. Die reflektierte Welle überlagert sich mit der einlaufenden Welle und bildet eine stehende Welle im Rohr. Da die reflektierende Schallwelle und somit auch die stehende Schallwelle abhängig vom akustischen Verhalten des Rohrabschlusses ist, kann mittels Messen der Druckminima und -maxima der Reflektionskoeffizient des Rohrabschlusses (Absorbermaterials) bestimmt werden.

Zu der oberen theoretischen Grenzfrequenz $f_{o,t}$ gibt es bei der Stehwellenmethode eine untere theoretische Grenzfrequenz $f_{u,t}$, die wiederum von den geometrischen Abmessungen des Rohres abhängt. Die untere theoretische Grenzfrequenz erhält man, da für die Messung zwei Druckminima erforderlich sind und da das erste Druckminimum im Extremfall ein Viertel der Wellenlänge vom reflektierenden Abschluss entfernt ist. Daraus ergibt sich eine untere theoretische Grenzfrequenz $f_{u,t} \geq \frac{3c}{4l_R}$ bei gegebener Rohrlänge l_R . Unter realen Bedingungen wird von der Rohrlänge noch mindestens ein Rohrdurchmesser oder -weite abgezogen, da sich erst nach einem gewissen Abstand eine ebene Welle ausbildet. So liegt die tatsächliche untere Grenzfrequenz höher als bei der theoretischen Betrachtung.

Bei der Übertragungsfunktionsmethode nach ISO 10534-2 dient ein Rauschgenerator als Schallquelle, der ein breitbandiges 'weißes' Rauschen⁵ erzeugt. Abbildung 3.27 zeigt dies. Dieses

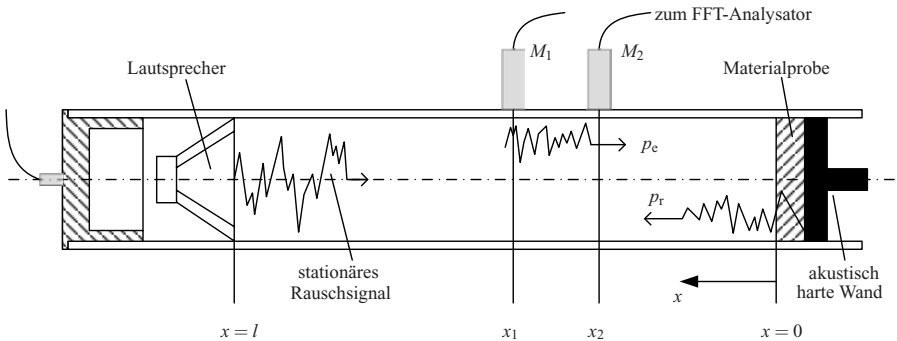


Abbildung 3.27: KUNDTsches Rohr; Übertragungsfunktionsmethode nach ISO 10534-2 mit einlaufenden und reflektierten Drucksignal (p_e und p_r)

Rauschsignal wird über einen Lautsprecher in das Impedanzrohr eingekoppelt. Die Signalerfassung erfolgt mittels zwei oder mehrerer Mikrofone an fixen Positionen der Rohrwand.

Gegenüber der Messung nach der Stehwellenmethode nach ISO 10534-1 ergibt sich bei dieser Methode nach ISO 10534-2 ein wesentlicher Vorteil. Da die Übertragungsfunktionsmethode nach ISO 10534-2 mit einem weißen Rauschen arbeitet, das bereits alle gewünschten Frequenzen beinhaltet, kann somit sehr viel Messzeit eingespart werden. Dadurch dauert die Messung nur einen Bruchteil dessen, was die Messung nach ISO 10534-1 dauern würde. Zusätzlich kann bei der Zwei-Mikrofon-Methode die Absorption an der Rohrwand vernachlässigt werden, da die Länge des Impedanzrohres im Vergleich zur Stehwellenmethode sehr kurz gehalten werden kann. Dies beruht darauf, dass sich bei der Übertragungsfunktionsmethode im Rohr nur eine ebene Welle ausbilden muss, die nach wenigen Rohrdurchmessern bzw. -weiten entsteht.

⁵Rauschen mit konstanter Amplitude im Leistungsdichtespektrum

Aus diesen Gründen wurde die Übertragungsfunktionsmethode nach ISO 10534-2 der Stehwellenmethode nach ISO 10534-1 bevorzugt.

Der gewünschte Einsatzbereich sollte von 500 bis 4000 Hz erfolgen. Daraus ergibt sich nach Auslegung nach ISO 10534-2 ein quadratischer Querschnitt von $40 \times 40 \text{ mm}^2$. Im Anhang wird der theoretische Hintergrund der Übertragungsfunktionsmethode mit zwei Mikrofonen nach ISO 10534-2 und eine Weiterentwicklung dieser Methode dargelegt und die Bestimmung der Kenngrößen eines Absorbermaterials aufgezeigt.

4 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die gewonnenen Ergebnisse aus Simulation und Versuch für die mechanischen und akustischen Eigenschaften metallischer Hohlkugelstrukturen vorgestellt. Dabei wird auf die Grundlagen und Methoden zur Bestimmung dieser Eigenschaften aus den zwei vorhergehenden Kapiteln zurückgegriffen.

Zunächst werden Hohlkugelpackungen analysiert und mit dem Forced-Biased-Algorithmus erzeugten Packungen gegenüber gestellt. Ein weiterer Untersuchungspunkt ist die Bestimmung der homogenisierten Elastizitätswerte verschiedener Hohlkugelpackungen. Dabei fällt das Augenmerk auf die qualitative und quantitative Anisotropie. Zudem werden durch die experimentelle Modalanalyse homogenisierte Elastizitätswerte von realen Hohlkugelstrukturen ermittelt und mit der modellhaften Beschreibung verglichen. Abschließend wird das akustische und frequenzabhängige Absorptions- und Transmissionsverhalten zweier Hohlkugelstruktur-Probenserien bestimmt. Zusätzlich werden die Ergebnisse des JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modells präsentiert.

4.1 Zufällige Kugelpackungen

In diesem Teil der Arbeit werden die zufälligen Kugelpackungen aus Simulation und Rekonstruktion untersucht, charakterisiert und verglichen. Zu Beginn wird auf die realen Packungen von drei verschiedenen Hohlkugelstrukturen eingegangen, danach werden künstlich erzeugte Kugelpackungen betrachtet.

4.1.1 Reale Kugelpackungen

Die versinterte Probe HKS 113 mit einem mittleren Außendurchmesser der Hohlkugeln von 2,6 mm wird in kleine zylinderförmige Proben zerlegt und mit Hilfe der Computertomografie gescannt. An der Hochschule Aalen stehen zwei dreidimensionalen Röntgentomografie zwei Industriegräte zur Verfügung, das RayScan 200 von Wälschmiller und das v|tome|x s von Phoenix. Abhängig von der Probengröße und Auflösung wird der geeignete Computertomograf ausgewählt und die gewonnenen Volumenbilder mit dem Rückföhralgorithmus nach [188] rekonstruiert. Der Ablauf der Rekonstruktion ist für eine Teilprobe in Abb. 4.1 ersichtlich. Für die Probe HKS113 wird eine mittlere Packungsdichte $PD = 0,57$ mit einen Toleranzparameter $\epsilon_K = 2\%$ ermittelt. An der Verteilung der lokalen Dichte (siehe Abb. 4.2a) lässt sich erkennen, dass es lokal mehr und weniger dicht geordnete Bereiche gibt. Die Spanne reicht von 0,45 bis 0,64. Die am meisten vorkommenden lokalen Dichten liegen nahe der mittleren Packungsdichte. Betrachtet man des Weiteren die Bindungswinkel zwischen den benachbarten Kugeln (Abb. 4.2b) erkennt man eine homogene Winkelverteilung, was auf eine Packung mit wenig geordneten bzw. kristallinen Bereiche schließen lässt. Diese Aussage lässt sich durch die geringe Ausprägung der Maxima in der Paarkorrelationsfunktion für die HKS 113 (Abb. 4.3a) bekräftigen. Geringe Ausschläge bei $r = 1$ und $r = \sqrt{3}$ lassen auf wenig geordnete Bereiche zurückschließen, was wiederum einer amorphen Struktur nahe kommt. Ein weiteres Indiz für wenig kristalline Bereiche ist die geringe Anzahl von

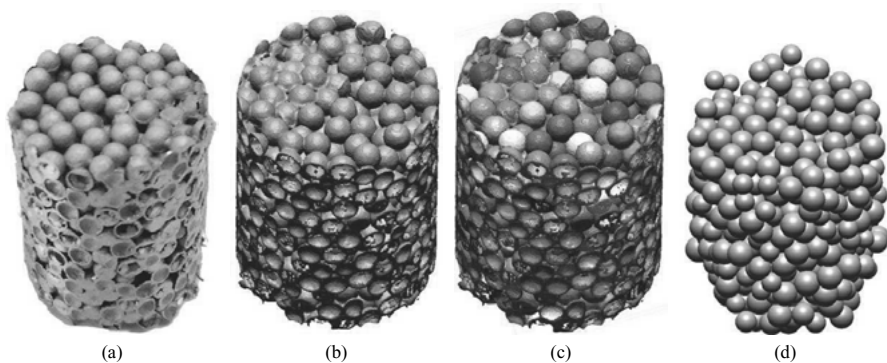


Abbildung 4.1: Rekonstruktionsprozess des Probenkörpers HKS113 a) Originalprobenkörper mit zylindrischer Form, b) Computertomografie Voxelbild, c) erfasste Kugeln und d) rekonstruiertes CAD-Modell.

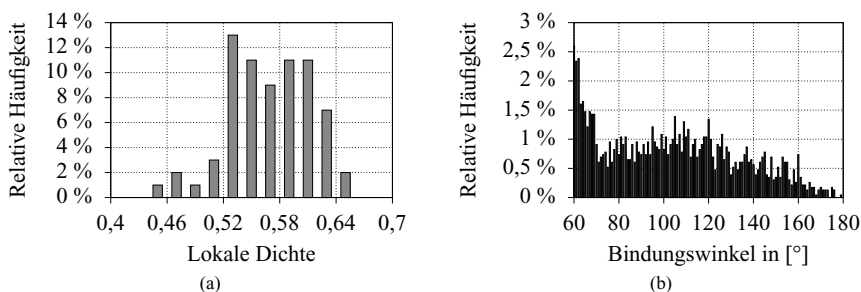


Abbildung 4.2: Kenngrößen der realen Probe HKS 113 a) Verteilung der lokalen Dichte und b) Bindungswinkelverteilung.

höheren Koordinationszahlen (Abb. 4.3b). Die durchschnittliche Koordinationszahl liegt für den ausgewählten Bereich bei $KZ = 6,8$.

Neben der HKS 113 wurde die versinterte HKS 105 mit einem mittleren Außendurchmesser der Hohlkugeln von 1,6 mm und die verklebte Probe HKS 100 mit einem mittleren Außendurchmesser der Hohlkugeln von 3,0 mm untersucht. Betrachtet man die Verteilung der lokalen Dichte in der Abb. 4.4, zeigt sich eine größere Varianz für die verklebte Probe gegenüber der versinterten Probe. Für die verklebte HKS 100 ergab sich eine mittlere Packungsdichte von 0,625 und für die versinterte Probe ein Wert von 0,564. Packungsdichten über 0,74 in der Verteilung lassen auf ikosaedrische Anordnungen schließen, jedoch können diese hohen Werte teilweise durch Ungenauigkeiten bei der Computertomografie und beim Rückführen der Strukturen entstehen.

Ein leicht erhöhtes Auftreten des Bindungswinkels 60° und des Winkelbereiches von 90° bis 120° spricht für lokal geordnete Bereiche (siehe Abb. 4.5). Die lokal geordneten Bereiche spiegeln sich in den lokalen Maxima in der Paarkorrelationsfunktion bei $r = 1$ und $r \approx \sqrt{3}$ für die gesinterte (Abb. 4.6a) und die verklebte (Abb. 4.6b) Struktur wieder. Die Maxima deuten auf KFZ- oder

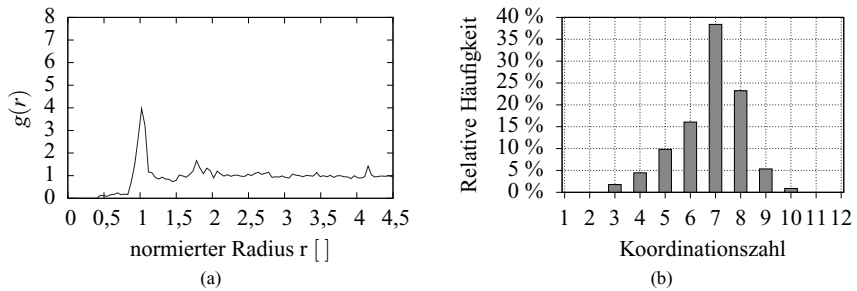


Abbildung 4.3: Weitere Kenngrößen der Probe HKS 113 a) Paarkorrelationsfunktion und b) Verteilung der Koordinationszahl.

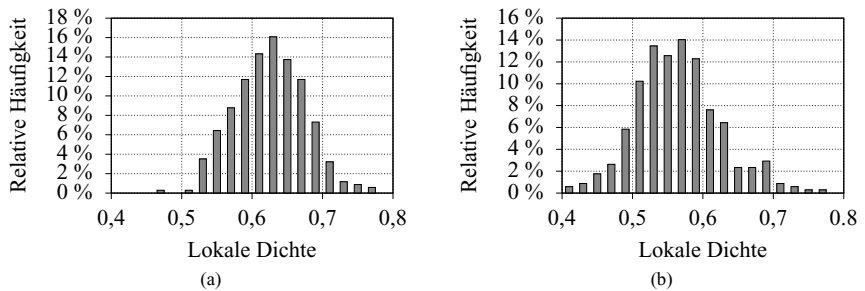


Abbildung 4.4: Verteilung der lokale Dichte - a) HKS 100 und b) HKS 105.

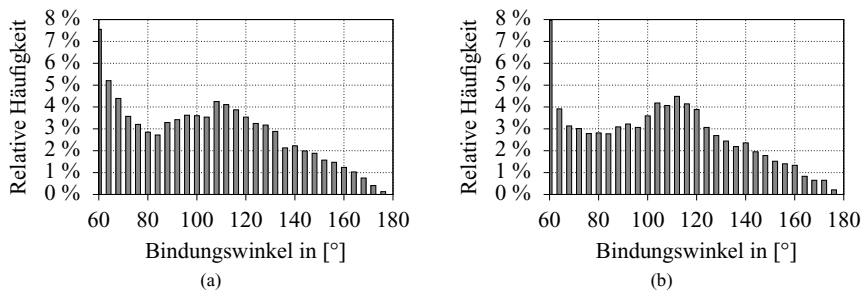


Abbildung 4.5: Verteilung des Bindungswinkels - a) HKS 105 und b) HKS 100.

HPD-geordnete Bereiche hin. Eine Übersicht zur Paarkorrelationsfunktion kubisch geordneter Kugelpackungen kann dem Anhang entnommen werden (siehe Tabelle B.1). Für die mittlere Koordinationszahl wird bei der gesinterten Probe ein Wert von 7,85 und bei der geklebten Probe ein Wert von 9,19 ermittelt. Dabei beträgt der eingestellte Toleranzparameter $\epsilon_K = 0,2\%$. Es

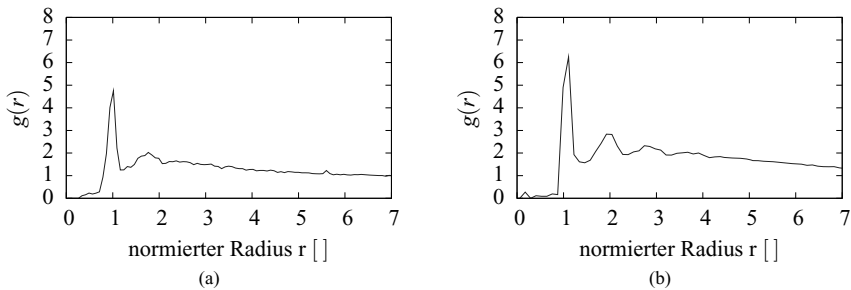


Abbildung 4.6: Paarkorrelationsfunktion - a) HKS100 und b) HKS105.

zeigt sich, dass sich bei steigender Packungsdichte die Koordinationszahl erhöht. Die Verteilung der Koordinationszahlen kann aus Abb. 4.7 entnommen werden. Der Verlauf ähnelt stark einer Normalverteilung.

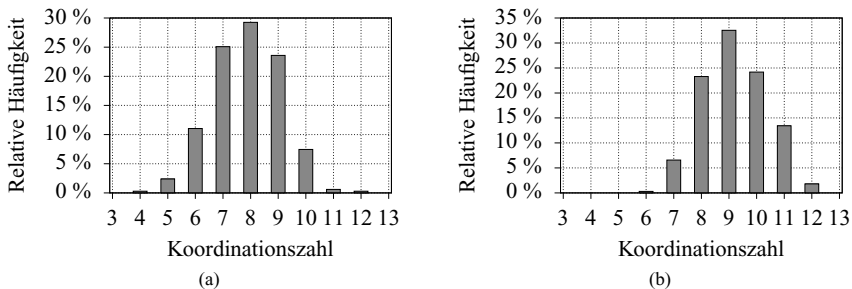


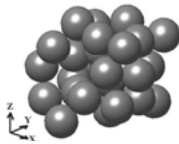
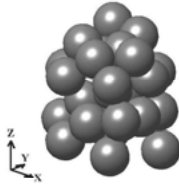
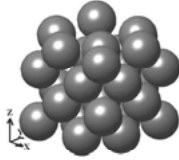
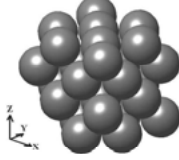
Abbildung 4.7: Verteilung der Koordinationszahl - a) HKS 105 und b) HKS 100.

4.1.2 Erzeugte Kugelpackungen

Neben den aus realen Strukturen gewonnenen Kugelpackungen können mittels des Forced-Biased-Algorithmus zufällige Packungen generiert werden. Der Algorithmus ist sehr leistungsfähig und kann Packungen mit mehreren tausend Kugeln erzeugen. Eine Besonderheit dieses Algorithmus ist es, auch hochverdichtete Packungen erzeugen zu können. Des Weiteren ist die Packungsfolge in allen drei Raumrichtungen periodisch. Für die Simulation sollen repräsentativ vier verschiedene, zufällige Kugelpackungen erzeugt werden. Vorgabe war es, eine lose, eine mittlere, eine hoch und eine höchst verdichtete Packung zu erzeugen. Die Anzahl der Kugeln in den Packungen wird auf 30 begrenzt. Grund hierfür ist die Realisierbarkeit der Parametrisierung der Kugelgeometrie im CAD-Programm. Dabei stellen die CAD- und FEM-Programme bzw. die Rechnerleistung limitierende Faktoren dar. Die Namen der zufällig erzeugten Packungen orientieren sich an der Packungsdichte. Die Packungsdichten liegen zwischen $PD = 0,547$ und $PD = 0,694$. Eine grafische Darstellung

der Packungen ist Tabelle 4.1 zu entnehmen. Die lose und die mittlere Packung P55 und P62 charakterisieren sich durch ein amorph-ähnliches Verhalten. Dieses Verhalten wird gekennzeichnet durch den Verlauf der Paarkorrelationsfunktion und die Verteilung der Bindungswinkel. Bei P55 hat die Paarkorrelationsfunktion (siehe Tabelle 4.2) ein ausgeprägtes Maximum bei $r = 1$. Es treten keine weiteren nennenswerten Maxima auf. Ein fast analoges Verhalten hierzu hat die Packung P62. Die Paarkorrelationsfunktion weist nur nahe $r = 2$ ein sehr schwaches Maximum auf. Dies deutet auf eine sehr schwache Ordnung im Nahordnungsbereich hin. Betrachtet man des Weiteren die Verteilung der Bindungswinkel (siehe Tabelle 4.2), stellt man keine besondere Häufung gewisser Winkel fest. Die Verteilungen der lokalen Dichte und die Koordinationszahl für die Packungen P55 und P62 (siehe Tabelle 4.2) beschreiben ebenfalls ein ähnliches Verhalten. Es

Tabelle 4.1: Überblick über die mittleren Kenngrößen zufälliger Kugelpackungsmodelle.

Modell	Visualisierung	mittlere lokale Dichte	mittlere Koordinationszahl
P55		0,547	5,80
P62		0,623	7,67
P66		0,661	10,47
P69		0,694	11,20

treten weder hohe lokale Dichten ($> 0,7$) noch hohe Koordinationszahlen > 11 auf. Ein wesentlich anderes Verhalten ist bei der Packung P66 festzustellen. Am Verlauf der Paarkorrelation werden deutliche Maxima sichtbar. Betrachtet man die ersten drei Maxima, so erkennt man einen affinen Verlauf zur KFZ-Packung (siehe Tabelle B.1). Ebenfalls für eine geordnete Packung spricht die Häufigkeit der Bindungswinkel um 60° , 90° , 120° und 180° . Aus der lokalen Dichte lässt sich

erkennen, dass es einige Bereiche mit hohen Packungsdichten und wenige mit sehr niedrigen Packungsdichten gibt. Dies spricht für eine geordnete Struktur mit Fehlstellen. Ein analoges Verhalten erkennt man bei der Verteilung der Koordinationszahl. Es gibt viele Bereiche mit zahlreichen Kontakten und einzelne Bereiche mit wenigen Kontakten. Die Packung P69 stellt ein Extrembeispiel dar. Die Paarkorrelationsfunktion verläuft fast deckungsgleich zum Verlauf der KFZ-Packung (siehe Tabelle B.1). Ebenfalls typisch für eine völlig durchgeordnete Struktur ist der Verlauf der Bindungswinkel. Hier sind deutliche Maxima bei den charakteristischen Winkeln zu erkennen. Ein weiteres Indiz für eine geordnete Packung ist die hohe lokale Dichte $> 0,6$ und die Koordinationszahl ≥ 10 . Die Packung P69 entspricht nahezu einer KFZ-Anordnung, nur an den Verläufen der lokalen Dichte und der Koordinationszahl lässt sich erkennen, dass Fehlstellen in der Struktur vorhanden sind. Im Folgenden sollen die zufällig erzeugten und auf realen Strukturen basierenden Kugelpackungen miteinander verglichen werden. Die in Abb. 4.8 mit dem Plus gekennzeichneten Werte repräsentieren die Packungen mit idealen bzw. theoretischen Ordnungen. Die durch Kreuz verdeutlichten Werte wurden von Bernal und Manson [20] bestimmt. Die ausgefüllten Quadrate entsprechen den Werten von Smith et al. [197] und die Kreise den Werten von Gotoh und Finney [78]. Die Sterne kennzeichnen die Kennwerte aus den zufällig generierten Packungen und Quadrate bestimmen die Kennwerte aus den realen Hohlkugelstrukturen mittels Computertomografie und Rekonstruktionsalgorithmus. Die Linie stellt die lineare Regression aller zufälligen Packungen dar. Die Regressionsgerade verbindet fast die KP-Anordnung mit der KFZ-Anordnung. Die Werte von Bernal und Manson bzw. Gotoh und Finney liegen unterhalb dieser Geraden. Wiederrum liegen die Werte von Smith et al. über bzw. auf der Geraden. Die Werte des Forced-Biased-Algorithmus liegen in der Bandbreite der zufälligen Kugelpackungen über und unter der Regressionsgerade. Die aus der Rekonstruktion gewonnen Kennwerte liegen auf oder sehr nahe an der Geraden. Als einziger Ausreißer kann die KRZ-Anordnung gesehen werden. Sie hat bei hoher Packungsdichte eine relativ geringe mittlere Koordinationszahl. Aus dem Diagramm wird eine Korrelation zwischen Packungsdichte und Koordinationszahl ersichtlich. Mit zunehmender Packungsdichte nimmt die Koordinationszahl zu.

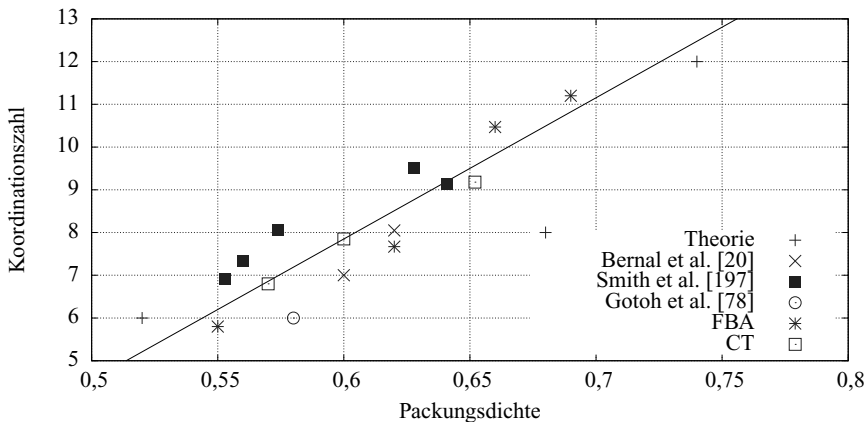
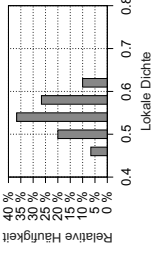
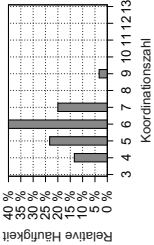
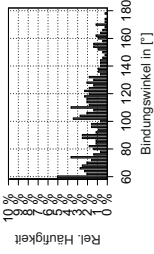
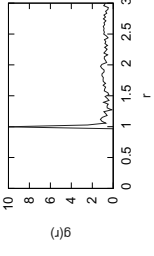
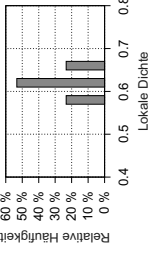
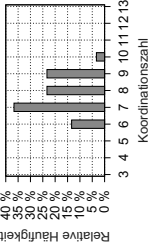
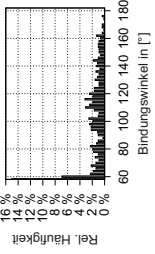
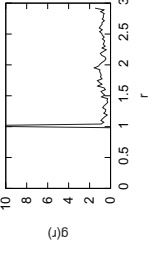
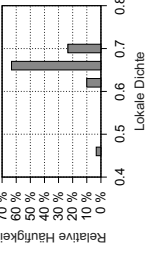
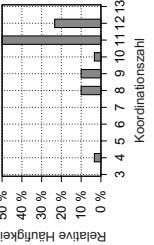
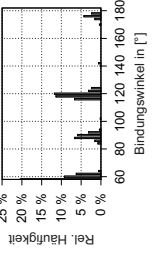
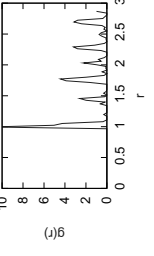
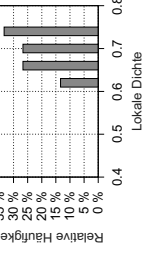
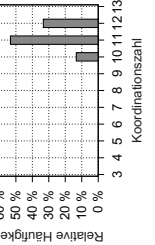
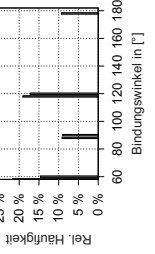
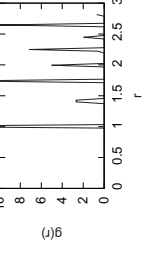


Abbildung 4.8: Mittlere Koordinationszahl über mittlere Packungsdichte

Tabelle 4.2: Überblick über die Kenngrößen zufälliger Kugelpackungen.

Modell	Lokale Dichte	Koordinationszahl	Bindungswinkel	Paarkorrelation
P55				
				
P66				
				

4.2 Statik

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse aus den Finite-Elemente-Berechnungen präsentiert. Als Grundlage dient die Modellbildung aus dem vorhergehenden Kapitel. Die Modelle basieren auf der Annahme einer periodischen Einheitszelle (EZ) bzw. eines periodischen Repräsentativen Volumenelements (RVE). Für die Bestimmung der statischen linearen Eigenschaften werden die periodischen bzw. orthogonal gemischten Randbedingungen genutzt. Es werden sowohl theoretisch geordnete als auch stochastische Kugelpackungen für gesinterte Hohlkugelstrukturen betrachtet. Verklebte und verlötete Hohlkugelstrukturen wurden schon ausgiebig in Sanders [184] und Gasser et al. [72] studiert. Für alle Modelle wird ein linear-elastisches Material angenommen. Zu Beginn werden die Einflüsse der Basis- bzw. Strukturmaterialeigenschaften untersucht, die durch den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl des Werkstoffes beschrieben werden. Ziel dieser Untersuchung ist eine materialunabhängige Beschreibung des Elastizitätsmoduls, der durch ein Verhältnis des homogenisierten Elastizitätsmoduls der Hohlkugelstruktur zum Elastizitätsmodul des Strukturmaterials ausgedrückt wird. Dieses Verhältnis wird fortan als relativer Elastizitätsmodul bezeichnet. Aus der Kinetik, dem linearen Materialgesetz und der Kinematik mit linearen Randbedingungen ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen dem homogenisierten Elastizitätsmodul der Hohlkugelstruktur und dem Elastizitätsmodul des Strukturmaterials $E_1^* \propto E_S$. Dieser lineare Zusammenhang wird durch die eigene Variationsberechnung bestätigt und durch Gao et al. [70] belegt. Schließlich werden alle Modelle mit einem Strukturelastizitätsmodul von $E_S = 200$ MPa berechnet. Eine weitere materielle Einflussgröße ist die Querkontraktionszahl ν . Aus eigenen Berechnungen wird ein zu vernachlässigender Einfluss der Querkontraktionszahl ermittelt, der durch die Arbeit von Sanders und Gibson [185] bestätigt wird. Die Querkontraktionszahl wird aus diesem Grund wahlweise für alle Modelle $\nu = 0,3$ gesetzt. Die genutzten Werkstoffwerte für das Hohlkugelmateriale entsprechen den Werten von Stahl für die durchgeführten Berechnungen. Die Finite-Elemente-Netze der verschiedenen Hohlkugelstrukturen, basierend auf ideal angeordneten und zufällig generierten Packungen, werden aus den CAD-Geometrien gewonnen. Zur Erstellung der Netze und zur Simulation wird das kommerzielle FEM-Programm ANSYS genutzt. Für die Simulation werden die Geometrien mit Tetraeder und Hexaeder Volumenelementen des Typs Solid 187 und Solid 186 vernetzt. Während die geordneten Modelle ausschließlich mit dem 20-knotigem Hexaederelement vernetzt werden, wird bei den zufällig angeordneten Modellen zusätzlich das 10-knotige Tetraederelement verwendet. Zur Berechnung stand eine Hewlett Packard Z800 Workstation mit 4x2,4 GHz Taktfrequenz und 16 GB Arbeitsspeicher zur Verfügung. Die Modelle werden so gestaltet, dass der Effekt einer Änderung der Parametergrößen (Kugelwanddicke, Kugeldurchmesser und Sinterstellendurchmesser bzw. Sinterstellenwinkel) eine mechanische Antwort der HKS berechnet werden kann. Es wird für jede Parametergröße ein kompletter Parametersatz simuliert. Um eine verlässliche Aussage der Modelle zu erhalten, wird eine Konvergenzbetrachtung durchgeführt. Dabei zeigen sich gute Ergebnisse bei fünf Elementen über die Wanddicke und bei 40 Elementen über die halbe Kugellänge der idealen Elementarzellen. Abbildung 4.9 zeigt die Elementarzelle der vier verschiedenen, theoretisch geordneten Packungen. Die Elementzahl variiert von 60.000 für die KP-Elementarzelle (EZ-KP) bis 210.000 für die HDP-Elementarzelle (EZ-HDP).

Für die zufällig geordneten Strukturen wurde jeweils ein RVE-FE-Modell mit 30 Kugeln erzeugt. Die Anzahl der Kugeln wurde bewusst gering gehalten, damit eine ausreichende Netzauflösung im FE-Modell noch gewährleistet ist. Hierbei ist ein Kompromiss zwischen Netzfeinheit und Kugelanzahl einzugehen. Mit steigender Rechenleistung werden zukünftig mehr Kugeln berechenbar sein. Die kubisch periodischen Strukturen des RVE-Modells erfordern auch ein periodisches Netz. Dies bedeutet, dass das Oberflächennetz an den gegenüberliegenden Schnittflächen deckungsgleich ist.

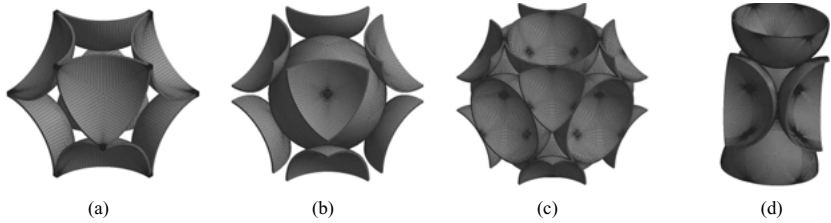


Abbildung 4.9: FE Modelle theoretisch geordneter Strukturen a) KP Anordnung, b) KRZ Anordnung, c) KFZ Anordnung und d) HDP Anordnung.

Die Elementanzahl variiert von 420.000 bis 710.000 Elementen, in Abhängigkeit vom Modell und den eingestellten Parametern. Abbildung 4.10 zeigt die FE-Modelle basierend auf den zufällig generierten Packungen aus Tabelle 4.1.

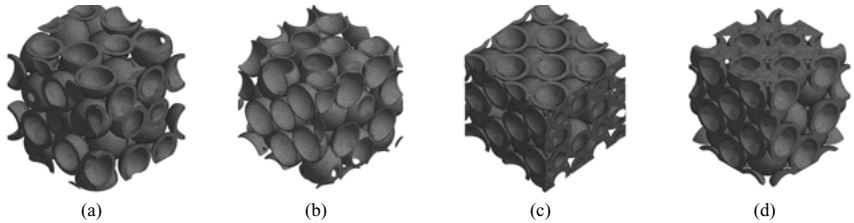


Abbildung 4.10: FE Modelle zufällig generierter Strukturen a) KP55 Anordnung, b) KP62 Anordnung, c) KP66 Anordnung und d) KP69 Anordnung.

4.2.1 Einachsige Belastung

Der erste Teil befasst sich mit dem einachsigen Zug in 1 bzw. x -Richtung. Hierbei werden Materialkennwerte wie Elastizitätsmodul E_1 und Querkontraktionszahl ν_{12} für die Richtung x bzw. 1 in Abhängigkeit der drei Geometrieparameter Kugeldurchmesser D , Kugelwanddicke und Sinterstellendurchmesser D_s bzw. Sinterstellenbindungswinkel Φ vorgestellt und ihren Einflüsse verdeutlicht. Zu Beginn wird der Einfluss des Kugeldurchmesser bei konstanter Wanddicke und konstantem Sinterstellenbindungswinkel von $\Phi = 5,7^\circ$ betrachtet. Das Verhältnis von Kugelwanddicke zu Kugeldurchmesser variiert von $\frac{t}{D} = 0,02$ bis $0,04$. Hierbei wird auf die theoretischen Kugelanordnungen, kubisch-primitiv (KP), kubisch-raumzentriert (KFZ), kubisch-flächenzentriert (KFZ) und hexagonal-dichtest-gepackt (HDP) eingegangen. Für die HDP-Anordnung wurde eine besondere Form der periodischen Randbedingung eingeführt, da diese keine kubisch periodische Struktur darstellt. Die periodische Randbedingung für die einachsige Belastung in Längsrichtung wird im Anhang erläutert.

Die Marker in den Abbildungen 4.11 - 4.18 stellen jeweils einen Berechnungswert dar und die interpolierte Volllinie soll einen Trend wiedergeben. Wie in Abb. 4.11 ersichtlich, zeigen sich die dichteren Kugelpackungen erwartungsgemäß steifer. Mit zunehmendem Verhältnis von Kugelwanddicke zu Kugeldurchmesser $\frac{t}{D}$ ergibt sich eine Zunahme des Verhältnisses des Elastizitätsmo-

duls der homogenisierten Hohlkugelstruktur zum Elastizitätsmodul des Strukturmaterials (Stahl) $\frac{E_1^*}{E_s}$. Dieses Verhältnis kann als ein Maß für die Steifigkeit interpretiert werden. Betrachtet man das

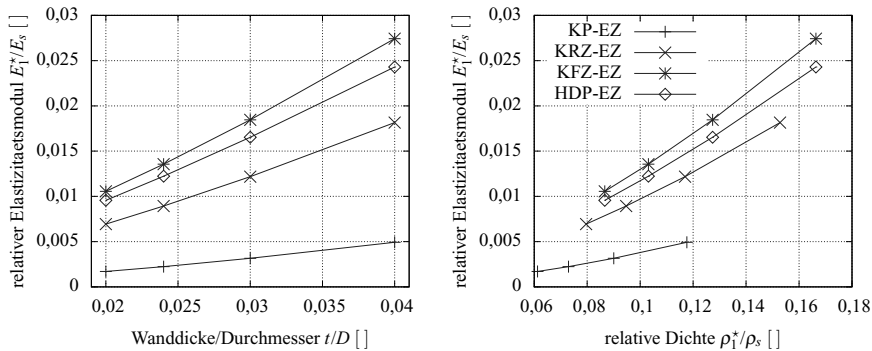


Abbildung 4.11: Parametervariation Kugeldurchmesser bei konstanter Wanddicke und konstantem Sinterstellenwinkel, Einfluss auf den relativen Elastizitätsmodul.

Ganze auf Basis der relativen Dichten, sprich dem Verhältnis der Dichte der Struktur ρ_1^* zur Dichte des Strukturmaterials (Stahl) ρ_s , so wird der Effekt der dichteren Packung etwas geringer, da diese auch eine höhere Dichte besitzt. Es zeigt sich, dass die Werte von dichter gepackten Strukturen (KRZ, KFZ und HDP) sehr eng beieinanderliegen und eine stärkere Zunahme des relativen Elastizitätsmoduls zeigen. Unerwarteterweise weist die HDP-Anordnung geringe Steifigkeitswerte gegenüber der KFZ-Anordnung auf, was eventuell auf die andere Modellierungsart der Randbedingungen zurückzuführen ist. Ein weiterer Erklärungsansatz liegt in der Richtungsabhängigkeit des Elastizitätsmoduls und der dazugehörigen Symmetrie.

Legt man das Augenmerk auf die Querkontraktionszahl der homogenisierten Struktur in x-Richtung (ν_{12}) (Abb. 4.12), erkennt man bei geringen Verhältnissen von Wanddicke zu Kugeldurchmesser $\frac{t}{D}$ große negative Werte. Dieses Verhalten ist sehr ungewöhnlich für Körper bestehend aus Vollmaterial, jedoch nicht für Schäume und Fasermaterialien. Die dicht gepackten Packungen KRZ, KFZ und HDP zeigen dieses Verhalten, jedoch hat die KP-Anordnung einen nahezu konstanten Verlauf knapp über Null.

Neben dem Kugeldurchmesser lässt sich auch der Sinterstellendurchmesser bzw. Sinterstellenwinkel variieren. Abbildung 4.13 zeigt den Einfluss des Parameters Sinterstellendurchmesser auf den Elastizitätsmodul bei einem konstantem Verhältnis von Wanddicke zu Durchmesser $\frac{t}{D} = 0,6$. Eine Steigerung des Verhältnisses Sinterstellendurchmesser zu Kugeldurchmesser bewirkt eine größere Zunahme des relativen Elastizitätsmoduls als bei der Steigerung des Verhältnisses Wanddicke zu Kugeldurchmesser bei der Durchmesservariation (vgl. Abb. 4.11). Dieser Effekt wird deutlich, wenn man die Variation auf die relative Dichte bezieht. Hier reicht schon eine sehr geringe Steigerung, um ein deutliche Zunahme des relativen Elastizitätsmodul zu erreichen (siehe Abb. 4.13). Es zeigt sich, wie schon bei der anderen Parametervariation, dass mit steigender Packungsdichte auch der Elastizitätsmodul zunimmt. Ebenfalls zeigen KFZ- und HDP-Anordnung die höchsten Steifigkeiten.

Betrachtet man des Weiteren die Querkontraktionszahl in Abb. 4.14, so ist zu erkennen, dass die KP Anordnung geringfügig über Null liegt und sehr schwach wächst. Wiederum besitzen die dichtgepackten Anordnungen (KRZ, KFZ und HDP) relativ große negative Werte, wobei

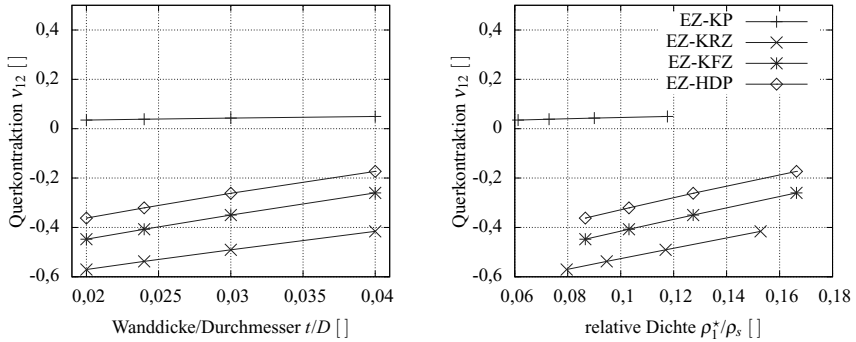


Abbildung 4.12: Parametervariation Kugeldurchmesser bei konstanten Werten für Wanddicke und Sinterstellenwinkel, Einfluss auf die Querkontraktionszahl.

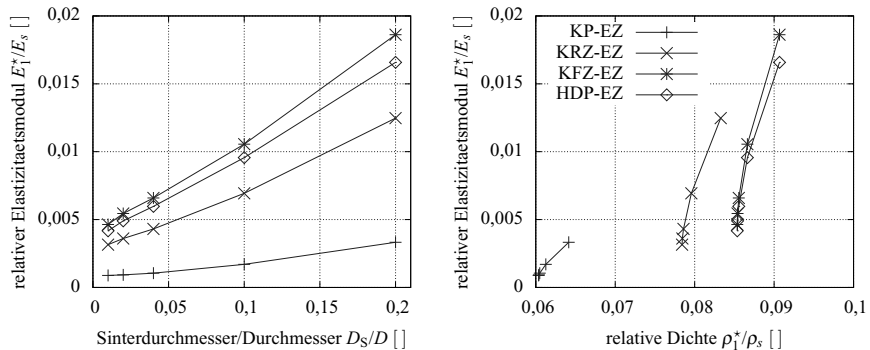


Abbildung 4.13: Parametervariation Sinterstellendurchmesser bei konstanten Werten für Wanddicke und Kugeldurchmesser, Einfluss auf den relativen Elastizitätsmodul.

sich ein lokales Minimum bei ungefähr einem Verhältnis von Sinterstellendurchmesser zu Kugeldurchmesser $\frac{D_s}{D}$ von 0,5 einstellt. Die lokalen Minima werden deutlich sichtbar, wenn sich die Querkontraktionszahl auf die relative Dichte bezieht.

Das Verhältnis Sinterstellendurchmesser zu Kugeldurchmesser kann auch durch den Sinterstellenwinkel ausgedrückt werden. Abbildung 4.15 gibt diese Betrachtung in Abhängigkeit des Sinterstellenwinkels wieder. Für kleine Winkel besteht eine nahezu lineare Abhängigkeit. Aus diesem Grund erhält man fast identische Verläufe für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl. Dem Anhang kann eine Variation des Sinterstellenwinkels Φ von 5° bis 20° für die idealen Packungen KP, KFZ und KFZ entnommen werden.

Während bei der Variation des Sinterstellendurchmessers und des Kugeldurchmessers auf die idealen, packungsbasierenden Elementarzellen eingegangen wird, werden man bei der Variation der Kugelwanddicke zusätzlich die vier zufällig erzeugten RVEs mit einer Packungsdichte von 55% bis 69% betrachtet. Bei der Untersuchung ändert sich das Verhältnis von Wanddicke zu

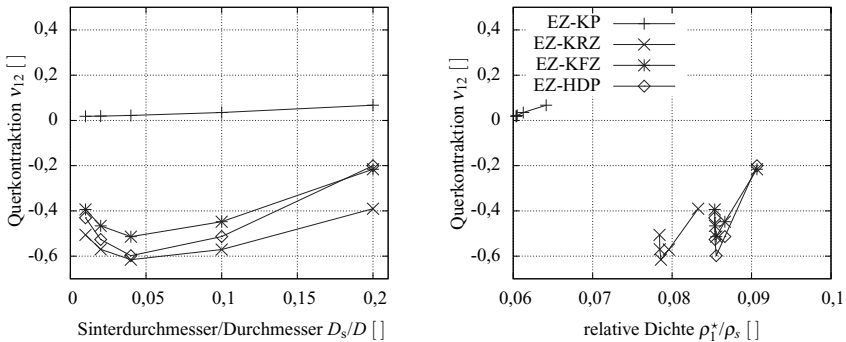


Abbildung 4.14: Parametervariation Sinterstellendurchmesser bei konstanten Werten für Wanddicke und Kugeldurchmesser, Einfluss auf die Querkontraktionszahl.

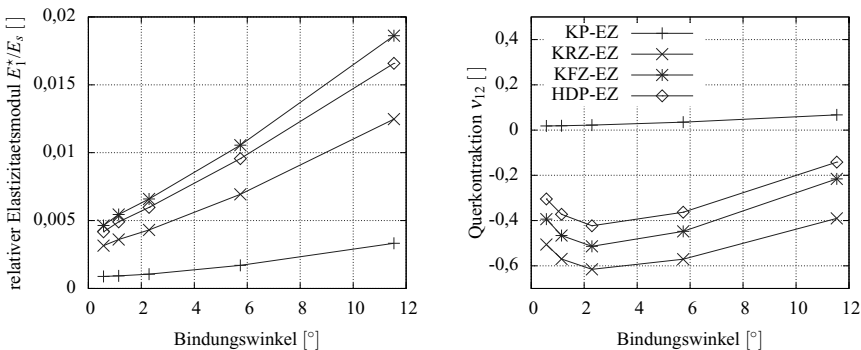


Abbildung 4.15: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluss auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

Kugeldurchmesser $\frac{t}{D}$ in sechs Schritten von 0,004 bis 0,05. Dies entspricht den üblichen und vorliegenden Probenverhältnissen. Das Verhältnis von Sinterstellendurchmesser zu Kugeldurchmesser wird auf 0,267 eingestellt, was einem Winkel von $15,5^\circ$ entspricht.

Begutachtet man in Abb. 4.16 die Verläufe der relativen Elastizitätsmoduln in Abhängigkeit von der normierten Wanddicke, lassen sich wiederum bei der KP-Elementarzelle mit ca. 52% Packungsdichte die geringsten Werte erkennen. Mit geringfügig größeren relativen Elastizitätsmodulwerten in x -Richtung zeigt sich das RVE Modell mit 55% Packungsdichte. Erwartungsgemäß ordnen sich der Verläufe des RVE-Modells mit 62% Packungsdichte und des RVE-Modells mit 66% Packungsdichte zwischen dem RVE-Modell mit 55% und der KRZ-Elementarzelle mit ca. 68% Packungsdichte ein. Als anfänglich unerwartet stellt sich der Verlauf des RVE-Modells mit 69% Packungsdichte gegenüber der HDP-Elementarzelle heraus, da diese in x -Richtung einen geringfügig höheren Verlauf des relativen Elastizitätsmoduls über die normierte Wanddicke besitzt. Grund hierfür kann möglicherweise die Varianz des Sinterstellendurchmessers bei den zufällig

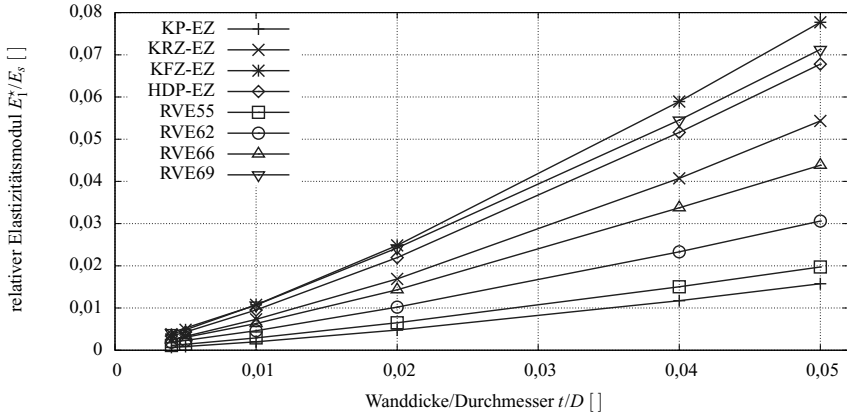


Abbildung 4.16: Parametervariation Kugeldurchmesser bei konstanten Werten für Wanddicke und Sinterstellenwinkel, Einfluss auf die Querkontraktionszahl.

geordneten Modellen sein. Des Weiteren wird ein nahezu identischer Verlauf der Werte für HDP- und KFZ-Elementarzelle erwartet, jedoch erweist sich die KFZ-Anordnung als steifer in x -Richtung. Dieses Phänomen lässt sich durch die unterschiedliche Form der Elementarzellen und damit verbundene Periodizität erklären. Gao et al. [70] bestätigen diesen Effekt. Während KP-, KRZ- und KFZ-Modelle und alle zufällig erzeugten RVE-Modelle eine kubische Form der Elementarzelle bzw. des repräsentativen Volumelements besitzen, besteht die Form der HDP Elementarzelle aus einem prismatischen Körper mit hexagonaler Grundfläche. Aus der Form der Elementarzelle ergibt sich ein richtungsabhängiger Elastizitätsmodul der im nachfolgenden Abschnitt näher behandelt wird.

Bezieht man nun den relativen Elastizitätsmodul auf die relative Dichte und trägt beide Achsen logarithmisch auf, erhält man Verläufe, wie in Abb. 4.17 dargestellt. Die Zunahme des relativen Elastizitätsmoduls mit der Packungsdichte und relativer Dichte wird deutlich sichtbar. Alle Verläufe der einzelnen Modelle entsprechen im doppelt-logarithmischen Diagramm nahezu einer Geraden, was auf eine Potenzfunktion schließen lässt. Es kann für jedes Modell folgender Potenzansatz gemacht werden:

$$\frac{E_1^*}{E_s} = C_1 \left(\frac{\rho_1^*}{\rho_s} \right)^{C_2} \quad (4.1)$$

wobei C_1 und C_2 modell- bzw. parameterabhängige Konstanten sind. Einige Konstanten für geklebte und verlötete Strukturen lassen sich aus Sanders und Gibson [183, 185] und Gasser et al. [72, 72] entnehmen. Betrachtet man die Verläufe in Abb. 4.17 näher, erkennt man einen nahezu parallelen Verlauf zwischen den Modellvarianten. Dies lässt darauf schließen, dass das Verhältnis von Wanddicke zu Kugeldurchmesser $\frac{t}{D}$ in Abhängigkeit der Modellvariante fast ausschließlich die Konstante C_1 beeinflusst. Auf die nähere Bestimmung der Konstanten wird in dieser Arbeit verzichtet, da eine Bestimmung mittels Diagramm als praxisnäher empfunden wird.

Im Weiteren wird die Querkontraktion über dem Verhältnis von Wanddicke zu Kugeldurchmesser in Abb. 4.18 behandelt. Die Verläufe zeigen hier keinen eindeutigen Trend. So beschreiben die KRZ-Anordnungen die untere Grenze der Querkontraktionszahl bzw. die KP-Anordnung bei kleinen und die HDP-Anordnung bei großen $\frac{t}{D}$ Verhältnissen die obere Grenze. Die RVE55- und

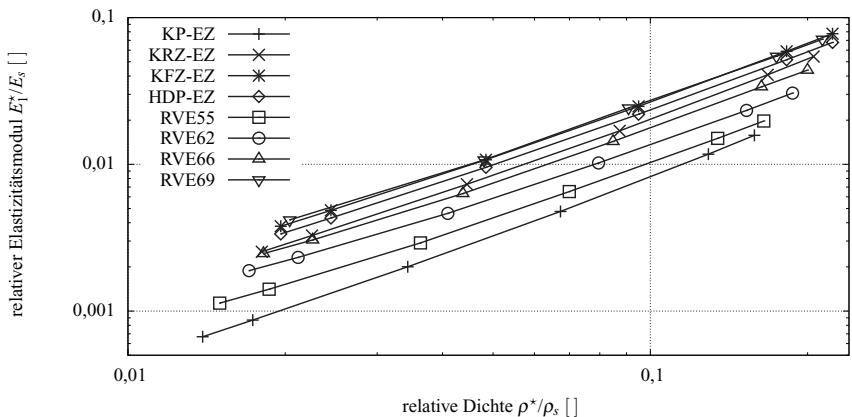


Abbildung 4.17: Parametervariation Kugeldurchmesser bei konstanten Werten für Wanddicke und Sinterstellenwinkel, Einfluss auf den Elastizitätsmodul.

RVE62- Modelle basierend auf einer losen und mittleren dichten Packung bzw. armorph-ähnlichen Struktur zeigen einen Querkontraktionsverlauf nahe Null, wobei die Querkontraktionszahl in „2“- und „3“- Richtung (v_{12} und v_{13}) deutlich abweichen. Bei den hoch und höchst dichtgepackten zufälligen Packungen sind die Abweichung in beide Raumrichtungen wesentlich geringer. Als einziger Trend ist festzustellen, mit ein paar wenigen Ausnahmen, dass mit zunehmendem Verhältnis von Wanddicke zu Kugeldurchmesser die Querkontraktionszahl der homogenisierten Struktur auch zunimmt.

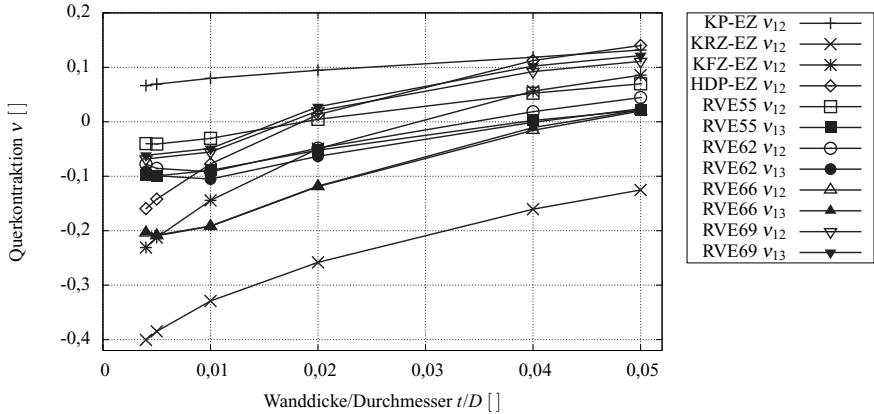


Abbildung 4.18: Parametervariation Kugeldurchmesser bei konstanten Wanddicke und Sinterstellenwinkel, Einfluss auf die Querkontraktionszahl.

4.2.2 Mehrachsige Belastung - Materialsymmetrien

Da eine virtuelle einachsige Zug- bzw. Druckbelastungsuntersuchung keinen eindeutigen Rückschluss auf das Materialverhalten gibt, wird eine Untersuchung in mehreren Achsen veranlasst. Zusätzlich stellt sich bei der Untersuchung der verschiedenen Kugelanordnungen die Frage nach der Materialsymmetrie bzw. nach der Isotropie. Aus diesem Grund werden ideale und zufällig erzeugte Kugelanordnungen mit unterschiedlichen Packungsdichten betrachtet. Als Referenz wird die in vielen Literaturstellen (z.B. [37]) erwähnte, kubisch primitive Anordnung herangezogen. Hierfür wurden alle sechs Lastfälle, drei Zug- bzw. Schubfälle in drei Raumrichtungen mittels FE-Berechnung nachgebildet. Mit diesen sechs Lastfällen lässt sich der gesamte Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitstensor bestimmen. Es werden ähnliche Parametereinstellungen wie bei der Kugelwanddicken-Variation des zuvor beschriebenen Abschnitts verwendet. Es wird lediglich das Verhältnis Sinterstellen zu Kugeldurchmesser von 0,8 auf 0,9 erhöht, was einem Sinterstellenwinkel von $17,5^\circ$ entspricht.

Abbildung 4.19 zeigt den richtungsabhängigen Elastizitätsmodul. Der Betrag ergibt sich aus der Distanz vom Koordinatenursprung bis zur Kurve bzw. Oberfläche. Es werden drei Verläufe in den markanten Ebenen (xy , yz und xz) und ein sogenannter dreidimensionaler Elastizitätsmodulkörper dargestellt. Die verschiedenen Parametervariationen werden durch unterschiedliche Linientypen deutlich gemacht, teilweise mit Markern versehen. In allen Variationen zeigt sich für den richtungsabhängigen Elastizitätsmodul in den Schnittebenen ein quadratförmiger Verlauf mit abgerundeten Ecken und eine konkave Wölbung in der Mitte der Seiten. Alle Verläufe sind in allen drei Ebenen identisch bzw. deckungsgleich. Dementsprechend gestaltet sich der dreidimensionale Elastizitätsmodulkörper als ein Würfel mit abgerundeten Ecken und im Flächenschwerpunkt eingedrückten Würfelflächen. Es lässt sich unschwer erkennen, dass Minima des Elastizitätsmoduls jeweils in Achsenrichtung ($\langle 100 \rangle$, $\langle 010 \rangle$, $\langle 001 \rangle$) auftreten. Die Maxima treten in der Ebenenbetrachtung in der Diagonale unter 45° auf. Sie entsprechen den positiven Richtungen in $\langle 110 \rangle$, $\langle 101 \rangle$ und $\langle 011 \rangle$. Die negativen Richtungen und aus negativen und positiven kombinierten Richtungen werden aus Symmetriegründen nicht aufgeführt. Die Symmetrie entspricht der kubischen Materialsymmetrie (siehe Tabelle A.1) und lässt sich mit drei unabhängigen Materialkonstanten (E_{kub} , ν_{kub} und G_{kub}) beschreiben [5]. So ergibt sich beispielsweise für eine KP-Anordnung mit einem äußeren Kugeldurchmesser von 3 mm, einer Wanddicke von 0,03 mm und Sinterstellendurchmesser von 0,9 mm bzw. einem Sinterstellenwinkel von $17,4^\circ$ ein Wert für $E_{\text{kub}} = 479,8$ MPa. Der Elastizitätsmodul des Grundmaterials (Werkstoff Hohlkugel) beträgt hierbei 200 GPa. Bei dieser Konstellation erhält man für $\nu_{\text{kub}} = 0,0944$ und $G_{\text{kub}} = 744,4$ MPa. Diese Elastizitätswerte (E_{kub} , ν_{kub} und G_{kub}) sind unabhängig voneinander und beschreiben einen Sonderfall der Anisotropie (kubische Materialsymmetrie). Der niedrige Wert der Querkontraktionszahl ist bedingt durch den Strukturaufbau der HKS und kann nicht mit einem homogenen (isotropen) Vollkörper verglichen werden. Bildet man das arithmetische Mittel des richtungsabhängigen Elastizitätsmoduls $\bar{E}_{\text{arith}} = 677,9$ MPa, so ist zu erkennen, dass der Elastizitätsmodul in $\langle 100 \rangle$ Richtung wesentlich geringer als der durchschnittliche Elastizitätsmodul ausfällt. Bei der KP-Anordnung zeigt sich, dass der Wert von G stets größer ist als der von E . Dies deutet darauf, dass die Struktur unter Schubbelastung steifer ist als unter Zug- bzw. Druckbelastung. Gut erkennen lässt sich des Weiteren, dass sich die Form des Elastizitätsmodulkörpers und deren Schnitte über die Variationen der Kugelwanddicke nicht wesentlich ändert, was einer reinen Skalierung nahe kommt. Somit ändert sich kaum das Materialverhalten bei dieser Variation.

Die Verläufe der relativen und richtungsabhängigen Elastizitätsmodule für die KRZ Anordnung werden in Abb. 4.20 dargestellt. Im Vergleich zur KP Anordnung erkennt man hier ein ganz anderes Materialverhalten. Betrachtet man den Verlauf in den drei Ebenen, erkennt man im Unterschied zu

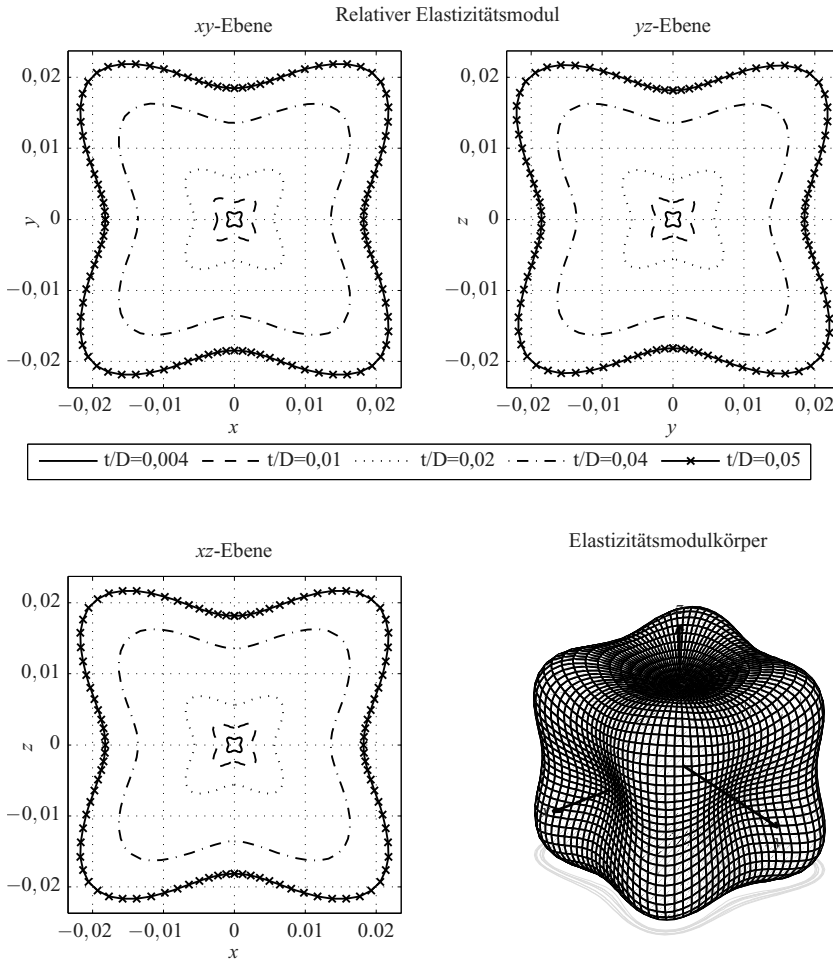


Abbildung 4.19: Kubisch-primitive Elementarzelle - Elastizitätsmodulkörper: Variation der Wanddicke

den KP Anordnungen einem um 45° zum Ursprung verdrehten Verlauf. Die Verläufe in den drei Ebenen sind ebenfalls identisch. Zudem zeigen sich alle Verläufe in der Form ähnlich. Der dreidimensionale Elastizitätsmodulkörper präsentiert sich ähnlich einer Kugel, bei der die positiven und negativen Achsenrichtungen gestreckt werden. Aus den Geometrien der Elastizitätsmodulkörper in zwei- und dreidimensionaler Darstellung lässt sich leicht erkennen, dass das globale Maximum des richtungsabhängigen Elastizitätsmodulwertes in $\langle 100 \rangle$ Richtung zu finden ist. Erst bei genauer Betrachtung ist das Minimum in $\langle 111 \rangle$ Richtung zu finden. Die Materialsymmetrie entspricht ebenfalls, wie bei der KP-Anordnung, der kubischen Symmetrie und lässt sich mit den drei vonein-

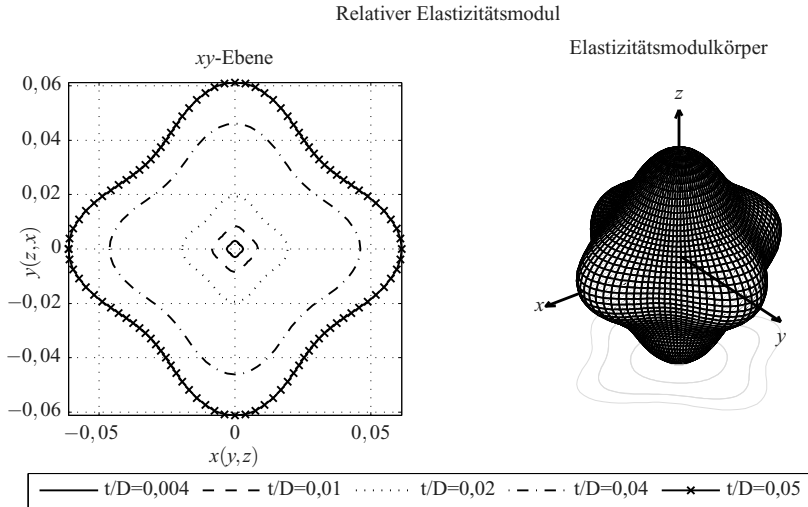


Abbildung 4.20: Kubisch-raumzentrierte Elementarzelle - Elastizitätsmodulkörper: Variation der Wanddicke.

ander unabhängigen Konstanten E_{kub} , ν_{kub} und G_{kub} beschreiben. So ergibt sich beispielsweise mit den gleichen Abmessungen wie bei der KP-Anordnung, einem äußeren Kugeldurchmesser von 3 mm, einer Wanddicke von 0,03 mm und einem Sinterstellendurchmesser von 0,9 mm, ein Wert für $E_{\text{kub}} = 1696$ MPa. Für die weiteren Materialwerte erhält man $\nu_{\text{kub}} = -0,262$ und $G_{\text{kub}} = 684$ MPa. Es zeigt sich, dass bei der KRZ-Anordnung der Wert von E_{kub} wesentlich höher ist als der Wert von G_{kub} . Der Mittelwert des richtungsabhängigen Elastizitätsmodul beträgt bei dieser Konstellation $\bar{E}_{\text{arith}} = 1460$ MPa und liegt nicht weit vom Maximalwert von 1696 MPa entfernt. Ein isotropes Verhalten ist weder bei der KP- noch bei der KRZ-Anordnung ansatzweise zu erkennen.

Der visualisierte richtungsabhängige Elastizitätsmodul für die KFZ-Anordnung wird in Abb. 4.21 wiedergegeben. Der relativbezogene, dreidimensionale Elastizitätsmodulkörper präsentiert sich als eine Kugel, die an Achsen leicht nach außen gezogen wird. Die Form des Elastizitätsmodulkörpers ähnelt stark der Form der KRZ-Anordnung, wobei bei KRZ-Anordnung die Streckung an den Koordinatenachsen stärker ausgeprägt ist. Betrachtet man die in den drei Ebenen identischen Verläufe des Elastizitätsmoduls, zeigt sich ein ähnlicher Verlauf wie bei der KRZ-Anordnung. Jedoch ist der Verlauf rein konkav. Das Maximum des richtungsabhängigen Elastizitätsmoduls findet man ebenfalls in $\langle 100 \rangle$ Richtung. Analog dazu entsteht in $\langle 111 \rangle$ ein Minium des richtungsabhängigen Elastizitätsmoduls. Im Gegensatz zur KP- und KRZ-Anordnung sind diese Minima und Maxima wesentlich weniger stark ausgeprägt. Die Materialsymmetrie gestaltet sich kubisch. Für dimensionsbehaftete Abmessungen mit einem äußeren Kugeldurchmesser von 3 mm, einer Wanddicke von 0,03 mm und einem Sinterstellendurchmesser von 0,9 mm erhält man für die Materialkonstante E_{kub} einen Wert von 2466 MPa. Für ν_{kub} und G_{kub} ergeben sich Werte von $-0,062$ und 1112 MPa, der Mittelwert des richtungsabhängigen Elastizitätsmoduls \bar{E}_{arith} beträgt hierbei 2334 MPa. Die Form des Elastizitätsmodulkörpers der KFZ-Anordnung kommt dem Elastizitätsmodulkörper eines isotropen Werkstoffes, einer Kugel, sehr nahe.

Die Abb. 4.22 zeigt den richtungsabhängigen Elastizitätsmodul für das repräsentative Volumen-

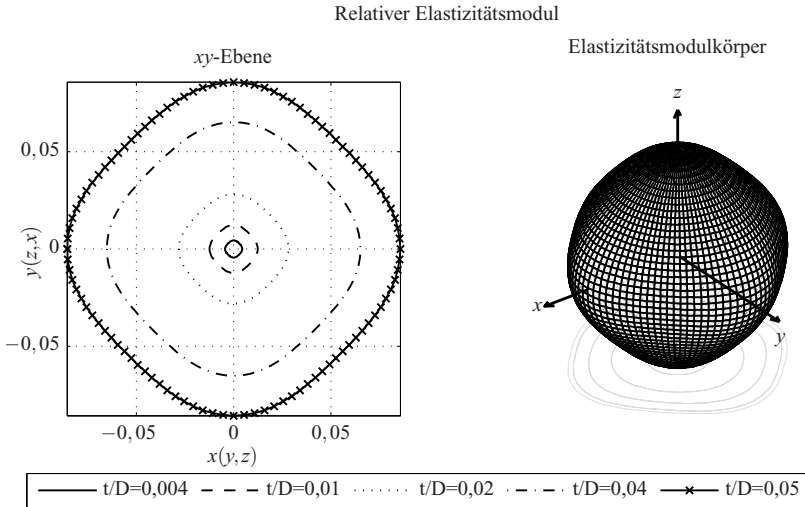


Abbildung 4.21: Kubisch-flächentrierte Elementarzelle - Elastizitätsmodulkörper: Variation der Wanddicke

element (RVE55) basierend auf der zufälligen Packung P55 in Tabelle 4.2. Die Form des Elastizitätsmodulkörpers präsentiert sich als völlig deformierte Kugel, die in verschiedenen Richtungen gestreckt bzw. gestaucht wird. Betrachtet man die Verläufe des Elastizitätsmoduls in den einzelnen Ebenen, ist schnell zu erkennen, dass diese nicht mehr identisch sind. Für jede Ebene stellt sich ein anderer Verlauf ein. In der xy -Ebene sieht man ein um ca. 45° gedrehtes Rechteck mit abgerundeten Kanten, dagegen erhält man in der yz -Ebene einen rautenähnlichen Verlauf und in der xz -Ebene schließlich einen schwach deformierten kreisförmigen Verlauf. Es lässt sich weder am Elastizitätsmodulkörper noch an der Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix eine Symmetrie erkennen. Es stellt sich ein völlig triklines Materialverhalten ein und es gibt 21 unabhängige Materialkonstanten. Mit dimensionshaften Hohlkugelabmaßen von $D = 3$ mm, $t = 0,03$ mm und $D_S = 0,9$ mm erhält man einen minimalen Wert des Elastizitätsmoduls von $E_{\min} = 425$ MPa. Maximum und Mittelwert betragen $E_{\max} = 623$ MPa bzw. $\bar{E}_{\text{arith}} = 549$ MPa. Dieses Verhalten ändert sich über die Variation der Wanddicke nicht merklich, da die Kurven nahezu parallel, offsetmäßig verlaufen.

Die Form des Elastizitätsmodulkörpers für das repräsentative Volumenelement, basierend auf der zufälligen Packung P62, präsentiert sich in Abb. 4.23 ebenfalls als deformierte Kugel, die an den Koordinatenachsen gestreckt wird. Die größte Streckung erkennt man in $\langle 010 \rangle$ Richtung. Dementsprechend zeigen sich die Verläufe in den einzelnen Ebenen als mehr oder weniger deformierte Kreise. Verläufe laufen ebenfalls parallel zueinander. Somit hat auch hier die Variation der Wanddicke keinen merklichen Einfluss auf die Form des Elastizitätsmodulkörpers. Betrachtet man den Elastizitätskörper oder die Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix, ist keine Symmetrie zu erkennen. Das Material verhält sich triklin, wobei das Verhalten schon einem orthotropen Verhalten nahe kommt. Für die beispielhafte Betrachtung mit dimensionsbehafteten Abmaßen ($D = 3$ mm, $t = 0,03$ mm und $D_S = 0,9$ mm) ergeben sich für den maximalen und minimalen Elastizitätsmoduls folgende Werte $E_{\max} = 1035$ MPa und $E_{\min} = 809$ MPa. Der Mittelwert des Elastizitätsmodul

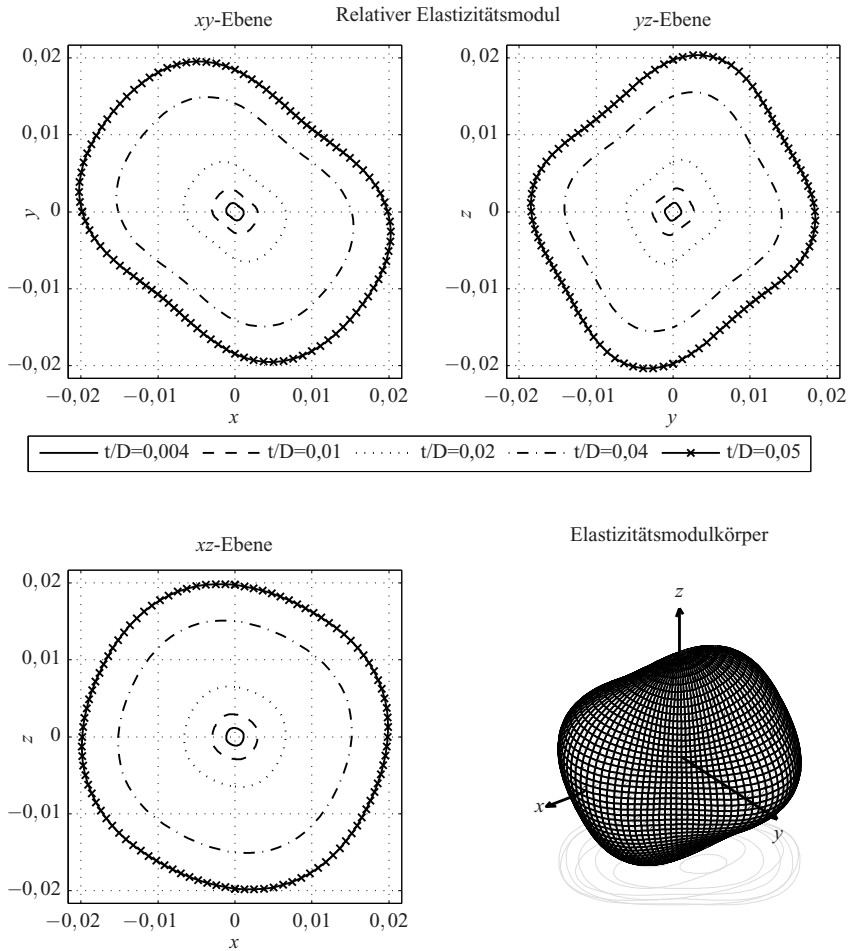


Abbildung 4.22: Repräsentatives Volumelement mit 55% Packungsdichte - Elastizitätsmodulkörper: Variation der Wanddicke.

beträgt dabei $\bar{E}_{\text{arith}} = 908 \text{ MPa}$.

Abbildung 4.24 zeigt den relativen und richtungsabhängigen Elastizitätsmodul für das repräsentative Volumelement basierend auf der zufälligen Packung P66. Der Elastizitätsmodulkörper stellt sich auch als eine Kugel dar, die an den Koordinatenachsen schwach nach außen deformiert wird. Die Streckungen sind in allen Achsen nahezu gleich. Jedoch lässt sich keine Symmetrie bei strenger Betrachtung erkennen, obwohl die Form sehr stark der KFZ-Anordnung kubischem Materialverhalten ähnelt. In der beispielhaften Ausführung für den richtungsabhängigen Elastizitätsmodul mit den dimensionsbehafteten Größen ($D = 3 \text{ mm}$, $t = 0,03$ und $D_S = 0,9 \text{ mm}$) erhält

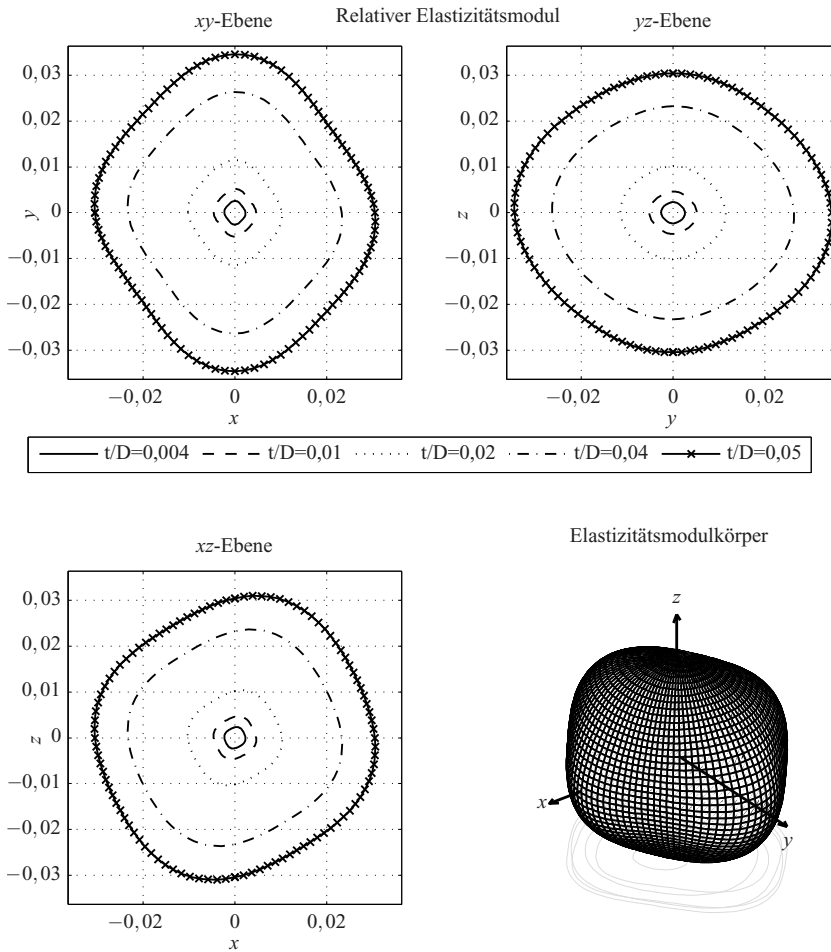


Abbildung 4.23: Repräsentatives Volumelement mit 62% Packungsdichte - Elastizitätsmodulkörper: Variation der Wanddicke

man folgende Werte für den minimalen und maximalen Elastizitätsmodul $E_{\min} = 1139$ MPa und $E_{\max} = 1271$ MPa bzw. für den Mittelwert $\bar{E}_{\text{arith}} = 1206$ MPa.

Blickt man letztlich auf den richtungsabhängigen Elastizitätsmodul für das repräsentative Volumelement, basierend auf der zufällig erzeugten Packung P69 in Abb. 4.25, so ist ein identisches Verhalten zur KFZ-Anordnung zu erkennen. In den drei Ebenen zeichnet sich ein deckungsgleicher Verlauf des richtungsabhängigen Elastizitätsmoduls ab. Es stellt sich für alle Variationen ein kubisches Materialverhalten ein. Dementsprechend kann man das Materialverhalten auf drei

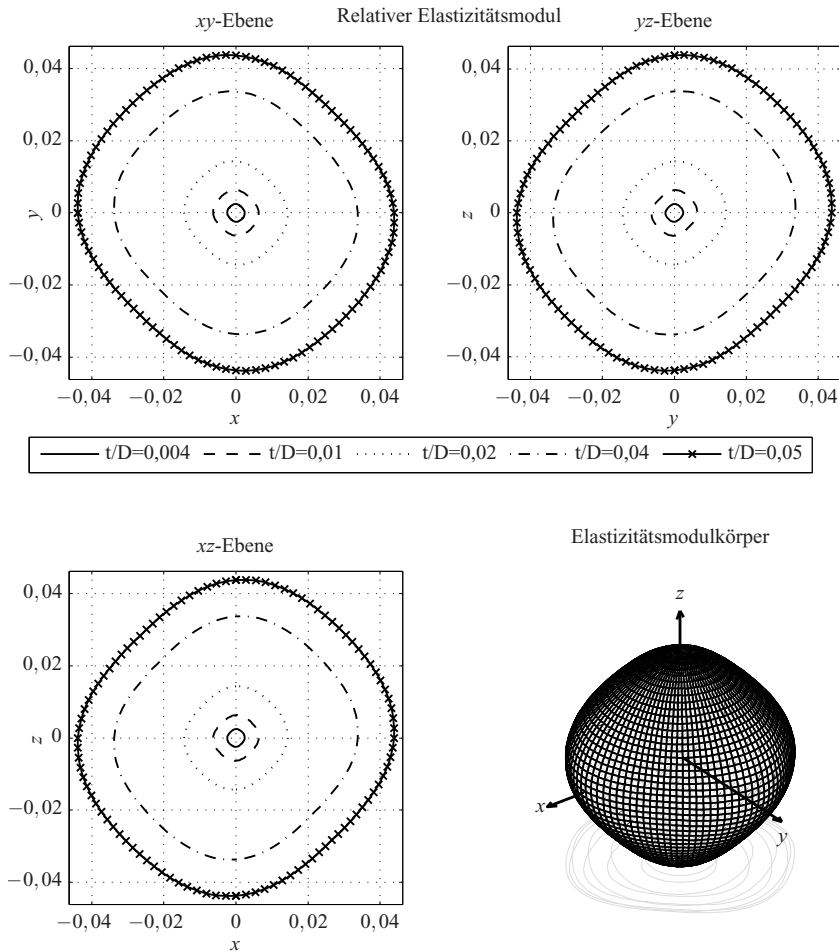


Abbildung 4.24: Repräsentatives Volumelement mit 66% Packungsdichte - Elastizitätsmodulkörper: Variation der Wanddicke.

Materialkonstanten zurückführen. So ergibt sich beispielsweise bei dimensionsbehafteter Betrachtung ($D = 3 \text{ mm}$, $t = 0,03$ und $D_S = 0,9 \text{ mm}$) für die Materialkennwerte $E_{\text{kub}} = 2129 \text{ MPa}$, $\nu_{\text{kub}} = -0,055$ und $G_{\text{kub}} = 942,8 \text{ MPa}$. Vergleicht man die Werte dieser Packung mit der KFZ-Anordnung, ergibt sich ein um 15,8% verminderter Elastizitätsmodul E_{kub} . Der Wert von G_{kub} reduziert sich um 17,9%.

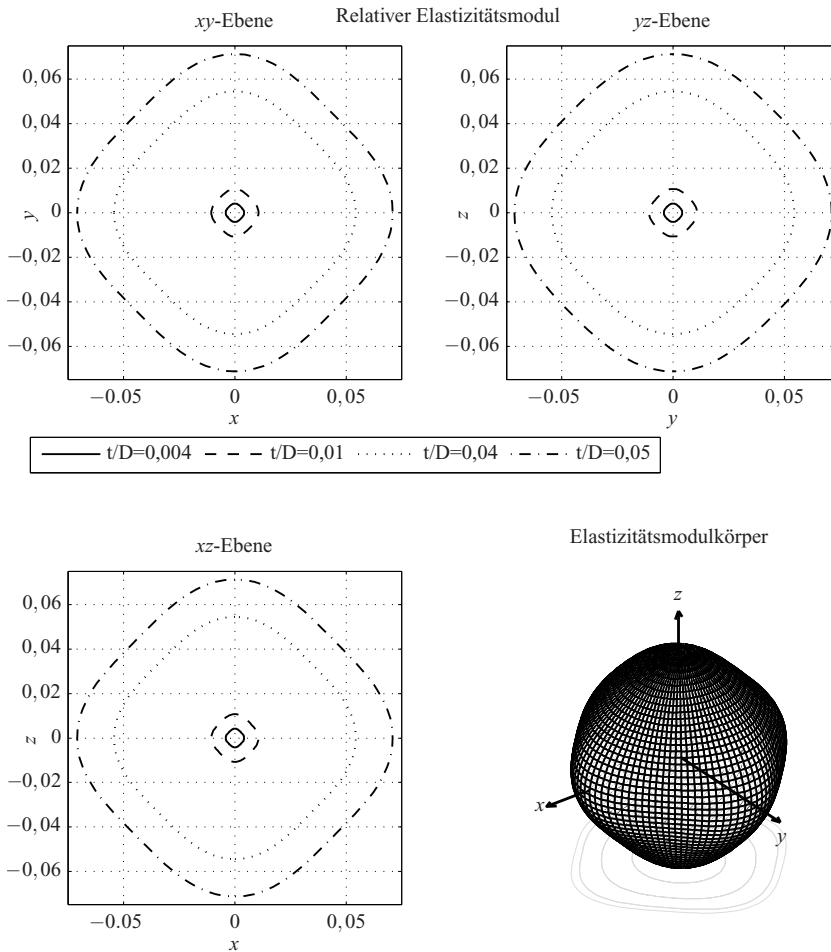


Abbildung 4.25: Repräsentatives Volumenelement mit 69% Packungsdichte - Elastizitätsmodulkörper: Variation der Wanddicke.

4.2.3 Einfluss der Randbedingungen

Aus der in Abschnitt 3.2.1 eingeführten Homogenisierungsmethode ergeben sich drei verschiedene Möglichkeiten für die Definition der Randbedingungen eines Volumenelements. Die bisher vorgestellten Ergebnisse basieren auf den periodischen Randbedingungen (PRB), welche den Vorteil haben, dass sie näher am wirklichen Effektivwert liegen [109, 123, 205]. Dennoch sollen in diesem Abschnitt zwei weitere mögliche Randbedingungen in Bezug auf Hohlkugelstrukturen untersucht bzw. diskutiert werden.

Die zwei weiteren Randbedingungen sind die kinematisch uniforme Randbedingung (KURB) und

die statisch uniforme Randbedingung (SURB), die zugleich die REUSS- und VOIGT-Schranke bilden. Die ermittelten Nachgiebigkeits- bzw. Steifigkeitstensoren mit den Randbedingungen KURB und SURB bilden somit die untere bzw. obere Schranke für den Effektivwert.

Abbildung 4.26 zeigt für die Elementarzellen mit KP-, KRZ- und KFZ-Anordnung bei einem Verhältnis von Kugelwanddicke zu Hohlkugeldurchmesser $t/D = 0,02$ den richtungsabhängigen Elastizitätsmodul in der xy -Ebene für die drei verschiedenen Randbedingungen. Bei der KP-

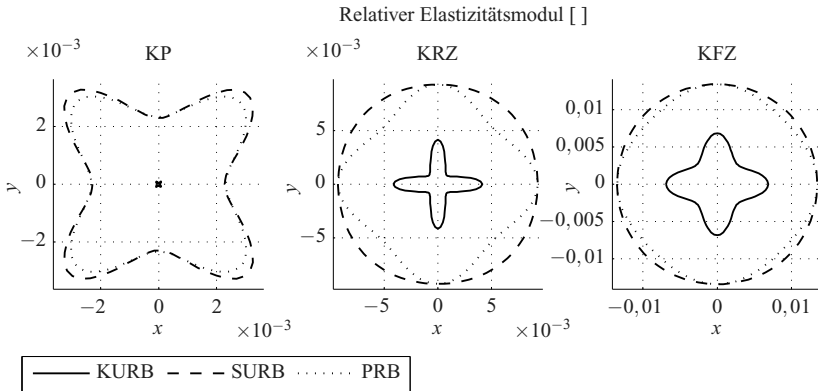


Abbildung 4.26: Vergleich der Randbedingungen für Elementarzellen: KURB, SURB und PRB.

Elementarzelle unterscheiden sich die Verläufe SURB und PRB kaum, die Elastizitätsmodule in Koordinatenachsenrichtung sind betragsmäßig nahezu gleich. Dennoch liegt die PRB-Kurve erwartungsgemäß innerhalb der SURB-Kurve. Der Abstand zwischen der SURB- und KURB-Kurve ist deutlich. Bei der KRZ Anordnung sind ebenfalls die Elastizitätsmodule in Koordinatenachsenrichtung fast gleich. Die Spanne zwischen SURB und KURB ist geringer und PRB liegt in diesem Raum, wobei die Spanne sich näher an der SURB-Kurve befindet. Im Gegensatz zur KP Elementarzelle zeigt die KRZ-Anordnung für jede Randbedingung einen anderen Elastizitätsmodulkörper. Bei der KURB sind die Werte des Elastizitätsmoduls in Achsenrichtung stärker ausgeprägt. Die Ausprägung zeigt sich nur noch schwach bei der PRB und SURB und weist einen dem isotropen Zustand nahen Elastizitätsmodulkörper auf.

Bei der KFZ-Anordnung mit KURB sind die Elastizitätswerte in Achsenrichtung betragsmäßig am größten. Die PRB-Kurve zeigt ein annähernd und die SURB-Kurve ein vollständig isotropes Verhalten, was durch [80] bestätigt wird.

Weitet man die Betrachtung auf ein RVE aus, zeigen sich Verläufe gemäß Abb. 4.27. Im Gegensatz zur Elementarzellenbetrachtung entstehen unterschiedliche Verläufe in den Ebenenschnitten des jeweiligen Elastizitätsmodulkörpers. Die PRB-Kurven liegen beim RVE69 in Abb. 4.27a wieder sehr nahe an den SURB-Verläufen. Die Distanz zwischen SURB-Kurve und KURB-Kurve verringert sich im Vergleich zu den Kurven der Elementarzellenmodelle. Dies bestätigt die Aussage, dass mit zunehmender RVE-Größe die Verläufe dem tatsächlichen Effektivwert näher kommen [205]. Beim RVE62 in Abb. 4.27b weisen die SURB und PRB einen größeren Abstand auf. Für das RVE62 mit KURB ließen sich keine aussagefähigen Ergebnisse erzeugen. Ursache hierfür sind freistehende Geometrien aufgrund der geringeren Packungsdichte (Kugelschnitte ohne Verbindung).

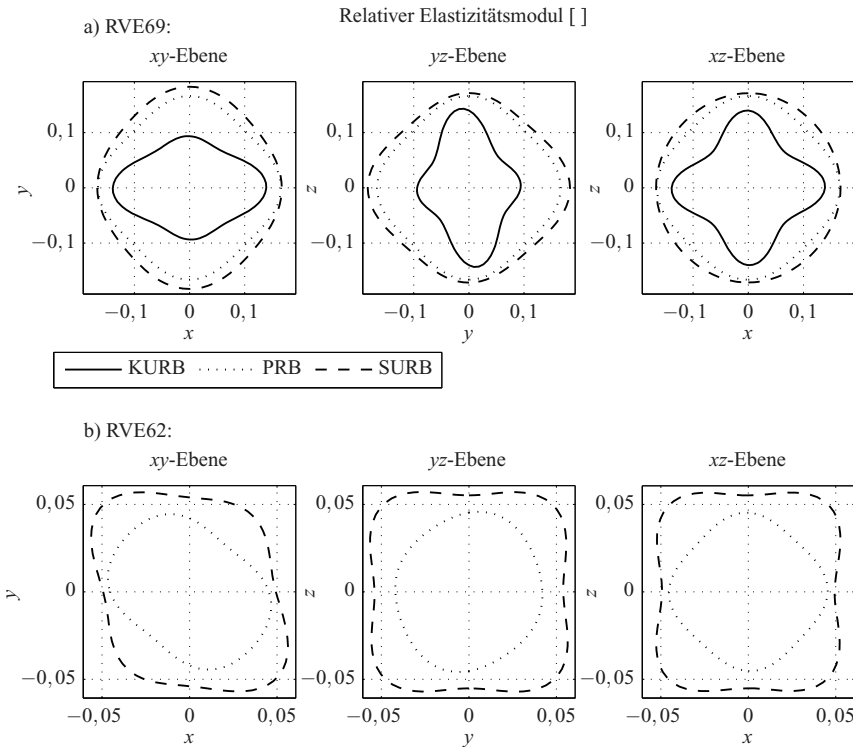


Abbildung 4.27: Vergleich der Randbedingungen für a) RVE69 und b) RVE62: KURB, SURB und PRB

Zusammengefasst liegt bei allen Untersuchungen der Verlauf der PRB zwischen den Verläufen von SURB und KURB, was die Plausibilität der Ergebnisse unterstreicht. Die Verläufe der PRB liegen näher an den Verläufen von SURB, was auch [205] bestätigt (siehe Abb. 3.16).

4.2.4 Vergleich und Diskussion

Bisher wurde nur näher auf die gesinterten Hohlkugelstrukturen eingegangen. In diesem Abschnitt werden die gesinterten mit geklebten bzw. gelöteten Hohlkugelstrukturen verglichen. Die Werte des Elastizitätsmoduls für die geklebten bzw. gelöteten Hohlkugelstrukturen wurden Sanders [184] und Gasser [71] entnommen. So verglich Gasser schon die Ergebnisse von Sanders in seiner Arbeit und stellte fest, dass die Ergebnisse nahezu identisch waren. Aus diesem Grund soll ein Vergleich zwischen den Resultaten der geklebten Hohlkugelstrukturen von Sanders [184] mit den hier gewonnenen Ergebnissen der gesinterten Hohlkugelstrukturen angestellt werden. Abbildung 4.28a zeigt den Verlauf des relativen Elastizitätsmoduls über das Wanddicken- zu Kugeldurchmesser Verhältnis für vier verschiedene Sinterstellenwinkel von 5° bis 20° . Dabei zeigt sich ein annähernd identischer Verlauf zwischen den geklebten und gesinterten Varianten. Betrachtet man

die KRZ-Anordnungen mit einem Sinterstellenwinkel bzw. Klebestellenwinkel von 15° bzw. 20° , so ist zu erkennen, dass die geklebten Hohlkugelstrukturen bei größeren Wanddicken zu Durchmesser-erverhältnissen gegenüber den gesinterten Strukturen geringfügig an Steifigkeit verlieren. Dieses

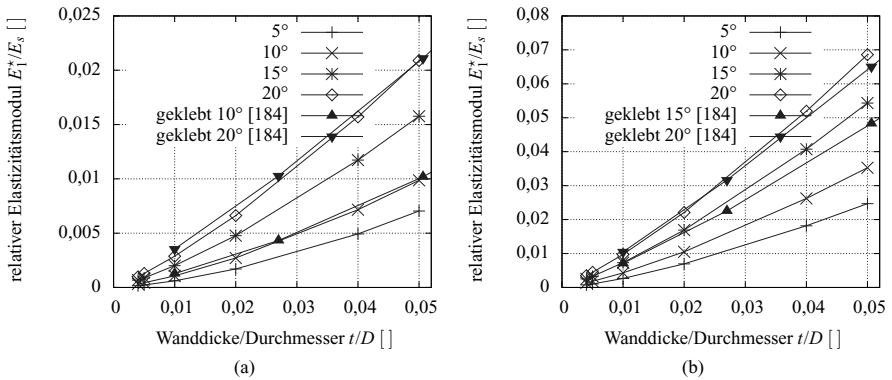


Abbildung 4.28: Vergleich gesinterte und geklebte Hohlkugelstruktur in a) KP-Anordnung und b) KRZ-Anordnung.

Verhalten wird ebenfalls bei der KFZ-Anordnung in Abb. 4.29 sichtbar. Ebenfalls zeigt sich bei größeren Wanddicken zu Durchmesser-erverhältnissen ein geringfügig niedriger Wert des relativen Elastizitätsmoduls bei geklebten Hohlkugelstrukturen. Eine Möglichkeit der Steifigkeitszunahme

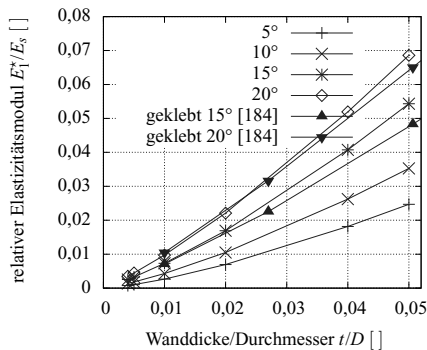


Abbildung 4.29: Vergleich gesinterte und geklebte Hohlkugelstruktur in KFZ-Anordnung.

der gesinterten gegenüber den geklebten Hohlkugelstrukturen kann an der Tatsache liegen, dass mit steigendem Sinterstellenwinkel bzw. -durchmesser die Kugeln stärker deformieren und somit der Mittelpunktabstand der Kugeln geringer wird.

Im Folgenden sollen verschiedene Elastizitätsmodulkörper qualitativ und quantitativ miteinander

verglichen und bewertet werden. Hierbei werden die gewonnenen Werte aus der Wanddickenvariation im vorhergehenden Abschnitt genutzt. Abbildung 4.30 zeigt für die KP-, KRZ- bzw. KFZ-Elementarzelle und für die zufällig erzeugten repräsentativen Volumenelemente die Ebenenschnitte der relativen Elastizitätsmodulkörper, basierend auf den Packungen aus Tabelle 4.2. Die abgebildeten Elastizitätsmodulkörperschnitte wurden mit den Parametereinstellungen $\frac{t}{D} = 0,01$ und einem Sinterstellenwinkel von $17,4^\circ$ bestimmt. An den Schnittverläufen lässt sich erkennen,

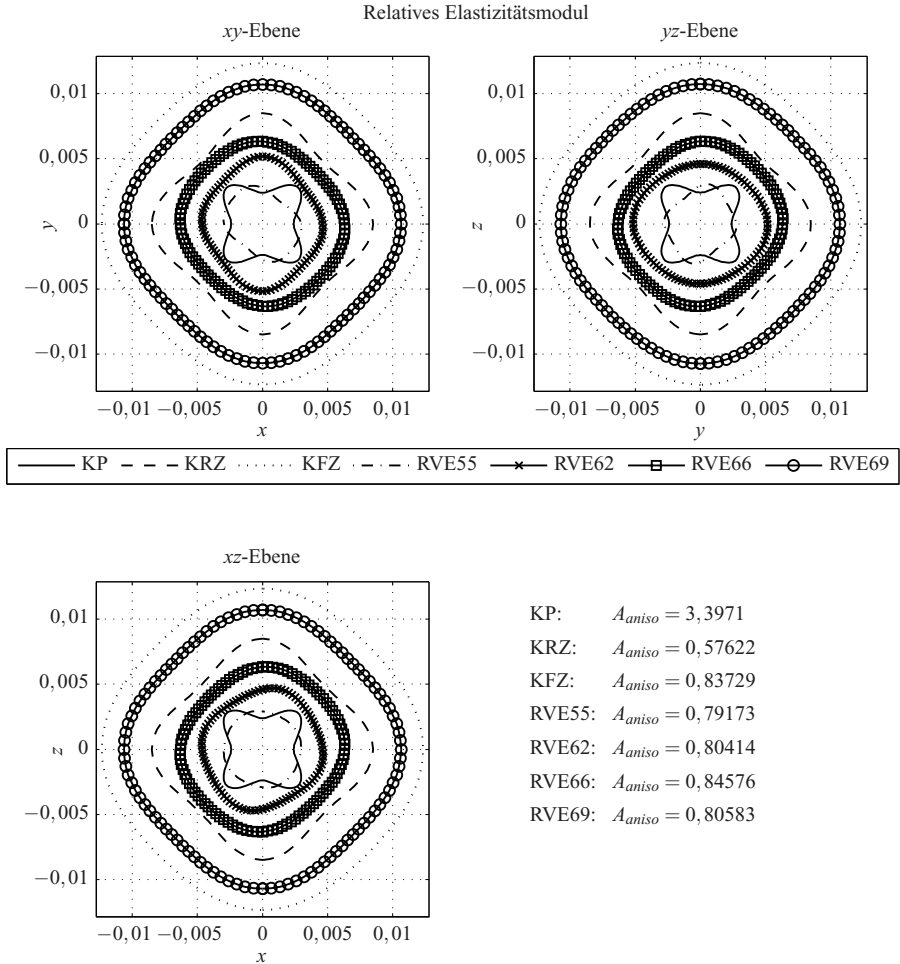


Abbildung 4.30: Richtungsabhängiger Elastizitätsmodulkörper für verschieden ideale und zufällig erzeugte Packungen bei einem Sinterstellenwinkel von $17,4^\circ$.

dass mit zunehmender Packungsdichte der Elastizitätsmodul steigt. Jedoch ist der Betrag beispielsweise bei der KP-Anordnung sehr stark schwankend bzw. richtungsabhängig und in $\langle 110 \rangle$ Richtung betragsmäßig höher als bei der mit dem zufällig erzeugten Modell 55% Packungsdichte.

Als nächst steifere Anordnung zeigt sich die zufällige Hohlkugelanordnung (RVE62) basierend auf der Kugelpackung P62. Die Form dieser Anordnung präsentiert sich ebenfalls kreisähnlich in den drei Ebenen. Wie erwartet, ist das repräsentative Volumenmodell RVE66 steifer als das Modell RVE62. Die Form des richtungsabhängigen Elastizitätsmoduls orientiert sich sehr stark an dem KFZ-Modell. Die KRZ-Anordnung zeigt sich beim Elastizitätsmodul wiederum in der stärker ausgeprägten Richtungsabhängigkeit. Es sind deutliche Minima und Maxima zu erkennen. Die Verläufe für das KFZ-Modell und für das repräsentative Volumenmodell RVE69 sind nahezu identisch, sie sind nur in der Größe bzw. Betrag skaliert. Betrachtet man qualitativ die Formen der verschiedenen Modelle in Bezug auf das isotrope Verhalten, das von einem kreisförmigen Verlauf gekennzeichnet ist, so ergibt, dass die Modelle KFZ, RVE69, RVE66 und RVE62 diesem Verhalten am nächsten kommen. Das Modell RVE55 zeigt zum Teil eine stärkere Richtungsausprägung in den Ebenen, wobei die Formen noch kreisähnlich sind. Die KRZ-Elementarzelle zeigt eine mittlere Zunahme des Elastizitätsmoduls in Achsenrichtung, wobei die KP-Elementarzelle eine starke Schwächung in dieser Richtung aufweist.

Um die Ausprägung der Isotropie bzw. Anisotropie in einer skalaren Größen ausdrücken zu können, wurde von Zener der elastische Anisotropiefaktor A_{Aniso} eingeführt [227]. Für kubisch symmetrisches Materialverhalten definiert Zener den Faktor wie folgt:

$$A_{\text{Aniso}} = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{2(S_{11} - S_{12})}{S_{44}}, \quad (4.2)$$

wobei die drei Konstanten C_{ij} die drei unabhängigen elastischen Steifigkeitskoeffizienten (VOIGT Koeffizienten [217]) sind. Der Koeffizient C_{44} repräsentiert den Scherwiderstand auf Ebene $\langle 100 \rangle$ in Richtung $\langle 0kl \rangle$, während der Term $C_{11} - C_{12}/2$ stellvertretend für den Scherwiderstand auf Ebene $\langle 110 \rangle$ in $\langle -110 \rangle$ Richtung steht [126]. Der Anisotropiefaktor stellt ein Verhältnis der zwei extremen elastischen Koeffizienten dar. Wenn $A_{\text{Aniso}} < 1$ ist das Material am steifsten in Richtung $\langle 100 \rangle$ und wenn $A_{\text{Aniso}} > 1$ ist die Steifigkeit am größten in der Diagonalenrichtung $\langle 111 \rangle$ [157]. Der Wert von $A_{\text{Aniso}} = 1$ entspricht der Isotropie. Mit dem bekannten Zusammenhang zwischen dem Elastizitätskoeffizienten C und der Dichte ρ sowie der Schallgeschwindigkeit c

$$C = \rho c, \quad (4.3)$$

is der Anisotropiefaktor nach Zener durch Einsetzen der Gl. (4.3) in Gl. (4.2) experimentell für Materialien mittels Körperschallanalyse bestimmbar [127]. Abbildung 4.31a zeigt den Anisotropiefaktor nach Zener über die Packungsdichte. Es zeigt sich keine Abhängigkeit zwischen Anisotropiefaktor und Packungsdichte. Am nächsten an die Isotropie kommt die KFZ-Anordnung sowie die hoch und höchst zufällig gepackte Anordnung RVE62 und RVE66. Als stark anisotrop erweist sich die KP-Anordnung. Der invertierte Anisotropiefaktor von KRZ ($1/A_{\text{Aniso}}$, vertauschtes Schubfestigkeitsverhältnis von Maxima und Minima) liegt zwischen den Werten von KFZ- und KP-Anordnung. Ein analoges Verhalten erhält man in Abb. 4.31b, wenn man den Isotropiefaktor über die Koordinationszahl aufträgt. Es kann ebenfalls kein Zusammenhang zwischen Koordinationszahl und Anisotropiefaktor gefunden werden. Da der Anisotropiefaktor nach Zener nur für rein kubisches Materialverhalten gilt, wird der allgemeingültige Anisotropiefaktor A_{Aniso}^* nach Ledbetter und Migliori [126] für zufällig geordnete repräsentative Volumenelemente (Modelle mit nicht kubischer Materialsymmetrie) bestimmt. Der Anisotropiefaktor definiert sich über

$$A_{\text{Aniso}}^* = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad (4.4)$$

wobei c_1 und c_2 die minimale und maximale Schubwellenausbreitungsgeschwindigkeit (transversale Körperschallgeschwindigkeit) entlang aller Ausbreitungsrichtungen \mathbf{d} und Polarisationsrichtungen \mathbf{p} ist. Gleichung (4.4) erfüllt diese für alle Materialsymmetrien, von kubisch bis

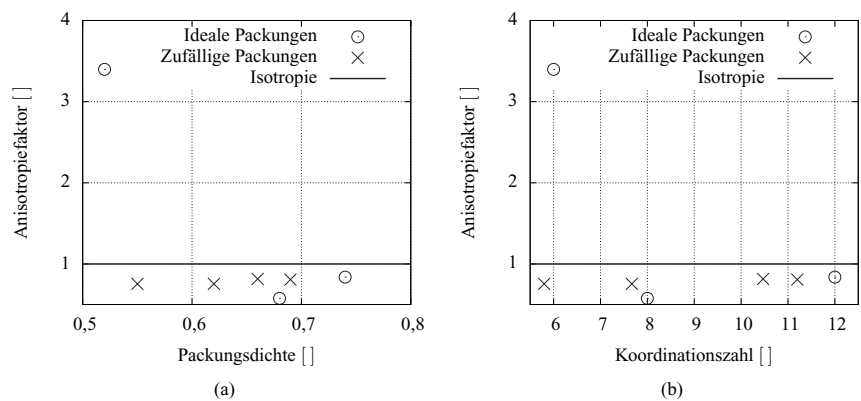


Abbildung 4.31: Anisotropiefaktor über a) Packungsdichte und b) Koordinationszahl.

triklin [126]. Die detaillierte Bestimmung der Körperschallgeschwindigkeit kann Anhang C.4 entnommen. Die Werte für den Anisotropiefaktor A_{Aniso}^* wurden mit über 15.000 verschiedenen Richtungsvektoren numerisch bestimmt. Die Werte für die Anisotropiekoeffizienten der jeweiligen Modelle sind in Tabelle 4.3 aufgelistet. Abbildung 4.32 zeigt den Anisotropiefaktor nach Ledbetter über die Koordinationszahl, im Vergleich zum den Anisotropiefaktor nach Zener sind kleine Abweichungen bei den zufällig geordneten Modellen (RVE52 - RVE62) vorhanden. Die Abweichung nimmt mit zunehmender Packungsdichte ab. Die Abbildungen 4.33a und 4.33b zeigen den

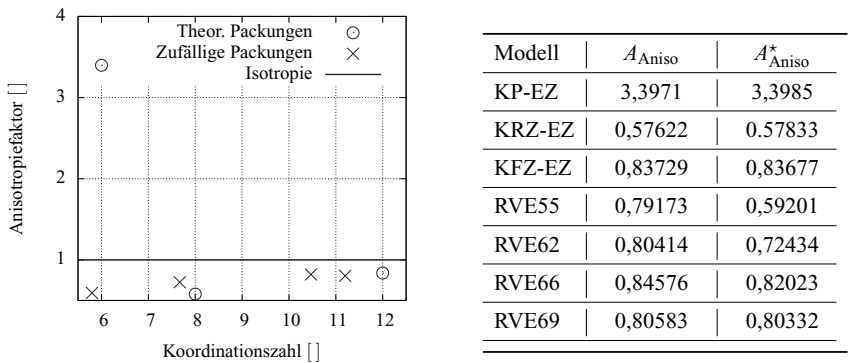


Abbildung 4.32: Anisotropiefaktor nach Ledbetter über Koordinationszahl.

Modell	A_{Aniso}	A_{Aniso}^*
KP-EZ	3,3971	3,3985
KRZ-EZ	0,57622	0,57833
KFZ-EZ	0,83729	0,83677
RVE55	0,79173	0,59201
RVE62	0,80414	0,72434
RVE66	0,84576	0,82023
RVE69	0,80583	0,80332

Tabelle 4.3: Anisotropiekoeffizienten.

relativen Elastizitätsmodul in den Richtungen $\langle 100 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ und $\langle 111 \rangle$ über Packungsdichte bzw. Koordinationszahl. Als Trend hierbei ist zu erkennen, dass mit zunehmender Packungsdichte bzw. zunehmender Koordinationszahl der relative Elastizitätsmodul steigt. Zudem wird deutlich, dass die Schwankungen in den drei vorgegebenen Richtungen bei den zufällig geordneten Modellen

und beim KFZ-Modell am geringsten ausfallen.

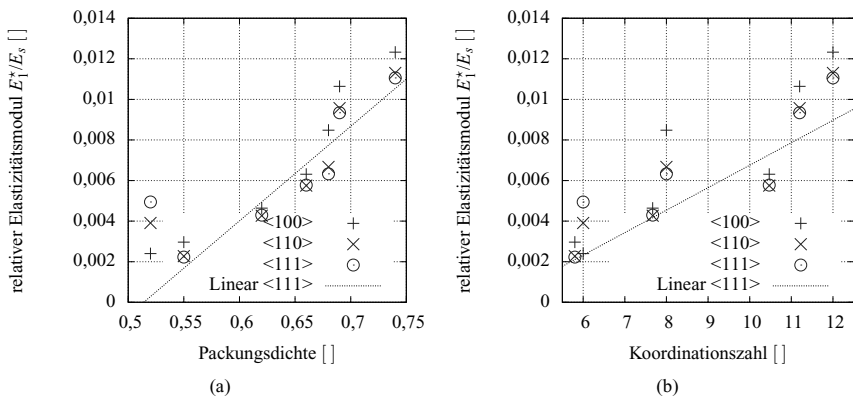


Abbildung 4.33: Relativer Elastizitätsmodul über a) Packungsdichte und b) Koordinationszahl.

4.3 Schwingungen

Zur Überprüfung der numerisch ermittelten Ergebnisse werden Messungen zur Eigenfrequenz mit verschiedenen Hohlkugelstrukturen durchgeführt. Verwendet werden plattenförmige Strukturen mit quadratischer und rechteckiger Grundform, deren Eigenschwingungen mittels Modalanalyse bestimmt werden. Die gemessenen Abmaße und die Dichten sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst. Zusätzlich können die Verbindungsart zwischen den Hohlkugeln und deren mittlere Durchmesser entnommen werden.

4.3.1 Versuchsdurchführung

Die Messung der Eigenfrequenzen erfolgt mit dem in Kapitel 3 beschriebenen Messaufbau mit dem Auswerteprogramm Test.Lab[®]. Das Prüfobjekt wird hier mit einem Impulshammer zu Schwingungen angeregt und mit einem Festlaser werden die transversalen Wege bzw. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aufgezeichnet. Unter Berücksichtigung des Eingangs- und Ausgangsspektrums lassen sich die Übertragungsfunktion von einem Anregungspunkt zum Messpunkt und hieraus wiederum die Eigenfrequenzen berechnen. Durch eine geeignete Auflösung der Anregungspunkte können über die Zuordnung zum Messpunkt auch die Schwingformen angegeben werden. Somit können die einzelnen Eigenfrequenzen den einzelnen Eigenschwingformen zugeordnet werden.

Zur Überprüfung der Unabhängigkeit der Messergebnisse vom Versuchsaufbau und der Messung von Eigenschwingungen ohne Lagereinfluss (frei-frei) werden drei Untersuchungen anhand einer homogenen Platte aus Vollmaterial (Stahlplatte) durchgeführt. Zum einen ist die Lagerung auf verschiedene Weisen (Schaum und Gummiseile) realisiert worden. Zum anderen sind die Lagerungspositionen variiert worden. Und als Letztes wurden die Position des Festlasers und die Anregungspunkte mit Test.Lab[®] optimiert. Die ersten beiden Untersuchungen zeigen, dass sowohl

Tabelle 4.4: Proben zur Schwingungsanalyse.

Messplatten						
Proben Nr.	Breite [mm]	Länge [mm]	Höhe [mm]	Dichte $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	äußerer Kugel- durchmess- er [mm]	Verbindungsart
HKS 86	330	330	77	440	1,6	versintert
HKS 87	332	335	74	450	1,6	versintert
HKS 104	292	329	46	810	3,0	versintert
HKS 105	331	331	84	610	1,6	versintert
HKS 106	328	244	42	820	3,0	versintert
HKS 111	330	330	83	770	2,6	versintert
HKS 112	337	337	86	740	2,6	versintert
HKS 113	335	334	85	760	2,6	versintert
HKS-K 100	110	300	30	450	3,0	verklebt
HKS-K 121	292	400	74	590	3,0	verklebt
HKS-K 122	302	400	74	360	3,0	verklebt
HKS-K 123	318	400	74	400	3,0	verklebt
HKS-L 202	130	390	25	500	4,5	verlötet

verschiedene Lagerungsarten als auch die Lageposition einen so geringen Einfluss haben, dass sie in den Messungen kaum erkennbar sind. Die Verteilung der Anschlagstellen des Impulshammers und die Messstelle des Festlasers sind derart festgelegt, dass sie sich möglichst mit keinem Bewegungsknoten der ersten vier Eigenformen decken. In Tabelle 4.5 sind die Messergebnisse für die aufgeführten Hohlkugelstrukturplatten aufgelistet. Beispielhaft zeigt die Abb. 4.34 die ersten zwei mit Hilfe des Auswertprogramms visualisierten Eigenformen mit den entsprechenden Eigenfrequenzen für die Probe HKS 106.

4.3.2 Bestimmung der Materialkennwerte

Die mit Hilfe der experimentellen Modalanalyse gemessenen Ergebnisse werden zur Bestimmung der Materialkennwerte verwendet. Hierzu wird angenommen, dass das gemessene Objekt homogene bzw. isotrope Materialeigenschaften besitzt. Zur Ermittlung der Materialparameter wird eine Least-Square Optimierung der Kennwerte durchgeführt, wobei die Zielfunktion f_z aus der Summe der quadratischen Abweichungen aller n_{EF} Eigenfrequenzen besteht und minimiert wird:

$$f_z = \sum_{i=1}^{n_{EF}} \left(1 - \frac{f_{i,\text{Theorie}}(E^*, \nu^*)}{f_{i,\text{Messung}}} \right)^2 \rightarrow \min. \quad (4.5)$$

Tabelle 4.5: Gemessene Eigenfrequenzen mit der Vibrationsanalyse.

Gemessene Eigenfrequenzen				
Proben Nr.	1. Eigenfrequenz [Hz]	2. Eigenfrequenz [Hz]	3. Eigenfrequenz [Hz]	4. Eigenfrequenz [Hz]
HKS 86	480	718	804	1110
HKS 87	350	525	576	824
HKS 104	470	660	870	1100
HKS 105	747	1040	1070	1600
HKS 106	590	650	1150	1300
HKS 111	783	1120	1670	2460
HKS 112	748	1040	1070	1570
HKS 113	742	1030	1060	1570
HKS-K 100	523	838	1360	1700
HKS-K 122	500	520	880	1040
HKS-K 123	160	190	290	360
HKS-L 202	260	560	740	1160

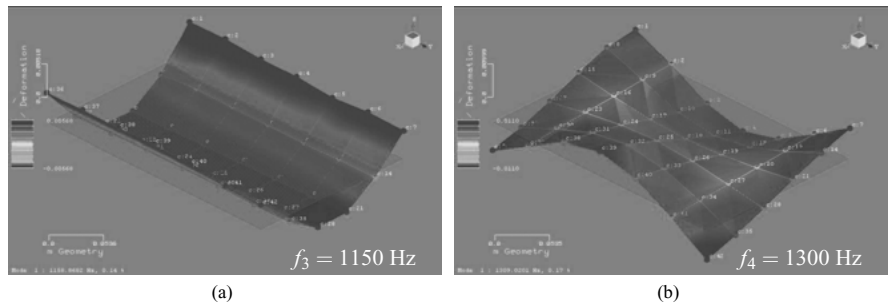


Abbildung 4.34: Probe HKS 106: a) Dritte und b) vierte Eigenform und Eigenfrequenz.

Zur Bestimmung der theoretischen Eigenfrequenzen $f_{i,\text{Theorie}}$ werden einerseits die Finite Elemente Methode und andererseits die PB2-RITZ-Methode nach Liew et al. [132] genutzt. Der PB2-Ritz Algorithmus wird in Maple[®] implementiert. Hierbei stehen auch Optimierungsroutinen zur Minimierung der Zielfunktion f_z zur Verfügung. Die Zielfunktion ist abhängig von den geometrischen Abmaßen der Platten und deren Materialkennwerten, wobei nur die Elastizitätskennwerte E^* und ν^* als variable Größen angesehen werden. Die gemessene Dichte und die geometrischen Abmaßen werden konstant und somit nicht als Variationsgrößen betrachtet. Eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus kann dem Anhang entnommen werden. Die Berechnungen auf Basis der Finite-Elemente-Methode werden mit der Software ANSYS[®] durchgeführt, die auch

einen integrierten Optimierungsalgorithmus beinhaltet. Beide Methoden sind Näherungsverfahren, die auf der schwachen Form der Kontinuumsmechanik beruhen. Eine rein analytische Beschreibung einer völlig frei gelagerten Platte (FFFF) gibt es bis dato nicht. Tabelle 4.6 zeigt die mit der PB2-RITZ-Methode (Polynomgrad von 10) bestmöglich angepassten Materialkennwerte an die Eigenschwingungen bzw. Eigenfrequenzen der Hohlkugelplatten. Die mit Hilfe der Finiten-

Tabelle 4.6: Approximierte Materialparameter: MINDLINSche Plattentheorie.

Approximierte Materialparameter mit Hilfe der MINDLINSchen Plattentheorie (PB2-RITZ-Methode).

Berechnete Materialparameter			
Proben Nr.	Elastizitätsmodul E^* [MPa]	Querkontraktion ν^* []	Dichte $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ (gemessen)
HKS 86	640	0,19	440
HKS 87	381	0,14	450
HKS 104	2090	0,19	810
HKS 105	1500	-0,03	610
HKS 106	1980	-0,12	820
HKS 111	2090	0,00	770
HKS 112	1890	0,04	740
HKS 113	1900	0,03	760
HKS-K 100	1120	0,17	450
HSS-K 122	515	-0,19	360
HSS-K 123	790	-0,3	400
HSS-L 202	1285	-0,11	500

Elemente-Methode ermittelten Werte können der Tabelle 4.7 entnommen werden. Es zeigen sich nur geringe Abweichungen.

4.3.3 Vergleich

Um die isotropen Materialparameter, gewonnen aus der Modalanalyse, im Bereich der zellularen Metalle einordnen zu können, sollen diese mit den Ergebnissen von Gibson [74] verglichen werden. Gibson fasste viele publizierte Werte zusammen und ordnete sie nach offen- bzw. geschlossenporigen Metallschäumen. Hierbei ergeben sich zwei charakteristische Verläufe für offen- und geschlossenporige Strukturen, die in Abb. 4.35 skizziert sind. Im Diagramm wird das relative Elastizitätsmodul über der relativen Dichte abgetragen. Der genaue Wert des Elastizitätsmoduls für die homogenisierte Wandstruktur ist unbekannt. Es wird ein Wert von Stahl $E_S = 200$ GPa für das Grundmaterial angenommen. Die vorhandenen Poren in den Wänden verursachen vermutlich, dass der homogenisierte Elastizitätsmodul der Wand geringer ausfällt. Es werden pauschal 25% abgezogen, was einen Wert von $E_S = 150$ GPa entspricht. Diese zwei Werte stellen eine obere bzw. untere Grenze dar. Bezieht man den relativen Elastizitätsmodul auf die obere Grenze,

Tabelle 4.7: Approximierte Materialparameter mit Hilfe Finite-Element-Methode und homogenisierter Volumenelemente

Berechnete Materialparameter			
Proben Nr.	Elastizitätsmodul E^* [MPa]	Querkontraktion ν^* []	Dichte $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ (gemessen)
HKS 86	640	0,21	440
HKS 87	381	0,14	450
HKS 104	2090	0,19	610
HKS 105	1530	-0,025	610
HKS 106	2000	-0,10	820
HKS 111	1610	0,07	770
HKS 112	1910	0,048	740
HKS 113	1910	0,050	760
HKS-K 100	1110	0,13	450
HSS-K 122	500	-0,20	360
HSS-K 123	800	-0,28	400
HSS-L 202	1280	-0,09	500

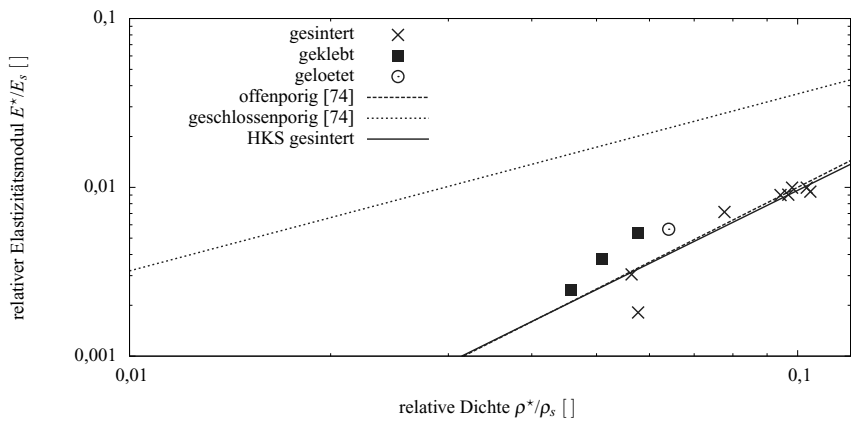


Abbildung 4.35: Gemessener relativer Elastizitätsmodul bei einem Elastizitätsmodul des Grundmaterials von 200 GPa für geklebte, gelötete und gesinterte Proben.

ergeben sich die abgebildeten Werte in Abb. 4.35. Erzeugt man eine Regressionsgerade in der logarithmischen Auftragung für die gesinterten Proben, zeigt sich ein fast identischer Verlauf wie bei den offenporigen Strukturen, was einer ähnlichen Steifigkeit entspricht. Da der tatsäch-

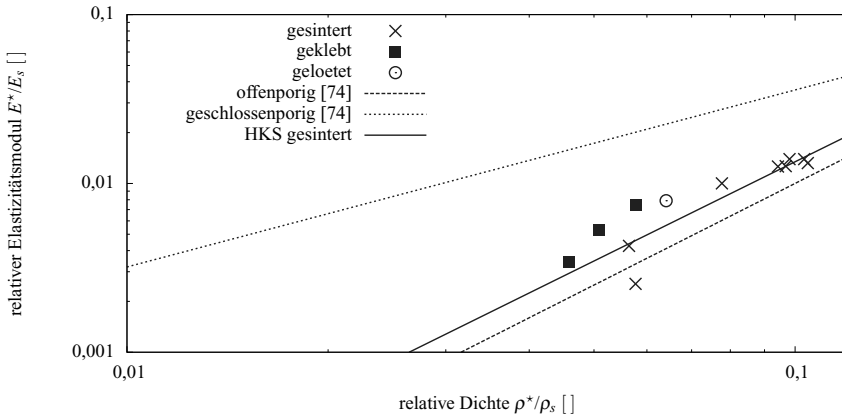


Abbildung 4.36: Gemessener relativer Elastizitätsmodul bei einem Elastizitätsmodul des Grundmaterials von 150 GPa für geklebte, gelötete und gesinterte Proben.

liche homogenisierte Elastizitätsmodul voraussichtlich geringer ist als der von Stahl, wird die Steifigkeit der Hohlkugelstruktur höher sein als bei den von Gibson behandelten, offenporigen Schäumen. Wird der fiktive Extremwert des Elastizitätsmoduls $E_S = 150$ GPa eingesetzt, zeigt sich der Verlauf gemäß Abb. 4.36. Hier ordnen sich die Hohlkugelstrukturen zwischen den offen- und geschlossenporigen ein, wobei sie näher an den offenporigen Strukturen liegen. Die Werte für den relativen Elastizitätsmodul der gelöteten und verklebten Hohlkugelplatte sind ebenfalls nahe der aufgezeigten Trendlinie, was einem ähnlichen Verhalten entspricht. So reihen sich die Hohlkugelstrukturen gut in die Metallschäume ein.

4.4 Verifizierung

Um Hohlkugeln bzw. Kugelverbunde genauer charakterisieren zu können, werden für die Probe HKS 86 und HKS 113 Mikroskopieaufnahmen gemacht. Zuerst werden die Proben aus dem Rohling gesägt und vorgeschliffen. Im nächsten Schritt werden die Probenrohlinge in einem Zweikomponentenepoxidharz eingebettet. Diese Bettung stützt beim Schleifen die fragile Struktur der Hohlkugel, so dass keine Verformungen der Kugeln stattfinden. Zuletzt werden die Proben an der Untersuchungsfläche poliert und gereinigt. Nach der Probenpräparation werden die Probenkörper mit dem licht- und rechnerunterstützten Mikroskop Zeiss Axioplan2 untersucht und mit dem Programm Zeiss AxioVision 4.6.3 ausgewertet. Abbildung 4.37a zeigt die Bestimmung der Hohlkugelwanddicke und des Kugeldurchmessers für die Probe HKS 113. Des Weiteren werden die Kugelwände näher betrachtet. Es zeigten sich hierbei Porenbildung durch den Sinterprozess. Die Porenbildung fällt für die beiden Proben unterschiedlich aus. So weist die Probe HKS 113 relative kleine Poren mit einem relativen Porenvolumen von 5,3% auf (siehe Abb. 4.37b). Wiederum zeigt sich in Abb. 4.37c eine relativ große Porenbildung im Verhältnis zur Wanddicke, allerdings entsteht ein ähnliches relatives Porenvolumen von 4,8%.

In Veyhl et al. [214] wurden für HKS 113 und andere Proben das Grundmaterial als 316L (1.4404) bestimmt. Für dieses Material wird ein Elastizitätsmodul von ca. 190 - 200 GPa angegeben

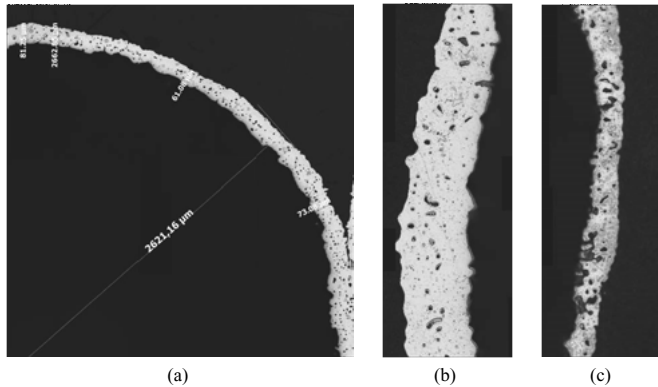


Abbildung 4.37: Mikroskopieaufnahmen: a) Vermessung einer Kugel von HKS 113, b) Porenvolumenbestimmung in HKS 113 und c) Porenbestimmung in HKS 105.

[155]. Durch die Poren wird der tatsächlich homogenisierte Elastizitätsmodul E_S des Grundwerkstoffes geringer ausfallen. Hier wird ein fiktiver Abschlag bis zu 25% angenommen. Die Dichte des Grundwerkstoffes beträgt $7980 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ [155]. Bei ungefähr 5% Porenvolumen ergibt sich eine Dichte ρ_S von ca. $7600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Zusätzlich wurden für die Probe HKS 113 in Veyhl et al. [214] mehrere Hohlkugeln vermessen. Aus den ermittelten Werten ergibt sich ein mittleres Verhältnis von Hohlkugelwanddicke zu Kugeldurchmesser von $\frac{t}{D} = 0.25$ und ein mittlerer Sinterstellenwinkel ϕ von $14,1^\circ$. Für die Probe HKS 105 werden in eigenen Untersuchungen Werte von $\frac{t}{D} = 0.22$ und ϕ von $15,2^\circ$ ermittelt. Aus den zuvor beschriebenen Untersuchungen werden mittlere Packungsdichten $PD = 0,56$ und $PD = 0,57$ für die Proben HKS 105 und HKS 113 bestimmt.

Aus den Schwingungsuntersuchungen erhält man den Wert des homogenisierten Elastizitätsmoduls E^* und der Querkontraktionszahl ν^* der Hohlkugelstrukturen (siehe Tabelle 4.6 und Tabelle 4.7). Abbildung 4.38 zeigt den Verlauf des relativen Elastizitätsmoduls für die KP-Anordnung für verschiedene Sinterstellenwinkel von 5° bis 20° über dem Verhältnis von Wanddicke zu Kugeldurchmesser und relativer Dichte. Die Marker stellen die ermittelten Werte für die Proben HKS 105 und HKS 113 dar. Es zeigt sich, dass die Werte für den relativen Elastizitätsmodul für die beiden Proben höher sind als die 15° Kurve, somit die Struktur steifer ist als die KP-Anordnung mit Packungsdichte von $PD = 52\%$ und mit einem Sinterstellenwinkel von 15° . Im Gegensatz dazu lässt sich aus Abb. 4.39 erkennen, dass der Bereich zwischen unterer und oberer Grenze für den relativen, homogenisierten Elastizitätsmodul deutlich unterhalb der 15° für die KRZ-Anordnung liegt. Dies begründet sich durch die Packungsdichte der KRZ-Anordnung von ca. $PD = 68\%$ und die Proben, die im Bereich zwischen 56% bis 57% liegen und damit wesentlich geringere Packungsdichten vorweisen. Vergleicht man des Weiteren die ermittelten homogenisierten Elastizitätsmodulwerte aus der Schwingungsuntersuchung mit den Elastizitätsmodulverläufen der zufällig angeordneten Hohlkugelmodelle (RVE55 bis RVE69) in den Abb. 4.40 und Abb. 4.41, so ist zu erkennen, dass die Grenzwerte der beiden Proben bzw. der Bereich zwischen den beiden Proben, zwischen den Modellen RVE55 und RVE62 mit Packungsdichten von 55% und 66% liegen. Somit kongruieren die Ergebnisse der Modelle sehr gut mit den gemessenen Elastizitätsmodulwerten. Eine weitere gute Übereinstimmung zeigen die Querkontraktionsverläufe ν_{12}^* in Abb. 4.42 mit den ermittelten Querkontraktionswerten ν^* für die Proben HKS 105 und HKS 113. Die Werte liegen

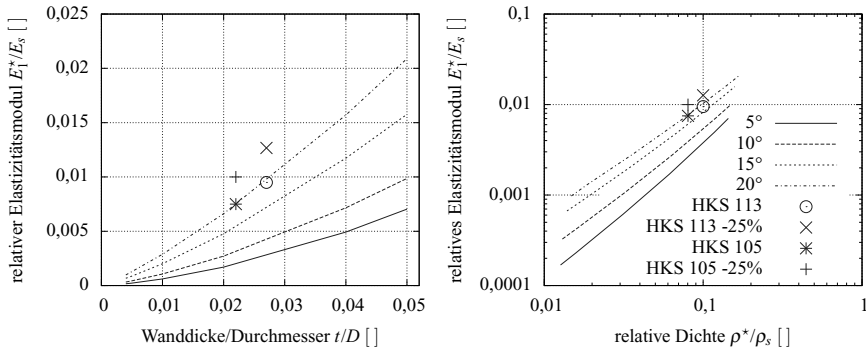


Abbildung 4.38: KP-Anordnung mit unterschiedlichen Sinterstellenwinkeln; homogenisierter Elastizitätsmodul E^* über relative Wanddicke t/D und relative Dichte ρ^*/ρ_s mit Werten für die Proben HKS 105 und HKS 113.

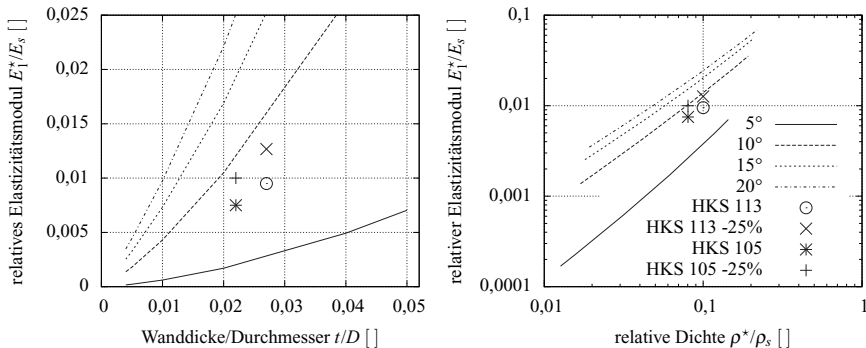


Abbildung 4.39: KRZ-Anordnung mit unterschiedlichen Sinterstellenwinkeln; homogenisiertes Elastizitätsmodul E^* über relative Wanddicke t/D und relative Dichte ρ^*/ρ_s mit Werten für die Proben HKS 105 und HKS 113.

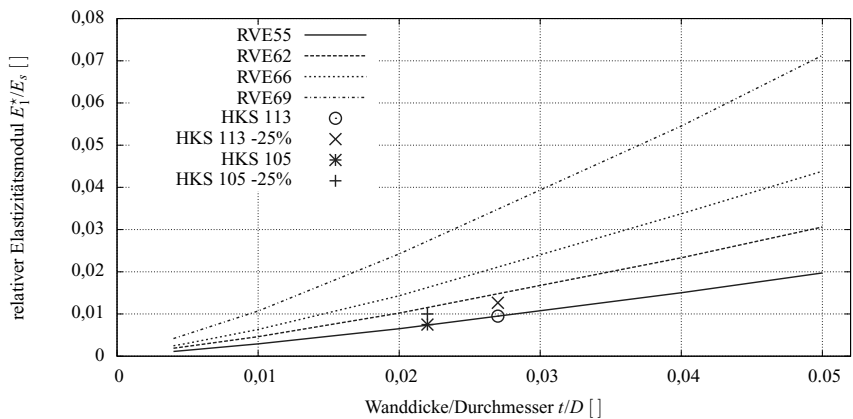


Abbildung 4.40: Verschiedene RVE-Anordnungen mit einem Sinterstellenwinkel von ca. 15%; homogenisierter Elastizitätsmodul E^* über relative Wanddicke t/D mit Werten für die Proben HKS 105 und HKS 113.

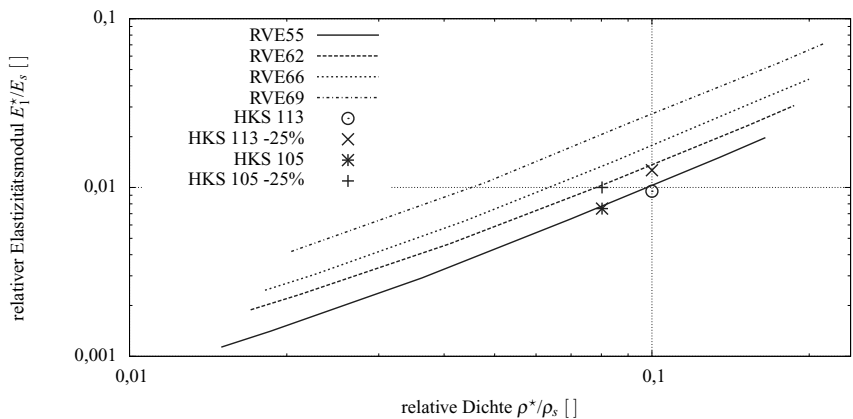


Abbildung 4.41: Verschiedene RVE-Anordnungen mit Sinterstellenwinkel von ca. 15%; homogenisierter Elastizitätsmodul E^* über relative Dichte ρ^*/ρ_s mit Werten für die Proben HKS 105 und HKS 113.

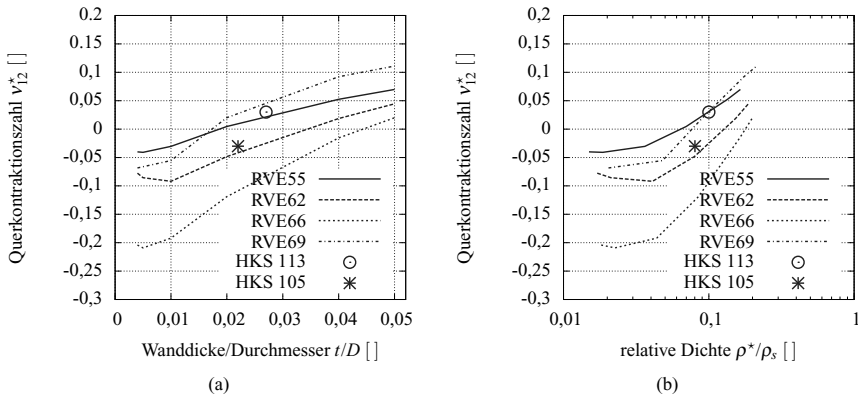


Abbildung 4.42: Querkontraktionszahl für verschiedene RVE-Anordnungen mit Sinterstellenwinkel von ca. 15% a) über relative Wanddicke t/D und b) relative Dichte ρ^*/ρ_s mit Werten für die Proben HKS 105 und HKS 113.

nahe bei RVE55 bzw. teilweise zwischen RVE55 und RVE62. Schlussendlich ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen simulierten und gemessenen Werten des homogenisierten Elastizitätsmoduls und der Querkontraktionszahl.

4.5 Akustik

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus theoretischen Absorbermodellen und der experimentellen Messung vorgestellt und verglichen. In dieser Arbeit wurden zwei verschiedene Typen von Hohlkugelstrukturen mit variierender Probendicke im Bereich von 500 bis 3500 Hz gemessen. Die Abb. 4.43 zeigt die Probenserie HKS 113. Bei den Proben handelt es sich um versinterterte Stahlhohlkugeln mit einem mittleren Kugeldurchmesser von 1,6 mm bzw. 2,6 mm.

4.5.1 Zwei-Mikrophon-Methode

Abbildung 4.44 zeigt den Absorptionskoeffizient der Proben HKS 86 und HKS 113. Für beide Probentypen wird eine Approximation nach dem JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Absorbermodell

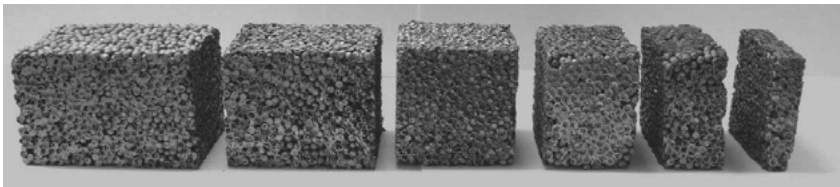


Abbildung 4.43: Hohlkugelstrukturproben des Typs HKS 113, verschiedene Dicken von 10 mm bis 60 mm.

Tabelle 4.8: Angepasste JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Parameter an die Messdaten

Absorberkennwerte			
Parameter		HKS 86	HKS 113
ϕ :	Porosität (gemessen)	0,84 (0,6)	0,37 (0,4)
Ξ :	Strömungswiderstand $\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}\right]$	17600	13500
α_∞ :	Strukturformfaktor	3,25	2,2
c_v :	Formfaktor der Röhre, viskose Effekte	1,7	0,16
c_t :	Formfaktor der Röhre, thermische Effekte	2,0	2,7

durchgeführt. In Abb. 4.44a wird der Effekt der Probendicke deutlich sichtbar. Nimmt die Probendicke zu, wird das erste Maxima des Absorptionskoeffizienten bei niedrigerer Frequenz erreicht. Das erste Maximum wird erreicht, wenn ein Viertel der Wellenlänge $\frac{\lambda}{4}$ der Probendicke d entspricht. Vergleicht man die beiden Probentypen mit der Dicke $d = 60$ mm, wird deutlich, dass Probe HKS 86 über $f = 500$ Hz ein breitbandiges Absorptionsverhalten mit kleinen frequenzabhängigen Schwankungen besitzt. Der Absorptionskoeffizient liegt immer höher als 0,7. Die Probe HKS 113 erreicht ihr erstes Maximum bei rund 800 Hz - jedoch im Vergleich zur Probe HKS 113 mit einem großen Schwankungsanteil und einer Abnahme des Absorptionskoeffizienten bis zu $\alpha = 0,4$. Der Parameter Dichte ϕ wird sowohl experimentell als auch mit Hilfe des Absorbermodells nach Johnson, Champoux und Allard bestimmt. Aus experimentellen Untersuchungen wird für die Probe HKS 113 eine Dichte von $\phi = 0,4$ bestimmt. Dieser Wert wird in der Modellbildung nach Johnson, Champoux und Allard bestätigt. Experimentell ergibt sich für die Probe HKS 113 eine Dichte von $\phi = 0,6$ und $\phi = 0,84$ für die JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Anpassung. Die große Abweichung lässt sich durch die Messung mit Wasser erklären, dass durch die Oberflächenspannung nicht in jede Mikropore eindringen konnte. Aus diesem Grund können diese Werte nur zur groben Orientierung herangezogen werden. In der Tabelle 4.8 sind die angepassten JCA-Modellkennwerte aufgeführt. Die Parameter wurden durch eine mehrdimensionale, nichtlineare Minimierung (fminsearch) durchgeführt, die in MatLab®verfügbar ist. Mit dieser Optimierungsmethode kann kein globales Minimum gefunden werden. Die Berechnung wird daher mehrmals von verschiedenen Ausgangspunkten gestartet. Dabei endeten die Optimierungsdurchläufe immer beim gleichen Satz von JCA-Absorberkennwerten. Es ist deswegen von einer singulären Lösung des Parametersatzes auszugehen. Abbildung 4.45 soll die Diskrepanz zwischen den gemessenen und den theoretisch ermittelten Werten erklären. Innerhalb der Kugelwände können deutliche Poren auftauchen. Während die Probe HKS 86 eine mehr offenporöse Wandstruktur vorweist, gleicht die Wandstruktur der Probe HKS 113 eher einer geschlossenporigen Struktur. In Abb. 4.45a lassen sich deutliche Mikrokanäle zwischen dem Inneren und dem Äußeren der Hohlkugeln erkennen. Diese Effekte berücksichtigt das theoretische Modell nach Johnson, Champoux und Allard nicht.

4.5.2 Vier-Mikrophon-Methode

Die Koeffizienten der Absorption α , Reflektion r und Transmission t können für die Proben HKS 113 und HKS 86 in der Abb. 4.46 abgelesen werden. Die Dicke der Hohlkugelpuben beträgt

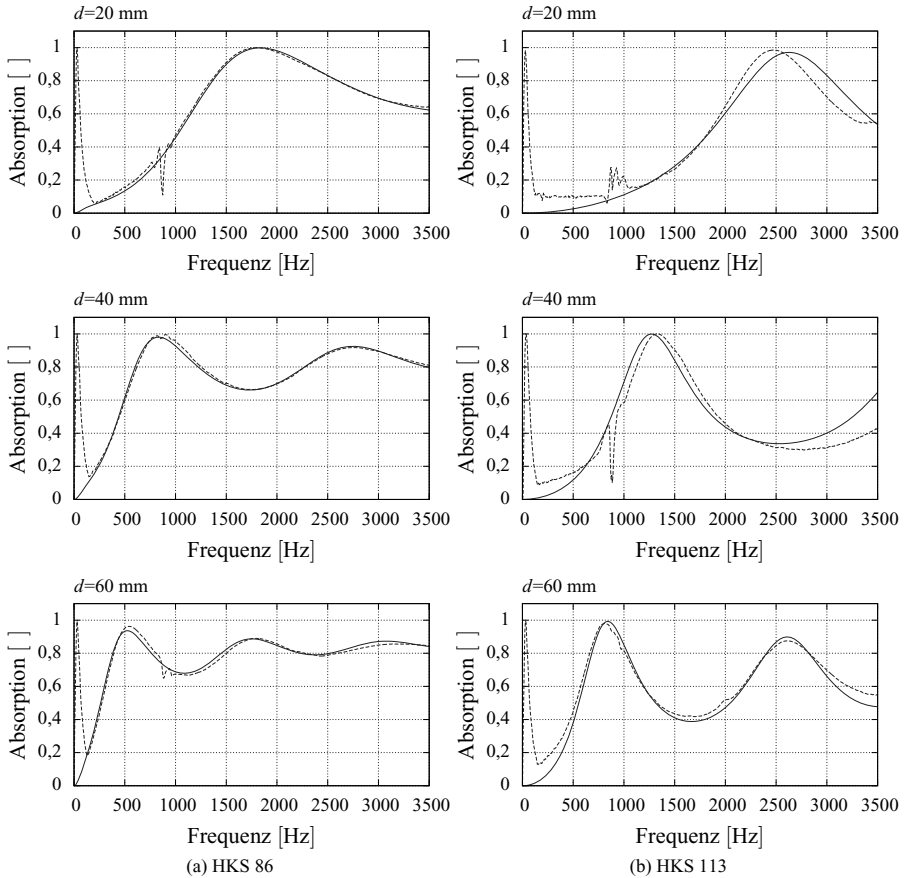


Abbildung 4.44: Absorptionskoeffizient für verschiedene Probendicken mit 20 mm, 40 mm und 60 mm, Messwerte (gestrichelte Linie) und JCA Theorie (Volllinie).

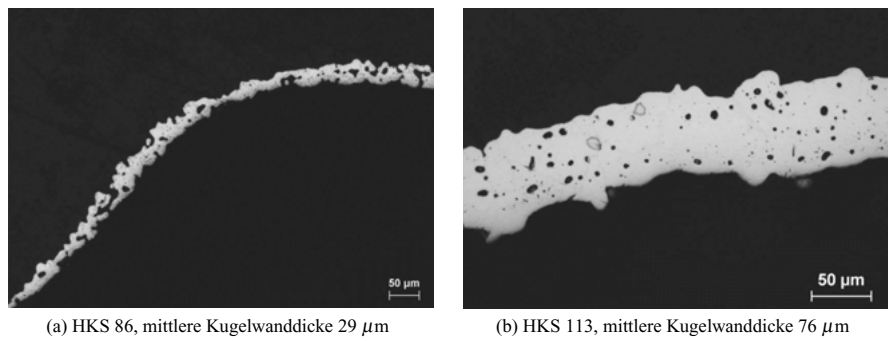


Abbildung 4.45: Mikroaufnahmen von Kugelwänden.

Tabelle 4.9: Angepasste JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Parameter an die Messdaten für Polymerschaum und Fasermaterial

Absorberkennwerte für polymere Schäume			
Parameter		Hartschaum	Fasermaterial
ϕ :	Porosität	1,03	0,81
Ξ :	Strömungswiderstand $\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}\right]$	423	10289
α_{∞} :	Strukturformfaktor	1,51	1,08
c_v :	Formfaktor der Röhre, viskose Effekte	4,46	0,04
c_t :	Formfaktor der Röhre, thermische Effekte	2,45	3,77

30 mm. Durch die unterschiedliche experimentelle Anordnung gegenüber der Zwei-Mikrophon-Methode, zeigt sich in Abb. 4.44 (kein schallharter Abschluss hinter der Messprobe) ein anderer Verlauf für die Absorption α . Weitere charakterisierenden Größen für die HKS Probe 86, wie charakteristische Impedanz und komplexe Wellenzahl, werden im Anhang C.3 vorgestellt. Aus dem Ergebnis wird die vorausgesagte Unabhängigkeit der Probendicke ersichtlich. Die Parameter für das JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell sind Tabelle 4.8 zu entnehmen. Aus den Diagrammen wird erkennbar, dass eine gute Übereinstimmung mit der JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Theorie erreicht wurde. Eine gute Übereinstimmung wird mit den angepassten Parametern zum JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell aus der Tabelle 4.9 erzielt. Weitere Absorberkennwerte von zwei alternativen Absorbermaterialien sind dem Anhang C.3 zu entnehmen.

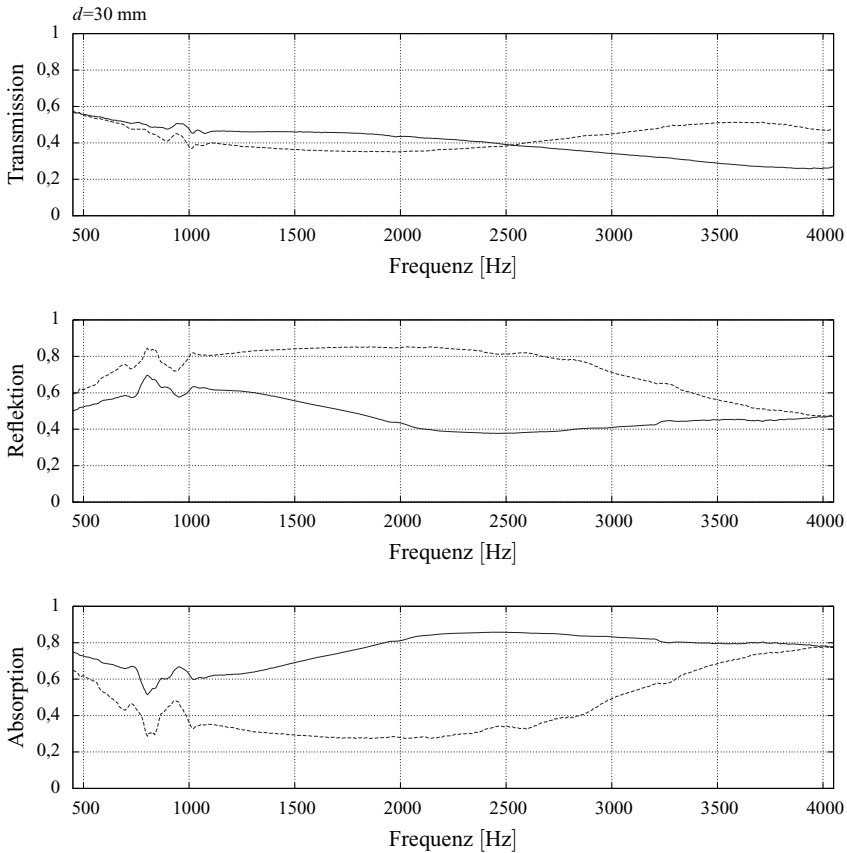


Abbildung 4.46: Absorptions- α , Reflektions- r und Transmissionskoeffizient für die Proben HKS 86 (Volllinie) und HKS 113 (gestrichelte Linie).

5 Schlussbetrachtung

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die Untersuchungsergebnisse zusammengefasst. Im Anschluss werden weitere Einsatzmöglichkeiten dieser Modellbildung diskutiert und weiterführende Untersuchungsmöglichkeiten im Ausblick präsentiert.

5.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist eine umfangreiche Charakterisierung mechanischer und akustischer Eigenschaften metallischer Hohlkugelstrukturen (HKS). Dieser relativ junge zelluläre Werkstoff kennzeichnet sich durch seine besondere Zellmorphologie aus. Im Gegensatz zu bisher bekannten Metallschäumen weist der Strukturaufbau mit Hohlkugeln geringere Abweichungen in der Zellgröße und -anordnung auf. Ausgehend von geringeren Unregelmäßigkeiten in ihrem Strukturaufbau und ihrer hohen Reproduzierbarkeit werden die Eigenschaften der Hohlkugelstrukturen oftmals als isotrop angenommen. Die meisten bisherigen analytischen und numerischen Betrachtungen beschränkten sich auf die ideale Hohlkugelanordnung, während sich der Großteil der experimentellen Untersuchungen mit real-zufälligen Anordnungen beschäftigt. Aus dieser Diskrepanz heraus ergibt sich die Motivation dieser Arbeit. Ein Schwerpunkt liegt in der Analyse des isotropen bzw. anisotropen mechanischen Verhaltens unter dem Einfluss unregelmäßiger bzw. beliebiger Kugelanordnung. Einen weiteren Kernpunkt dieser Arbeit stellt das akustische Verhalten in Bezug auf Absorption- und Transmissionverhalten dar.

Zur Charakterisierung von realen Hohlkugelstrukturen wurde die zerstörungsfreie Untersuchungsmethode der Computertomografie verwendet. Während die bisherigen Untersuchungen mit dieser Technologie zur Erzeugung von rein numerischen Simulationsmodellen stattfanden, nutzt man diese erstmalig, um Hohlkugelpackungen mit Hilfe der aus der räumlichen Statistik bekannten Kenngrößen zu beschreiben. Zur Erkennung von Hohlkugeln wurde hierfür ein Algorithmus entwickelt, der Kugeldurchmesser und -position bestimmt. Die Vorgehensweise in der Arbeit ist detailliert veranschaulicht.

Zusätzlich wurden verschiedene Algorithmen zur Kugelpackungsgenerierung untersucht und miteinander verglichen. Als effizienter und für hohe Packungsdichten geeigneter Kugelpackungsgenerator kam als einziger der Forced-Biased-Algorithmus (FBA) in Betracht. Mit diesem lassen sich translatorisch-periodische Kugelpackungen in beliebiger Anzahl erzeugen. Die mit dem FBA erzeugten Packungen konnten so mit den aus der Computertomografie gewonnenen Hohlkugelpackungen verglichen und auf ihre Aussagekräftigkeit hin geprüft werden.

Mit den Kugelpackungen wurde fortführend ein vollparametrisches Hohlkugelstrukturmodell aufgebaut. Zu den zufälligen Hohlkugelmodellen, die ein repräsentatives Volumenelement (RVE) darstellen, wurden des Weiteren vier verschiedene Elementarzellenmodelle auf Basis von aus der Physik bekannten Packungen (KP, KRZ, KFZ und HDP) erstellt. Insgesamt wurden vier Elementarzellenmodelle und vier zufällig erzeugte RVE-Modelle mit einer Packungsdichte von 57% bis 69% genauer auf ihre Elastizitätswerte untersucht. Diese Arbeit konzentrierte sich auf versinterte metallische Hohlkugelstrukturen.

Zur Bestimmung der elastischen Materialkennwerte von Hohlkugelstrukturen wurde in dieser Arbeit die Homogenisierungstheorie nach Hill genutzt. Um die Energieäquivalenz aus dieser Theorie zu erfüllen, ergeben sich drei verschiedene Möglichkeiten zur Lagerung der Ränder. Zum einen sind das die kinematisch uniforme Randbedingung (KURB) und die statisch uniforme Randbedingung (SURB), zum anderen die periodischen Randbedingung (PRB). Aus vorhergehenden Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die PRB den realen Effektivwerten am nächsten kommt.

Zuerst wurde ein virtueller, eindimensionaler Zug- bzw. Druckversuch mit PRB für die Modelle unter der Variation der Wandstärke und der Sinterstelle (Durchmesser) veranlasst. Hierbei zeigte sich, dass mit steigender Packungsdichte der (relative) Elastizitätsmodul ebenfalls zunimmt. Gemäß den gleichen Packungsdichten von HDP und KFZ erwartete man betragsmäßig identische Elastizitätswerte. Es ergaben sich jedoch kleine Differenzen, die im Nachhinein durch die Richtungsabhängigkeit erklärt werden können.

Ausgehend von dem vermeintlichen Widerspruch wurde das mehrachsige Verhalten untersucht. Aus bestimmten Lastfallannahmen lässt sich mit sechs Lastfällen der Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitstensor für die drei Lagerungsmöglichkeiten (KURB, SURB und PRB) bestimmen. Diese Tensoren beinhalten das gesamte Materialverhalten und können mit aus der Kristallphysik bekannten Größen beschrieben werden. Zudem wurde eine grafische Darstellung des Tensors in Bezug auf die richtungsabhängigen Materialkennwerte vorgestellt. Für einen ideal isotropen Werkstoff ergibt sich beispielsweise für den Elastizitätsmodul eine Kugel, die einen richtungsunabhängigen Wert beschreibt.

Für die Elementarzellenmodelle (mit PRB) ergab sich ein kubisches Materialverhalten. Je nach Modell stellten sich die maximalen Elastizitätsmodulwerte in die Achsen- oder in die Raumdiagonalenrichtung ein. Für RVE-Modelle ergibt sich ein völlig triklinen Verhalten, wobei mit steigender Packungsdichte eine Annäherung an das kubische Materialverhalten stattfindet. So war bei einer 69% Packungsdichte ein fast perfektes kubisches Symmetrieverhalten festzustellen. Die Variation der Kugelgeometrie in Bezug auf Wandstärke oder Sinterstellendurchmesser hatte nahezu keinen Einfluss auf das Materialverhalten. Dies zeigt sich deutlich an dem parallel- (offset-) förmigen Schnittverlauf der Elastizitätsmodulkörper.

Um die Anisotropie bzw. Isotropie nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ zu bewerten, wurde hierfür ein Maß gesucht. Für das kubische Materialverhalten der Elementarzellenmodelle bietet sich der Anisotropiefaktor nach Zener [227] an. Jedoch gestaltet sich das Verhalten der RVE-Modelle als triklin. Hierfür eignet sich der allgemeingültige Anisotropiefaktor nach Ledbetter und Migliori [126]. Bei der Auswertung zeigte sich das KFZ-Modell als am ehesten isotrop, hingegen präsentierten sich KP- und KRZ-Modelle stark anisotrop. Alle RVE-Modelle lagen näher am idealen Isotropiewert (Eins) als das KP- und das KRZ-Modell. Es war keine Korrelation zwischen Anisotropie und Packungsdichte bzw. Koordinationszahl festzustellen. Zur Ermittlung des allgemeingültigen Anisotropiefaktors galt es, die transversale Körperschallgeschwindigkeiten zu bestimmen. Hieraus lässt sich richtungsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Struktur abbilden. Dies zeigt Anhang C.4.

Um die Ergebnisse auf Plausibilität zu prüfen, wurde für die Elementarzellen und für zwei RVE-Modelle der Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitstensor mit kinematisch uniformen und statisch uniformen Randbedingungen untersucht. Die Randbedingungen beschreiben zwei Extremschranken (VOIGT- und REUSS-Schranke). Demnach muss der Elastizitätsmodulkörper bzw. -verlauf zwischen den Schranken liegen. Dies konnte für alle Modelle bestätigt werden. Hierbei zeigt sich, dass das KFZ-Modell mit SURB ein ideales isotropes Verhalten hat. Die Untersuchungen bestätigen die Arbeiten von Grenestedt [80]. Schlussendlich weist nur dieses Modell mit den besonderen Randbedingungen ein ideal isotropes Verhalten auf.

Um die Aussagekräftigkeit der Modelle zu unterstreichen, wurde eine experimentelle Verifizierung

veranlasst. Aus zwei Probenserien wurden die Effektivwerte ermittelt und hierzu die experimentelle Modalanalyse genutzt. Aus den gewonnenen Eigenfrequenzen bzw. -formen konnten mit Hilfe der Plattentheorie die homogenisierten Werte für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl bestimmt werden. Es zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung. Somit liefert die vorgeschlagene Vorgehensweise bzw. Simulationskette gute Ergebnisse.

Das akustische Verhalten ist ein weiterer Untersuchungsaspekt dieser Arbeit. Bei der Messung mit dem KUNDTschen Rohr wurde das akustische Absorptionsvermögen von zwei verschiedene HKS-Probenreihen näher untersucht. Die Reihen unterschieden sich in ihrer Kugelgröße und Wanddicke, die sich bei einer Reihe als offenporös erwies. Die experimentellen Untersuchungen wurden in einem Frequenzbereich von 500 Hz bis 4 kHz durchgeführt. Zur Messung standen zwei verschiedene Verfahren zur Verfügung. Zum einen ein KUNDTsches Rohr mit schallhartem Abschluss (Zwei-Mikrofon-Methode) und zum anderen ein Rohr mit offenem bzw. schallweichem Abschluss (Vier-Mikrofon-Methode). Mit der letzteren lassen sich neben dem Absorptionsverhalten auch Reflektions- und Transmissionskoeffizienten bestimmen.

Zusätzlich wurden in der Arbeit halb-phänomenologische Modelle zur Beschreibung der Absorptionsmechanismen vorgestellt. Als effektives und hinreichend genaues Absorbermodell erwies sich das JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell (JCA). Die aus der JCA-Modellapproximierung berechneten Werte wurden bestätigt. So zeigten bei diesem Absorbermodell die frequenzabhängigen Verläufe der Impedanz bzw. die Wellenzahl gute Übereinstimmungen mit den Messungen. Im Gegensatz zu offenporigen Schäumen zeigen sich bei HKS deutliche Minima und Maxima im frequenzabhängigen Absorptionsverlauf. So erreicht das Absorptionsvermögen bei bestimmten Frequenzen nahezu 100%. Mit dieser Eigenschaft kann HKS als akustischer Filter genutzt werden.

5.2 Modellerweiterungen und neue Einsatzgebiete

Die vorgestellte Vorgehensweise bzw. Modellbildung kann erweitert und somit neue Einsatzgebiete erschlossen werden. In dieser Arbeit wurden zufällig erzeugte Kugelpackungen zur Modellbildung genutzt. Die beschriebene Erzeugung von parametrischen Volumenmodellen lässt ebenfalls zu, rekonstruierte, aus der Computertomografie gewonnene Packungen als Ausgangsdaten zu nutzen. Mit dieser Vorgehensweise lassen sich somit parametrische Modelle auf Basis von realen Hohlkugelpackungen realisieren und auf ihr Elastizitätsverhalten untersuchen. Diese realen Strukturen weisen zu den bisher untersuchten Modellen keine translatorische Periodizität auf. Die Untersuchungen beschränken sich somit auf SURB und KURB.

Zusätzlich lässt sich aus Modellen, unter Berücksichtigung einer Spannungshypothese, die Fließgrenze bestimmen. Ein weiteres Novum wäre die numerische Untersuchung von zufällig angeordneten geklebten oder verlöteten Hohlkugelstrukturen. Abbildung 5.1a zeigt ein parametrisches Volumenmodell für diesen Fall. Während in realen Strukturen fast ausschließlich gleich große Hohlkugelkörper verwendet werden, könnte man mit dem Force-Biased-Algorithmus bidisperse (siehe Abb. 5.1b) oder polydisperse Hohlkugelmodelle analysieren.

Als Weiteres lassen sich Hohlkugeln in einer Matrix, beispielsweise Epoxidharz, einbetten. Ein mögliches Modell dafür veranschaulicht Abb. 5.1c. Alle vorgestellten Volumenmodelle dieser Arbeit (Abb. 5.1a - 5.1c) können für weitere physikalisch-technische Untersuchungen, wie beispielsweise für elektrische oder thermische Leitfähigkeit, genutzt werden. Zudem kann, wie in Abb. 5.1d gezeigt, zu allen Modellen das invertierte Volumen bestimmt werden, das sich zur Berechnung der Durchströmung anbietet. Hieraus können Parameter für die halb-phänomenologische Modelle zur Beschreibung der Absorptionsmechanismen ermittelt werden.

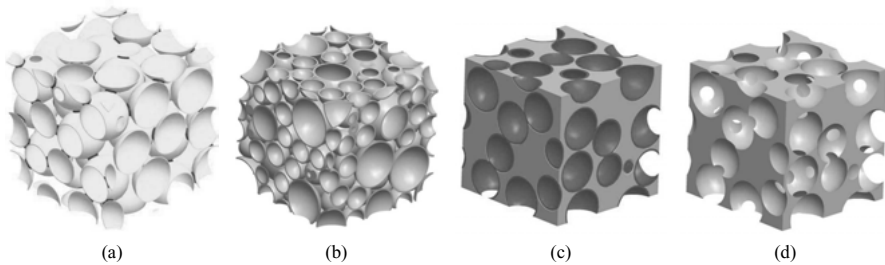


Abbildung 5.1: Mögliche Erweiterung des RVE-Modells a) geklebtes, b) bidisperse, c) inverses und d) syntaktisches Hohlkugelmmodell.

5.3 Ausblick

Die Untersuchungen in dieser Arbeit basieren auf Volumenmodellen mit maximal 30 ganzen Hohlkugeln in einem RVE. Die zur Verfügung stehende Rechenleistung beschränkte eine Ausweitung auf mehr als die erwähnte Hohlkugelnzahl in einem RVE. Für die Zukunft lassen sich mit steigender Rechenleistung RVEs mit deutlich mehr Hohlkugeln analysieren und damit den Ansatz der asymptotischen Homogenisierung verfolgen. Hiermit kann man höhere vertrauenswürdige Aussagen gewinnen [109, 123, 163, 205]. Mit zunehmender Recheneffizienz und -kapazität lassen die Untersuchungen zudem auf die stochastische Homogenisierung ausweiten. Bei dieser Art der Homogenisierung werden die effektiven Materialeigenschaften nicht nur durch die Kugelnzahl pro Volumenelement (Größe des Volumenelements) bestimmt, sondern auch durch die Anzahl der verwendeten Modellrealisierungen.

Im Bereich der Vorhersage des akustischen Absorptionsverhaltens von zufälligen und geordneten Hohlkugelpackungen mit ihren Geometrieparametern wurden erste numerische Betrachtungen realisiert [99]. Hierbei kann ebenfalls auf die vorgestellte Möglichkeit zur Erstellung von zufälligen Hohlkugelpackungen zurückgegriffen werden.

Nachdem in dieser Arbeit gezeigt wurde, dass die vorgeschlagene Modellierungsart bzw. Vorgehensweise für versinterte metallische Hohlkugelstrukturen mit zufälliger Kugelanordnung gute Ergebnisse liefert, sollte der verwendete Simulationsprozess auch auf weitere Hohlkugelverbunde, wie geklebte, gelötete und eingebettete Strukturen, angewendet werden. Die Arbeit mit ihren vorgestellten Methoden bietet eine Basis für weiterführende Analysen. Mit Modellverfeinerungen und -erweiterung können neue Untersuchungsaspekte gelegt werden.

A Theoretische Grundlagen

A.1 Mechanische Grundlagen

A.1.1 Bezugssysteme, Verschiebungen und Verzerrungen

Die Grundvoraussetzung in der Kontinuumsmechanik ist, dass alle relevanten Größen auf einem sogenannten „Kontinuum“ definiert sind, also einer offenen Teilmenge des Raumes \mathbb{R}^3 . Die offene Menge variiert in der Regel zeitlich. Mit Kinematik bezeichnet man die Beschreibung solcher zeitlich veränderlicher Gebiete oder Körper, ohne Berücksichtigung der einwirkenden Kräfte, die diese Veränderungen hervorrufen. Ein Körper \mathcal{B} ist eine zusammenhängende, kompakte Menge materieller Punkte, die sich durch ihre materiellen Randpunkte, d. h. durch ihre Oberfläche $\partial\mathcal{B}$, abgrenzt. Die Bewegungen materieller Körper werden durch die Bewegung ihrer materiellen Punkte beschrieben. Dabei ist es notwendig, die materiellen Punkte zu identifizieren. Dazu bildet man die materiellen Punkte auf Raumpunkte des EUKLIDischen Raumes \mathbb{R}^3 ab und definiert einen raumfesten Bezugspunkt 0. So ist die Lage eines materiellen Punkts durch Positions- oder Ortsvektor \mathbf{x} zu jedem beliebigen Zeitpunkt beschreibbar. Eine Unterscheidung der einzelnen materiellen Punkte von \mathcal{B} erreicht man durch Zuweisung einer kennzeichnenden Marke für jeden materiellen Punkt. Hinzu definiert man, dass für eine ausgewählte Zeit $t = t_0$ ein materieller Punkt den Positionsvektor $\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{a}$ hat. Diese Zuordnung des Positionsvektors als Marke für einen materiellen Punkt wird oftmals auch als Referenzkonfiguration genannt. Folgende Annahmen können kurz zusammengefasst werden:

- Der Punkt $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t_0) = \mathbf{a}$ wird durch seine Position zur Referenzzeit $t = t_0$ beschrieben.
- Die Abbildung $(\mathbf{a}, t) \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ ist stetig differenzierbar.
- Für jedes $t \geq t_0$ ist $\mathcal{B} \ni \mathbf{a} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \in \mathbf{x}(\mathcal{B}, t)$.
- Die JACOBI-Determinante, auch Funktionaldeterminante genannt, ist $J(\mathbf{a}, t) = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right] > 0$ für alle $t \geq t_0$, $\mathbf{a} \in \mathcal{B}$. Dies bedeutet eine eindeutige Zuordnung und keine Selbstdurchdringung des Körpers \mathcal{B} .

Zur Beschreibung der Bewegung eines Kontinuums gibt es mehrere Methoden, wobei Truesdell [211] hierfür vier Methoden unterscheidet. Vielfach werden jedoch nur zwei Möglichkeiten aufgeführt, die auch hinter den Bezeichnungen \mathbf{x} und \mathbf{a} stehen:

- die LAGRANGESche (körperbezogene) Darstellung \mathbf{a} : Es wird ein bestimmter materieller Punkt betrachtet und dessen Bewegung verfolgt.
- die EULERSche Darstellung \mathbf{x} : Es wird ein fester Punkt im Raum betrachtet, an dem Punkt zu verschiedenen Zeitpunkten in der Regel verschiedene materielle Punkte vorzufinden sind.

Führt man wie in Abb. A.1 ein kartesisches Koordinationsystem mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i und einem Ursprung 0 ein, erhält man für die Bewegungsgleichung des materiellen Punktes mit der Marke \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_i \mathbf{e}_i, & \mathbf{a} &= a_i \mathbf{e}_i, & \mathbf{x}(\mathbf{a}, t_0) &= \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{a}, \\ & \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) & \text{und} & \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

So kann die Verformung von \mathcal{B} zu einem Zeitpunkt t durch das Zustandsfeld $\mathbf{x} : (\mathbf{a}, t) \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ oder durch das Verschiebungsfeld:

$$\mathbf{u} : (\mathbf{a}, t) \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) - \mathbf{a} \quad (\text{A.2})$$

erfasst werden. Zur weiteren Beschreibung lässt sich der räumliche Deformationsgradient als ein

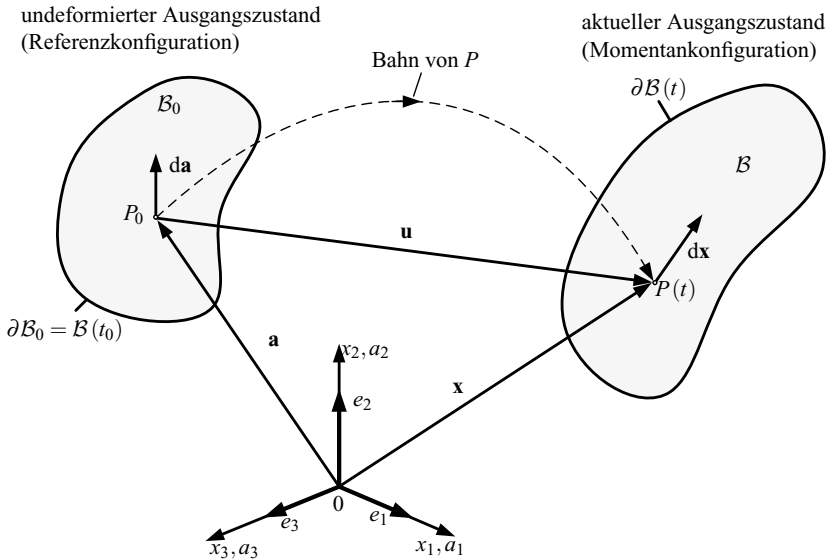


Abbildung A.1: Transformation von Linienelementen eines Körpers im \mathbb{R}^3 .

lokales Maß definieren:

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}, t) = [\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)]^T = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad \text{oder} \quad \mathbf{F}(\mathbf{a}, t) = [\text{grad} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)]^T \quad (\text{A.3})$$

Der Index T kennzeichnet dabei den transponierten Vektor. Mit dem Gradient lässt sich eine Umrechnungsvorschrift zwischen materiellen und räumlichen Linien-, Flächen- und Volumenelementen wiedergeben. Die durch den Deformationsgradienten \mathbf{F} gegebene Abbildung von $d\mathbf{a}$ auf $d\mathbf{x}$ wird gesehen als Reihenschaltung einer reinen Streckung und einer reinen Drehung bzw. umgekehrt, wobei die Zerlegung eindeutig ist. So gilt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad (\text{A.4})$$

wobei der Drehtensor \mathbf{R} orthogonal ist und dies bedeutet:

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \det [\mathbf{R}_{ij}] = 1. \quad (\text{A.5})$$

Diese Darstellung wird auch als polare Zerlegung bezeichnet. Der im Deformationsgradient enthaltene Drehanteil ist für die Beschreibung des lokalen Deformationsverhaltens im Allgemeinen von geringem Interesse, da er eine reine Starrkörperdrehung kennzeichnet. Eine Reihe von verschiedenen Verzerrungsmaßen lassen sich mit Hilfe des sogenannten Rechtsstrecktensors \mathbf{U} und Linksstrecktensors \mathbf{V} darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{V} &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

So erhält man mit Hilfe der polaren Zerlegung den rechten und linken CAUCHY-GREEN-Deformationstensor bezüglich der Referenz- und Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{U}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Diese beiden Tensoren sind symmetrisch und entsprechen im unbelasteten Falle der Identität \mathbf{I} . In der ingenieurtechnischen Betrachtung ist es wünschenswert, dass der unbelastete Fall durch eine Null ausgedrückt wird. Hierfür werden der materielle GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{A.8})$$

und der räumliche EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{A.9})$$

eingeführt.

Des Weiteren wird der materielle Verschiebungsgradient

$$\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{a})^T \quad (\text{A.10})$$

dargelegt. Dadurch lässt sich unter Voraussetzung kleiner Verzerrungen eine geometrische Linearisierung durchführen. Die Bedingung für kleine Verzerrungen ist hierfür, dass die Norm des Verschiebungsgradienten $\delta = \|\mathbf{H}\|$ viel kleiner als Eins und die Norm des Verschiebungsvektors $\|\mathbf{u}\|$ viel kleiner als eine charakteristische Länge des Körpers L_0 ist.

Der Deformationstensor kann über $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}$ beschrieben werden. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Geht man von kleinen Verzerrungen aus, ergeben sich geringe Abweichungen des Deformationsgradienten \mathbf{F} mit der Identität \mathbf{I} . Für diesen Fall lassen sich Verzerrungsmaße vereinfachen, man spricht von geometrischer Linearisierung. So erhält man den rechten und linken CAUCHY-GREEN-Deformationstensor in linearisierter Form:

$$\mathbf{C}_{\text{lin}} = \mathbf{B}_{\text{lin}} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T. \quad (\text{A.12})$$

Der räumliche bzw. materielle Verzerrungstensor wird im Folgenden nur als Verzerrungstensor bezeichnet.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}_{\text{lin}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\text{lin}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{a}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{a}))^T) \quad (\text{A.13})$$

oder in Indexschreibweise:

$$\varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.14})$$

Zudem kann aus dem Produkt in der Gl. (A.7) eine Symmetrie des Verzerrungstensors abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \quad \text{oder} \\ \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= \varepsilon_{ji} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \varepsilon_{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Neben den frei gewählten Koordinatensystemen, die durch die Transformationsbeziehung geändert werden können, gibt es ein besonderes Koordinaten- bzw. Achsensystem, das Hauptachsensystem. Es kennzeichnet sich dadurch aus, dass an den Schnitten senkrecht zu den Achsen nur Normaldehnungen und keine Schubverformungen auftreten. So existiert ein Hauptachsensystem, in dem die Gleitungen verschwinden und nur die Hauptdehnungen ϵ_1 , ϵ_2 und ϵ_3 auftreten. Daneben gibt es die drei Invarianten des Verzerrungstensors I_ϵ , II_ϵ und III_ϵ . Die erste charakterisiert dabei die Volumendehnung

$$I_\epsilon = \varepsilon_V = \varepsilon_{kk} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \text{Spur}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (\text{A.16})$$

Dabei wird der Verzerrungstensor entsprechend

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_V}{3} \mathbf{I} + \mathbf{e} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_V}{3} \delta_{ij} + e_{ij}. \quad (\text{A.17})$$

zerlegt. Der erste Summand beschreibt die Volumenänderung, während durch den Deviator \mathbf{e} eine Gestaltänderung ausgedrückt wird. Auf die weiteren zwei Invarianten wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Man kann jedoch in [3, 81] darüber nachlesen.

A.1.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfelder

Neben dem Deformationsgradiententensor \mathbf{F} , der die lokalen Deformationen von Linien-, Flächen- und Volumenelementen charakterisiert, spielt in der Kontinuumsmechanik auch der Geschwindigkeitsgradiententensor \mathbf{L} eine wichtige Rolle, besonders in der Stömungsmechanik. Eine ausführliche Betrachtung kann aus [4] entnommen werden. Mit Hilfe des Geschwindigkeitsgradiententensors können die Änderungsgeschwindigkeiten materieller Linien-, Flächen- und Volumenelemente analysiert werden. Zu Beginn führt man die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines materiellen Punktes \mathbf{a} durch folgende Gleichung

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}, t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \quad (\text{A.18})$$

ein. Dabei stellt der Operator „ $\frac{D}{Dt}$ “ die zeitliche Ableitung und $\frac{D}{Dt}$ die substantielle Ableitung in LAGRANGEScher Betrachtung dar. Das Einsetzen von $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ führt auf das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ in der EULERSchen Betrachtung zurück. Das Beschleunigungsfeld eines materiellen Punktes ergibt sich analog:

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{a}, t). \quad (\text{A.19})$$

Das Beschleunigungsfeld $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ kann wieder durch Einsetzen von $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ermittelt werden, es kann aber auch durch die substantielle Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ bestimmt werden. Die substantielle Ableitung setzt sich nach der Kettenregel der Differentialrechnung zusammen

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v}. \quad (\text{A.20})$$

Nun lässt sich der räumliche Geschwindigkeitsgradiententensor \mathbf{L} folgendermaßen beschreiben:

$$\mathbf{L} = [\text{grad}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t))]^T \quad \text{oder} \quad L_{ij} = v_{i,j}. \quad (\text{A.21})$$

Dabei lässt sich der Tensor in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil aufteilen:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (\text{A.22})$$

Der symmetrische Anteil wird Streck- oder auch Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{A.23})$$

genannt. Mit Hilfe der Koordinaten vom Deformationsgeschwindigkeitstensor können den Änderungsraten für die Längen und die Winkel materieller Linienelemente zugeordnet werden. Der antisymmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradiententensors heißt Drehgeschwindigkeitstensor oder Spintensor

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.24})$$

Die Koordinaten des Drehgeschwindigkeitstensors können den Drehgeschwindigkeiten materieller Linienelemente zugewiesen werden.

A.1.3 Belastungen und Spannungen

Die für die Deformation eines Körpers verantwortlichen äußeren Kräfte, auch eingeprägte Kräfte genannt, können in Körper- und Oberflächenkräfte unterteilt werden. Körperkräfte können auf die Massen- oder Volumeneinheit bezogen werden. Für die Massenkraft $\mathbf{f}^m dm$ ist z.B. \mathbf{f}^m der Vektor der Massenkraftdichte:

$$\mathbf{f}^m = [f_x^m \ f_y^m \ f_z^m]^T = [f_1^m \ f_2^m \ f_3^m]^T, \quad (\text{A.25})$$

wobei m die Masse und \mathbf{F} die Körperkraft sind. Die Indizes x, y, z bzw. $1, 2, 3$ deuten auf die Vektorkomponenten in Achsenrichtung hin. Bezieht man die Körperkraft auf das Volumen V ergeben sich für die Volumenkraft $\mathbf{f}^V dV$ und Volumenkraftdichte:

$$\mathbf{f}^V = [f_x^V \ f_y^V \ f_z^V]^T = [f_1^V \ f_2^V \ f_3^V]^T. \quad (\text{A.26})$$

ρ ist die Massendichte, oft nur kurz als Dichte benannt. Oberflächenkräfte wirken immer von außen auf eine Fläche A und werden daher auch als eingeprägte Kontaktkräfte bezeichnet. Die Oberflächenkraft $\mathbf{f}^O dA$ ist auf die Flächeneinheit bezogen, wobei \mathbf{f}^O hierbei den Oberflächenspannungsvektor darstellt:

$$\mathbf{f}^O = [f_x^O \ f_y^O \ f_z^O]^T = [f_1^O \ f_2^O \ f_3^O]^T. \quad (\text{A.27})$$

Im vorherigen Kapitel wurde eine werkstoffunabhängige Kenngröße zur Beschreibung der Verzerrung vorgelegt. In diesem Kapitel führt man eine weitere werkstoffunabhängige Kenngröße im

Gebiet der Kinetik ein und leitet die grundlegenden Gleichungen der Dynamik her. Hierzu wird einer der Oberflächenspannung ähnelnden Größe aus dem Grenzprozess zu einer infinitesimalen Fläche

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (\text{A.28})$$

festgelegt, die allgemein als Spannung bezeichnet wird. Im allgemeinen Fall wird die Kraft durch einen Vektor beschrieben. Dabei wirkt sie auf eine infinitesimale betrachtete Fläche, die durch ihren Normalenvektor \mathbf{n} charakterisiert werden kann. Es wird ersichtlich, dass die Spannung von zwei Richtungen abhängig ist. Somit dient ein Tensor zweiter Stufe, der Spannungstensor,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{A.29})$$

zur Beschreibung des aktuellen Spannungszustandes. Aus diesem Spannungstensor lässt sich mit Hilfe des Normalenvektors der betrachteten Flächen der Spannungsvektor \mathbf{t} berechnen

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad t_i \mathbf{e}_i = \sigma_{jin} \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.30})$$

Diese Bedingung wird auch Satz von Cauchy genannt. Entsprechend der Argumentation mit materiellen und räumlichen Koordinaten wird der PIOLA-KIRCHOFF- und der CAUCHY- Spannungstensor unterschieden. Für kleine Deformationen können die Tensoren als gleich angenommen werden.

Vielfach ist es nützlich den Spannungstensor additiv zu zerlegen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{I} + \mathbf{s} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma_m \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + s_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.31})$$

mit der allseitig gleichen anliegenden Spannung $\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$. Aufgrund der Analogie zum Spannungszustand in ruhenden Flüssigkeiten wird dieser Anteil auch als hydrostatischer Spannungszustand bezeichnet. Den Tensor \mathbf{s} bezeichnet man als Spannungsdeviator.

A.1.4 Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen

Des Weiteren wird eine der wichtigsten Betrachtungsweisen in der Mechanik erklärt. Gleichgewichtsbedingungen, auch Bilanzgleichungen genannt, besagen, dass die zeitliche Änderung einer Zustandsgröße gleich dem positiven oder negativen Zuwachs innerhalb des Gebiets und dem Zu- bzw. Abfluss über die Gebietsgrenzen ist.

Befindet sich ein Körper in Ruhelage, somit im statischen Gleichgewicht, müssen die angreifenden Oberflächenkräfte $\mathbf{f}^0 dA = \mathbf{t} dA$ und Volumenkräfte $\mathbf{f}^V dV$ im Kräfte- und Momentengleichgewicht sein:

$$\int_V \mathbf{f}^V dV + \int_A \mathbf{t} dA = \mathbf{0}, \quad (\text{A.32})$$

$$\int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{f}^V) dV + \int_A (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dA = \mathbf{0}. \quad (\text{A.33})$$

Mit der Gl. (A.30) und durch die Anwendung des Divergenztheorems, auch GAUSSScher Integralsatz genannt [29], erhält man:

$$\int_A \mathbf{t} dA = \int_A \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dA = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \text{div } \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (\text{A.34})$$

Damit vereinfacht sich die Gl. (A.32) zu

$$\int_V (\mathbf{f}^V + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = \mathbf{0}. \quad (\text{A.35})$$

Somit kann das integrale Gleichgewicht eines beliebigen Kontinuums in Ruhelage beschrieben werden. Lässt sich durch hinreichende Glattheit und Stetigkeit des Integranden das Integral berechnen, erhält man die differentielle Gleichgewichtsbedingung:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^V = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^V = \mathbf{0} \quad (\text{A.36})$$

Erweitert man das Gleichgewicht durch die Trägheitskräfte $-\ddot{\mathbf{x}} dm = -\ddot{\mathbf{x}} \rho dV$ nach Newton und d'Alembert ergibt sich

$$\int_V (\mathbf{f}^V + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{x}}) dV = \mathbf{0}. \quad (\text{A.37})$$

Nach den gleichen Überlegungen, wie beim statischen Gleichgewicht, erhält man das erste Cauchy-Euler'sche Bewegungsgesetz:

$$\mathbf{f}^V + \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \rho \ddot{\mathbf{x}} = \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad (f_i^V + \sigma_{ji,j}) \mathbf{e}_i = \rho \ddot{x}_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.38})$$

Hingegen folgt aus dem Momentengleichgewicht mit dem Divergenztheorem

$$\int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{f}^V) dV - \int_V [\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{x})] dV = \mathbf{0} \quad (\text{A.39})$$

und mathematischem Geschick [4] mit der Identität **I** für den statischen Fall des zweiten Cauchy-Euler'schen Bewegungsgesetzes die Symmetrie des Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma_{ji} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \sigma_{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.40})$$

A.1.5 Bilanzgleichungen

Als typische Bilanzgleichungen können Massenbilanz, Impulsbilanz, Drehimpulsbilanz, Energiebilanz sowie der zweite Hauptsatz der Thermodynamik genannt werden. Wobei die zwei letztgenannten in der hier angeführten Mechanik weniger von Interesse sind.

A.1.5.1 Massenbilanz

Die Masse eines Körpers ist durch das Volumenintegral über das Dichtefeld bestimmt

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{a}, t) dV_0. \quad (\text{A.41})$$

Durch die Gleichheit der Integrale wird die globale Massenerhaltung ausgedrückt. Die Masse dm eines materiellen Volumens dV ist zu jeder Zeit konstant. Es darf keine Massenänderung entstehen:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \text{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}) \right] dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{a}, t) dV_0 = 0. \quad (\text{A.42})$$

A.1.5.2 Impulsbilanz

Der Impulsvektor kann wie folgt

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \int_m \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dm = \int_V \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rho_0(\mathbf{x}, t) dV_0 \quad (\text{A.43})$$

berechnet werden. Die Impulsbilanz beschreibt, dass die zeitliche Änderung des Impuls gleich der Summe aller von außen auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte ist. Diese Impulsbilanz wird auch als erstes EULER-CAUCHY-Bewegungsgesetz bezeichnet. In globaler Schreibweise lautet diese Bilanz

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \int_A \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) dA + \int_V \mathbf{f}^m(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_A \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) dA + \int_V \mathbf{f}^V(\mathbf{x}, t) dV. \quad (\text{A.44})$$

Betrachtet man die Bilanz lokal, so erhält man

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}^m = \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}^V = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \quad (\text{A.45})$$

A.1.5.3 Drehimpulsbilanz

Der Drehimpuls- oder Drallvektor bestimmt sich über:

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{p}, t) = \int_V \mathbf{x} \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (\text{A.46})$$

Die Drehimpulsbilanz besagt, dass die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines Körpers $\mathbf{I}_O(\mathbf{p}, t)$ in Bezug auf einen Punkt O gleich dem Gesamtmoment aller außen auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte bezüglich des gleichen Punktes O ist. Aus der räumlichen Betrachtung ergibt sich folgende Drehimpulsbilanz

$$\frac{D\mathbf{I}_O}{Dt} = \int_A [\mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)] dA + \int_V [\mathbf{x} \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}^m(\mathbf{x}, t)] dV = \int_V [\text{grad}(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{x} \times \mathbf{f}^V(\mathbf{x}, t)] dV. \quad (\text{A.47})$$

Bei der lokalen Betrachtungsweise gelangt man wieder zur Symmetrieaussage für den CAUCHY-schen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

A.1.5.4 Mechanische Energiebilanz

Im Folgenden sind einige klassische Energieprinzipien für deformierbare Körper zusammengefasst. Wirken auf einen deformierbaren Körper äußere Oberflächen- und Volumenkräfte wird der Körper deformiert und somit Arbeit geleistet. Als Folge der geleisteten Arbeit nimmt dieser Energie auf. Dabei teilt sich diese mechanische Energie \mathcal{W} in zwei Energietypen auf. Zum einen wird ein Teil für die Deformation als kinetische Energie \mathcal{K} , also Bewegungsenergie, verwendet. Der andere bzw. der verbleibende Teil der Energie aus der Differenz der Gesamtenergie und der kinetischen Energie ist die innere Energie \mathcal{U} , die bei Festkörpern der Verzerrungsenergie und bei Fluiden der Energie entspricht, die eine viskose Dissipation während der Strömung ermöglicht. Die kinetische und innere Energie lassen sich wie folgt bestimmen

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho dV \quad \text{und} \quad \mathcal{U} = \int_V u \rho dV, \quad (\text{A.48})$$

wobei $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ und ρu die spezifischen Energien oder Energiedichten und $\mathcal{K} + \mathcal{U}$ die mechanische Gesamtenergie des Körpers darstellen. Die Leistung der äußeren Kräfte lässt sich folgendermaßen

$$\mathcal{P}_a = \int_A \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA + \int_V \rho \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} dV \quad (\text{A.49})$$

bestimmen. Der Energiesatz der Kontinuumsmechanik besagt, dass die Änderung der mechanischen Gesamtenergie eines Körpers den Energiefluss innerhalb des Körpers ausdrückt. Dies kann alternativ in leistungsbezogener oder energetischer Form ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\mathcal{K} + \mathcal{U}) &= \mathcal{P}_a + \mathcal{Q}, \\ \frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) \rho dV &= \int_A (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) dA + \int_V (\mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \rho) dV + \mathcal{Q} \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

oder

$$(\mathcal{K} + \mathcal{U})_2 - (\mathcal{K} + \mathcal{U})_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{P}_a + \mathcal{Q}) dt, \quad (\text{A.51})$$

wobei \mathcal{Q} den Energietransport im Körper darstellt, welcher nicht durch \mathcal{P}_a erfasst wird (zum Beispiel Wärmetransport, der hier nicht näher festgelegt wird).

A.1.5.5 Thermomechanische Energiebilanz

Die thermomechanische Energiebilanz wird auch als erster Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet. Zusätzlich zur mechanischen Energiebilanz wird der thermische Energietransport \mathcal{Q} ausführlich betrachtet. Die Geschwindigkeit des Wärmetransports setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der unmittelbaren Wärmezufuhr im Volumen infolge skalarer Wärmequellen \mathcal{Q}_r sowie der Wärmezufuhr über die das Kontinuum umhüllende Fläche A

$$\mathcal{Q} = \int_V \rho \mathcal{Q}_r dV - \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} dA. \quad (\text{A.52})$$

Dabei ist \mathbf{h} der Wärmestromvektor pro Flächeneinheit A . Das Vorzeichen des Flächenintegralterms wurde so gewählt, dass ein positiver Wärmestromvektor eine Wärmezufuhr über die Oberfläche bedeutet. Damit erhält man aus der Bilanz der Energie

$$(\mathcal{K} + \mathcal{U})_2 - (\mathcal{K} + \mathcal{U})_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{P}_a + \mathcal{Q}) dt \quad \text{oder} \quad \dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{U}} = \mathcal{P}_a + \mathcal{Q} \quad (\text{A.53})$$

durch Einsetzen der Ausdrücke \mathcal{K} , \mathcal{U} , \mathcal{P}_a und \mathcal{Q} :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) \rho dV = \int_A (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) dA + \int_V (\mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \rho) dV + \int_V \rho \mathcal{Q}_r dV - \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} dA \quad (\text{A.54})$$

oder in lokaler Form

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho \mathcal{Q}_r. \quad (\text{A.55})$$

Während der erste Hauptsatz nur eine Aussage über den Erhalt der Gesamtenergie bei der Transformation von einen in die andere Energieform gibt, liefert der zweite Hauptsatz eine Angabe, wie

reversibel beziehungsweise irreversibel eine Energietransformation ist. Dabei stellt die Entropie S ein Maß dar, wie viel Energie irreversibel von einer nutzbaren in nichtnutzbare, dies bedeutet nicht mehr in mechanische Arbeit umsetzbare Energie, transformiert wird. Die Entropie definiert sich über

$$S = \int_m s dm = \int_V \rho s dV, \quad (\text{A.56})$$

dabei ist s spezifische innere Entropie. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in globaler Form lautet

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \rho \frac{Q_r}{T} dV - \int_A \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{T} dA = \int_V \rho \frac{Q_r}{T} dV - \int_V \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{h}}{T} - \frac{\mathbf{h} \cdot \nabla T}{T^2} \right) dV \quad (\text{A.57})$$

und in lokaler Form

$$\rho T \dot{s} \geq \rho Q_r - \nabla \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \nabla \ln T. \quad (\text{A.58})$$

Durch Umstellen und Anwenden der Produktregel kann der Hauptsatz als dissipative Ungleichung

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \frac{Df_E}{Dt} - \rho s \frac{DT}{Dt} - \mathbf{h} \cdot \nabla \ln T \geq 0 \quad (\text{A.59})$$

geschrieben werden, dabei stellt $f_E = f - T s$ die HELMOLTZsche freie Energie dar. Des Weiteren wird die spezifische Dissipationsfunktion

$$\mathfrak{D} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho (\dot{f}_E + s \dot{T}) \geq 0 \quad (\text{A.60})$$

eingeführt, die ein Maß für die Energiedissipation im Kontinuum präsentiert. Unter Verwendung dieser dissipativen Funktion \mathfrak{D} kann man auch den ersten Hauptsatz wiedergeben

$$\begin{aligned} \rho T \frac{Ds}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \left(\frac{Df_E}{Dt} + s \frac{DT}{Dt} \right) + (\rho Q_r - \nabla \cdot \mathbf{h}), \\ \rho T \frac{Ds}{Dt} &= \mathfrak{D} + (\rho Q_r - \nabla \cdot \mathbf{h}). \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

A.1.6 Materialverhalten

Die Gleichungen zur Beschreibung des spezifischen Materialverhaltens werden im Allgemeinen als Konstitutivgleichungen bezeichnet. Alternativ treten auch Begriffe wie Materialgleichungen, Stoffgleichungen, physikalische Gleichungen oder Zustandsgleichungen auf. Konstitutivgleichungen verbinden alle von den makroskopischen Kontinuumsverhalten beschreibenden phänomenologischen Größen. Solche Größen, die in der Physik auch Konstitutivgrößen genannt werden, wurden zum Teil in den vorhergehenden Kapitel behandelt: Spannungen, Verzerrungen, Temperatur und viele mehr. Die Beziehungen zwischen diesen Größen können unterschiedliche mathematische Strukturen aufweisen, wie zum Beispiel algebraische Beziehungen (HOOKESches Gesetz) oder Differentialgleichung (NEWTONsches Fluid).

Die Anzahl der zu bestimmenden Konstitutivgleichungen hängt vom konkreten Kontinuumsproblem ab. Für den rein mechanischen Fall werden folgende Bilanzgleichungen eingeführt: die Massenbilanz (eine skalare Gleichung), die Impulsgleichung (eine vektorielle Gleichung, dies bedeutet bis zu drei skalare Gleichungen), die Drehimpulsbilanz (eine vektorielle Gleichung) und die Energiebilanz (eine skalare Gleichung). In Summe entstehen im dreidimensionalen Fall acht skalare Gleichungen zur Verfügung. Jedoch sind folgende vierzehn Größen zu bestimmen: die

Dichte ρ (eine skalare Größe), die Geschwindigkeit \mathbf{v} (ein Vektor bzw. drei skalare Koordinaten), der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ (ein Tensor zweiter Stufe, daraus folgen neun Koordinatengrößen) und die innere Energie \mathcal{U} . Um zur Lösung für das notwendige Lösungssystem zu gelangen, müssen die Bilanzgleichungen durch sechs Konstitutivgleichungen ergänzt werden. Der Inhalt dieses Abschnittes wurde aus den Quellen [4] und [190] zusammengefasst.

A.1.6.1 Linear-elastische Festkörper

Aus den Impulsbilanzgleichungen ergibt sich ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen mit neun unbekannten Größen (sechs Komponenten des symmetrischen Spannungstensors und drei aus den Beschleunigungskomponenten). Um zu einer eindeutigen Lösung des Systems zu gelangen müssen sechs weitere Gleichungen eingeführt werden, die nicht mehr aus den allgemeinen Bilanzgleichungen formuliert werden können. Dabei wird nun ersichtlich, dass die Materialunabhängigkeit aufgegeben werden muss, da Systeme je nach Material unterschiedlich reagieren. Die Materialgleichungen können mittels der Materialtheorie hergeleitet werden.

Das in dieser Arbeit verwendete linear-elastische Materialverhalten zeichnet sich durch vollständige Reversibilität aus. Es wird mit Hilfe des verallgemeinerten oder anisotropen HOOKEschen Gesetzes beschrieben:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.62})$$

wobei \mathbb{C} den Steifigkeits- und \mathbb{S} den Nachgiebigkeitstensor darstellt. Der Operator “ \cdot ” steht für die zweifache Kontraktion zweier Tensoren. Dabei folgt offensichtlich, dass $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$ ist und das

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \mathbb{S} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{A.63})$$

gilt. Die Energie, die bei der Deformation eines linear-elastischen Materials benötigt wird, muss vollständig im Material gespeichert werden. Hierfür wird eine spezifische Größe, die sogenannte volumenbezogene Formänderungsenergie oder Formänderungsenergiedichte dW_F (siehe Gl. (A.48) und [149]), eingeführt und durch verschiedene Integrationswege

$$\rho u = dW_F = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbb{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbb{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.64})$$

bestimmt werden. Die spezifische komplementäre Energie berechnet sich hingegen zu

$$\rho u^* = dW_F^* = \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} (\mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.65})$$

Als Potenzialformulierung erhält man:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial dW_F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial dW_F^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{A.66})$$

Die Formänderungsenergiedichte dW_F kann auch als volumenbezogenes elastisches Potenzial betrachtet werden. Zudem lässt sich die Formänderungsenergiedichte in einen Energieanteil reiner Volumenänderung und in einen Energieanteil reiner Gestaltänderung trennen [81]. Mit den Beziehungen aus Gleichung (A.63) können der Steifigkeits- und Nachgiebigkeitstensor formuliert werden:

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 dW_F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{S} = \frac{\partial^2 dW_F^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}. \quad (\text{A.67})$$

Im allgemeinen Fall wird der Steifigkeits- und Nachgiebigkeitstensor durch einen Tensor vierter Stufe mit 81 unabhängigen Einträgen erfasst. Aufgrund der Vertauschbarkeit der Differentiation (Satz von Schwarz [29]) in der Gleichung (A.67) ergibt sich eine Symmetrie der beiden Tensoren ($C_{ijkl} = C_{klij}$ und $S_{ijkl} = S_{klij}$). Zudem entstehen durch die Symmetrie von Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ weitere Symmetriebedingungen ($C_{ijkl} = C_{jikl}$ bzw. $C_{ijkl} = C_{ijlk}$). Somit reduzieren sich die Tensoren auf 36 (6x6) Einträge, wobei durch die Symmetrie nur 21 Größen unabhängig beziehungsweise unbekannt sind.

Durch diese Verringerung der unbekannten Einträge lässt sich zum Beispiel das Materialverhalten in der üblichen Schreibweise von Voigt [217] $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ mit $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}]^T$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{31}]^T$ überführen. Jedoch besitzt diese Schreibweise den Nachteil, dass \mathbf{C} als 6x6-Matrix nicht die gleichen Tensoreigenschaften aufweist, wie der vierstufige Tensor \mathbb{C} . Dieses Problem kann mit Hilfe der Schreibweise nach Fedorov [61], Covin und Mehrabadi [40, 144], $\sigma_i \mathbf{h}_i = C_{ij} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j \cdot \cdot \varepsilon_k \mathbf{h}_k$ gelöst werden. Die Gleichung für die Koeffizienteneinträge σ_i , ε_k und C_{ij} lässt sich in Matrixform folgendermaßen

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\ & & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\ & & & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ & & & & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\ & & & & & 2C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.68})$$

notieren. Diese Schreibweise hat im Vergleich zur üblichen VOIGTSchen Notation den Vorteil, dass die Tensoren \mathbf{h}_i einen sechsdimensionalen Raum aufspannen und normiert sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & \mathbf{h}_4 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{h}_2 &= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & \mathbf{h}_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{h}_3 &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, & \mathbf{h}_6 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Dadurch können mit Hilfe der quadratischen Matrix die Invarianten, Eigenwerte und Eigentensoren berechnet werden [25]. Der Tensor \mathbb{C} beschreibt in sich dabei ein vollständig anisotropes und damit auch triklines Materialverhalten.

Abhängig vom Material lässt sich durch das Nutzen weiterer Materialsymmetrien die Anzahl der unbekannten Einträge reduzieren. Einen Überblick über die möglichen verschiedenen Materialsymmetrien, die Symmetrieebenen und die Anzahl der unbekannten Einträge bzw. Materialkonstanten soll die Tabelle A.1 geben. Alternativ kann diese Art der Materialcharakterisierung aus [25, 33] oder [39] entnommen werden. Als die wichtigsten Symmetrien für diese Arbeit werden die orthotrope, kubische und isotrope Symmetrie angesehen.

Unter Isotropie versteht man ein gleiches Materialverhalten in allen Raumrichtungen, dies bedeutet ein rotationsinvariantes Verhalten. Dadurch steigt die Anzahl der Symmetrieebenen gegen unendlich, währenddessen sich die Zahl der unbekannten Materialkonstanten auf zwei reduziert. In der Literatur findet man häufig Paare dieser Materialkonstanten:

- das Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν , die vor allem im Ingenieurbereich Anwendung finden,

Tabelle A.1: Übersicht über die acht Materialsymmetrien (nach [25, 33, 39, 190])

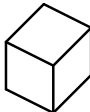
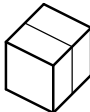




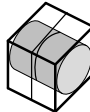

Art der Materialsymmetrien							
triklin	monoklin	orthotrop	trigonal	tetragonal	kubisch	transveral isotrop	isotrop
Anzahl der Materialsymmetrieebenen							
0 	1 	3 	3 	5 	9 	$\infty + 1$ 	∞^3 
Anzahl der unbekannten Matrixeinträge							
21	13	9	6	6	3	5	2
Steifigkeitsmatrizen							
$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}$

Tabelle A.2: Konvertierung der elastischen Konstanten des isotropen Fall.

	Zugrunde liegendes Konstantenpaar				
	E, ν	K, ν	G, ν	K, G	λ, μ
K	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	K	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	K	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
E	E	$3K(1-2\nu)$	$2G(1+\nu)$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$
ν	ν	ν	ν	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$
$G = \mu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	G	G	μ
λ	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{2(1+\nu)}$	$\frac{2G\nu}{2(1-2\nu)}$	$K - \frac{2}{3}G$	λ

- die LAMÉ-Konstanten λ und μ , die vor allem für theoretische Betrachtungen genutzt werden,
- das Kompressionsmodul K und das Schubmodul G , die im Materialverhalten einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil beschreiben oder
- eine beliebige Kombination der aufgeführten Konstanten.

Eine Umrechnung der einzelnen Kombinationen kann zum Beispiel in [3] gefunden werden. So lässt sich mit der Gl. (A.31) und mit den LAMÉ-Konstanten folgende Spannungs-Dehnungs-Beziehung aufstellen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Spur}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}. \quad (\text{A.70})$$

Eine kleine Übersicht über mögliche Kombinationen soll die Tabelle A.2 geben. Setzt man die isotropen Materialkonstanten E und ν in die volumenbezogen Formänderungsenergien (A.64) und (A.65) erhält man:

$$\begin{aligned} dW_F &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} - \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Spur}(\boldsymbol{\epsilon}))^2 \right] \text{ bzw. } dW_{Fij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{kk})^2 \right], \\ dW_F^* &= \frac{1}{2E} \left[(1+\nu) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nu (\text{Spur}(\boldsymbol{\sigma}))^2 \right] \text{ bzw. } dW_{Fij}^* = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu (\sigma_{kk})^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Mit den Bedingungen, dass die Formänderungsenergien stets ≥ 0 sein müssen und den Gleichungen (A.71) genügen, lässt sich erkennen, dass die Querkontraktionszahl ν dabei im Intervall $(-1; 0,5)$ liegen muss.

Die obere Grenze der Querkontraktionszahl bezeichnet dabei den Punkt, an dem das Volumen eines elastisch beanspruchten Körpers konstant bleibt oder das Volumen beginnt sich im hydrostatischen Druckfall zu vergrößern. Eine natürliche untere Grenze für herkömmliche Werkstoffe stellt $\nu \geq 0$ dar, da sich ein Körper unterhalb dieser Grenze zum Beispiel im einachsigen Druckversuch in den beiden unbelasteten Richtungen zusammenzieht. Bei Metallen liegt die Querkontraktionszahl üblicherweise im Bereich von 0,25 bis 0,35 [13].

Im allgemeinen orthotropen Fall erhält man neun unabhängige Materialkonstanten, die sich durch die drei Symmetrieebenen ergeben. In der Regel werden die Materialkonstanten E , ν und G

des isotropen Falls genutzt, indem sie unabhängig für jede Raumrichtung angenommen werden. Daraus ergibt sich zum Beispiel folgender Nachgiebigkeitstensor:

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ sym. & & & & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G_{11}} \end{bmatrix} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j, \quad (\text{A.72})$$

wobei die Bedingungen der Hauptsymmetrie ($\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$, $\frac{\nu_{22}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$ und $\frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$) bereits beinhaltet sind [5].

Der kubische Symmetriefall befindet sich mit seinen drei Materialkonstanten und neun Symmetrieebenen zwischen Orthotropie und Isotropie. Hierbei sind die Materialkonstanten im Gegensatz zur Orthotropie in alle Raumrichtungen gleich ($E = E_1 = E_2 = E_3$, $\nu = \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$ und $G = G_{12} = G_{13} = G_{23}$). Jedoch besteht keine Beziehung zwischen dem Schubmodul G und dem Elastizitätsmodul E mit der Querkontraktionszahl ν .

A.1.6.2 Ideales Gas

Ein einfaches Beispiel für materialtheoretische beschriebene Konstitutivgleichungen repräsentiert die idealen Gase. Als Ausgangspunkt wird die Zustandsgleichung für ideale Gase

$$pV = m_{\text{Gas}} R_i T \quad (\text{A.73})$$

genutzt. Dabei ist m_{Gas} die Gasmasse, p der Druck, R_i die spezifische Gaskonstante, T die Temperatur und V das Volumen. Die spezifische Gaskonstante hängt von der Molmasse M und der allgemeinen Gaskonstante R_a ab:

$$R_i = \frac{R_a}{M}. \quad (\text{A.74})$$

Mit der Bestimmungsgleichung für die Dichte

$$\rho = \frac{m_{\text{Gas}}}{V}, \quad (\text{A.75})$$

erhält man für den Druck:

$$p = \frac{\rho R_a T}{M}. \quad (\text{A.76})$$

Aus der Zustandsgleichung kann folgender Spannungstensor analog zum ruhenden Spannungszustand von linear viskosen Fluiden,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} = -\frac{\rho R_a T}{M} \mathbf{I} \quad (\text{A.77})$$

für den hydrostatischen Spannungszustand abgeleitet werden.

A.1.6.3 Linear-viskose Fluide

Im Vergleich zu den Festkörpern können Fluide im Ruhezustand keine Schub- bzw. Scherspannungen aufnehmen, d. h. der Spannungszustand ist im Ruhezustand durch den Kugeltensor gekennzeichnet. Damit ergibt sich als Stoffgleichung für ideale Fluide folgende Beziehung:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} \quad \text{oder} \quad \sigma_{ij} = -p(\rho, T) \delta_{ij}, \quad (\text{A.78})$$

wobei der Druck p als unabhängige mechanische Variable anzusehen ist, die mit der Dichte ρ und der Temperatur T in einer thermischen Zustandsgleichung des Fluids zusammenhängen, wie zum Beispiel für ein ideales Gas.

Im Falle einer Bewegung $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ kann ein zähes Fluid viskose Spannungen aufnehmen, die durch einen zusätzlichen Term $\boldsymbol{\sigma}^V$ zum Ausdruck kommen und vom Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} mit $D_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ abhängen, so ergibt sich folgender Spannungszustand:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^V. \quad (\text{A.79})$$

Der Term $\boldsymbol{\sigma}^V$ wird auch Extrapannungstensor oder viskoser Spannungstensor genannt. Bei Linearität ist dieser Tensor durch eine lineare Transformation

$$\boldsymbol{\sigma}^V = \mathbb{V}(\rho, T) \cdot \mathbf{D} \quad (\text{A.80})$$

oder

$$\sigma_{ij}^V = V_{ijkl}(\rho, T) D_{kl} \quad (\text{A.81})$$

gegeben, wobei \mathbb{V} den Viskositätstensor vierter Stufe darstellt und die viskosen Eigenschaften beinhaltet. Man kann auch ein viskoses Fluid als Stoff definieren, dessen Eigenschaften richtungsabhängig sind. Solche Fluide werden als einfach bezeichnet. Beschreibt der viskose Spannungstensor ein homogenes isotropes Material ergibt sich folgende isotrope Tensorfunktion von \mathbf{D} :

$$\boldsymbol{\sigma}^V = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{D} + \beta_2 \mathbf{D}^2 + \dots, \quad (\text{A.82})$$

wobei $\beta_i = \beta_i(\text{Inv}(\mathbf{D}))$. Im Rahmen der physikalischen Linearisierung wird daraus eine lineare Funktion

$$\boldsymbol{\sigma}^V = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{D}, \quad (\text{A.83})$$

wobei $\beta_0 = \lambda^V (\mathbf{I} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{I} = \lambda^V \text{Spur}(\mathbf{D}) = \lambda^V \text{div}(\mathbf{v}) \mathbf{I}$ und $\beta_1 = 2\mu^V$. So ergibt sich der Spannungstensor eines zähen viskosen Fluids

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu^V \mathbf{D} + \lambda^V (\mathbf{I} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{I} = -p\mathbf{I} + 2\mu^V \mathbf{D} + \lambda^V \text{Spur}(\mathbf{D}) \mathbf{I}. \quad (\text{A.84})$$

Für ein inkompressibles Fluid erhält man folgenden Spannungstensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu^V \mathbf{D}^D, \quad (\text{A.85})$$

dabei ist \mathbf{D}^D der Deviator von \mathbf{D} .

A.1.7 Anfangs-Randwertproblem und HAMILTONsches Prinzip

Durch Einsetzen der Beschreibung des Materialverhaltens in die lokalen Bilanzgleichungen gelangt man zum vollständigen Anfangs-Randwertproblem in den Verschiebungen [220]. Daraus ergeben sich die Feldgleichungen (partielle Differentialgleichungen)

$$\rho \mathbf{f}^V + \text{div}(\mathbb{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) = \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.86})$$

des schwingenden dreidimensionalen Festkörpers. Um zur Lösung des Anfangs-Randwertproblems zu gelangen, bedarf es sowohl der Anfangsbedingungen für Verschiebungen zum Zeitpunkt Null $\mathbf{u}(\mathbf{t} = 0)$ und der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt Null $\mathbf{v}(\mathbf{t} = 0)$ als auch der Randbedingungen. Dabei können drei Arten von Randbedingungen

- für die Verschiebungen: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ auf $\partial\mathcal{B}_u$ (Dirichlet, geometrisch oder wesentlich),
- für die Spannungen: $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ auf $\partial\mathcal{B}_t$ (Neumann, dynamisch, natürlich oder restlich) und
- gemischte aus Verschiebungen und Spannungen

auf den Rand des Körpers, $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_u \cup \partial\mathcal{B}_t$ unterschieden werden.

Eine weitere Herleitungsmöglichkeit der beschreibenden partiellen Differentialgleichungen stellen die Prinzipien der analytischen Kontinuumsmechanik dar. Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen eines Kontinuums kann das HAMILTONSche Prinzip genutzt werden. Es beruft sich auf das Prinzip von LAGRANGE-D'ALEMBERT [220], welches in der Statik besser als Prinzip der virtuellen Arbeit bekannt ist. Mit der kinetischen Energie \mathcal{K} (A.48) und dem Potenzial Π , das sich aus inneren und äußeren Potenzialen zusammensetzt, erhält man folgende Beziehung:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} W_\delta dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{K}(\mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{u}) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} W_\delta dt = 0, \quad (\text{A.87})$$

wobei $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \Pi$ die LAGRANGESche Funktion, δ die Variation und W_δ die virtuelle Arbeit der potenziallosen Kräfte bezeichnet. Dabei ist ersichtlich, dass die Variation, die sich aus der Differenz zwischen der kinetischen und der potenziellen Energie der virtuellen Arbeit zusammensetzt, für den Übergang eines elastomechanisch-dynamischen Systems von einem Zustand in einen anderen im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ Null beträgt. Für ein konservatives elastomechanisch-dynamisches System erhält man ein Extremalprinzip [5]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{u}) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{K}(\mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{u}) dt = 0 \quad (\text{A.88})$$

mit

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (\text{A.89})$$

und

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{f}^V \cdot \mathbf{u} dV - \frac{1}{2} \int_A \mathbf{f}^O \cdot \mathbf{u} dA. \quad (\text{A.90})$$

Folglich wird dieses allgemeine Prinzip auf plattenförmige Strukturen angewandt.

A.2 Plattenschwingungen

Platten stellen ebene Flächentragwerke dar, bei denen die Belastung senkrecht zur Mittelfläche auftritt. Wird hingegen ein ebenes Flächentragwerk parallel zur Mittelfläche belastet, spricht man von einer Scheibe. Plattentheorien beschreiben räumliche Spannungs- und Verzerrungszustände durch Kenngrößen, die auf der Plattenmittelfläche definiert sind. In der Technischen Mechanik wird für ausreichend dünne Platten (Verhältnis von Plattendicke h zu Kantenlänge $l < 0,1$) gewöhnlich die klassische Kirchhoffsche Plattentheorie verwendet. Dieses Theoriemodell entspricht einer schubstarrten Platte mit kleinen Durchbiegungen. Für dünne bis mäßig dicke Platten ($h/l < 0,2$) findet die Mindlinsche Plattentheorie zumeist ihren Einsatz. Dieses Modell nach Mindlin kommt einem Modell einer schubelastischen Platte mit kleiner Durchbiegung gleich und wird oft

als Schubdeformationstheorie erster Ordnung bezeichnet bzw. klassifiziert. Viele reale Flächen-tragwerke im Maschinenbau fallen in den Bereich der mäßig dicken Platten. Des Weiteren verliert die einfache Biegetheorie bei höheren Frequenzen allmählich ihre Gültigkeit [41]. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die MINDLINSche Plattentheorie verwendet. Um die Unterschiede zu verdeutlichen wird zu Beginn auf die schubstarre Platte eingegangen.

A.2.1 KIRCHHOFFSche Plattentheorie

Die sogenannte klassische Plattentheorie wurde im Jahre 1850 von Kirchhoff entwickelt [6]. Die Anwendung dieser Theorie ist nur für hinreichend dünne Platten gültig. Zudem gelten folgende Annahmen:

- Das Plattenmaterial ist isotrop und homogen. Es gilt das verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz.
- Die Plattenmittelfläche beschreibt bei der Biegeform eine neutrale Ebene. Für alle Punkte der Plattenmittelfläche erfahren die Verformung $u_1(x_1, x_2, 0) = 0$, $u_2(x_1, x_2, 0) = 0$ und $u_3(x_1, x_2, 0) \neq 0$. Die Durchbiegung w ist im Vergleich zur Plattendicke klein und die Krümmungen der Biegeflächen dürfen linearisiert werden $\kappa_{11} \approx -w_{,11}$, $\kappa_{22} \approx -w_{,22}$ und $\kappa_{12} \approx -w_{,12}$. κ_{11} und κ_{22} stellen die Krümmungen der Mittelflächen in den parallelen Ebenen zur x_1, x_3 - und x_2, x_3 -Ebene dar. Die Krümmung ist die Verwindung oder Drillung der Mittelfläche.
- Alle Punkte auf einer Normalen zur unverformten Mittelfläche bleiben auch Punkte der Normalen zur verformten Mittelfläche (Verallgemeinerung der BERNOULLI-Balken-Hypothese auf Platten, auch zweite BERNOULLI-Hypothese oder KIRCHHOFFSche Normalenhypothese genannt [6]).
- Die Punkte auf einer beliebigen Normalen zur Mittelfläche ändern bei der Verformung ihre gegenseitige Abstände auf dieser Normalen nicht, d. h. die Platte wird in der Dickenrichtung als dehnstarr betrachtet (erste BERNOULLI-Hypothese).
- Die Normalspannung σ_{33} wird als sehr klein gegenüber den anderen Normalspannungen σ_{11} und σ_{22} gesehen und folglich gilt $\sigma_{33} \approx 0$ (statische Hypothese).
- Die Schubspannungen σ_{13} und σ_{23} müssen aus Gleichgewichtsbedingungen bei der Platte einen von Null verschiedenen Wert annehmen. Angesichts der kinematischen Hypothese $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ ist dies nur für einen Schubmodul $G \rightarrow \infty$ möglich. Dies bedeutet eine schubstarre Platte.
- die Normalspannung σ_{33} wird für das schubelastische Plattenmodell vernachlässigt

Die Abmessungen und Größen für die Verschiebungsgleichungen für ein herausgeschnittenes differentielles Plattenelement im unverformten und verformten Zustand zeigt die Abb. A.2. Dabei stellen ψ_1 und ψ_2 die Drehwinkel der Plattenquerschnitte um die x_2 - und x_1 -Achse dar. Hierbei handelt es sich um sehr kleine Winkel und es gelten im Rahmen einer Theorie erster Ordnung folgende Gleichungen:

$$\cos \psi_1 \approx \cos \psi_2 \approx 1, \quad \sin \psi_1 \approx \psi_1 \approx \tan \psi_1 \approx w_{,1}, \quad \sin \psi_2 \approx \psi_2 \approx \tan \psi_2 \approx w_{,2}. \quad (\text{A.91})$$

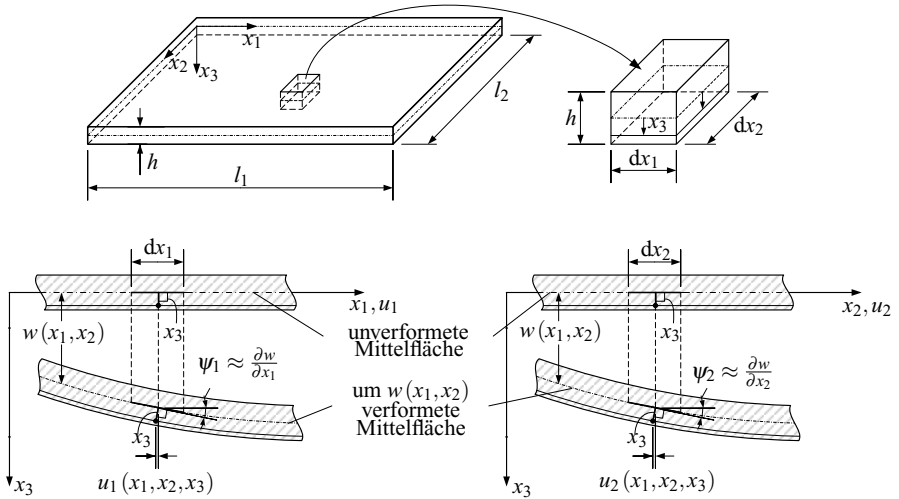


Abbildung A.2: Kinematische Beziehungen am Schubstarren Plattenelement nach [6].

Die kinematischen Hypothesen der Schubstarren Platte führen zu den folgenden Verschiebungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 w_{,1}(x_1, x_2), \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 w_{,2}(x_1, x_2), \\
 u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{A.92}$$

Aus den Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= u_{1,1} = -x_3 w_{,11}, \\
 \varepsilon_{22} &= u_{2,2} = -x_3 w_{,22}, \\
 \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = -2x_3 w_{,12}, \\
 \gamma_{21} &= 2\varepsilon_{21} = u_{2,1} + u_{1,2} = -2x_3 w_{,21}, \\
 \gamma_{13} &= 2\varepsilon_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} = u_{1,3} + w_{,1}, \\
 \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = u_{2,3} + w_{,2}
 \end{aligned} \tag{A.93}$$

wird erkenntlich, dass die Verzerrungen ε_{11} , ε_{22} und $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ linear abhängig von x_3 sind. Dahingegen zeigen sich die Schubverformungen als von x_3 unabhängige Größen. Aus der KIRCHHOFFschen Normalenhypothese erfolgt, dass die Schubverformungen bzw. -verzerrungen γ_{13} und γ_{23} vernachlässigt werden können:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{13} &= 2\varepsilon_{13} = u_{1,3} + w_{,1} = 0 \rightarrow u_{1,3} = w_{,1}, \\
 \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + w_{,2} = 0 \rightarrow u_{2,3} = w_{,2}.
 \end{aligned} \tag{A.94}$$

Begründet auf der ersten BERNOULLI-Hypothese ergibt sich, dass $u_{1,3}$ und $u_{2,3}$ über die Plattendicke konstant sind. Zugleich können die Verdrehwinkel als Ableitung der Durchbiegungen ermittelt

werden (siehe Abb. A.2)

$$\begin{aligned}\psi_1 &\approx u_{1,3} = -w_{,1}, \\ \psi_1 &\approx u_{2,3} = -w_{,2}.\end{aligned}\tag{A.95}$$

Aus den statischen und kinematischen Hypothesen für die KIRCHHOFFSche Platte geht hervor, dass für die klassische Plattentheorie ein ebener Spannungszustand angenommen werden kann. Ein Elastizitätsgesetz gibt es deshalb nur für die Spannungen σ_{11} , σ_{22} und σ_{12} . Die Schubspannungen σ_{13} und σ_{31} werden allein aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Die Spannungen σ_{33} , σ_{13} und σ_{23} liefern keinen Anteil zur Formänderungsenergie einer schubstarrten Platte. Die Spannungen werden durch Integration über die Plattendicke h auf die Schnittlänge bezogenen Schnittgrößen zusammengefasst. Als Ergebnis der Plattengrößen verbleiben Biegemomente, Torsionsmomente und Querkräfte:

$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_{mm} x_3 dx_3 &= m_{mm}(x_1, x_2) \quad \text{Biegemomente [Kraft]}, \\ \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_{mn} x_3 dx_3 &= m_{mn}(x_1, x_2) \quad \text{Biegemomente [Kraft]}, \\ \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_{m3} dx_3 &= q_m(x_1, x_2) \quad \text{Querkräfte [Kraft/Länge]}\end{aligned}\tag{A.96}$$

mit $m = 1, 2$ und $n = 1, 2$ und $m \neq n$. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Plattenschnittgrößen werden am unverformten differentiellen Plattenelement formuliert. Sie berücksichtigen das Kräftegleichgewicht in x_3 -Richtung und die Momentengleichgewichte um die x_1 - und x_2 -Achse. Vernachlässigt man die betragsmäßig kleineren Terme höherer Ordnung, erhält man zusammengefasst die Gleichgewichtsbedingungen der Schnittgrößen an einem Plattenelement:

$$\begin{aligned}q_{1,1} + q_{2,2} + q &= 0, \\ m_{11,1} + m_{21,2} - q_1 &= 0, \\ m_{22,1} + m_{12,1} - q_2 &= 0.\end{aligned}\tag{A.97}$$

Die visuelle Darstellung der aufgeführten Schnittgrößen kann Abb. A.3 entnommen werden. Die äußere Belastung ist durch äußere Kräfte q sowie durch äußere Momente m_1 und m_2 gekennzeichnet. Die Größen q_1 und q_2 repräsentieren Querkräfte, m_{11} und m_{22} stellen Biegemomente dar. m_{12} bezeichnet das Drillmoment. Aus den Gln. (A.97) können die Querkräfte eliminiert werden, indem man die beiden Momentengleichungen nachdifferenziert. Unter der Betrachtung von $m_{12} = m_{21}$ erhält man:

$$m_{11,11} + m_{12,12} + m_{22,22} = -q.\tag{A.98}$$

Es ergibt sich eine statisch unbestimmte Gleichung mit drei unbekannten Schnittmomenten m_{11} , m_{22} und m_{12} . Den Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verschiebung liefert das Werkstoffgesetz. Für die schubstarre Platte wird das verallgemeinerte HOOKESche Materialgesetz für

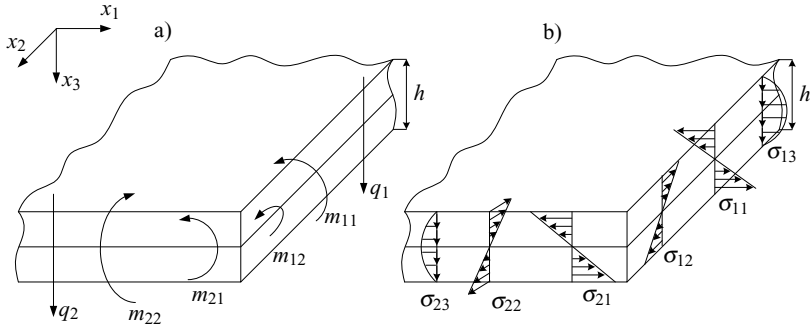


Abbildung A.3: Plattenschnittgrößen nach [6]: a) Kräfte und Momente und b) Spannungen.

ebene Spannungszustände zu Grunde gelegt

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \rightarrow \sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \rightarrow \sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \rightarrow \sigma_{12} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{12}.
 \end{aligned} \tag{A.99}$$

Substituiert man die Verzerrungen durch die Ableitung der Durchbiegung $w(x_1, x_2)$, kann man alle Spannungen durch eine Funktion $w(x_1, x_2)$ beschreiben. Durch Einsetzen des von $w(x_1, x_2)$ abhängigen Materialgesetzes in die Gln. (A.96) ergeben sich die Materialgleichungen für die Schnittmomente

$$\begin{aligned}
 m_{11}(x_1, x_2) &= -D_{Pl} (w_{,11} + \nu w_{,22}), \\
 m_{22}(x_1, x_2) &= -D_{Pl} (w_{,22} + \nu w_{,11}), \\
 m_{12}(x_1, x_2) &= -D_{Pl} (1 - \nu) w_{,12},
 \end{aligned} \tag{A.100}$$

mit der Biegesteifigkeit $D_{Pl} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. Sie wird oft auch als Plattensteifigkeit benannt.

Aufgrund der Schubstarren Modellannahme verschwinden die Schubverzerrungen in Plattendickenrichtung und es existiert kein Elastizitätsgesetz für die Querkkräfte. Sie werden allein aus den Gleichgewichtsbedingungen (A.97) berechnet. Aus den Gln. (A.98) und (A.100) wird die Gleichung zur Durchbiegung der Plattenmittelfläche für konstante Plattensteifigkeit D_{Pl} und Querkontraktionszahl ν bestimmt

$$D_{Pl} \Delta \Delta w(x_1, x_2) = q. \tag{A.101}$$

Bei dieser Durchbiegegleichung handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Als kinematische Freiheitsgrade an den Rändern einer Platte können die Durchbiegung und die Verdrehung des Plattenrandes, als statische Randgrößen das Biegemoment, das Torsionsmoment und die Querkraft vorgegeben werden. Bei der Formulierung der statischen Randbedingungen ergeben sich aber Probleme. Die dem Modell der Schubstarren Platte vorausgesetzten Hypothesen haben das mathematische Plattenmodell vereinfacht. Die Gleichung für das Schubstarre Plattenmodell reduziert das mathematische Modell auf ein lineares Randwertproblem

vierter Ordnung. Für partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung können pro Rand jeweils nur zwei Randbedingungen vorgegeben werden, auch wenn für den Plattenrand drei Schnittgrößen definiert sind. Teilweise kann man dieses Problem umgehen, indem man das Torsionsmoment und die Querkraft am Rand zu einer Ersatzquerkraft zusammenfasst.

Erweitert man die Strukturanalyse auf dynamische Antworten werden die Trägheitseffekte berücksichtigt. Es ergibt sich eine resultierende Trägheitskraft $dm\ddot{w}$ mit der Masse $dm = \rho dA$. Dementsprechend wirkt auf ein Plattenelement dA in x_3 -Richtung eine positive Flächenlast q und in negativer x_3 -Richtung die Trägheitskraft $\rho h\ddot{w}$. Die Plattengleichung ergibt sich folgenderweise:

$$D_{Pl}\Delta\Delta w(x_1, x_2, t) = q(x_1, x_2, t) - \rho h\ddot{w}. \quad (A.102)$$

Werden keine äußeren Lasten $q(t) = 0$ aufgebracht, folgt hieraus die Gleichung zur Berechnung der freien Eigenschwingung einer schubstarren Platte:

$$D_{Pl}\Delta\Delta w(x_1, x_2, t) = -\rho h\ddot{w}. \quad (A.103)$$

Ausgangspunkt für die Energieformulierung einer schubstarren Platte sind oftmals Variationsprinzipien. Die Formänderungsenergie lässt sich durch Integration der volumenbezogenen Formänderungsenergie (Gl. (A.64)) über das Volumen bestimmen. Aufgrund $\gamma_{13} = \gamma_{31} = 0$ gehen die Schubspannungen σ_{13} und σ_{31} nicht in die Gleichung für Formänderungsenergie ein. Und mit $\varepsilon_{33} = 0$ steuert die Spannung σ_{33} keinen Energieanteil bei. Damit erhält man

$$\begin{aligned} W_f &= \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbb{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV, \\ W_f &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} dV. \end{aligned} \quad (A.104)$$

Ersetzt man die Spannungen nach dem HOOKEschen Gesetz durch die Verzerrungen, erhält man folgende Formulierung für die Formänderungsenergie

$$W_f = \frac{1}{2} \int_V \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{12}^2 \right) dV. \quad (A.105)$$

Für weitere Betrachtungen ist es von Vorteil die Energieformulierungen in ausführlicher Schreibweise zu notieren. Beschreibt man die Verzerrungen durch die Ableitungen der Biegefläche, gelangt man über die Integration über die Dicke zu

$$W_f = \frac{1}{2} \int_A D_{Pl} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA. \quad (A.106)$$

Die kinetische Energie lässt sich nach Gl. (A.89) bestimmen. Beschreibt man die Geschwindigkeit durch die zeitliche Ableitung der Biegefläche w ergibt sich für eine konstante Plattendicke und Dichte:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV = \frac{1}{2} h \rho \int_A \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA. \quad (A.107)$$

A.2.2 MINDLINSche Plattentheorie

Die klassische Plattentheorie, die dem Modell der schubstarren Platte mit kleinen Durchbiegungen entspricht, hat sich für viele praktische Anwendungen bewährt, soweit die Platten hinreichend dünne Platten und die Durchbiegung klein im Verhältnis zur Plattendicke sind. Auch für Platten mittlerer Dicke kann, falls sich die Durchbiegungen auch weiterhin klein gestalten, ein zweidimensionales, lineares Plattenmodell Grundlage einer Strukturanalyse sein. Analog zur Balkentheorie nimmt der Einfluss der Schubverformungen in Querrichtung mit zunehmender Dicke h zu. In der heutigen Literatur werden diese erweiterten Plattentheorien oft klassifiziert in eine Schubdeformationstheorie erster Ordnung und höherer Ordnung. Für die Ingenieur Anwendungen hat die Schubdeformationstheorie erster Ordnung, die auch als MINDLINSche Plattentheorie bezeichnet wird und das Verhalten schubelastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen beschreibt, sehr große Bedeutung.

Für diese schubelastische Plattentheorie gelten folgende Annahmen:

- Das Material ist ebenfalls homogen und isotrop. Weiterhin gilt das verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz.
- Die Plattenmittelfläche stellt bei der Biegeverformung eine neutrale Ebene dar. Die Punkte der Mittelpunkte weisen folgende Verschiebungen $u_1(x_1, x_2, 0) = 0$, $u_2(x_1, x_2, 0) = 0$ und $u_3(x_1, x_2, 0) = w(x_1, x_2) \neq 0$ auf. Die Durchbiegung gestaltet sich klein im Vergleich zur Plattendicke und die Krümmungen der Biegefläche werden linearisiert $\kappa_{11} \approx \psi_{1,1}$, $\kappa_{22} \approx \psi_{2,2}$, $\kappa_{12} \approx \psi_{1,2} + \psi_{2,1}$
- Alle Punkte eines Linienelements orthogonal zur unverformten Plattenmittelfläche ändern bei der Verformung ihre Abstände nicht ($\epsilon_{33} \approx 0$) und bleiben Punkt der Geraden, d. h. die Platte in Dickenrichtung ist dehnstarr (erste BERNOULLI-Hypothese)
- Die Normalspannung $\sigma_{33} \ll \max(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ wird bei der Mindlinschen Theorie vernachlässigt, was $\sigma_{33} \approx 0$ bedeutet.
- Die KIRCHHOFFsche Normalenhypothese (zweite BERNOULLI-Hypothese) verliert ihre Gültigkeit.

Ebenso wie bei der KIRCHHOFFsche Plattentheorie gilt die Annahme $\sigma_{33} \approx 0$. In der Elastizitätstheorie ergibt sich bei dieser und der Annahme $\epsilon_{33} \approx 0$ ein ebener Spannungszustand und zugleich ein ebener Verzerrungszustand, was nicht konsistent ist. Entgegen den widersprüchlichen Annahmen, führen sie in der Anwendung für Platten auf zuverlässige Strukturmodelle. Für das schubelastische Plattenmodell bleiben somit alle in Abschnitt A.2.1 formulierten Voraussetzungen des schubstarren Modells bis auf die KIRCHHOFFsche Normalenhypothese erhalten. Während bei der schubstarren Plattentheorie alle Verformungen durch eine Größe, die Durchbiegung $w(x_1, x_2)$, beschrieben werden können, sind bei dem schubelastischen Modell neben der Durchbiegung $w(x_1, x_2)$ auch die Querschnittsdrehwinkel $\psi_1(x_1, x_2)$ und $\psi_2(x_1, x_2)$ unabhängige Größen. Aus weiteren Ableitung wird erkenntlich, dass für das schubelastische Modell auch für die Schubspannungen σ_{13} und σ_{23} ein Elastizitätsgesetz formuliert werden kann. Analog zum schubstarren Modell werden die kinematischen Gleichungen, die Gleichgewichtsbedingungen und das Materialgesetz formuliert sowie die Plattengleichungen abgeleitet. Die Betrachtung beschränkt sich auf die konstante Dicke h . Gleichmaßen folgt aus der ersten BERNOULLI-Hypothese wie bei der KIRCHHOFFschen Plattentheorie $\epsilon_{33} \approx 0$. Damit gilt für die schubelastische Platte die kinematische

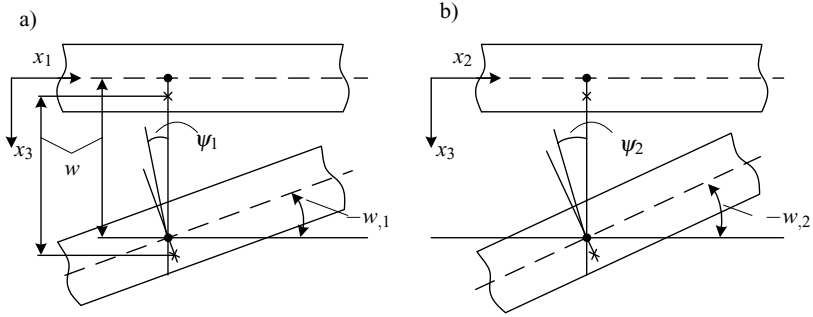


Abbildung A.4: Kinematik am Schubelastischen Plattenelement: a) Schnitt $x_1 = \text{konst.}$, und b) Schnitt $x_2 = \text{konst.}$ [6].

Hypothese (siehe Abb. A.4)

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &\approx x_3 \psi_1(x_1, x_2), \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &\approx x_3 \psi_2(x_1, x_2), \\ w(x_1, x_2, x_3) &\approx w(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind identisch mit denen der Schubstarren Platte. Die Gln. (A.97) und (A.98) behalten ihre Gültigkeit.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = u_{1,1} &= -x_3 \psi_{1,1}, \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = x_3 (\psi_{1,2} + \psi_{2,1}), \\ \varepsilon_{22} = u_{2,2} &= -x_3 \psi_{2,2}, \quad \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} = \psi_{1,1} + w_{,1}, \\ \varepsilon_{33} = u_{3,3} &= w_{,3} = 0, \quad \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = \psi_{2,2} + w_{,2}. \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

Mit der Annahme $\sigma_{33} = 0$ erhält man aus dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \rightarrow \sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \rightarrow \sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} \rightarrow \sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{12}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2G} \sigma_{31} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{31} \rightarrow \sigma_{31} = 2G \varepsilon_{31} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{31}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G} \sigma_{23} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{23} \rightarrow \sigma_{23} = 2G \varepsilon_{23} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{23}, \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

wobei G den Schubmodul darstellt. Im Gegensatz zu den konstitutiven Gleichungen für die Schubstarre Platte impliziert dieses Elastizitätsgesetz auch Gleichungen für die Schubspannungen σ_{13} und σ_{23} . Setzt man die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (A.109) in die Gl. (A.110) ein,

bekommt man als Resultat das Elastizitätsgesetz für die Schubelastische Platte

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{Ex_3}{1-\nu^2} (\psi_{1,1} + \nu \psi_{2,2}), & \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\psi_1 + w_{,1}), \\ \sigma_{22} &= \frac{Ex_3}{1-\nu^2} (\psi_{2,2} + \nu \psi_{1,1}), & \sigma_{23} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\psi_2 + w_{,2}), \\ \sigma_{12} &= \frac{Ex_3}{2(1+\nu)} (\psi_{1,2} + \psi_{2,1}).\end{aligned}\quad (\text{A.111})$$

Die Spannungen σ_{11} , σ_{22} und σ_{12} haben, ebenfalls wie in der klassischen Plattentheorie, einen linearen Verlauf über die Dicke h . Die Schubspannungen σ_{13} und σ_{23} sind unabhängig von x_3 und damit konstant über die Plattendicke h . Dies demonstriert den Näherungscharakter des Schubelastischen Plattenmodells. Aus dem Gleichgewicht am differentiellen Element ergeben sich über h parabolische Verläufe für die Schubspannungen im Gegensatz zur Schubstarren Platte (vgl. Abb. A.3). Formuliert man das Materialgesetz für die Schnittgrößen, wird dieser Widerspruch verdeckt, da die Verläufe der Schubspannungen daraus nicht ersichtlich sind

$$\begin{aligned}m_{11} &= D_{\text{Pl}} (\psi_{1,1} + \nu \psi_{2,2}), \\ m_{22} &= D_{\text{Pl}} (\psi_{2,2} + \nu \psi_{1,1}), \\ m_{12} &= \frac{1-\nu}{2} D (\psi_{1,2} + \psi_{2,1}), \\ q_1 &= Gh_s (\psi_1 + w_{,1}), \\ q_2 &= Gh_s (\psi_2 + w_{,2}),\end{aligned}\quad (\text{A.112})$$

wobei D_{Pl} die Plattensteifigkeit ist. In den Gleichungen für q_1 und q_2 wird die wirkliche Plattendicke h durch eine reduzierte Schubdicke h_s substituiert, um den Fehler der konstanten Schubspannungsverteilung über h zu berichtigen.

Für die Ableitung der Plattengleichungen ist es oftmals hilfreich die folgenden Abkürzungen einzuführen

$$\Phi(x_1, x_2) = \psi_{1,1} + \psi_{2,2} \quad \text{und} \quad \Psi(x_1, x_2) = \psi_{1,1} - \psi_{2,2}. \quad (\text{A.113})$$

Das Schubelastische Plattenmodell kann somit durch drei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, d. h. durch ein Problem sechster Ordnung vollständig formuliert werden

$$D_{\text{Pl}} \Delta \Phi = -q, \quad \Delta w = -\Phi + \frac{D_{\text{Pl}}}{Gh_s} \Delta \Phi, \quad \frac{1-\nu}{2} \frac{D_{\text{Pl}}}{Gh_s} \Delta \Psi - \Psi = 0. \quad (\text{A.114})$$

Die Schubdicke $h_s = \kappa h$ wird aus energetischen Betrachtungen bestimmt. Berechnet man die komplementäre Formänderungsenergie einmal mit parabolischem Spannungsverlauf über h und einmal mit der durch den Schubfaktor κ ergänzten konstanten Verteilung und setzt man beide Energieausdrücke gleich kann der Korrekturfaktor κ bestimmt werden [6]. Für eine isotrope Platte ergibt sich ein Wert für den Schubfaktor $\kappa = \frac{5}{6}$.

Während die Schubspannungen σ_{13} und σ_{23} bei der Schubstarren Platte nicht in die Gleichung für die Formänderungsenergie eingehen, liefern sie bei der Schubelastischen Betrachtung einen Anteil an der Formänderungsenergie. Aufgrund $\epsilon_{33} \approx 0$ gibt es weiterhin keinen Energiebeitrag aus der Normalspannung σ_{33} . Aus

$$W_{\text{f}} = \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (\text{A.115})$$

erhält man unter Berücksichtigung der Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung und des Elastizitätsgesetzes für die Schubelastische Platte

$$W_f = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}) + G (\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{13}^2) \right] dV. \quad (\text{A.116})$$

Setzt man in Gl. (A.116) die Verzerrungen nach Gl. (A.109) ein und integriert in x_3 -Richtung über die Plattendicke h , ergibt sich in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} W_f = \frac{1}{2} \int_A D_{Pl} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \right\} \\ + \kappa G h \left[\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dA. \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

Für die kinetische Energie \mathcal{K} der Schubelastischen Platte gilt dementsprechend

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dV. \quad (\text{A.118})$$

Durch Substitution der Verschiebungen nach Gln. (A.108) in Gl. (A.118) und Integration über die Plattendicke erhält man für die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] t dV \\ = \frac{1}{2} \rho h \int_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] dA. \end{aligned} \quad (\text{A.119})$$

Durch die Erweiterung des kinematischen Modells der Schubstarren Platten ergeben sich in den dynamischen Strukturgleichungen zusätzlich Rotationsträgheiten. Hierauf hat bereits Timoshenko bei der Erweiterung des EULER-BERNOULISCHEN Balkenmodells hingewiesen [206].

A.2.3 Weitere und höhere Plattentheorien

Oftmals werden die MINDLINSche und die REISSNERSche Plattentheorie [174] als Synonym füreinander verwendet. Doch trotz der großen Ähnlichkeiten sind sie nicht identisch. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit auf die wesentlichen Unterschiede eingegangen. Ebenfalls leitete Reissner seine Theorie für den statischen Fall her. Zum Vergleich stellt man die zweite partielle Differentialgleichung der MINDLINSchen Theorie (A.114) um

$$Gh_s (\Delta w + \Phi) - D_{Pl} \Delta \Phi = 0 \quad (\text{A.120})$$

und setzt die Querkräfte aus Gln. (A.112) in die Querkraft Gleichgewichtsbedingung (A.97) unter der Berücksichtigung der Abkürzung aus Gl. (A.113) ein. Man erhält

$$Gh_s (\Delta w + \Phi) = q. \quad (\text{A.121})$$

Durch Elimination von Φ gewinnt man daraus

$$D_{PI}\Delta\Delta w = q - \frac{h^2}{6\kappa} \frac{1}{1-\nu} \Delta q. \quad (\text{A.122})$$

Reissner leitet eine ähnliche Differentialgleichung her, allerdings nutzte er eine etwas andere Vorgehensweise als Mindlin. Im Gegensatz zur MINDLINSchen Theorie werden die Normalspannungen σ_{33} bei der REISSNERSchen Betrachtung nicht vernachlässigt, sondern als kubische Funktion von z angenommen, die an den Deckflächen der Platte ($z = \pm \frac{h}{2}$) den dort wirkenden Querbelastrungen entsprechen. Wie in Abb. A.3 veranschaulicht, wird für die Schubspannungen ein parabolischer Verlauf angenommen. Somit lässt sich σ_{33} mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung des räumlichen Spannungszustandes ermitteln. Weiterhin werden w , ψ_1 und ψ_2 als resultierende Formänderungsgrößen angesehen, die sich derart ergeben, dass sie mit den dazugehörigen Schnittgrößen dieselben Beiträge zur Formänderungsenergie liefern, wie die tatsächlichen Spannungen und Verschiebungen. Letztendlich erhält man für die REISSNERSche Plattentheorie [171] folgende partielle Differentialgleichung

$$D_{PI}\Delta\Delta w = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q, \quad (\text{A.123})$$

die sich nur durch den Schubkorrekturfaktor κ von der MINDLINSchen Plattentheorie unterscheidet. Für $\kappa = \frac{5}{3(2-\nu)}$ stimmen beide Plattengleichungen überein. Daraus folgt für einen Schubkorrekturfaktor $\kappa = \frac{5}{6}$, dass es einen querkontraktionsfreien Körper ($\nu = 0$) bedarf, um bei beiden Theorien zum gleichen Ergebnis zu gelangen.

Die bisher aufgeführten Plattenmodelle haben ihre Gültigkeitsbereiche nur für kleine Durchbiegungen. In der Praxis können jedoch mäßige (finite) Plattendurchbiegungen auftreten. Mit zunehmender Durchbiegung dürfen geometrisch-nichtlineare Terme in den kinematischen Gleichungen nicht mehr vernachlässigt werden. Das Modell einer dünnen Platte mit mäßiger Verformung stellt die Theorie nach Kármán dar [218]. Ihre Grundgleichungen beschreiben die kinematischen Annahmen einer schubstarren Platte sowie eines isotropen, linear-elastischen Materialverhaltens. Geometrisch-nichtlineare Modelle für schubelastische und anisotrope Platten können aus der Fachliteratur, wie beispielsweise aus Shen [193] und Reddy [170] entnommen werden.

Untersuchungen zu Schwingungsproblemen von Platten aus Laminat oder aus „Functionally Graded Material (FGM)“, als ein mögliches Modell für zelluläre Materialien, findet man bei der Gruppe um Reddy in großer Anzahl. Zur Vorhersage der Eigenfrequenzen von FGM Platten entwickeln Altenbach und Eremeyev [7, 8] ein Modell, das auf einem mikropolaren COSSERAT-Kontinuum basiert und eine Heterogenität in Richtung der Plattendicke aufweisen kann.

A.3 Grundlagen zur Akustik

A.3.1 Allgemeine lineare Wellengleichung in viskosen Fluiden

Ausgehend von der Massenbilanz kann die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \text{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.124})$$

formuliert werden. Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Massenerhaltung im Fluid. Es wird nicht von Massensenken oder -quellen ausgegangen. Betrachtet man nun das viskose Fluid, welches durch die linear eingehende Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} gekennzeichnet ist und geht man

des Weiteren von einem isotropen Fluid aus, so erhält man:

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda^V \text{Spur}(\mathbf{D})) \mathbf{I} + 2\mu^V \mathbf{I} = (-p + \lambda^V \nabla \cdot \mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu^V \mathbf{I}. \quad (\text{A.125})$$

Zieht man nun das erste CAUCHY-EULERSche Bewegungsgesetz hinzu, welches die Impulserhaltung beschreibt, so ergibt sich für die Konstitutivgleichung

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}^V = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^V \quad (\text{A.126})$$

mit

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (\text{A.127})$$

und

$$\text{div}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})] \quad (\text{A.128})$$

Setzt man nun die Konstitutivgleichung in die Bewegungsgleichung ein, erhält man die NAVIER-STOKES-Gleichung mit den inhomogenen Viskositätskoeffizienten λ^V und μ^V

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla (\lambda^V \nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (2\mu^V \mathbf{D}) + \mathbf{f}^V. \quad (\text{A.129})$$

Nimmt man noch die STOKESSche Bedingung für die konstanten Viskositätskoeffizienten λ^V und μ^V

$$3\lambda^V + 2\mu^V = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^V = -\frac{2}{3}\mu^V \quad (\text{A.130})$$

an, ergibt sich

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p + \mu^V \left[\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \mathbf{f}^V. \quad (\text{A.131})$$

Zudem ist die Druck-Dichte-Beziehung

$$p = p(\rho) \quad (\text{A.132})$$

von Bedeutung, wenn es sich beim Fluid um ein Gas oder eine kompressible Flüssigkeit handelt. Zur Herleitung der linearisierten Wellengleichung zerlegt man die Grundgrößen in Gleich- und Schwankungsanteile:

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = p_0 + p_{\sim}(\mathbf{x}, t) = p_0 + p, \quad (\text{A.133})$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho_{\sim}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho, \quad (\text{A.134})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\sim}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}. \quad (\text{A.135})$$

Bei der Zerlegung wird vorausgesetzt, dass sich das Fluid im Ruhezustand $\mathbf{v}_0 = 0$ befindet und alle Bewegungen durch Oszillationen hervorgerufen werden. Anschließend werden alle Terme höherer Ordnung der Schwankungsanteile vernachlässigt. Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich durch Einsetzen

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho) + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho) \mathbf{v}] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho) + \text{div}[(\rho_0 + \rho) \mathbf{v}] = 0. \quad (\text{A.136})$$

Da die Größe ρ_0 konstant ist, verschwindet sie bei der Zeitableitung. Zusätzlich wird von einer kleinen Dichtenschwankung $|\rho| \ll \rho_0$ ausgegangen, es kann in Gl. (A.136) der Term $\rho \mathbf{v}$ vernachlässigt werden. Es folgt daraus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) = 0. \quad (\text{A.137})$$

In der NAVIER-STOKES-Gleichung tritt die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit auf. Damit entsteht folgende Beziehung durch Einsetzen und Substituieren

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho) \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v}) \right] &= -\nabla (p_0 + p) + \mu^V \left[\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right], \\ (\rho_0 + \rho) \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \text{grad} (\mathbf{v}) \right] &= -\text{grad} (p_0 + p) + \mu^V \left[\text{div} (\text{grad} (\mathbf{v})) + \frac{1}{3} \text{grad} (\text{div} (\mathbf{v})) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

Durch die Linearisierung der Schwankungsgrößen erhält man

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \mu^V \left[\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right], \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\text{grad} (p) + \mu^V \left[\text{div} (\text{grad} (\mathbf{v})) + \frac{1}{3} \text{grad} (\text{div} (\mathbf{v})) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.139})$$

Ersetzt man die dynamische Viskosität μ^V durch die kinematische Viskosität $\nu^V = \frac{\mu^V}{\rho_0}$ ergibt sich für die linearisierte NAVIER-STOKES-Gleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu^V \left[\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]. \quad (\text{A.140})$$

Aufgrund der nicht genau beschreibbaren Druck-Dichte Beziehung kann man sie nicht auf die gleiche Weise linearisieren. Ersatzweise nutzt man eine TAYLOR-Entwicklung:

$$\tilde{p}(\rho) = p(\rho_0) + (\tilde{p} - p) \frac{dp(\rho_0)}{d\rho} + \dots \quad (\text{A.141})$$

Wird $p_0 = \tilde{p}(\rho_0)$ auf die linke Seite gebracht, liefern Einsetzen und Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung die Beziehung:

$$p = \rho \frac{dp(\rho_0)}{d\rho}. \quad (\text{A.142})$$

Die auftretende Ableitung $\frac{d}{d\rho} p(\rho_0)$ wird mit c^2 abgekürzt. Die Größe c beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen. Die linearisierte Druck-Dichte-Beziehung lautet schließlich

$$p = c^2 \rho. \quad (\text{A.143})$$

Substituiert man ρ in der linearisierten Kontinuitätsgleichung (A.137) durch die linearisierte Druck-Dichte-Beziehung (A.143), bekommt man

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.144})$$

Differenziert man diese Gleichung nach der Zeit gelangt man zu

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.145})$$

Setzt man nun die lokale Beschleunigung $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ aus der linearisierten NAVIER-STOKES-Gleichung (A.140) in die Gleichung (A.145), erhält man folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + c^2 \rho_0 \left[-\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p + \nu^V \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\nu^V}{3} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] &= 0 \quad \text{oder} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + c^2 \rho_0 \left[-\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p + \frac{4\nu^V}{3} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.146})$$

Substituiert man nun $\nabla \cdot \mathbf{v}$ mit Hilfe der Gleichung (A.144) ergibt sich die linearisierte Wellengleichung für den Schalldruck:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + c^2 \rho_0 \left[-\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p + \frac{4\mathbf{v}^V}{3\rho_0 c^2} \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial t} \right] &= 0 \quad \text{oder} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p - \frac{4\mathbf{v}^V}{3} \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

Geht man von einem reibungslosen Fluid $\mathbf{v}_V = 0$ aus, entsteht zum Beispiel die linearisierte Wellengleichung für ideale Gase

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0. \quad (\text{A.148})$$

Wird eine harmonische Zeitabhängigkeit für den Schalldruck $p = \hat{p} e^{i\omega t}$ angenommen, folgt aus der Wellengleichung die HELMHOLTZ -Gleichung

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (\text{A.149})$$

mit der Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$.

A.3.2 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit c ist die Geschwindigkeit mit welcher sich Schallwellen in einem beliebigen Medium ausbreiten. Sie ist sowohl von den elastischen Eigenschaften des Ausgangsmediums als auch von dessen Dichte, Temperatur und Druck abhängig. Daher können Schwankungen von Temperatur und Luftfeuchtigkeit einen wesentlichen Einfluss auf Messungen haben, insbesondere bei hohen Frequenzen und geringer Luftfeuchtigkeit. Die Schallgeschwindigkeit für Gase lässt sich aus der Wellengleichung (2.2) ablesen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (\text{A.150})$$

Daraus leitet sich für die Schallgeschwindigkeit ab:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}. \quad (\text{A.151})$$

Die Schallausbreitung kann als eine isentrope (adiabatische) Kompression und Expansion angenommen werden. Hierfür wird sich das adiabatische Gasgesetz

$$pV^\gamma = C_1 \quad \text{oder} \quad p = \frac{C_1}{V^\gamma} \quad (\text{A.152})$$

zu Nutze gemacht. Hierbei ist $\gamma = \frac{c_v}{c_p}$ der Adiabatenkoeffizient und c_v beziehungsweise c_p die isochore beziehungsweise isobare Wärmekapazität des Gases. C_1 stellt eine Konstante dar. Alternativ lässt sich das Kompressionsmodul folgendermaßen ausdrücken:

$$K = -V \frac{dp}{dV} = \gamma V \frac{C_1}{V^{\gamma+1}} = \gamma p. \quad (\text{A.153})$$

Somit lässt sich die Schallgeschwindigkeit durch den Atmosphärendruck beschreiben:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_a K}{\rho_a}}. \quad (\text{A.154})$$

So ergibt sich bei einem Atmosphärendruck von 1013 mbar und einer Umgebungstemperatur von 20°C eine Schallgeschwindigkeit von 343 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ersetzt man $\rho = \frac{m_{\text{gas}}}{V}$ und $p = \frac{nRT}{V}$ mit dem Gasgesetz so entsteht:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{nRTV}{Vm_{\text{gas}}}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \quad (\text{A.155})$$

Daraus wird ersichtlich, dass die Schallgeschwindigkeit nur von der Temperatur T , der Molmasse M und der allgemeinen Gaskonstante R abhängig ist.

A.3.3 Gesetz von Hagen-Poiseuille

Mit Hilfe des Gesetzes von Hagen-Poiseuille lässt sich der Volumenstrom \dot{V} eines NEWTONschen Fluids durch ein gerades Rohr mit kreisförmigem, konstanten Querschnitt beschreiben. Die Strömung im Rohr wird als laminar gesehen. Als Ausgangspunkt nutzt man die Kontinuitätsgleichung in Zylinder-Koordinaten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= \frac{\partial v_r}{r \partial r} + \frac{\partial v_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.156})$$

Dabei wird von einem inkompressiblen Medium $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ausgegangen. Des Weiteren nutzt man die inkompressible NAVIER-STOKES-Gleichung in Zylinder-Koordinaten:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}^m, \\ \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\phi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{v_\phi}{\partial \phi} \right] + f_r^m, \\ \frac{Dv_\phi}{Dt} - \frac{v_r v_\phi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left[\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{v_r}{\partial \phi} \right] + f_\phi^m, \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + f_z^m. \end{aligned} \quad (\text{A.157})$$

Zur kürzeren Notation wird die Funktion $f = f(r, \phi, z, t)$ für die LAPLACE-Operation und der substantiellen Ableitung eingeführt

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\ \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{A.158})$$

Mit der Annahme, dass eine rotationssymmetrische Strömung $\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$ vorliegt, eine ausgebildete $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ und stationäre $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ Strömung herrscht und dass keine Massenkräfte \mathbf{f}^m berücksichtigt werden, ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial r v_r}{r \partial r} = 0, \quad (\text{A.159})$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v^V \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial v_r}{r \partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \quad (\text{A.160})$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v^V \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial v_z}{r \partial r} \right). \quad (\text{A.161})$$

Aus Gl. (A.159) kann man erkennen, dass rv_r konstant ist und die radiale Strömungsgeschwindigkeit $v_r = 0$ ist. Aus der NAVIER-STOKES-Gleichung (A.160) in radialer Richtung ergibt sich nun $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ und der Druck hängt nur noch von der axialen Richtung ab $p = p(z)$. Nimmt man nun die NAVIER-STOKES-Gleichung (A.161) in axialer Richtung in den Blick lässt sich folgende Beziehung feststellen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu^V}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \quad (\text{A.162})$$

Durch zweimalige Integration entsteht

$$v_z(r) = \frac{1}{4} \frac{r^2}{\mu^V} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{A.163})$$

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Da die Geschwindigkeit v_z an der Rohrachse $r = 0$ aus physikalischen Gründen nicht unendlich groß sein kann, muss $C_1 = 0$ sein. Zudem sollte die Randbedingung, Haften an der Rohrwand $v_z(r = R) = 0$, berücksichtigt werden. Daraus folgt für die zweite Integrationskonstante

$$C_2 = -\frac{1}{4} \frac{R^2}{\mu^V} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (\text{A.164})$$

Damit ergibt sich folgendes Geschwindigkeitsprofil für die axiale Geschwindigkeit

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu^V} \frac{\partial p}{\partial z} (r^2 - R^2). \quad (\text{A.165})$$

In Bezug auf den Massenstrom lässt sich vorweisen

$$\dot{m} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \rho v_z(r) r dr d\varphi = -\frac{\pi p}{8\mu^V} \frac{dp}{dz} R^4. \quad (\text{A.166})$$

Bezieht man den Volumenstrom auf den durchströmten Querschnitt steht einem die mittlere Geschwindigkeit zur Verfügung

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{2\pi R^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R v_z(r) r dr d\varphi = \frac{v_{\max}}{2}. \quad (\text{A.167})$$

So lässt sich eine Beziehung zwischen dem Druckgradienten und der mittleren Geschwindigkeit herstellen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8\bar{v}\mu^V}{R^2} = \text{konst.} \quad (\text{A.168})$$

A.3.4 Lineare Wärmeleitungsgleichung

Die thermische Energiebilanzgleichung (A.61) eines Fluids mit einer örtlichen thermischen Leitfähigkeit λ_t kann mit Hilfe der spezifischen Entropie s zu

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \mathfrak{D} - \nabla \cdot \mathbf{h} = \mathfrak{D} + \lambda_t \Delta T \quad (\text{A.169})$$

mit $\mathbf{h} = -\lambda_t \nabla T$ formuliert werden. Die linke Seite der Bilanz beschreibt die vom Fluid aufgenommene Wärme pro Volumeneinheit. Die dissipative Funktion \mathfrak{D} betrachtet die viskosen Verluste und erfasst die Energie, welche infolge der Viskosität in Wärme umgewandelt wird. Die über die Oberfläche ins Volumen eingebrachte Wärme berücksichtigt der Term $\lambda_t \Delta T$. Für die spezifische Entropie s eines idealen Gases gilt folgender Gleichgewichtszustand [100] :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{d\mathcal{U} - d\mathcal{W}}{T} \quad \text{und} \\ ds &= \frac{du + \frac{dp}{\rho}}{T} = \frac{dh - \frac{1}{\rho} dp}{T} = \frac{C_p dT - \frac{1}{\rho} dp}{T}, \end{aligned} \quad (\text{A.170})$$

wobei h die spezifische Enthalpie und Q die Wärmemenge des idealen Gases repräsentieren. Differenziert man die Gleichung für die Entropieänderung idealer Gase (A.170) nach der Zeit hat man zum Ergebnis:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{C_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{T\rho} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{A.171})$$

Setzt man diesen Ausdruck nun in die Wärmeleitungsgleichung (A.169) und vernachlässigt den Term $\mathbf{v} \cdot \nabla s$ und die Dissipationsfunktion \mathfrak{D} so gewinnt man als Approximation erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \rho T \left[\frac{C_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{T\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \right] &= \lambda_t \Delta T, \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda_t \Delta T + \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A.172})$$

Geht man von einer kleinen Schwankung der Dichte aus so entsteht folgende Wärmeleitungsgleichung

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_t \Delta T + \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{A.173})$$

A.3.5 Schallausbreitung in zylindrischen Röhren

Die lineare und vereinfachte Form der NAVIER-STOKES-Gleichung (A.139) und der Wärmebilanzgleichung (A.173) genügen den Größen der Geschwindigkeit \mathbf{v} , dem Druck p und der akustischen Temperatur T eines Fluids in einer zylindrischen Röhre bzw. in einer Pore. Der Zusammenhang zwischen den Schwankungen der Temperatur, der Geschwindigkeit und des Drucks in einem akustischen Feld können wie folgt postuliert werden

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (\text{A.174})$$

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{A.175})$$

wobei μ^V die dynamische Viskosität, λ die spezifische Wärmeleitung und C_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist. Der Druck wird als konstant über dem Röhrenquerschnitt angenommen. Als Randbedingung an Rohrwänden wird eine konstante Temperatur $T = \text{konstant}$ und Haften ($v = 0$) angenommen. Nutzt man die linearisierte NAVIER-STOKES-Gleichung in zylindrischen Koordinaten unter der Annahme einer axialsymmetrischen Strömung und eines axial-richtungsabhängigen Druckgradientens lässt sich erkennen, dass

$$j\omega\rho_0 v_3 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\mu^V}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_3}{\partial r} \right) \quad (\text{A.176})$$

mit $v_3 = \tilde{v}_3 e^{j\omega t}$. Die Geschwindigkeit an der Zylinderfläche, der Kontaktbereich zwischen Fluid und der steifen Struktur, nimmt den Wert Null an. Die Lösung der Differentialgleichung (A.176) nach [1, 29], an der die Geschwindigkeit der Zylinderoberfläche $r = R$ verschwindet, lautet:

$$v_3 = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left(1 - \frac{J_0(lr)}{J_0(lR)} \right). \quad (\text{A.177})$$

In dieser Gl. (A.177) ist

$$l = \sqrt{\frac{-j\omega\rho_0}{\mu^V}} \quad (\text{A.178})$$

und J_0 ist die Besselfunktion nullter Ordnung. Die gemittelte Geschwindigkeit \bar{v}_3 über die Rohrgeschwindigkeit lässt sich wie folgt

$$\bar{v}_3 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_3 2\pi r dr \quad (\text{A.179})$$

bestimmen. Macht man sich nun folgende Beziehung [29] $\int_0^{a_1} r J_0(r) dr = a_1 J_1(a_1)$ zu Nutze und setzt v_3 aus Gl. (A.177) in Gl. (A.179) ein, erhält man für die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v}_3 = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left[1 - \frac{2}{s\sqrt{-j}} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})} \right]. \quad (\text{A.180})$$

wobei s die Schubwellenzahl ist und sich folgendermaßen bestimmt:

$$s = R \sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\mu^V}}. \quad (\text{A.181})$$

Die Abb. A.5 zeigt die axialen Geschwindigkeitsprofile in einer zylindrischen Röhre in Abhängigkeit von der Schubwellenzahl s . Die effektive Dichte ρ des Mediums in der Röhre ist definiert als das Umschreiben der Gl. (A.180) in eine kompakte Form

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = j\omega\rho\bar{v}_3 \quad (\text{A.182})$$

mit

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-j}} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}}. \quad (\text{A.183})$$

Die Formulierung der effektiven Dichte zeigt den zusätzlichen Beitrag zum Trägheitsterm durch die Wechselwirkung mit der Röhrenwand. Die Abb. A.6 zeigt die effektive Dichte ρ einer zylindrischen Röhre. Dabei wird ersichtlich, dass sich bei niedrigen Frequenzen der viskose Effekt deutlich

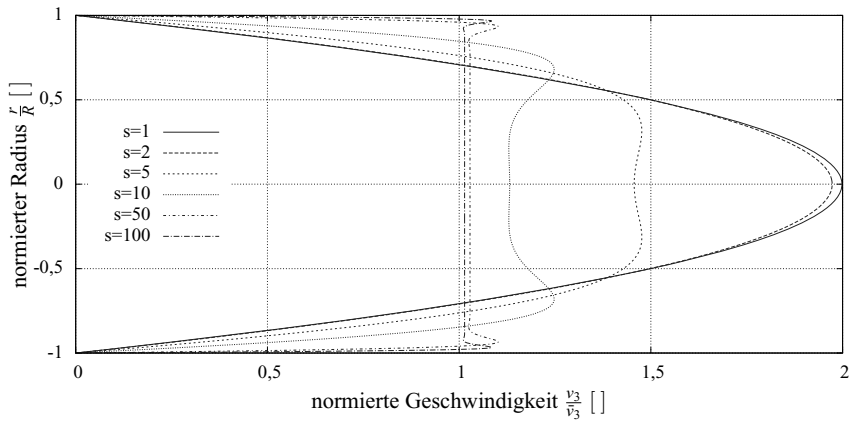


Abbildung A.5: Normierte axiale Geschwindigkeitsprofile v_3/\bar{v}_3 in einer normierten zylindrischen Röhre r/\bar{r} in Abhängigkeit von der Schubwellenzahl s .

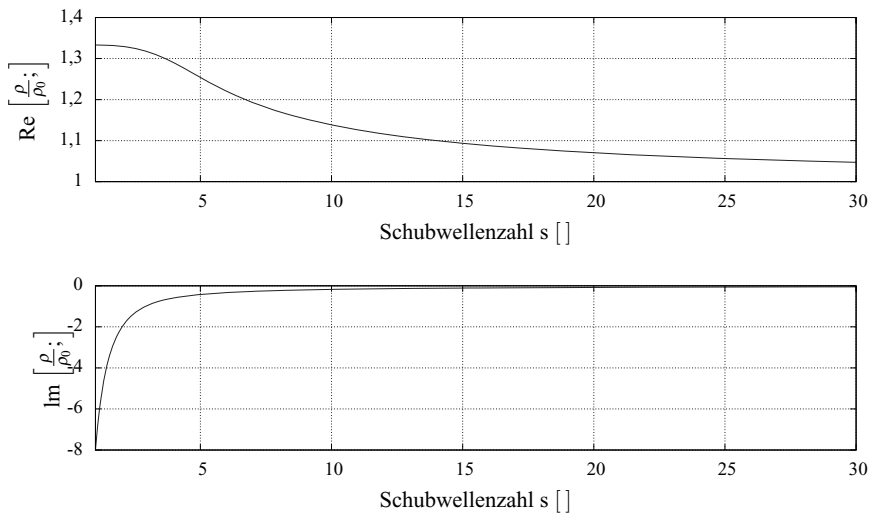


Abbildung A.6: Effektive Dichte ρ von Luft in einer zylindrischen Röhre in Bezug auf die Ausgangsdichte ρ_0 in Abhängigkeit der Schubwellenzahl s .

bemerkbar macht und bei hohen Frequenzen die Trägheit dominant ist. Im bisher beschriebenen Teil der Schallausbreitung in Röhren wurde nur auf die viskosen Effekte eingegangen. Folgendes beschäftigt sich mit den thermalen Effekten. Ausgehend von der linearisierten Wärmegleichung (A.175) und der linearisierten Zustandsgleichung für ideale Gase erlangt man folgende Beziehung

$$p_0 + p = R_i (\rho_0 + \rho) (T_0 + T) \approx R_i (\rho_0 p + \rho_0 T + T_0 p), \quad (\text{A.184})$$

wobei das betragsmäßig kleine Produkt aus Schalldichte und Schalltemperatur ρT vernachlässigt wird. Durch Umstellen und Einbeziehen der BOYLE-MARIOTTE-Gleichung für die Ruhelage $R_i = \frac{p_0}{\rho_0 T_0}$ erhält man:

$$p = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} (\rho_0 T + T_0 \rho) \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{T}{T_0}. \quad (\text{A.185})$$

Die Temperaturänderung in Rohrlängsrichtung (x_3) ist kleiner als in radialer Richtung (x_1 und x_2) und wird deswegen vernachlässigt. So reduziert sich die Wärmebilanz A.173 zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} - j\omega \frac{T}{v'} &= -j\frac{\omega}{\lambda} p \quad \text{oder} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - j\omega \frac{T}{v'} &= -j\frac{\omega}{\lambda} p, \end{aligned} \quad (\text{A.186})$$

wobei $v' = \frac{\lambda}{\rho_0 c_p}$ gilt. Diese Gleichung ähnelt in der Form der Gl. (A.176) mit gleichen Randbedingungen, die Temperaturänderung ist ebenfalls Null an der Rohrwandfläche. Es wird eine Kreisfrequenz $\omega_k = \omega \frac{\mu^v}{\rho_0 v'} = \omega Pr$ in Bezug auf die Prandtl-Zahl definiert und ω in Gl. (A.187) ersetzt

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - j\omega_k \frac{\rho_0 T}{\mu^v} = -j\frac{\omega_k v' \rho_0}{\lambda \mu^v} p. \quad (\text{A.187})$$

Geht man vom gleichen Differentialgleichungstyp

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - j\omega \frac{\rho_0}{\mu^v} f = -j\frac{\omega \rho_0}{\mu^v} \quad (\text{A.188})$$

aus, so hat man für die Lösungsfunktion der Schalltemperatur T und der Geschwindigkeit v_3 als Ergebnis:

$$T = \frac{p v'}{\lambda} f(r, Pr\omega) = \frac{p v'}{\lambda} \left(1 - \frac{J_0(\sqrt{Pr}lr)}{J_0(\sqrt{Pr}lR)} \right), \quad (\text{A.189})$$

$$v_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3} f(r, \omega) \frac{1}{j\omega \rho_0} = -\frac{1}{j\omega \rho_0} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(1 - \frac{J_0(lr)}{J_0(lR)} \right). \quad (\text{A.190})$$

Nutzt man die Volumendehnung unter der Berücksichtigung der Massenerhaltung erhält man:

$$\varepsilon_v = \frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}. \quad (\text{A.191})$$

Der Kompressionsmodul definiert sich durch

$$K = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_v} = \frac{-p \rho_0}{\bar{\rho}}, \quad (\text{A.192})$$

wobei die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ der Durchschnitt von ρ über dem Querschnitt ist, die durch die Gl. (A.185) gegeben ist:

$$\bar{\rho} = \frac{p}{p_0} \rho_0 - \frac{\bar{T}}{T_0} \rho_0. \quad (\text{A.193})$$

So kann der Ausdruck für den Kompressionsmodul unter Berücksichtigung der Gln. (A.189) und (A.193) umgeschrieben werden

$$K = \frac{p_0}{1 - \frac{p_0}{T_0} \frac{v'}{\lambda} \bar{f}(r, Pr\omega)}. \quad (\text{A.194})$$

Nutzt man die Zustandsgleichung mit der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen $\rho_0 (C_p - C_V) = \frac{p_0}{T_0}$ für ideale Gase, vereinfacht sich der Ausdruck für den Kompressionsmodul zu

$$K = \frac{\gamma p_0}{\gamma - (\gamma - 1) \bar{f}(r, Pr\omega)}, \quad (\text{A.195})$$

wobei γ den Adiabatenexponenten $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ darstellt. Bezeichnet man $\bar{f}(r, \omega)$ durch $F(\omega)$ und $\bar{f}(r, Pr\omega)$ durch $F(r, Pr\omega)$ vereinfachen sich die Ausdrücke für die effektive Dichte und den Kompressionsmodul zu

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_0}{F(r, \omega)}, \\ K &= \frac{\gamma p_0}{\gamma - (\gamma - 1) F(r, Pr\omega)} \end{aligned} \quad (\text{A.196})$$

mit

$$F(Pr\omega) = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{Prs}\sqrt{-j}} \frac{J_1(\sqrt{Prs}\sqrt{-j})}{J_0(\sqrt{Prs}\sqrt{-j})} \right]. \quad (\text{A.197})$$

So bleibt für der Kompressionsmodul in Abhängigkeit von der Schubwellenzahl folgende Beziehung

$$K = \frac{\gamma p_0}{1 + (\gamma - 1) \frac{2}{\sqrt{Prs}\sqrt{-j}} \frac{J_1(\sqrt{Prs}\sqrt{-j})}{J_0(\sqrt{Prs}\sqrt{-j})}}. \quad (\text{A.198})$$

Diese Methode zur Bestimmung des Kompressionsmoduls ist für alle zylindrischen Röhren gültig. Die Abb. A.7 zeigt der Kompressionsmodul für zylindrische Röhren in Abhängigkeit von der Schubwellenzahl s , dabei wird im Realteil ersichtlich, dass bei niedrigen Frequenzen (isothermische Grenze) der Kompressionsmodul dem Umgebungsdruck p_0 bei hohen Frequenzen (adiabatische Grenze) γp_0 entspricht.

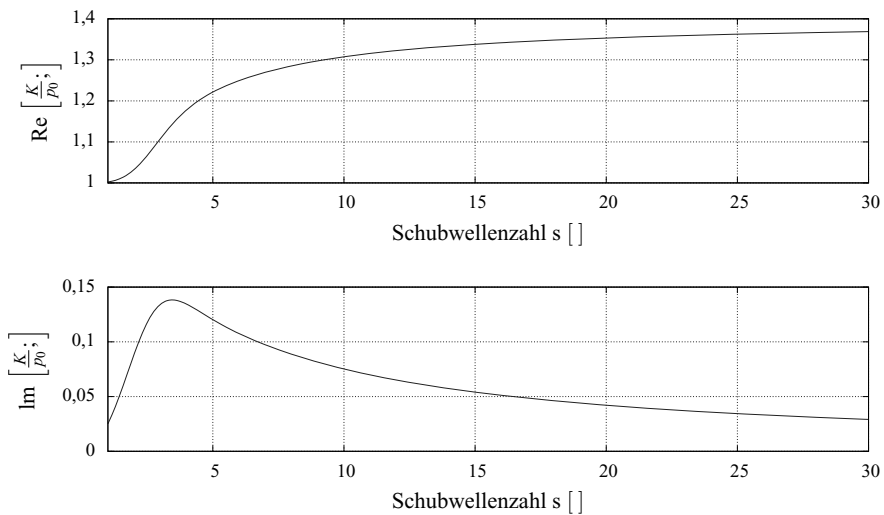


Abbildung A.7: Der Kompressionsmodul K von einer luftgefüllten zylindrischen Röhre in Bezug auf den Umgebungsdruck p_0 in Abhängigkeit von der Schubwellenzahl s .

B Charakterisierungsmethoden

B.1 Homogenisierungstheorie

Aus den vorgestellten Gegebenheiten in Abschnitt 3.2.1 ergeben sich folgender mesoskopischer Verzerrungs- und Spannungszustand

$$\check{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{B.1})$$

Betrachtet man nun das lokale statische und volumenkraftfreie Randwertproblem (vgl. Gl.(A.36)) auf der Mesoebene

$$\nabla \cdot \check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \check{\sigma}_{ij,j} \mathbf{e}_i = 0, \quad (\text{B.2})$$

löst dieses mit Hilfe des allgemeinen Materialgesetzes auf der Mesoebene

$$\check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \check{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) \cdot \check{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \check{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \check{\mathbb{S}}(\mathbf{x}) \cdot \check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), \quad (\text{B.3})$$

bildet den Volumenmittelwert, abgekürzt durch das Klammersymbol $\langle \cdot \rangle$, des mesoskopischen Spannungs- $\check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ bzw. Verzerrungszustandes $\check{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_B \check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) dV \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_B \check{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) dV \quad (\text{B.4})$$

und gibt diese wieder an die Makroebene zurück, so ergibt sich für das makroskopische Materialgesetz

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \langle \check{\mathbb{C}} \cdot \check{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \check{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \check{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{A} \rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C}_{\text{eff}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

mit dem effektiven Steifigkeitstensor \mathbb{C}_{eff} auf der Makroebene bzw. dementsprechend

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \langle \check{\mathbb{S}} \cdot \check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \check{\mathbb{S}} \cdot \mathbb{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \check{\mathbb{S}} \cdot \mathbb{B} \rangle \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbb{S}_{\text{eff}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

mit dem makroskopischen effektiven Nachgiebigkeitstensor \mathbb{S}_{eff} . Die makroskopischen Zustände vom Ort \mathbf{x}_{meso} sind auf der Mesoebene unabhängig. Mit Hilfe des Divergenztheorems

$$\int_B \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \int_{\partial B} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dA \quad (\text{B.7})$$

lassen sich Volumenmittelwerte der mesoskopischen Zustände, unter der Voraussetzung der Integrierbarkeit der Kraft \mathbf{f} an den Rändern und im Volumen, auf den Rand des Volumenelements abbilden, wobei \mathbf{n} den nach außen gerichteten Normalenvektor des Randes darstellt. Dies ist gerade im Fall heterogener Materialien mit sprunghaft ändernden Eigenschaften nicht gegeben.

So wird jede Grenzfläche im Volumenelement einzeln betrachtet. Hierbei stellt sich heraus, dass sich die zusätzlichen Terme gegenseitig aufheben und somit die nachfolgende Herleitung auch für heterogene Strukturen gültig ist [81]. Des Weiteren ist die Abbildung der Ränder gültig für die in diesem Arbeitsumfeld zu Grunde gelegten Theorie kleiner Verformungen für die Spannungs- und Verzerrungsfelder [112]. Daraus ergibt sich der Vorteil, dass sich die Randterme einfach behandeln lassen.

Mit dem lokalen statischen und volumenkraftfreien Randwertproblem (Gl. (B.2)) und mit

$$\nabla \cdot \mathbf{x} = \frac{x_i}{x_j} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = 1 \quad (\text{B.8})$$

ergibt sich

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \otimes \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{B.9})$$

Daraus lässt sich die Volumenmittelung des mesoskopischen Spannungszustands wie folgt

$$\begin{aligned} \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle &= \frac{1}{V} \int_B \nabla \cdot (\check{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{x}) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial B} \mathbf{n} \cdot \check{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{x} dA = \frac{1}{V} \int_{\partial B} \check{\mathbf{t}} \otimes \mathbf{x} dA, \\ \langle \check{\sigma}_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_B (\check{\sigma}_{ik} x_j)_{,k} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial B} n_k \check{\sigma}_{ik} x_j dA = \frac{1}{V} \int_{\partial B} \check{t}_i x_j dA \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

auf den Rand abbilden [190]. Analog ergibt sich für den mesoskopischen Verzerrungszustand unter Berücksichtigung der Gl. (A.14)

$$\begin{aligned} \langle \check{\epsilon}_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_B \frac{1}{2} (\check{u}_{i,j} + \check{u}_{j,i}) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial B} \frac{1}{2} (\check{u}_i n_j + \check{u}_j n_i) dA = \frac{1}{V} \int_{\partial B} \check{u}_i n_j dA, \\ \langle \check{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\partial B} \check{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} dA \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

eine Formulierung bezogen auf den Rand. Gemäß der Gl. (A.64) lässt sich eine mittlere Formänderungsenergiedichte

$$dW_F = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \cdot \langle \check{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \quad (\text{B.12})$$

in der Makroebene bestimmen. Entspricht die Formänderungsenergiedichte der wahren Verformung auf der Mesoebene

$$\langle d\check{W}_F \rangle = \frac{1}{2} \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \cdot \langle \check{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \quad (\text{B.13})$$

der mittleren Formänderungsenergiedichte, so ergibt sich folgende Bedingung

$$dW_F - \langle d\check{W}_F \rangle = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \cdot \langle \check{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle - \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \check{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle = 0. \quad (\text{B.14})$$

Diese wird auch HILL-Bedingung genannt [81]. Sie besagt, dass sich ein effektives Medium und das dazugehörige RVE mechanisch entsprechen, wenn beide dieselbe quantitative Verzerrungsenergie unter gleichen makroskopischen Verformungen speichern [47]. Gemäß den zuvor beschriebenen Zuständen kann ebenfalls die Bedingung auf den Rand des Volumenelements abgebildet werden. So lässt sich das Produkt mit den Gleichungen (A.14), (A.40) und (B.2)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} + \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_j)_{,i} = (\sigma_{ij} u_i)_{,j} \quad (\text{B.15})$$

umformulieren. Somit ergibt sich

$$\langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \frac{1}{V} \int_B (\check{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \check{u}_i)_{,j} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial B} \check{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \check{u}_i n_j dA = \frac{1}{V} \int_{\partial B} \check{t}_i \check{u}_i dA. \quad (\text{B.16})$$

Hingegen lässt sich die makroskopische Größe $\langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \dots \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ mit den Gln. (B.11) und (B.10) und der Beziehung

$$1 = \frac{1}{V} \int_B 1 dV = \frac{1}{V} \int_B \nabla \cdot \mathbf{x} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial B} x_i n_i \delta_{ij} dA \quad (\text{B.17})$$

auf drei verschiedene Arten ausdrücken:

$$\begin{aligned} \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \dots \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\partial B} \langle \check{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \rangle \check{u}_i n_j dA \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial B} \langle \check{\varepsilon}_{ij} \rangle \check{t}_i x_j dA \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial B} \langle \check{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \rangle \langle \check{\varepsilon}_{ij} \rangle x_i n_j \delta_{ij} dA. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Mit dem Trick

$$\langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \dots \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \dots \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \dots \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \dots \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \quad (\text{B.19})$$

lässt sich $\langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \dots \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{V} \int_{\partial B} (\check{t}_i \check{u}_i - \langle \check{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \rangle \check{u}_i n_j - \langle \check{\varepsilon}_{ij} \rangle \check{t}_i x_j + \langle \check{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \rangle \langle \check{\varepsilon}_{ij} \rangle x_i n_j \delta_{ij}) dA \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial B} (\check{t}_i - \langle \check{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \rangle n_j) (\check{u}_i - \langle \check{\varepsilon}_{ij} \rangle x_j) dA \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial B} (\check{\mathbf{t}} - \langle \check{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \mathbf{n}) (\check{\mathbf{u}} - \langle \check{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \cdot \mathbf{x}) dA \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

umschreiben.

B.2 Periodische Randbedingung: FEM

Die Finite Elemente Methode (FEM) ist ein numerisches Näherungsverfahren zur Lösung komplexer Berechnungen und findet überwiegend im Ingenieurwesen Anwendung. Ein weitverbreitetes Einsatzgebiet ist der rechnerische Nachweis von Neukonstruktionen. Mittels der FEM kann an virtuellen Prototypen überprüft werden, ob die Anforderungen hinsichtlich der physikalischen Eigenschaften erfüllt werden.

In der Mechanik gibt es statische und dynamische Probleme, die mit verschiedenen Lösungsansätzen berechnet werden können. Zum einen das implizite Lösungsverfahren, welches überwiegend für statische bis quasi-statische Probleme geeignet ist. Zum anderen das explizite Lösungsverfahren, das bei kurzzeitdynamischen Vorgängen und großen Verzerrungen, wie Crashesimulationen und Umformprozessen, Anwendung findet.

Um dabei nicht eine Lösung für ein komplexes Gesamtgebiet zu suchen, wird das Modell diskretisiert, d.h. in endlich viele Elemente unterteilt. Die Lösung wird anschließend für jedes einzelne Element berechnet. Da die Elemente durch sogenannte Knoten miteinander verbunden sind, sind auch die mechanischen Gleichungen miteinander gekoppelt. Die Gesamtlösung ergibt sich aus der Zusammensetzung der Teillösungen der einzelnen Elemente.

Basis zur Generierung von Ergebnissen virtueller Modelle sind, neben den aufgeführten Hilfs- und Konstruktionsprogrammen, das FE-Programm ANSYS® von der Firma Ansys Inc.

Im Folgenden wird kurz die Finite-Elemente-Umsetzung der periodischen Randbedingungen aus dem zuvor beschriebenen Abschnitt beschrieben. Hierbei wird zum Teil spezifischen auf den FE-Code Ansys eingegangen. Als Hilfsmittel standen die Publikationen von Moosrainer [150] und Schmidt [186] und das Ansys Hilfe System zur Verfügung.

Die Vorgehensweise zur Umsetzung der periodischen Randbedingungen wird exemplarisch an einem achtknotigen Schalenelement erläutert. Die Abb. B.1 zeigt ein rechteckiges Schalenelement mit Mittelknoten. Die gewonnen Erkenntnisse können auf dreidimensionale Volumenelemente

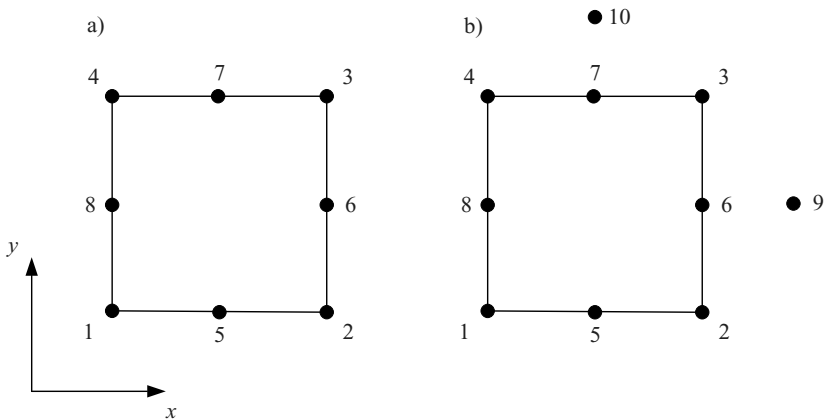


Abbildung B.1: Umsetzung der periodischen Randbedingungen an einem FE-Schalenelement: a) Schalenelement mit Knotennummern und b) Schalenelement mit 2 Hilfsknoten

übertragen werden. Eine periodische Kopplung zwischen rechtem und linkem Rand bzw. Master- und Slave-Kante ergibt für die Verschiebung in x -Richtung durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_2(x) - u_1(x) &= 0, \\ u_6(x) - u_8(x) &= 0 \quad \text{und} \\ u_3(x) - u_4(x) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Dies ergibt jedoch eine starre Verbindung der Ränder, es wäre keine makroskopische Dehnung der Struktur möglich. Um diese Längung bzw. Dehnung korrekt abbilden zu können, ohne auf die Kopplung des rechten und linken Schnittrandes zu verzichten, wird ein Hilfsfreiheitsgrad (in Abb. B.1 Knoten 9) zur Aufnahme der konstanten Verschiebungsdifferenz zwischen den beiden Rändern eingeführt. Das Gleichungssystem der Verschiebung in x -Richtung unter der Berücksichtigung der

Längung der Elementarzelle lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} u_2(x) - u_1(x) &= u_9(x), \\ u_6(x) - u_8(x) &= u_9(x) \quad \text{und} \\ u_3(x) - u_4(x) &= u_9(x). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Analog ergibt sich für die Periodizität zwischen unterem und oberem Rand in x -Richtung folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} u_4(x) - u_1(x) - u_9(x) &= 0, \\ u_7(x) - u_5(x) - u_9(x) &= 0 \quad \text{und} \\ u_3(x) - u_2(x) - u_9(x) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Des Weiteren ergeben sich ähnliche Beziehungen für die Verschiebungen in y -Richtung und in z -Richtung bei der dreidimensionalen Betrachtung. Diese Zwangsbedingungen (engl.: Constraint Equations) können teils automatisch erzeugt werden und den Hilfsknoten, die aus einem masselosen dreidimensionalen Masselement bestehen, gekoppelt werden. Betrachtet man die Eckgleichungen für die Verschiebung in x -Richtung ein weiteres

$$\begin{aligned} u_2(x) - u_1(x) - u_9(x) &= 0, \\ u_3(x) - u_4(x) - u_9(x) &= 0, \\ u_4(x) - u_1(x) - u_{10}(x) &= 0 \quad \text{und} \\ u_3(x) - u_2(x) - u_{10}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

und eliminiert die Hilfsvariablen in den ersten beiden und in den letzten beiden Gleichung, erhält man

$$\begin{aligned} u_2(x) - u_1(x) - u_3(x) - u_4(x) &= 0 \quad \text{und} \\ u_2(x) - u_1(x) - u_3(x) - u_4(x) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

dabei wird ersichtlich, dass es keine unabhängigen Gleichungen sind, sondern zwei identische Gleichungen, was zu einer Überbestimmung des Gleichungssystem führt. Aus diesem Grund sind nur linear unabhängige Gleichungen zu ermitteln. Eine einfache Lösung ist es, eine Eckgleichung ersatzlos zu streichen [150].

B.3 Mindlin-Platte: PB2-RITZ-Methode

Hier soll die Vorgehensweise der RITZschen Methode nach Liew [132] beschrieben werden. Betrachten wir eine allgemeine Polygonplatte mit maximaler Länge a ein und maximale Breite b in Koordinatenachsrichtung. Durch die Annahme eines rechtwinkligen Koordinatensystem, wie in Abb. B.2a gezeigt, können sich die Formänderungsenergie nach Gl. (A.117) und kinetische Energie nach Gl. (A.119) bestimmt werden. Zur Verallgemeinerung und Vereinfachung werden die Koordinaten auf jeweils die maximale Länge der Abmessungen normiert, hierbei werden folgende dimensionslose Größen

$$\xi = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{2y}{b}, \quad \tau = \frac{h}{b}, \quad \bar{w} = \frac{2w}{b}, \quad a = \frac{b}{ab}, \quad \lambda_f = \omega^2 b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_{PI}}} \quad (\text{B.26})$$

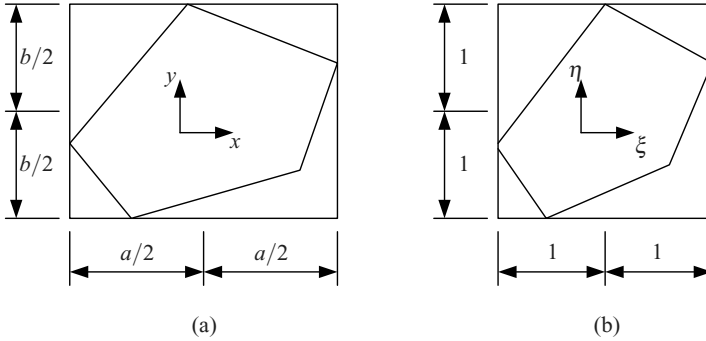


Abbildung B.2: Allgemeine Plattenabmaße im a) originalen und b) im normierten Koordinatensystem.

eingeführt. Die Normalisierung der Koordinaten ermöglicht die Transformation der Plattenabmessungen wie in Abb. B.2b dargestellt. Verwendet man die normierten Größen aus Gl. B.26 in den Energiegleichungen (A.117) und (A.119) erhält man

$$\begin{aligned} \bar{U} = \frac{1}{2} \iint_{\bar{A}} \left\{ \left(\alpha \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\alpha \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} \right) \right] \right\} \\ + \frac{6(1-\nu)\kappa}{4\tau^2} \left[\left(\psi_x + \alpha \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\psi_y + \alpha \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

und

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \lambda_f^2 \iint_{\bar{A}} \left[\frac{1}{16} \bar{w}^2 + \frac{\tau^2}{48} (\psi_x^2 + \psi_y^2) \right] d\xi d\eta, \quad (\text{B.28})$$

wobei \bar{A} die normierte Fläche ist. Daraus lässt sich die normierte LAGRANGESche Funktion bestimmen

$$\Pi = \bar{U} - \bar{K}. \quad (\text{B.29})$$

Für das Schwingungsproblem der MINDLIN Platte kann man folgende polynomiale Funktionen für die Annäherung des Verschiebungsfeldes aufstellen

$$w(\xi, \eta) = \sum_{q=0}^{p_1} \sum_{i=0}^q c_m \phi_m^w(\xi, \eta), \quad (\text{B.30})$$

$$\psi_x(\xi, \eta) = \sum_{q=0}^{p_2} \sum_{i=0}^q d_m \phi_m^x(\xi, \eta), \quad (\text{B.31})$$

$$\psi_y(\xi, \eta) = \sum_{q=0}^{p_3} \sum_{i=0}^q e_m \phi_m^y(\xi, \eta), \quad (\text{B.32})$$

wobei p_i , $i = 1, 2, 3$ der Freiheitsgrad des Polynomraums ist, c_i , d_i und e_i sind die unbekannten Koeffizienten. Der Index m bestimmt sich über

$$m = \frac{(q+1)(q+2)}{2} - i, \quad (\text{B.33})$$

Die Gesamtzahl der Koeffizienten c_i , d_i und e_i sind N_k mit $k = 1, 2, 3$, die vom Freiheitsgrad des Polynomraums p_i abhängig ist. N_k berechnet sich aus

$$N_k = \frac{(p_k + 1)(p_k + 2)}{2}. \quad (\text{B.34})$$

Die Funktionen ϕ_m^w , ϕ_m^x und ϕ_m^y definieren sich durch

$$\langle \phi_m^w(\xi, \eta), \phi_m^x(\xi, \eta), \phi_m^y(\xi, \eta), \rangle = \xi^i \eta^{q-1} \langle \phi_1^w(\xi, \eta), \phi_1^x(\xi, \eta), \phi_1^y(\xi, \eta), \rangle \quad (\text{B.35})$$

Die Basisfunktionen ϕ_1^w , ϕ_1^x und ϕ_1^y können wie folgt angegeben werden:

$$\langle \phi_1^w(\xi, \eta), \phi_1^x(\xi, \eta), \phi_1^y(\xi, \eta), \rangle = \left\langle \prod_{j=1}^{n_e} [\chi(\xi, \eta)]^{\gamma_j^w}, \prod_{j=1}^{n_e} [\chi(\xi, \eta)]^{\gamma_j^x}, \prod_{j=1}^{n_e} [\chi(\xi, \eta)]^{\gamma_j^y} \right\rangle; \quad (\text{B.36})$$

wobei n_e die Nummer der Plattenkante und $\chi(\xi, \eta)$ die Bedingungsgleichung der j ten gelagerten Kante ist. Der Exponent γ_j ist abhängig von der gelagerten Kantenbedingungen, die sich wie folgt bestimmen lässt

$$\gamma_j^w = \begin{cases} 0 & \text{frei (F)} \\ 1 & \text{1 einfach gelagert(S) oder fest eingespannt (C)} \end{cases} \quad (\text{B.37})$$

$$\gamma_j^x = \begin{cases} 0 & \text{frei (F) oder einfach gelagert (S) in } y\text{-Richtung} \\ 1 & \text{1 einfach gelagert(S) in } x\text{-Richtung oder fest eingespannt (C)} \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

$$\gamma_j^y = \begin{cases} 0 & \text{frei (F) oder einfach gelagert (S) in } x\text{-Richtung} \\ 1 & \text{1 einfach gelagert(S) in } y\text{-Richtung oder fest eingespannt (C)} \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

Wendet man nun das RITZsche Verfahren an, erhält man

$$\left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial c_m}, \frac{\partial \Pi}{\partial d_m}, \frac{\partial \Pi}{\partial e_m} \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle, \quad (\text{B.40})$$

hierbei ist $m = 1, 2, \dots, N_k$. Setzt man die Energiegleichungen (B.27)–(B.29) mit den approximierten Verschiebungsfeldgleichung (B.30)–(B.32) in die Gl. (B.40) erhält man folgende Eigenwertsgleichung:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{cc} & \mathbf{K}^{cd} & \mathbf{K}^{ce} \\ & \mathbf{K}^{dd} & \mathbf{K}^{de} \\ & & \mathbf{K}^{ee} \end{bmatrix} - \lambda_j^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} & \mathbf{M}^{ce} \\ & \mathbf{M}^{dd} & \mathbf{M}^{de} \\ & & \mathbf{M}^{ee} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.41})$$

wobei die Einträge der Ersatzsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und der Ersatzmassenmatrix \mathbf{M} sind:

$$k_{ij}^{cc} = \mathfrak{T} \iint_A \left[\alpha \frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (\text{B.42})$$

$$k_{ij}^{cd} = \mathfrak{T} \iint_A \left[\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \phi_j^x \right] d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_2; \quad (\text{B.43})$$

$$k_{ij}^{ce} = \mathfrak{T} \iint_A \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \phi_j^x \right] d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_3; \quad (\text{B.44})$$

$$k_{ij}^{dd} = \iint_{\bar{A}} \left[\alpha \frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \xi} + \frac{1-\nu}{2\alpha} \frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \eta} \frac{\tau}{\alpha} \phi_i^x \phi_j^x \right] d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_2; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_2; \quad (\text{B.45})$$

$$k_{ij}^{de} = \iint_{\bar{A}} \left[\nu \frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \eta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_2; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_3; \quad (\text{B.46})$$

$$k_{ij}^{dd} = \iint_{\bar{A}} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \xi} + \alpha \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \eta} \frac{\tau}{\alpha} \phi_i^x \phi_j^x \right] d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_3; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_3; \quad (\text{B.47})$$

$$m_{ij}^{ec} = \frac{1}{16\alpha} \iint_{\bar{A}} \phi_i^w \phi_j^w d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (\text{B.48})$$

$$m_{ij}^{cd} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_2; \quad (\text{B.49})$$

$$m_{ij}^{ce} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_3; \quad (\text{B.50})$$

$$m_{ij}^{dd} = \frac{\tau^2}{48\alpha} \iint_{\bar{A}} \phi_i^x \phi_j^x d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_2; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_2; \quad (\text{B.51})$$

$$m_{ij}^{de} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_2; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_3; \quad (\text{B.52})$$

$$m_{ij}^{dd} = \frac{\tau^2}{48\alpha} \iint_{\bar{A}} \phi_i^y \phi_j^y d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \dots, N_3; \quad j = i = 1, 2, \dots, N_3; \quad (\text{B.53})$$

mit der Zwischengröße

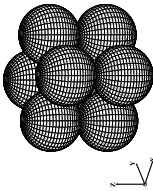
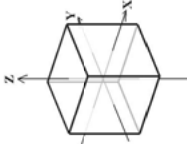
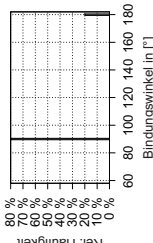
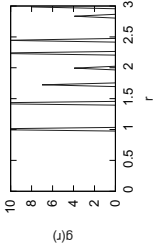
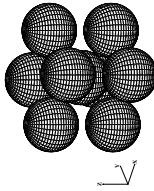
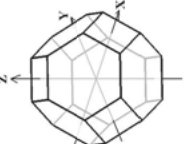
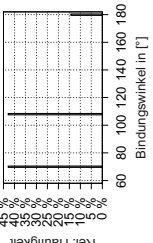
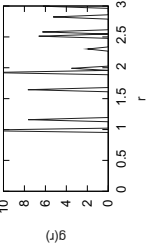
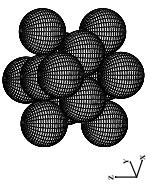
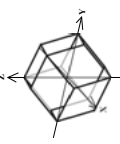
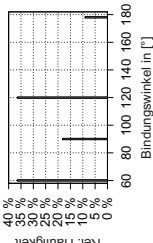
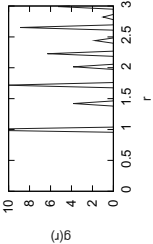
$$\tau = \frac{6(1-\nu)\kappa}{4\tau^2}. \quad (\text{B.54})$$

B.4 Kenngrößen geordneter Kugelpackungen

In diesem Abschnitt sollen auf einige repräsentative Kenngrößen von theoretisch geordneter (Hohl-) Kugelpackungen vorgestellt werden.

In Tabelle B.1 werden drei verschiedene charakterisierende Kenngrößen für die idealen kubische Packungen (KP, KRZ und KFZ) gezeigt. Zudem wird die periodische VORONOI-Zelle für diese Packungssysteme abgebildet. Für die KP-Anordnung ergibt sich ein Würfel und für KRZ und KFZ jeweils ein regelmäßiger Polyeder. Als weitere Kenngröße wird die Bindungswinkel-Verteilung aufgeführt. Für die KP-Anordnung ergeben sich ausschließlich Winkel von 90° und 180°. Markante Winkel bei der KRZ-Anordnung sind 70°, 109° und 180°. Bei der HDP-Anordnung zeigen sich charakteristische Winkel bei 60°, 90°, 120° und 180°. Zuletzt werden die Paarkorrelationsfunktionen für die drei Packungsanordnungen präsentiert. Bei allen Packungen entsteht ein Maximum bei Eins, was den direkten Kontakt der Kugeln hervorhebt. Als weitere Maxima zeigen sich Werte von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2 usw.

Tabelle B.1: Überblick über die Kenngrößen geordneter Kugelpackungen.

Überblick über die Kenngrößen				
Packung	Skizze	VORONOI-Zelle	Bindungswinkel-Verteilung	Paarkorrelationsfunktion
KP				
KRZ				
KFZ				

B.5 Akustische Messmethoden

B.5.1 Zwei-Mikrofon-Methode

Bei der Zwei-Mikrofon-Methode nach DIN 10534-2 [162] wird der Prüfling vor einer schallharten Stahlplatte platziert. Dabei werden die einfallende und die reflektierte Schallwelle untersucht. Mit dieser Methode lässt sich aus den aufgenommen Druckverläufen der Absorptionsgrad α eines porösen Materials bestimmen.

Die Transferfunktionsmethode basiert auf der Tatsache, dass der Reflektionskoeffizient r bei senkrechter Einschallung aus der gemessenen Übertragungsfunktion H_{12} zwischen den beiden Mikrofonen, welche vor der zu untersuchenden Probe angebracht sind, bestimmt werden kann. Somit ergibt sich die komplexe Übertragungsfunktion H_{12} zu

$$H_{12} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_B}{p_A} = \frac{e^{jk_0x_2} + re^{-jk_0x_2}}{e^{jk_0x_1} + re^{-jk_0x_1}}, \quad (\text{B.55})$$

wobei p_1 und p_2 die komplexen Schalldruckamplituden wie in Abb. B.3a an den Mikrofonpositionen x_1 und x_2 sind und sich folgendermaßen bestimmten lassen

$$p_1 = Ae^{-jk_0x_1} + Be^{jk_0x_1} \quad \text{und} \quad p_2 = Ae^{-jk_0x_2} + Be^{jk_0x_2}. \quad (\text{B.56})$$

Die Wellenzahl bestimmt sich über

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (\text{B.57})$$

Die Transferfunktion der einfallenden Schallwelle H_{in} und der reflektierten Welle H_{ref} ergibt sich zu

$$H_{\text{in}} = \frac{A_2}{A_1} = e^{-jk_0(x_2-x_1)} \quad \text{und} \quad H_{\text{ref}} = \frac{B_2}{B_1} = e^{jk_0(x_2-x_1)}. \quad (\text{B.58})$$

Kombiniert man die einzelnen Gleichungen, erhält man den komplexen Reflektionskoeffizienten r

$$r = \frac{H_{12} - H_{\text{in}}}{H_{\text{ref}} - H_{12}} e^{-j2k_0x_1}. \quad (\text{B.59})$$

Durch den schallharten Abschluss ergibt sich für den Absorptionskoeffizient

$$\alpha = 1 - |r|^2. \quad (\text{B.60})$$

B.5.2 Vier-Mikrofon-Methode

Das Vier-Mikrofon-Impedanzrohr ist eine Weiterentwicklung des Zwei-Mikrofon-Impedanzrohres (KUNDTsches Rohr) [198]. Es wurde durch zwei Mikrofone hinter dem Prüfling ergänzt im sogenannten Übertragungs-Raum (siehe Abb. B.3b). Zudem ist kein schallharter Abschluss mehr vorhanden. Der Lautsprecher im Erzeugerraum wird, wie bei der Zwei-Mikrofon-Methode, mit einem stationären „weißen“ Rauschsignal angesteuert. Ein Teil der Schallwelle wird an der Prüflings-Oberfläche reflektiert. Ein anderer Teil der Schallwelle wird durch den Prüfling in den Übertragungsraum übertragen.

Bei beiden Vorgängen wird ein Teil der Schallenergie gedämpft. Dies entsteht bei offenporigen und faserigen Schichten durch Reibung der Luftteilchen, bei weichen geschlossenporigen Stoffen durch Kompressionsvorgänge und damit verbundene Verluste. Durch die Reflektion entsteht im

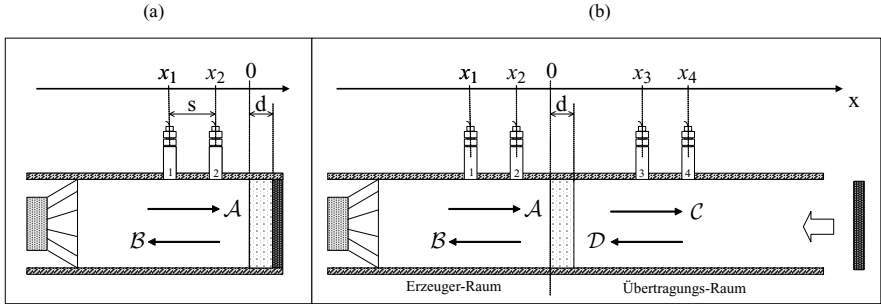


Abbildung B.3: Schemaskizzen Impedanzrohr: a) Zwei-Mikrofon-Methode, b) Vier-Mikrofon-Methode.

Erzeugerraum eine Überlagerung von hin- (A) und zurücklaufenden (B) Wellen, eine sogenannte stehende Welle.

Durch eine FOURIER-Transformation lässt sich der Schalldruck im Erzeugerraum der resultierenden Welle beschreiben mit

$$p_{\text{Er}} = A e^{-jk_0 x_n} + B e^{jk_0 x_n}. \quad (\text{B.61})$$

Hier ist A die komplexe Amplitude der einfallenden, B die komplexe Amplitude der reflektierten Welle und k_0 die Wellenzahl des Fluides. Dieser Effekt tritt ebenfalls im Übertragungsraum auf, wobei es hier unerheblich ist, ob das Ende des Impedanzrohres geschlossen ist oder nicht. Dies ist für den Fall des offenen Endes des Impedanzrohres gültig, da sich die Impedanz Z beim Übergang der Schallwelle in den freien Raum verändert

$$Z_2 = Z_1 \frac{A_1}{A_2}. \quad (\text{B.62})$$

Aus der allgemeinen Überlegung folgt für den Reflektionskoeffizient r_{ak} in diesem Fall

$$r_{\text{ak}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (\text{B.63})$$

Durch Kombination beider Gleichungen, ergibt sich der Reflektionskoeffizient r_{ak} in direkter Abhängigkeit zum Verhältnis der Querschnitte, definiert durch $n = \frac{A_1}{A_2}$, zu

$$r_{\text{ak}} = \frac{n - 1}{n + 1}. \quad (\text{B.64})$$

Für den Schalldruck im Übertragungsraum folgt analog zum Erzeugerraum

$$p_{\text{Ür}} = C e^{-jk_0 x_n} + D e^{jk_0 x_n}. \quad (\text{B.65})$$

Hier ist C die komplexe Amplitude der einfallenden und D die komplexe Amplitude der reflektierten Welle. Durch den Einsatz der Vier-Mikrofon-Methode an den entsprechenden vier Positionen, ergeben sich folgende komplexe Schalldruck-Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 &= A e^{-jk_0 x_1} + B e^{jk_0 x_1}, & p_2 &= A e^{-jk_0 x_2} + B e^{jk_0 x_2}, \\ p_3 &= C e^{-jk_0 x_3} + D e^{jk_0 x_3}, & p_4 &= C e^{-jk_0 x_4} + D e^{jk_0 x_4}. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Formt man die Gleichungen für p_1 bis p_4 um, so ergeben sich die komplexen Koeffizienten \mathcal{A} bis \mathcal{D} , die zur Berechnung der Schalldrücke und Schallschnellen an der Oberfläche der Werkstoffprobe benötigt werden zu

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{j(p_1 e^{-jk_0 x_2} - p_1 e^{-jk_0 x_1})}{2 \sin(k_0(x_1 - x_2))}, & \mathcal{B} &= \frac{j(p_2 e^{-jk_0 x_1} - p_2 e^{-jk_0 x_2})}{2 \sin(k_0(x_1 - x_2))}, \\ \mathcal{C} &= \frac{j(p_3 e^{-jk_0 x_4} - p_1 e^{-jk_0 x_3})}{2 \sin(k_0(x_3 - x_4))}, & \mathcal{D} &= \frac{j(p_4 e^{-jk_0 x_3} - p_2 e^{-jk_0 x_4})}{2 \sin(k_0(x_3 - x_4))}.\end{aligned}\quad (\text{B.67})$$

Mit Hilfe einer Transfermatrix lässt sich die Anhängigkeit dieser vier Größen untereinander darstellen

$$\begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}_{x=d}. \quad (\text{B.68})$$

Hierbei ist p der Schalldruck und v die Schallschnelle an der Oberfläche des Materials. Somit folgt für den Schalldruck am linken und rechten Rand der Probe:

$$\begin{aligned}p|_{x=0} &= \mathcal{A}e^{-jk_0 0} + \mathcal{B}e^{jk_0 0} = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \\ p|_{x=d} &= \mathcal{C}e^{-jk_0 d} + \mathcal{D}e^{jk_0 d}.\end{aligned}\quad (\text{B.69})$$

Zieht man den allgemeingültigen, grundlegenden Zusammenhang zwischen der Schallschnelle und dem Schalldruck

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{B.70})$$

hinzu und setzt man den Schalldruck und die Schallschnelle hier ein, ergibt sich durch geschicktes Zusammenfassen

$$v_x(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} \left(\mathcal{A}e^{-j(k_0 x - \omega t)} + \mathcal{B}e^{j(k_0 x - \omega t)} \right). \quad (\text{B.71})$$

Mittels einer FOURIER-Transformation ergibt sich im Frequenzbereich die Schallschnelle als komplexes Spektrum

$$v_x(x, \omega) = \frac{1}{\rho_0 c} \left(\mathcal{A}e^{-jk_0 x} + \mathcal{B}e^{jk_0 x} \right) \quad (\text{B.72})$$

Die Schallschnelle an der Probenoberfläche ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned}v|_{x=0} &= \frac{\mathcal{A}e^{-jk_0 0} + \mathcal{B}e^{jk_0 0}}{\rho_0 c} = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{\rho_0 c}, \\ v|_{x=d} &= \frac{\mathcal{C}e^{-jk_0 d} + \mathcal{D}e^{jk_0 d}}{\rho_0 c}.\end{aligned}\quad (\text{B.73})$$

B.5.3 Two-Load-Methode

Mit Hilfe der komplexen Schalldrücke p_1 bis p_4 werden wie oben erläutert die komplexen Koeffizienten \mathcal{A} bis \mathcal{D} berechnet. Hierbei präsentiert sich nur eine Herausforderung: Die Matrix enthält vier Unbekannte, die Messung liefert jedoch nur zwei Gleichungen. Somit werden noch zwei weitere Gleichungen benötigt. Bei der Two-Load-Methode werden diese zwei Gleichungen durch eine zweite Messung mit geändertem Abschluss des Impedanzrohres erzeugt. Beispielsweise kann hierzu ein schallschluckender Abschluss eingesetzt werden, wie die Abb. B.3b am rechten Rand verdeutlicht. Die Transfermatrix wird hierdurch erweitert und kann eindeutig gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}_{x=d} \quad (\text{B.74})$$

Nach einer entsprechenden Umstellung der Transfermatrix und Bildung der inversen Matrix ergeben sich die Matrixelemente T_{11} bis T_{22} zu:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{p2|_{x=0} v1|_{x=d} - p1|_{x=0} v2|_{x=d}}{p2|_{x=d} v1|_{x=d} - p1|_{x=d} v2|_{x=d}} \\ T_{12} &= \frac{p2|_{x=0} p1|_{x=d} - p1|_{x=0} p2|_{x=d}}{v2|_{x=d} p1|_{x=d} - v1|_{x=d} p2|_{x=d}} \\ T_{21} &= \frac{v2|_{x=0} v1|_{x=d} - v1|_{x=0} v2|_{x=d}}{p2|_{x=d} v1|_{x=d} - p1|_{x=d} v2|_{x=d}} \\ T_{22} &= \frac{v2|_{x=0} p1|_{x=d} - v1|_{x=0} p2|_{x=d}}{v2|_{x=d} p1|_{x=d} - v1|_{x=d} p2|_{x=d}} \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

B.5.4 One-Load-Methode

Anstatt wie bei der Two-Load-Methode eine zweite Messung durchzuführen, gibt es auch die Möglichkeit, zwei weitere Gleichungen zur Lösung des Gleichungssystems einzuführen. Diese Möglichkeit der Lösung ist jedoch ausschließlich bei Materialien praktikabel, die eine homogene und isotrope Beschaffenheit aufweisen. Unter dieser Annahme folgt für die Transfermatrix:

$$T_{11} = T_{22} \quad \text{und} \quad (\text{B.76})$$

$$T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} = 1. \quad (\text{B.77})$$

B.5.4.1 Bestimmung der akustischen Parameter

Zur Berechnung der akustischen Kennwerte soll nun zuerst von einem idealen, nicht reflektierenden Abschluss ausgegangen werden, wodurch die Schallwelle \mathcal{D} im Übertragungsraum nicht existiert. Normiert man die Gleichungen für den Schalldruck und die Schallschnelle auf die einfallende Welle \mathcal{A} , folgt

$$\begin{aligned} p|_{x=0} &= 1 + r, \\ v|_{x=0} &= \frac{1 - r}{\rho_0 c}, \\ p|_{x=0} &= t e^{-jk_0 d}, \\ v|_{x=0} &= \frac{t e^{-jk_0 d}}{\rho_0 c}. \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

Aufgrund der Definition des Reflektions- und des Transmissionsfaktors durch

$$r_{\text{ak}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad t = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} \quad (\text{B.79})$$

folgt für den reflektionsfreien Abschluss

$$r_{\text{ak}} = \frac{T_{11} + \frac{T_{12}}{\rho_0 c} - \rho_0 c T_{21} - T_{22}}{T_{11} + \frac{T_{12}}{\rho_0 c} - \rho_0 c T_{21} + T_{22}} \quad \text{und} \quad (\text{B.80})$$

$$t_{\text{ak}} = \frac{T_{11} + \frac{2e^{jk_0 d}}{\rho_0 c}}{T_{11} + \frac{T_{12}}{\rho_0 c} - \rho_0 c T_{21} + T_{22}}. \quad (\text{B.81})$$

Die Oberflächenimpedanz der Sendeseite ergibt sich zu

$$Z_s = \frac{T_{11} + \frac{T_{12}}{\rho_0 c}}{T_{21} + \frac{T_{22}}{\rho_0 c}}. \quad (\text{B.82})$$

Die Wellenausbreitung innerhalb des Absorbers können durch folgenden Ausdruck

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_a d) & j \sin(k_a d) \rho_a c_a \\ j \sin(k_a d) \rho_a c_a & \cos(k_a d) \end{bmatrix} \quad (\text{B.83})$$

beschrieben werden. Dabei ist k_a die komplexe Wellenzahl und $Z_a = \rho_a c_a$ die charakteristische Impedanz des Absorbermaterials. Durch Umkehr der oben aufgeführten Beziehung, kann man k_a Z_a folgendermaßen bestimmen

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{1}{d} \cos^{-1} T_{11} \quad \text{oder} \\ k_a &= \frac{1}{d} \sin^{-1} \sqrt{-T_{12} T_{21}} \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

und

$$Z_a = \rho_a c_a = \sqrt{\frac{T_{12}}{T_{21}}}. \quad (\text{B.85})$$

Neben den Impedanzrohr-Messmethoden gibt es weitere Messmethoden, wie das bereits erwähnte Hallraummessverfahren nach ISO 354 [161]. Der Hallraummessmethode liegt die Nachhallzeitformel nach Sabine [182] zu Grunde. Diese Messmethode basiert auf der Erkenntnis, dass der stationäre Schalldruckpegel oder das Abklingen des Schalldruckpegels nach Abschalten einer Schallquelle in geschlossenen Räumen unter anderem von der schallabsorbierenden Eigenschaft der Wandbegrenzung abhängt. In mehreren Messreihen wird die mittlere Nachhallzeit in einem bemessenen Hallraum mit und ohne Prüfobjekt, sprich Absorbermaterial, bestimmt. Die gemessenen Werte beziehen sich beim Hallraumverfahren auf das diffuse Schallfeld, in dem der Schall nahezu gleichmäßig verteilt ist.

B.6 JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-PRIDE-LAFRAGE-Modell

Eine Erweiterung des JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modells stellt das JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-PRIDE-LAFRAGE-Modell dar. Wie bei dem Modell von Johnson, Champoux und Allard beruht die Beschreibung der dissipativen viskos-trägen Effekte auf den Arbeiten von Johnson, Koplik und Dashen, zusätzlich werden die Effekte der Arbeit von Pride, Morgan und Gangi integriert. Bei den thermisch dissipativen Effekten wird das Modell um die Erkenntnisse der Arbeit von Pride Morgan und Gangi bzw. Lafrage, Lemarinier, Allard und Tranow erweitert. Ausgehend von der Arbeit von Johnson [104] über das halb-phänomenologische Modell zur Beschreibung komplexer Dichten eines porösen Akustikmaterials mit starrem Strukturskelett, wurde das Modell durch Pride [169] weiter verfeinert und durch Lafarge [118] überarbeitet. Mit Hilfe der Zwischengrößen

$$M_v = \frac{8\mu^V \alpha_\infty}{\phi \Xi \Lambda_v^2} \quad \text{und} \quad P_v = \frac{M_v}{4 \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_\infty} - 1 \right)} \quad (\text{B.86})$$

und der viskosen Kreisfrequenz

$$\omega_v = \frac{\omega \rho_0 \alpha_\infty}{\phi \Xi} \quad (\text{B.87})$$

kann der Zwischenterm

$$F_v(\omega) = 1 - P_v + P_v \sqrt{1 + \frac{M_v}{2P_v^2} j \omega_v} \quad (\text{B.88})$$

gebildet werden. Dabei stellen α_0 die statische viskose Verwundenheit und α_∞ die viskose Verwundenheit an der Hochfrequenzgrenze dar. α_∞ entspricht dem Strukturformfaktor α_∞ des JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modells. Die übrigen drei weiteren Parameter können aus dem JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell entnommen werden. So kann mit den fünf Parametern die effektive Dichte

$$\rho_{\text{eff}}(\omega) = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{j\omega} F_v(\omega) \right] \quad (\text{B.89})$$

beschrieben werden. Die thermischen Effekte lassen sich mit den Zwischengrößen

$$M_t = \frac{k_{t0}}{\phi \Lambda_t^2} \quad \text{und} \quad P_t = \frac{M_t}{4(\alpha_{t0} - 1)} \quad (\text{B.90})$$

und der thermischen Kreisfrequenz

$$\omega_t = \frac{\omega \rho_0 k_{t0} P_r}{\phi \mu} \quad (\text{B.91})$$

mit dem Zwischentermen

$$F_t(\omega) = 1 - P_t + P_t \sqrt{1 + \frac{M_t}{2P_t^2} j \omega_t} \quad \text{und} \quad \beta_t(\omega) = \gamma - (\gamma - 1) \left[1 + \frac{1}{j \omega_t} F_t(\omega) \right] \quad (\text{B.92})$$

bestimmen. Der Kompressionsmodul lässt sich aus den vier Parametern, die Porosität ϕ , die thermisch charakteristische Länge beziehungsweise dem thermischen Formfaktor c_v , die statisch thermische Leitfähigkeit k_{t0} und die statisch thermischen Verwundenheit α_{t0} folgendermaßen bestimmen:

$$K(\omega) = \frac{\gamma p_0}{\beta_t(\omega)}. \quad (\text{B.93})$$

Dieses Modell kann zum JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-LAFARGE-Modell vereinfacht werden, indem man $P_t = P_v = 0$ setzt. Daraus ergibt sich

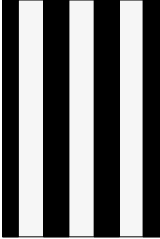

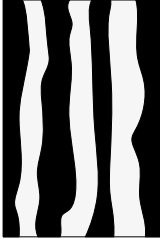

$$\alpha_{t0} = 1,25 \quad \text{und} \quad \alpha_{t0} = \alpha_\infty \frac{2 \frac{\mu}{\Xi} \alpha_\infty + \phi \Lambda_v^2}{\phi \Lambda_v^2}. \quad (\text{B.94})$$

Mit der weiteren zusätzlichen Bedingung $M_v = 0$ bzw.

$$k_{t0} = \frac{\phi \Lambda_t^2}{8} \quad (\text{B.95})$$

reduziert sich das JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-LAFARGE-Modell zum JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell. Eine kleine Übersicht über die theoretischen Absorbermodelle soll die Tabelle B.2 geben.

Tabelle B.2: Übersicht über die Absorbermodelle mit zunehmender Komplexität - starres Modellskelett der porösen Struktur (nach [1, 101]).

Art der Material-morphologie	senkrechte zylindrische Poren	geneigte zylindrische Poren	ungleichförmige Poren	ungleichförmige Poren mit möglichen Verengungen
				
Anzahl der Parameter	2	3	4-6	8
Modelle mit Parametern	Zwicker Kosten $\phi, \Xi = \frac{\eta}{k_0}$	Miki ϕ, Ξ, α_∞	Attenborough $\phi, \Xi, \alpha_\infty, b$ Wilson $\rho_\infty, \tau_{\text{vor}}, K_\infty, \tau_{\text{ent}}$ Johnson-Champoux-Allard-Pride ϕ, Ξ, α_∞ $\Lambda_v, \Lambda_t, k_{t0}$	Johnson-Champoux-Allard-Pride-Lafarge $\phi, \Xi, \alpha_\infty, \Lambda_v, \alpha_0, \Lambda_t, k_{t0}, \alpha_0'$

C Resultate

C.1 Sonderfall: Periodische Randbedingung für ideale Anordnung

Neben den periodischen Randbedingungen für kubische Strukturen wurden spezielle periodische Randbedingungen für ideale Strukturen im einachsigen Zug- und Druckfall betrachtet. Sie sind ausdrücklich nur bei dieser Belastungsart gültig.

C.1.1 Kubische Elementarzellen

Sinnbildlich sind in den Abb. C.1a und C.1b das Funktionsprinzip der Randbedingung und der dazugehörigen Lagerdefinition gezeigt. Symbolisch wird die Sperrung der Richtungen, in der sich der Körper nicht verschieben soll, durch das Loslager-Symbol dargestellt und die Last durch einen grauen Pfeil. Die Abbildungen C.1a und C.1b zeigen durch Loslager-Symbole an den Kanten der

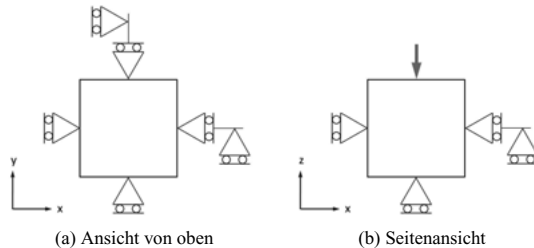


Abbildung C.1: Sinnbildliche Funktionsweise der Befehle zur periodischen Randbedingung

x -, y - und z -Richtung die typische Lagerung, wie sie aufgrund der Symmetriebedingung vorgenommen wird. Im FE Programm sind die Randbedingungen mit Hilfe eines Makros einzustellen, dass sich der Würfel bei Belastung in x - und y -Richtung ausdehnen darf. Dabei ist sichergestellt, dass sich die bewegende Fläche parallel zur, oder entgegen, der gesperrten gegenüberliegenden Fläche bewegen kann. In Abb. C.1a ist dies sinnbildlich durch die Loslagerkonstruktionen oben und rechts zu erkennen, sowie in Abb. C.1b an der rechten Fläche.

C.1.2 Hexagonal dichtest gepackte Elementarzelle

Die bisher gezeigten kubischen Elementarzellen sind in der x -, y - und z -Richtung symmetrisch. Die HDP-Elementarzelle zeigt gewisse Symmetrien, ist aber nicht in der x -, y - und z -Richtung symmetrisch. Aufgrund dieser Eigenschaft wird die HDP-Elementarzelle durch zwei verschiedene Lastfälle untersucht.

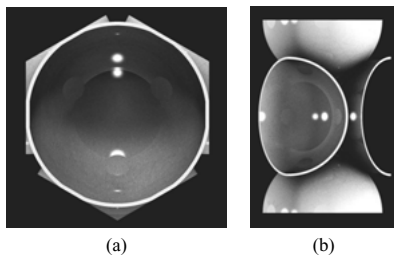


Abbildung C.2: HDP-Elementarzelle: a) Draufsicht, b) Seitenansicht.

Den ersten Fall der untersucht wird, zeigt Abb. C.2a (HDP Elementarzelle in der Draufsicht). Hier wird später die Last aufgegeben und es ist eine Symmetrie zu erkennen. Die Abb. C.3 zeigt ein sechseckiges Prisma. In Abb. C.3a sind die Lagerung und die mit dem Makro geführten Flächen zu erkennen. Abbildung C.3b zeigt die Last, die in Richtung der z-Achse erfolgt.

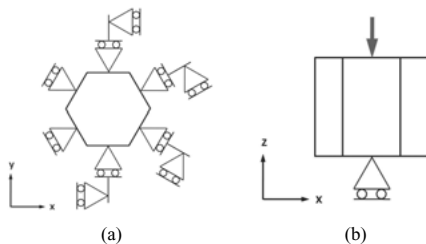


Abbildung C.3: HDP-Elementarzelle: a) Lagerung, b) Last.

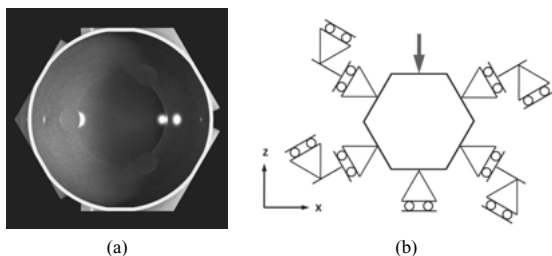


Abbildung C.4: HDP-Elementarzelle: a) Vorderansicht, b) Lagerung und Last

C.2 Sinterstellenwinkel

Zusätzlich zu den vorgestellten Ergebnissen in Abschnitt 4.2.1 werden in diesem Anhangsteil die Variation des Sinterstellwinkels für verschiedene regelmäßige Hohlkugelpackungen (KP, KRZ,

KFZ und HDP) vorgestellt. Es wird jeweils der relative Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl bezogen auf das Verhältnis von Wanddicke zu Hohlkugeldurchmesser bzw. auf die relative Dichte gezeigt.

C.2.1 Kubisch-Primitiv

Die Abb. C.5 präsentiert die für die kubisch-primitive Elementarzelle mit vier verschiedenen Sinterstellenwinkeln von 5° bis 20° den relativen Elastizitätsmodul in Abhängigkeit vom Verhältnis Wanddicke zu Hohlkugeldurchmesser. Es stellen sich ähnliche Kurvenverläufe für diese Parametervariation wie bei der Variation des Sinterstellendurchmessers in Abschnitt 4.2.1 ein. Bezieht man den relativen Elastizitätsmodul auf die relative Dichte erhält man nahezu lineare Verläufe im doppel-logarithmischen Diagramm (siehe Abb. C.5). Die Abb. C.6 zeigt den Querkontraktionsver-

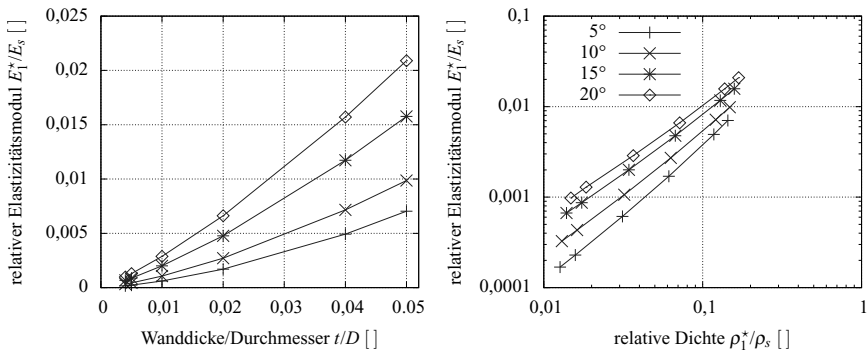


Abbildung C.5: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluss auf den Elastizitätsmodul.

lauf in Bezug auf das Verhältnis Wanddicke zu Hohlkugeldurchmesser bzw. die relative Dichte. Es lässt sich ein Zusammenhang zwischen Querkontraktionszahl und dem geometrischen Verhältnis erkennen. Mit steigendem Verhältnis von Wanddicke zu Hohlkugeldurchmesser nimmt ebenfalls die Querkontraktionszahl zu. Einen ähnlichen Verlauf erkennt man bei der Abbildung über die relative Dichte.

C.2.2 Kubisch-Raumzentriert

Die Abb. C.7 zeigt für die kubisch-raumzentrierte Elementarzelle mit vier verschiedenen Sinterstellenwinkeln (5° bis 20°) den relativen Elastizitätsmodul in Abhängigkeit vom Verhältnis Wanddicke zu Hohlkugeldurchmesser und relativer Dichte. Die dazugehörigen Querkontraktionsverläufe in Bezug auf das geometrische Verhältnis bzw. auf die Dichte ist in Abb. C.8 dargestellt. Es kann ebenfalls der Zusammenhang festgestellt werden, dass mit zunehmenden geometrischen Verhältnis von Wanddicke zu Kugeldurchmesser bzw. zunehmender relativer Dichte die Querkontraktionszahl steigt. Im Gegensatz zu KP-Anordnung befinden sich die Werte der Querkontraktionszahl ausschliesslich im negativen Bereich.

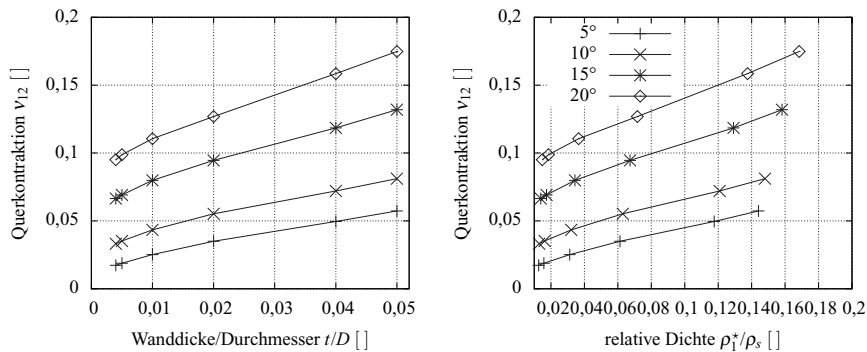


Abbildung C.6: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluss auf die Querkontraktionszahl.

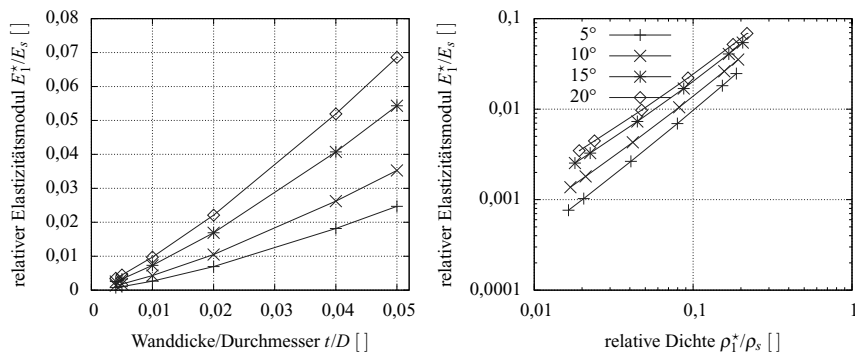


Abbildung C.7: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluss auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

C.2.3 Kubisch-Flächenzentriert

Die Abb. C.9 gibt die Verläufe des relativen Elastizitätsmoduls für die KFZ-Anordnung wieder. Betrachtet man die Verläufe erkennt man eine größerer Zunahme des relativen Elastizitätsmoduls gegenüber der KP- und KRZ-Anordnung. Den Verlauf der Querkontraktion in Abhängigkeit vom Verhältnis von Wanddicke zu Hohlkugeldurchmesser bzw. von der relativen Dichte ist Abb. C.10 dargelegt. Im Vergleich zu den Verläufen der KP- und KRZ-Anordnung zeigt der Querkontraktionszahlverlauf der KFZ-Anordnung die größte Varianz.

C.2.4 Hexagonal-Dichtest-Gepackt

Abbildung C.11 veranschaulicht den Verlauf des relativen Elastizitätsmoduls für die HDP-Anordnung. Der Querkontraktionsverlauf für diese Anordnung kann aus Abb. C.12 entnommen werden. Beide

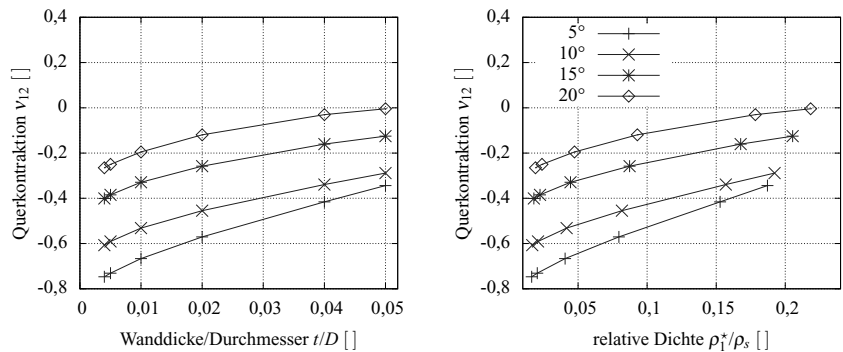


Abbildung C.8: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluss auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

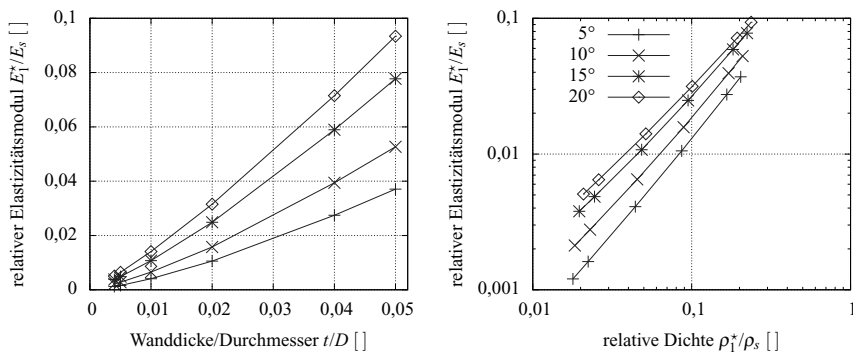


Abbildung C.9: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluß auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

Verläufe ähneln den Verläufen der KFZ-Anordnung sehr stark.

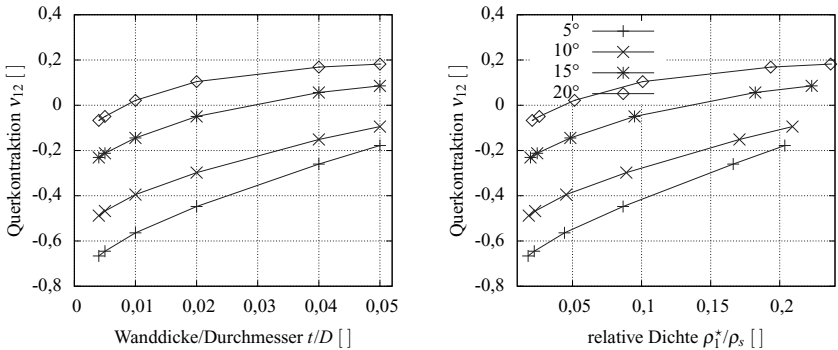


Abbildung C.10: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluß auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

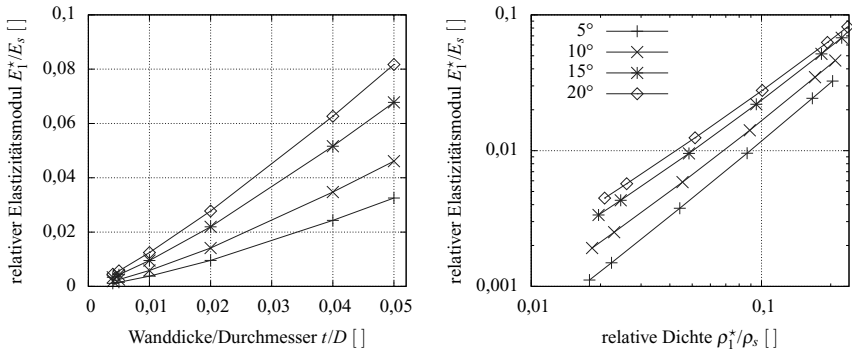


Abbildung C.11: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluß auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

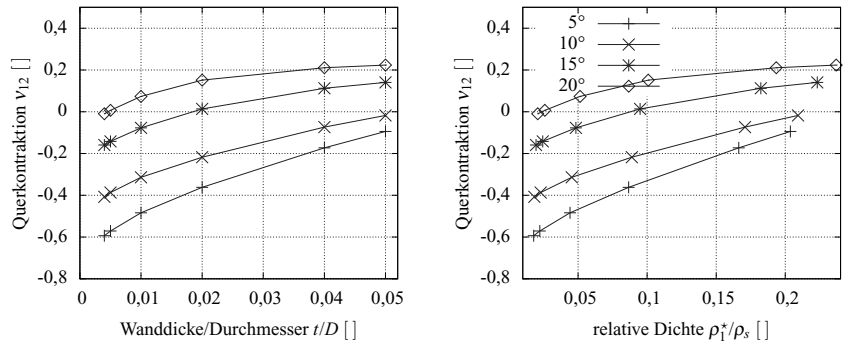


Abbildung C.12: Parametervariation Sinterstellenwinkel bei konstanter Wanddicke und konstantem Kugeldurchmesser, Einfluß auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

C.3 Schallabsorption

Die folgenden Abb. C.13, C.14, C.15 und C.16 zeigen jeweils den Real- und Imaginärteil der charakterisierenden Größen, charakteristische Impedanz und komplexe Wellenzahl für die Probe HKS 86. In den Diagrammen stellt die Volllinie das JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD-Modell, die gestrichelte Linie die Messung mit der One-Load Methode und die gepunktete Linie die Messung mit der Two-Load Methode dar. Abbildung C.17 präsentiert akustische Absorberwerte für einen Hartschaum und einem Fasermaterial.

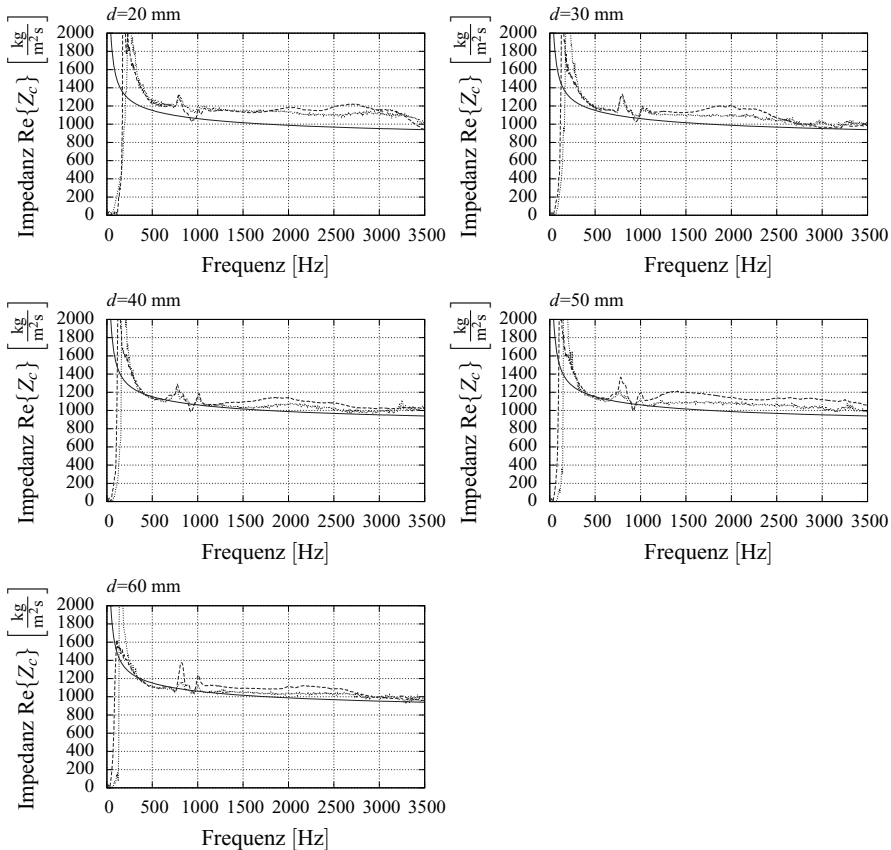


Abbildung C.13: HKS 86: Realteil der Wellenzahl Z_c für verschiedene Probendicken.

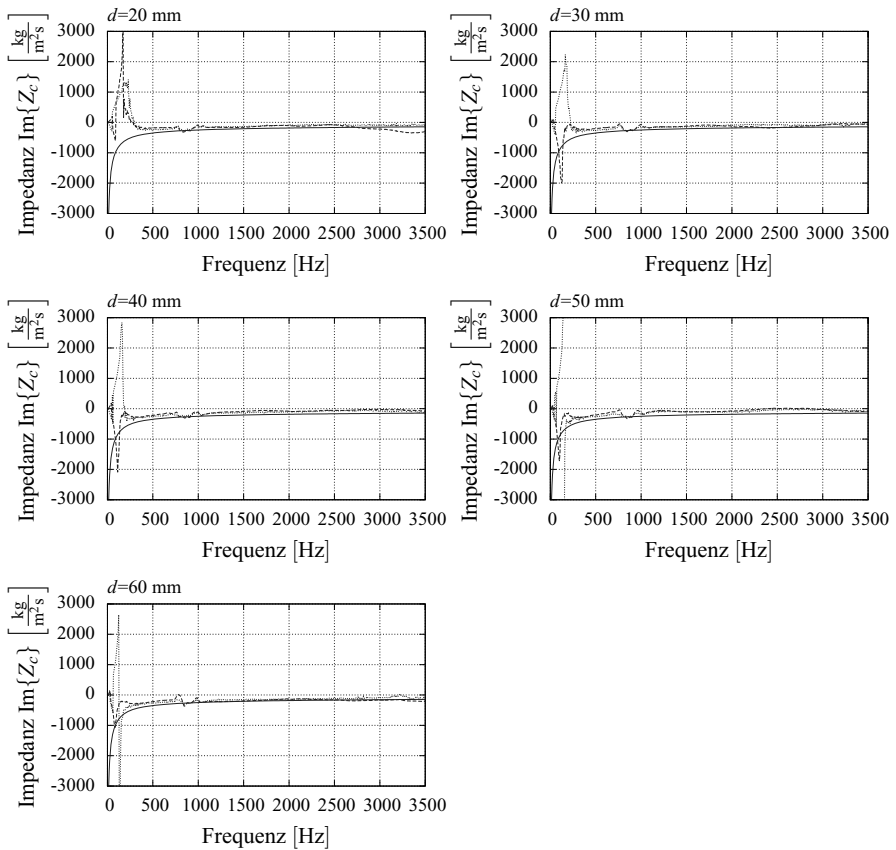


Abbildung C.14: HKS 86: Imaginärteil der Impedanz Z_c für verschiedene Probendicken.

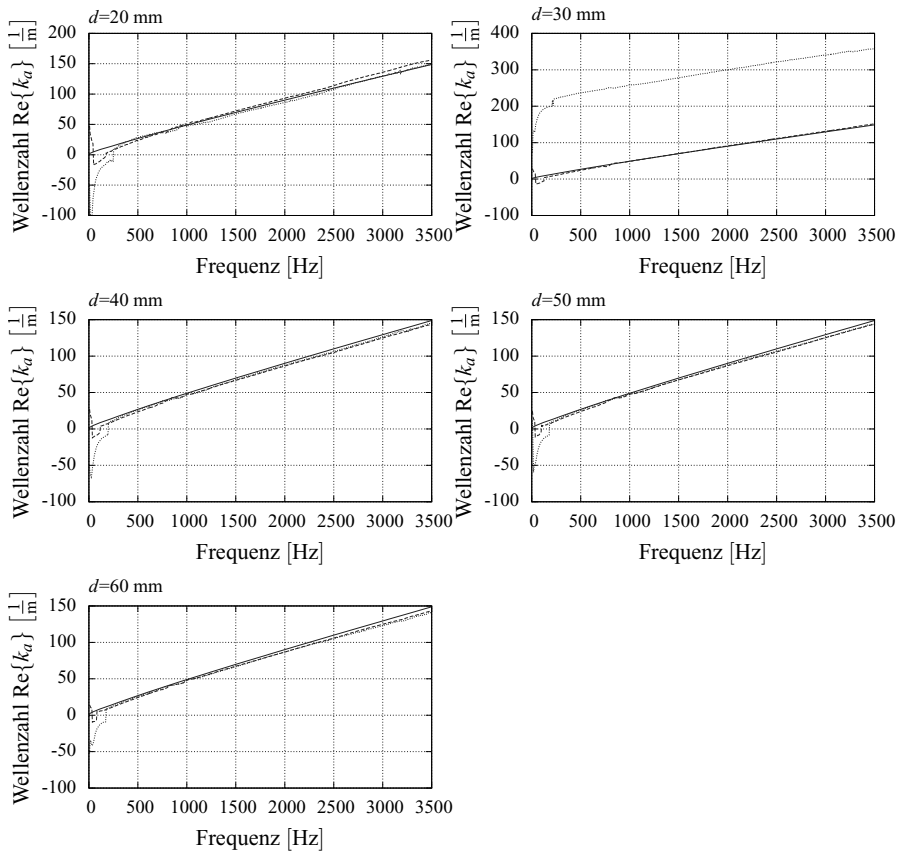


Abbildung C.15: HKS 86: Realteil der Wellenzahl k_a für verschiedene Probendicken.

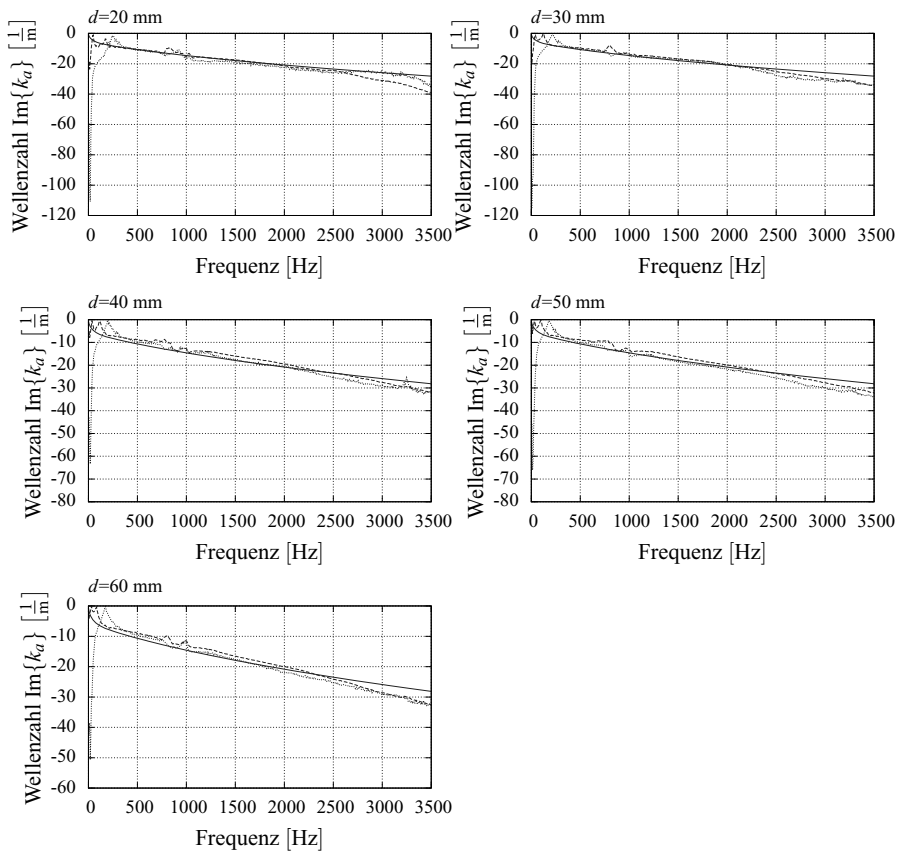
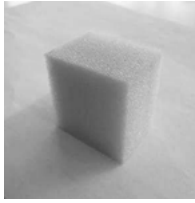
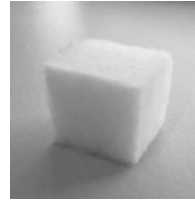


Abbildung C.16: HKS 86: Imaginärteil der Wellenzahl k_a für verschiedene Probendicken.



(a) Hartschaum



(b) Fasermaterial

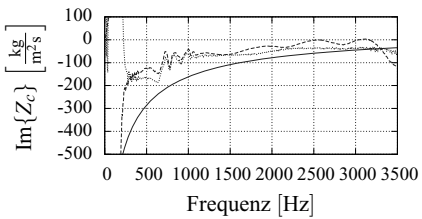
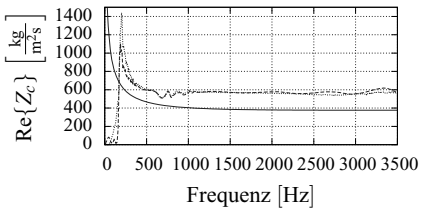
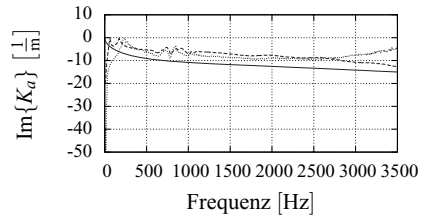
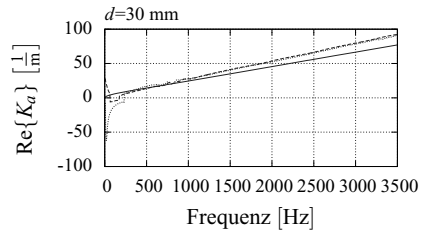
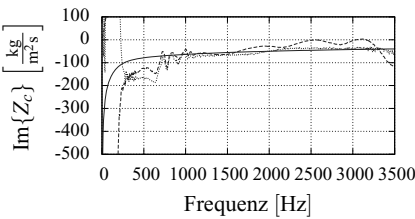
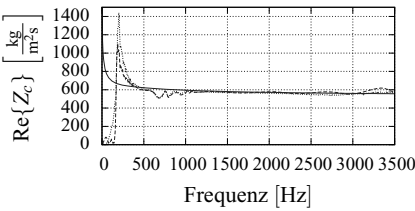
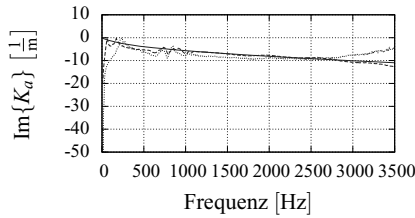
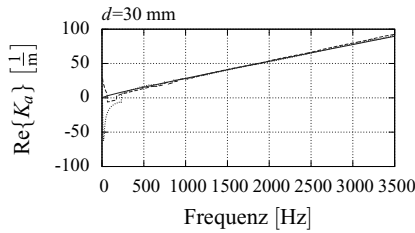


Abbildung C.17: Übersicht über die Kennwerte der Polymerschäume, Proben, Real- und Imaginärteil der Wellenzahl und Real- und Imaginärteil der Impedanz.

C.4 Schallgeschwindigkeitskörper

Zur Bestimmung des allgemeinen Anisotropiefaktors A_{Aniso}^* nach Ledbetter und Migliori [126] benötigt man die maximale bzw. minimale Schubwellenausbreitungsgeschwindigkeit, auch transversale Schallgeschwindigkeit genannt. Geht man von der CAUCHY-EULERSchen Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^V &= \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \\ \sigma_{ij,j} + f_i^V &= \rho \ddot{x}_i\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

aus und nutzt das lineare HOOKEsche Materialgesetz

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl},\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

wobei

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad \text{bzw.} \\ \varepsilon_{kl} &= \frac{1}{2} (u_{l,k} + u_{k,l})\end{aligned}\quad (\text{C.3})$$

ist, erhält man durch Einsetzen von Gl. (C.2) und Gl. (C.3) in Gl. (C.1) bei Vernachlässigung der Volumenkräfte folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{x}} &= 0 \quad \text{bzw.} \\ C_{ijkl} u_{k,lj} - \rho \ddot{x}_i &= 0\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

Die harmonische Ebenen-Wellen-Verschiebungen können wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{u}} \mathbf{p} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{u}} \mathbf{p} e^{i(\frac{1}{c} \mathbf{d} \cdot \mathbf{x} - t)} \quad \text{bzw.} \\ u_i &= \hat{u} p_i e^{i(\frac{1}{c} n_j x_j - t)}\end{aligned}\quad (\text{C.5})$$

mit

$$\mathbf{k} = k \mathbf{d} \quad \text{bzw.} \quad k_i = k d_i \quad (\text{C.6})$$

und

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (\text{C.7})$$

ausgedrückt werden. Hierbei stellt \hat{u} den Amplitudenfaktor, \mathbf{p} den Polarisations-Einheitsvektor, \mathbf{n} den Ausbreitungs Einheits-Richtungsvektor, \mathbf{k} den Wellenzahlvektor und c die Phasen- bzw. Ausbreitungsgeschwindigkeit dar. Setzt man die Gl.(C.5) und Gl. (C.6) in Gl. (C.4) ein, ergibt sich die monochromatische Ebenen-Wellen-Gleichung [153, 157]:

$$\begin{aligned}(\mathbb{C} \cdot \mathbf{d} - \rho c^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{p} &= 0 \quad \text{bzw.} \\ (C_{ijkl} d_j d_l - \rho c^2 \delta_{ik}) p_k &= 0.\end{aligned}\quad (\text{C.8})$$

Diese CHRISTOFFEL-Gleichung für anisotrope Festkörper lässt sich auf ein Eigenwertproblem mit drei Eigenwerten ρc^2 reduzieren:

$$\begin{aligned} |\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{d} - \rho c^2 \mathbf{I}| &= 0 \quad \text{bzw.} \\ |C_{ijkl} d_j d_l - \rho c^2 \delta_{ik}| &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Aus den Eigenwerten können die drei Ausbreitungsgeschwindigkeiten bestimmt werden. Für reine longitudinale ebene Körperschallwellen sind der Polarisationsvektor \mathbf{p} und der Ausbreitungsvektor \mathbf{n} parallel zueinander. Für reine transversale (Schub-) Wellen stehen der Polarisationsvektor \mathbf{p} und der Ausbreitungsvektor \mathbf{n} senkrecht aufeinander. In den anderen Fällen breitet sich eine quasi-longitudinale bzw. quasi-transversale Welle aus.

Im Folgenden sind für die idealen Hohlkugelstruktur Elementarzellen in den Abbildungen C.18 bis C.20 (KP, KRZ und KFZ) die quasi-longitudinale und die zwei transversale Schallgeschwindigkeit darstellt. Die Berechnungen sind mit folgenden Hohlkugelparametern $\frac{t}{D} = 0,01$ und Sinterstellenwinkel von $17,4^\circ$ durchgeführt worden. Die Schallgeschwindigkeit wird in den Diagrammen relativ zur longitudinalen Schallgeschwindigkeit des isotropen Strukturmaterials (z.B. Stahl) angegeben. Abbildungen C.21 - C.24 zeigen die relativen Körperschallgeschwindigkeiten für die zufällig geordneten repräsentativen Volumenelemente-Modelle.

In Winkler et al. [224] wurde für die Probe HKS 113 longitudinale Schallgeschwindigkeit in einem Bereich von $1532 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bis $1644 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gemessen. Geht man von einer longitudinalen Körperschallgeschwindigkeit von $5850 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ [178] aus, ergibt sich eine relative quasi-longitudinale Schallgeschwindigkeit im Bereich von 26,3% bis 28,2%. Vergleicht man diese Werte mit der relativen quasi-longitudinalen Schallgeschwindigkeit der RVE mit 55% Packungsdichte in der Abb. C.21 bei einem Verhältnis von Wanddicke zu Kugeldurchmesser von 0,01 und in der Abb. C.25 bei einem Verhältnis von Wanddicke zu Kugeldurchmesser von 0,04, erkennt man eine gute Übereinstimmung. Für die Probe HKS 113 wurde ein $\frac{t}{D} = 0,25$ und einer Packungsdichte von 57% ermittelt (siehe Kapitel 4).

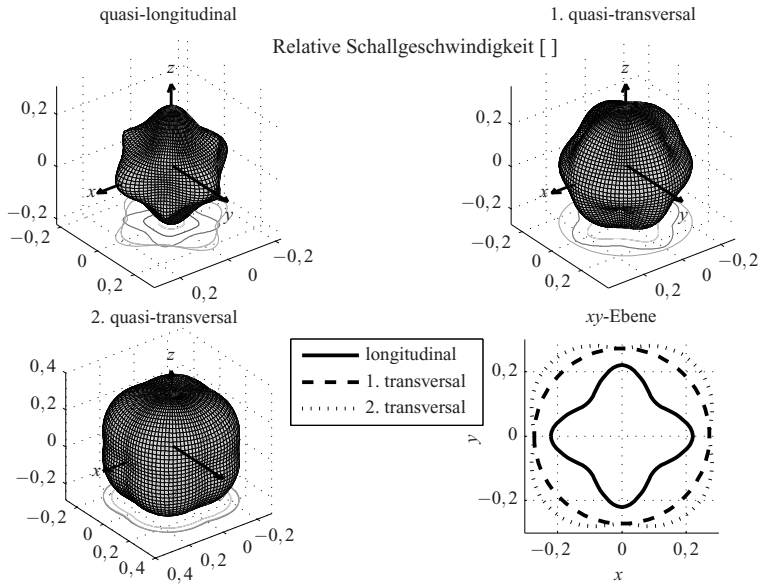


Abbildung C.18: Richtungsabhängige Körperschallgeschwindigkeit für KP-Elementarzelle.

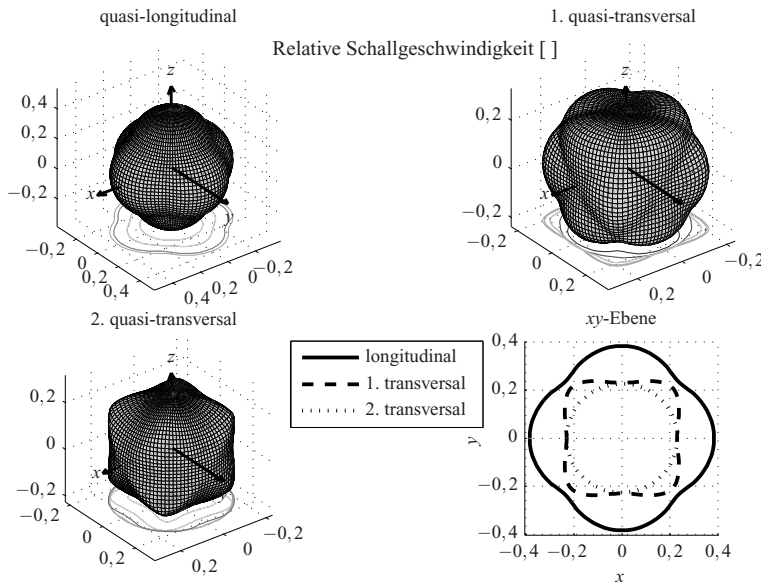


Abbildung C.19: Richtungsabhängige Körperschallgeschwindigkeit für KRZ-Elementarzelle.

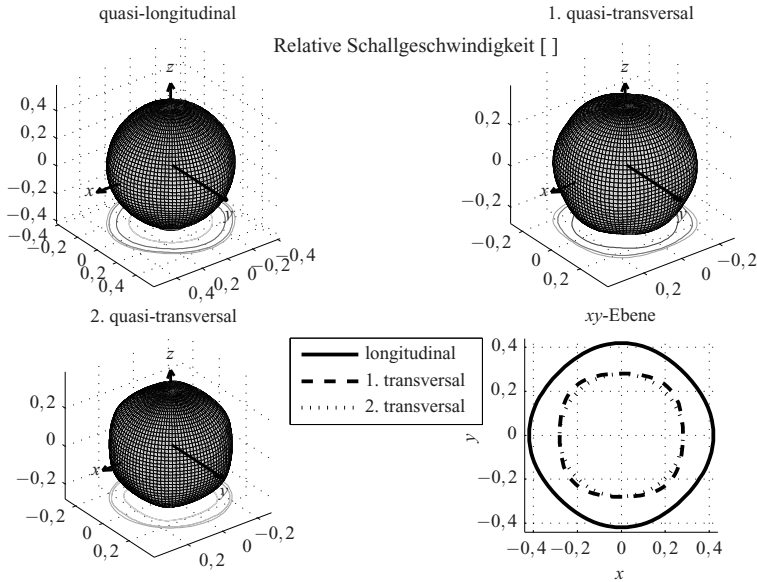


Abbildung C.20: Richtungsabhängige Körperschallgeschwindigkeit für KFZ-Elementarzelle.

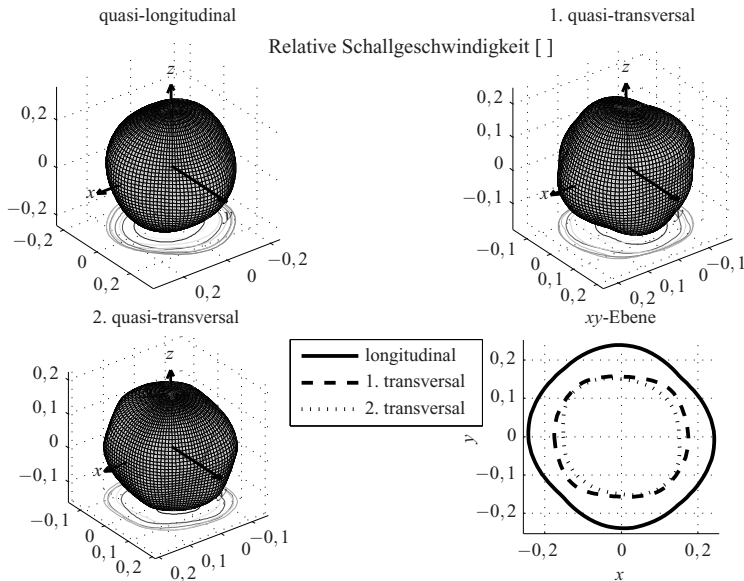


Abbildung C.21: Richtungsabhängige Körperschallgeschwindigkeit für RVE mit 55% Packungsdichte.

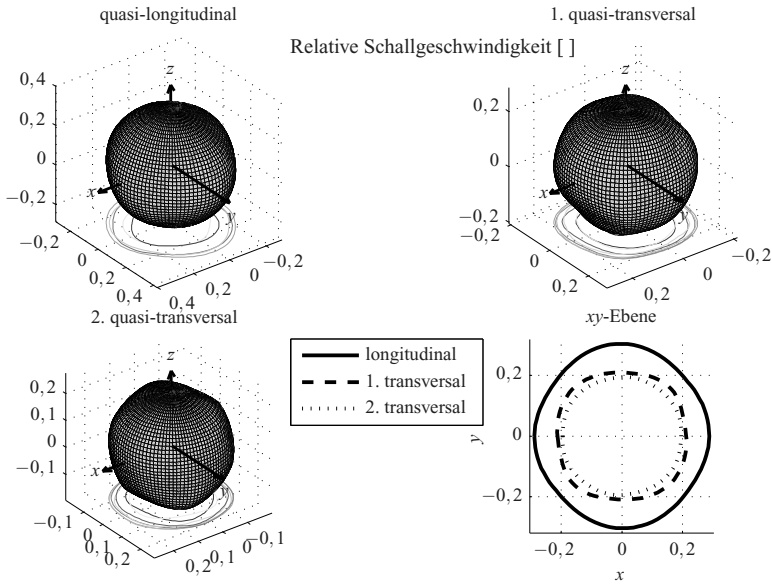


Abbildung C.22: Körperschallgeschwindigkeit für RVE mit 62% Packungsdichte.

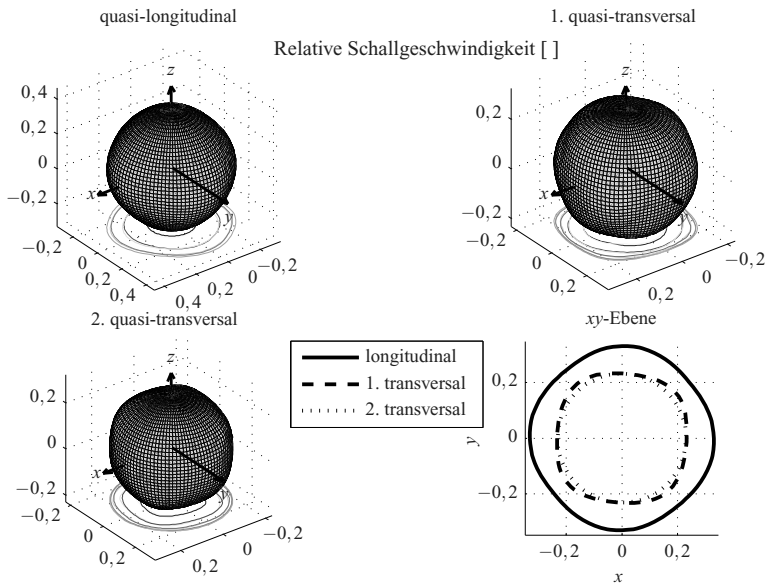


Abbildung C.23: Körperschallgeschwindigkeit für RVE mit 66% Packungsdichte.

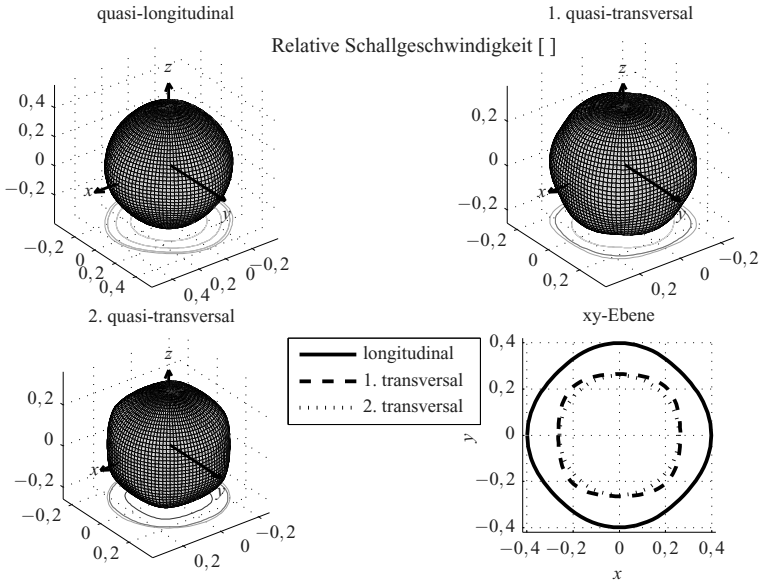


Abbildung C.24: Körperschallgeschwindigkeit für RVE mit 69% Packungsdichte.

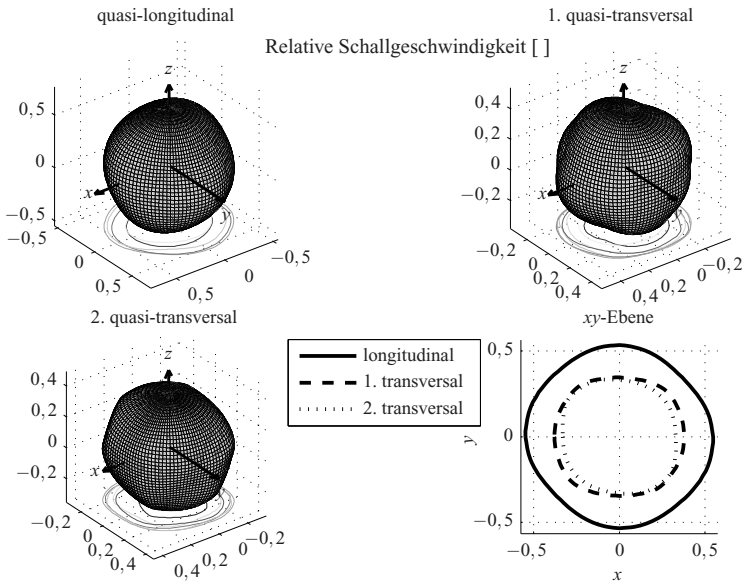


Abbildung C.25: Richtungsabhängige Körperschallgeschwindigkeit für RVE mit 55% Packungsdichte bei einem Verhältnis von Wanddicke zu Kugeldurchmesser von 0,04.

Symbolverzeichnis

Mathematische Operatoren und Symbole	
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$	Skalarprodukt von Vektoren und Tensoren
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k$	Kreuzprodukt zweier Vektoren
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	Tensorprodukt
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$	einfache Kontraktion zweier Tensoren
$\mathbb{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = A_{ijkl} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	zweifache Kontraktion zweier Tensoren
$\text{grad}(\mathbf{a}) = \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x_j} a_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	Gradient (räumliche Betrachtung)
$\text{div}(\mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} A_{ik} \mathbf{e}_i$	Divergenz
$\text{div}(\text{grad}(\mathbf{a})) = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{a}) = \nabla^2 \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a}$	Laplace Differentialoperator
$\text{Spur}(\mathbf{A}) = A_{ii}$	Spur eines Tensors
$\text{sym}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$	Symmetrischer Anteil
$\text{skew}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$	Antisymmetrischer Anteil
$(\cdot)^T, \mathbf{A}^T = A_{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i$	Transposition, Beispiel Tensor zweiter Stufe
$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot), \frac{d}{dt}(\cdot), (\cdot), (\cdot)_{,t}$	Zeitableitung
$\frac{\partial}{\partial x}(\cdot), \frac{d}{dx}(\cdot), (\cdot)', (\cdot)_{,x}$	Ortsableitung am Beispiel nach x
$d(\cdot)$	infinitesimal kleine Größe
$\Delta(\cdot)$	finitesimal kleine Größe
$\delta_{ij}(\cdot)$	Kronecker-Symbol (1 für $i = j$, sonst 0)
$\frac{\partial}{\partial}(\cdot)$	partielle Ableitung
ϵ_{ijk}	Permutationssymbol
$f(\cdot)$	Funktion von (\cdot)
$\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$	Identität
$\text{Im}\{\cdot\}$	Imaginärteil der komplexen Zahl (\cdot)
$\text{Re}\{\cdot\}$	Realteil der komplexen Zahl (\cdot)
Formelzeichen (lateinisch)	
a	Länge
\mathbf{a}	Ortsvektor im materiellen Koordinatensystem
A	Fläche
A_{Aniso}	ZENERsche Anisotropiefaktor
A_{Aniso}^*	allgemeingültiger Anisotropiefaktor
\mathbb{A}	Zuordnungstensor
b	Breite

b	Beschleunigungsfeld
B	rechter CAUCHY-GREEN-Deformationstensor
\mathcal{B}	Körper
$\partial\mathcal{B}$	Körperoberfläche
\mathbb{B}	Zuordnungstensor
c	Schall-, Phasengeschwindigkeit
c_p	isobare Wärmekapazität
c_v	isochore Wärmekapazität
c_t	thermischer Porenfaktor
c_v	viskoser Porenfaktor
c_0	Schallgeschwindigkeit der Luft, des Mediums
$C(r)$	Kovarianz
C_p	spezifische isobare Wärmekapazität
C_1	Konstante
C_2	Konstante
C	linker CAUCHY-GREEN-Deformationstensor
C _{damp}	Dämpfungsmatrix
\mathbb{C}	Steifigkeitstensor
d	Dicke des Absorbers
d_{ak}	Schalldissipationsgrad
D	Durchmesser
D_{PI}	Plattensteifigkeit
\mathcal{D}	Dissipationsfunktion
d	Raumrichtungsvektor
D	Deformationsgeschwindigkeitstensor
E	Elastizitätsmodul
E	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
f	Frequenz
\mathfrak{f}	beliebige Funktion
\mathfrak{f}_E	HELMOLTZsche freie Energie
F	Kraft
\mathbf{f}^m	Massenkraftdichtevektor
\mathbf{f}^O	Oberflächenkraftvektor
\mathbf{f}^V	Volumenkraftvektor
F	Deformationsgradient
$g(r)$	Paarkorrelationsfunktion
g	beliebige Funktion
G	Schubmodul
G	Admittanz
h	Höhe, Plattendicke
h_s	Schubdicke
h	Basisvektoren

H	Übertragungsfunktion
\mathbf{h}	Wärmestromvektor
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient
I	Flächenmoment 2. Ordnung
$I(x)$	Invariante
\mathbf{I}	Identität
\mathbf{I}_O	Drehimpulsvektor
\mathbf{I}_S	Schallintensität
j	Massenträgheitsmoment
\mathbf{j}	Imaginäre Größe
J	JACOBI-Determinante
$J_i(x)$	Besselfunktion i -ter Ordnung
k	Wellenzahl
k_a	Wellenzahl im Absorber
k_P	Durchlässigkeitsbeiwert
k_v	viskoser Dämpfungskoeffizient
K	Kompressionsmodul
$K(r)$	RIPLEYSche Funktion
KZ	Koordinationszahl
\mathcal{K}	kinetische Energie
\mathbf{k}	Wellenzahlvektor
l	Länge
L	normierte Länge
\mathcal{L}	LAGRANGESche Funktion
\mathbf{L}	Geschwindigkeitsgradiententensor
m	Moment
m_{Gas}	Gasmasse
M	Molmasse
\mathbf{M}	Massenmatrix
n	Index, Anzahl
N	Anzahl
\mathbf{n}	Normalenvektor
p	Druck
P	(Schall-) Leistung
Pr	PRANDTL-Zahl
PD	Packungsdichte
\mathbf{p}	Impulsvektor
\mathcal{P}_a	Leistung der äußeren Kräfte
\mathbf{p}	Polarisationsvektor
q	äußere Kraft

Q	Wärmezufuhr
Q_r	Wärmequelle
q	Schallfluss
r	Radius
r_{ak}	Schallreflektionskoeffizient
r_k	Klebestellenradius
r_s	Sintertellenradius
R	(äußerer) Radius
R_a	allgemeine Gaskonstante
R_i	spezifische Gaskonstante
R_{in}	innere Radius
\mathbf{R}	Drehtensor, -matrix
s	Schubwellenzahl
S	spezifische Entropie
\mathcal{S}	Entropie
\mathbb{S}	Nachgiebigkeitstensor
t	Schalendicke
t_{ak}	Schalltransmissionsgrad
t	Zeit
T	Temperatur
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{T}	Transmissionsmatrix
u	Verschiebung
u	spezifische innere Energie
\mathcal{U}	innere Energie
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\mathbf{U}	Rechtsstreckenortensor
v_{Darcy}	DARCY-Geschwindigkeit
V	Volumen
V_V	Volumenanteil
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{V}	Linksstreckenortensor
\mathbb{V}	Viskositätstensor
W	Arbeit
dW_F	Formänderungsenergiedichte
\mathbf{W}	Drehgeschwindigkeitsvektor
\mathcal{W}	mechanische Energie
x	Koordinate
\mathbf{x}	Ortsvektor im räumlichen Koordinatensystem
\mathcal{X}	Bild

y	Koordinate
z	Koordinate
Z	Impedanz
Z_a	akustische Flussimpedanz
Z_c	charakteristische Impedanz
Z_m	mechanische FeldImpedanz
Z_s	akustische Feldimpedanz
<hr/>	
Formelzeichen (griechisch)	
<hr/>	
α	Absorptionsgrad
α_∞	Strukturformfaktor
β	Verlustgrad
γ	Adiabatenexponent
γ_j	Schubverzerrung
ϵ_K	Toleranzparameter
ϵ	ALMANSI-Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\epsilon}$	Verzerrungstensor
η	lokale Koordinaten
κ	Schubkorrekturfaktor
κ_{ii}	Krümmung
λ	LAMÉ-Konstanten
λ_f	dimensionsloser Frequenzparameter
λ_0	Wellenlänge
Λ_t	thermische charakteristische Länge
Λ_v	viskose charakteristische Länge
μ	LAME-Konstante
μ^V	dynamische Viskosität der Luft, des Mediums
ν	Querkontraktionszahl
ξ	lokale Koordinaten
Ξ	längenbezogener Strömungswiderstand
ξ	Auslenkung
Π	Potential
ρ	Dichte
ρ_0	Dichte der Luft, des Mediums

ρ_{lokal}	lokale Dichte
σ	Oberflächenpannung
σ_m	hydrostatische Spannung
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor
τ	Spannungsvektor
ϕ	Porosität
Φ	Binde, Sinterwinkel
ψ_i	Drehwinkel um x_i -Achse
ω	Kreisfrequenz

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Beschreibung
B	Boden
CAD	Computer Aided Design
D	Deckel
EZ	Elementarzelle
FBA	Forced Biased Alghorythmus
FEM	Finite-Elemente-Methode
HDP	hexagonal dichtest gepackt
HKS	Hohlkugelstruktur
KFZ	kubisch flächen zentriert
KRZ	kubisch raum zentriert
KP	kubisch primitiv
KURB	kinematisch uniforme Randbedingung
MHKS	metallische Hohlkugelstruktur
N	Nord
O	Ost
PRB	periodische Randbedingung
RVE	Repräsentatives Volumement
S	Süd
SURB	statisch uniforme Randbedingung
VE	Volumenelement
W	West

Literaturverzeichnis

- [1] Allard, J.F., Atalla, N. (2009): *Propagation of Sound in Porous Media : Modelling Sound Absorbing Materials*. 2. ed. Wiley, Chichester
- [2] Allard, J.F., Champoux, Y. (1992): New empirical equations for sound propagation in rigid frame fibrous materials. *Journal of the Acoustical Society of America* 91, 6, 3346–3353
- [3] Altenbach, H. (1995): *Werkstoffmechanik: Einführung*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig Stuttgart
- [4] Altenbach, H. (2012): *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 2. Aufl. 2012. Springer Berlin Heidelberg
- [5] Altenbach, H., Altenbach, J., Kissing, W. (2004): *Mechanics of Composite Structural Elements*. Springer, Berlin ; Heidelberg [u.a.]
- [6] Altenbach, H., Altenbach, J., Naumenko, K. (1998): *Ebene Flächentragwerke: Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Springer, Berlin ; Heidelberg [u.a.]
- [7] Altenbach, H., Eremeyev, V. (2009): Eigen-vibrations of plates made of functionally graded material. *Computers, Materials and Continua* 9, 153–177
- [8] Altenbach, H., Eremeyev, V.A. (2010): *Cellular and Porous Materials in Structures and Processes: CISM Courses and Lectures, vol. 521* (CISM International Centre for Mechanical Sciences), *Thin-walled Structures Made of Foams*. Springer Wien New York, 47–106
- [9] Ashby, M.F. (2000): *Metal Foams: A Design Guide*. Butterworth-Heinemann, Boston [u.a.]
- [10] Attenborough, K. (1982): Acoustical characteristics of porous materials. *Physics Reports* 82, 179–227
- [11] Ballard, D.H. (1981): Generalizing the hough transform to. detect arbitrary shapes. *Pattern Recognition* 19, 111–112
- [12] Banhart, J. (2001): Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams. *Prog. Mater. Sci.* 46, 559–632
- [13] Bargel, H.J., Schulze, G. (2005): *Werkstoffkunde*. VDI-Buch, Springer, Berlin, Heidelberg
- [14] Bargiel, M., Moscinski, J. (1991): C-language program for the irregular close packing of hard spheres. *Computer Physics Communications* 64, 1, 183–192
- [15] Barton, R., Carter, F., Roberts, T. (1974): Use of reticulated metal foam as flash-back arrestor elements. *Chem. Eng.* 291, 708

- [16] Baughman, R.H., Shacklette, J.M., Zakhidov, A.A., Stafström, S. (1998): Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals. *Nature* 392, 362–365
- [17] Becker, W., Gross, D. (2002): *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Engineering online library. Springer, Berlin [u.a.]
- [18] Benouali, A.H., Froyen, L., Dillard, T., Forest, S., N'Guyen, F. (2005): Investigation on the influence of cell shape anisotropy on the mechanical performance of closed cell aluminium foams using micro-computed tomography. *Journal of Materials Science* 40, 5801–5811
- [19] Bernal, J.D. (1964): The Bakerian Lecture, 1962. The structure of liquids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 280, 299–322
- [20] Bernal, J.D., Mason, J. (1960): Packing of spheres: Co-ordination of randomly packed spheres. *Nature* 188, 910–911
- [21] Betten, J. (2001): *Kontinuumsmechanik: elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. 2., erw. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg
- [22] Bezrukov, A., Bargiel, M., Stoyan, D. (2001): Statistical analysis of simulated random packings of spheres. *Image Anal Stereol* 20, 203–206
- [23] Bhat, R. (1985): Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in rayleigh-ritz method. *Journal of Sound and Vibration* 102, 4, 493–499
- [24] Bhat, R. (1987): Flexural vibration of polygonal plates using characteristic orthogonal polynomials in two variables. *Journal of Sound and Vibration* 114, 65–71
- [25] Böhlke, T., Brüggemann, C. (2001): Graphical representation of the generalized Hooke's law. *Technische Mechanik* 21, 145–158
- [26] Biot, M.A. (1956): Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-Frequency Range II. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America* 28, 2, 168–191
- [27] Blasius, C., Blasius, E. (1897): *Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder Raum vertheilten Punkten von A. Bravais*. Verlag W. Engelmann, Leipzig
- [28] Bray, H. (1972): Design opportunities with metal foam. *Eng. Mater. Des.* 16, 16
- [29] Bronstein, I.N., Semendjaev, K.A., Musiol, G., Mühlig, H. (2008): *Taschenbuch der Mathematik*. 7., vollst. Überarb. und erg. Aufl. Deutsch, Frankfurt am Main
- [30] Buzug, T.M. (2005): *Einführung in die Computertomographie: Mathematisch-physikalische Grundlagen der Bildrekonstruktion*. Berlin; Heidelberg [u.a.]: Springer
- [31] Caty, O., Maire, E., Bouchet, R. (2008): Fatigue of metal hollow spheres structures. *Advanced Engineering Materials* 10, 179–184
- [32] Caty, O., Maire, E., Youssef, S., Bouchet, R. (2008): Modeling the properties of closed-cell cellular materials from tomography images using finite shell elements. *Acta Materialia* 56, 5524–5534

- [33] Chadwick, P., Vianello, M., Cowin, S.C. (2001): A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49, 2471–2492
- [34] Champoux, Y., Allard, J.F. (1991): Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of Applied Physics* 70, 1975–1979
- [35] Öchsner, A. (2003): Experimentelle und numerische Untersuchung des elastoplastischen Verhaltens zellulärer Modellwerkstoffe. Ph.D. thesis, Universität Erlangen
- [36] Öchsner, A. (2010): Cellular and Porous Materials in Structures and Processes: CISM Courses and Lectures, vol. 521 (CISM International Centre for Mechanical Sciences), Plasticity of Three-Dimensional Foams. Springer Wien New York, 107–166
- [37] Öchsner, A., Augustin, C. (2010): Multifunctional Metallic Hollow Sphere Structures: Manufacturing, Properties and Application. *Engineering Materials*. Springer
- [38] Öchsner, A., Winter, W., Kuhn, G. (2001): Elastic-plastic behavior of perforated aluminium under tension and compression. *Technische Mechanik* 21, 101–108
- [39] Cowin, S., Mehrabadi, M. (1989): Identification of the elastic symmetry of bone and other materials. *Journal of Biomechanics* 22, 503–515
- [40] Cowin, S.C. (1992): The structure of the linear anisotropic elastic symmetries. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 7, 1459–1471
- [41] Cremer, L., Heckl, M. (1996): Körperschall: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen. 2., völlig neu bearb. Aufl. Springer, Berlin ; Heidelberg [u.a.]
- [42] Dawe, D.J., Roufaeil, O.L. (1980): Rayleigh-Ritz vibration analysis of mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration* 69, 345–359
- [43] Daxner, T. (2010): Cellular and Porous Materials in Structures and Processes., Finite Element Modeling of Cellular Materials. Springer Wien-New York, 47–106
- [44] de Boer, R. (2000): Theory of Porous Media. Springer Berlin Heidelberg
- [45] Degischer, H.P., Kriszt, B. (2002): Handbook of Cellular Metals: Production, Processing, Applications. Wiley-VCH, Weinheim
- [46] Delany, M.E., Bazley, E.N. (1970): Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics* 3, 105–116
- [47] Demiray, S., Becker, W., Hohe, J. (2005): Strain-energy based homogenisation of two- and three-dimensional hyperelastic solid foams. *Journal of Materials Science* 40, 5839–5844
- [48] Deshpande, V., Fleck, N. (2000): Isotropic constitutive models for metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 1253–1283
- [49] Dickinson, S.M., Blasio, A.D. (1986): On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* 108, 1, 51–62
- [50] Diebels, S. (1999): A micropolar theory of porous media: constitutive modelling. *Transport in Porous Media* 34, 193–208

- [51] Diebels, S., Steeb, H. (2002): The size effect in foams and its theoretical and numerical investigation. *Proceeding of the Royal Society of London A* 458, 2869–2883
- [52] Diebels, S., Steeb, H. (2003): Stress and couple stress in foams. *Computational Materials Science* 28, 714–722
- [53] Dillard, T., Forest, S., Ienny, P. (2006): Micromorphic continuum modelling of the deformation and fracture behaviour of nickel foams. *European Journal of Mechanics A/Solids* 25, 526–549
- [54] Donev, A., Torquato, S., Stillinger, F.H., Connelly, R. (2004): Jamming in hard sphere and disk packings. *Journal of Applied Physics* 95, 3, 989–999
- [55] Droste, A. (2002): Beschreibung und Anwenung eines elastisch-plastischen Materialmodells mit Schädigung für hochporöse Metallschäume. Ph.D. thesis, Universität Stuttgart
- [56] Dukhan, N. (2013): Metal Foams: Fundamentals and Applications. DEStech Publication Inc. Lancaster, Pennsylvania
- [57] Elsner, A. (2009): Computergestützte Simulation und Analyse zufälliger dichter Kugelpackungen. Ph.D. thesis, Technische Universität Bergakademie Freiberg
- [58] Evans, A., Hutchinson, J., Ashby, M. (1999): Multifunctionality of cellular metal systems. *Prog. Mater. Sci.* 43, 171–221
- [59] Fallet, A. (2008): Structure et propriétés mécaniques d'empilements aléatoires de sphères creuses: caractérisation et modélisation. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble
- [60] Fallet, A., Lhuissier, P., Salvo, L., Martin, C., Wiegmann, A., Kabel, M. (2013): Multifunctional optimization of random hollow sphere stackings. *Scripta Materialia* 68, 35–38
- [61] Fedorov, F.I. (1968): *Theory of Elastic Waves in Crystals*. Plenum Press, New York
- [62] Fehr, J., Ronneberger, O., Schulz, J., Schmidt, T., Reisert, M., Burkhardt, H. (eds.) (2008): Invariance via groupintegration: A feature framework for 3D biomedical image analysis. *Proceedings of Computer Graphics and Imaging (CGIM)*, Innsbruck, Austria
- [63] Fiedler, T., c.A., J., G., Kuhn, G. (2005): Modelling the mechanical behaviour of adhesively bonded and sintered hollow-sphere structure. *Mech. Compos. Mater.* 41, 405–422
- [64] Fiedler, T., Öchsner, A. (2008): On the anisotropy of adhesively bonded metallic hollow sphere structures. *Scripta Materialia* 58, 695–698
- [65] Fiedler, T., Kim, H.S., Belova, I., Sloan, S., Murch, E., Öchsner, A. (2010): Elastic finite element analysis on cross-sections of random hollow sphere structures. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 41, 250–256
- [66] Fiedler, T., Löffler, R., Bernthaler, T., Winkler, R., Belova, I., Murch, G., Öchsner, A. (2009): Numerical analyses of the thermal conductivity of random hollow sphere structures. *Materials Letters* 63, 1125–1127

- [67] Fiedler, T., Veyhl, C., Belova, I., Bernthaler, T., Heine, B., Murch, G. (2013): Mechanical properties and micro-deformation of sintered metallic hollow sphere structure. *Computational Materials Science* 74, 143–147
- [68] Friedl, O., Motz, C., Färber, J., Stoiber, M., Pippan, R. (2005): Cellular Metals and Polymers 2004, Tension and Compression behaviour of stainless steel (316L) hollow sphere structures. Tech Publications, Zürich, 135–138
- [69] Gao, J., Kilfoil, M. (2004): Experimental determination of order in non-equilibrium solids using colloidal gels. *Journal of Physics: Condensed Matter* 16, S5191–S5202
- [70] Gao, Z.Y., Yu, T.X., Karagiozova, D. (2007): Finite element simulations on the mechanical properties of MHS materials. *Acta Mechanica Sinica* 23, 65–75
- [71] Gasser, S. (2003): Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble
- [72] Gasser, S., F.Paun, Bréchet, Y. (2004): Finite elements computation for the elastic properties of a regular stacking of hollow spheres. *Materials Science and Engineering A* 379, 240–244
- [73] Gasser, S., Paun, F., Cayzeele, A., Brechet, Y. (2003): Uniaxial tensile elastic properties of a regular stacking of brazed hollow spheres. *Scripta Materialia* 48, 1617–16223
- [74] Gibson, L.J. (2000): Mechanical behavior of metallic foams. *Annual Review of Materials Science* 30, 191–227
- [75] Gibson, L.J., Ashby, M.F. (1999): Cellular Solids: Structure and Properties. 2. ed., 1. paperback ed. with corr., transf. to digital repr. Cambridge University Press, Cambridge, Cambridge
- [76] Golovin, I., Sinning, H. (2003): Damping in some cellular metallic materials. *J. Alloy. Compd.* 355, 2–9
- [77] Golovin, I., Sinning, H. (2004): Internal friction and damping behaviour of metallic foams and some related structures. *Mat. Sci. Eng.* 370, 504–511
- [78] Gotoh, K., Finney, J.L. (1974): Statistical geometrical approach to random packing density of equal spheres. *Nature* 252, 202–205
- [79] Granta Material Intelligence. CES 2012 Edupack. Granta2012
- [80] Grenestedt, J.L. (1999): Effective elastic behavior of some models for perfect cellular solids. *International Journal of Solids and Structures* 36, 1471–1501
- [81] Gross, D. (2006): Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik. Springer
- [82] Hanssen, A., Hopperstad, O., Langseth, M., Ilstad, H. (2002): Validation of constitutive models applicable to aluminium foams. *International Journal of Mechanical Sciences* 44, 359–406
- [83] Hardy, P.W., Peisker, G.W. (1967). Method of producing a lightweight foam metal.

- [84] Hashin, Z., Shtrikman, S. (1963): A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 127–140
- [85] Haupt, P. (2002): *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Advanced texts in physics and astronomy online library, 2. ed. Springer, Berlin
- [86] Hausmann, J. (2003): *Modellierung und Optimierung faserverstärkter Titanlegierungen*. Ph.D. thesis, RWTH Aachen
- [87] Hübelt, J., Bingel, G. (2006): Excellent sound absorption by metal hollow sphere structures. *Cellmet News* 1, 1–2
- [88] Hübelt, J., Zeibig, A., Kostmann, C., Stephani, G. (2004): Parameter of metallic hollow spheres - A porous sound absorbing material. In: 18th International Congress on Acoustics, Kyoto, Japan
- [89] Heine, B., Andersson, K., Baur, H., Lempenauer, K. (2002): Porous Metallic Structures for Automotive Application - Overview and Perspectives. In: *Proceedings Materials Week 2002, the European Congress on Advanced Materials, their Processes and Application*
- [90] Hering, E., Martin, R., Stohrer, M. (2012): *Physik für Ingenieure*. 11., bearb. Aufl. Springer Berlin Heidelberg, Berlin
- [91] Hill, R. (1952): The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society. Section A* 65, 349–354
- [92] Hipke, T., Lange, G., Poss, R. (2007): *Taschenbuch für Aluminiumschäume*. Aluminium-Verlag, Düsseldorf
- [93] Hipke, T., Wunderlich, T. (2000): Chancen und Hemmnisse für Metallschaumeinsatz. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 31, 396–399
- [94] Hohe, J., Becker, W. (2003): Efective mechanical behavior of hyperelastic honeycombs and two-dimensional model foams at finite strain. *International Journal of Mechanical Sciences* 45, 891–913
- [95] Hohe, J., Beschorner, C., Becker, W. (1999): Efective elastic properties of hexagonal and quadrilateral grid structures. *Composite Structures* 46, 73–89
- [96] Hooke, R. (1665): *Micrographia*. Publication of the Royal Society, London
- [97] Illerhaus, I. (2001): Computertomographie, Bildverarbeitung und Auswertung von zellularen Metallen. *ZfP-Zeitung* 77, 39–41
- [98] Illian, J., Penttinen, A., Stoyan, H., Stoyan, D. (2008): *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*. Wiley-VCH Weinheim
- [99] Janousch, C., Winkler, R., Wiegmann, A., Pannert, W., Merkel, M., Öchsner, A. (2014): Simulation and experimental validation of acoustic properties of hollow sphere structures. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 45, 5, in Press
- [100] Jany, P., Thieleke, G., Sapper, E. (2006): *Thermodynamik für Ingenieure*. Springer, Wiesbaden

- [101] Jaouen, L. (2012). Acoustical Porous Material Recipes. <http://apmr.matelys.com/Parameters/AcousticalParameters.html>. [Online; Stand 20. Dezember 2012]
- [102] Jodrey, W., Tory, E. (1981): Computer simulation of isotropic, homogeneous, dense random packing of equal spheres. *Powder Technology* 30, 2, 111 – 118
- [103] Jodrey, W.S., Tory, E.M. (1985): Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Physical Review A* 32, 2347–2351
- [104] Johnson, D.L., Koplik, J., Dashen, R. (1987): Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics* 176, 379–402
- [105] Jullien, R., Jund, P., Caprion, D., Sadoc, J.F. (1999): Voronoi tessellation in model glass systems. *Foams and Emulsions* 354, 571–588
- [106] Jullien, R., Pavlovitch, A., Meakin, P. (1992): Random packings of spheres built with sequential models. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 25, 4103–4113
- [107] Kalender, W.A. (2006): Computertomographie : Grundlagen, Gerätetechnologie, Bildqualität, Anwendungen. Publicis Publishing, Erlangen
- [108] Kanaun, S., Tachkenko, O. (2007): Representative Volume Element and effective elastic properties of open cell foam materials with random microstructures. *Journal of Mechanics of Materials and Structure* 2, 8, 1607–1628
- [109] Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., Jeulin, D. (2003): Determination of the size of the representative volume element for random composites: Statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures* 40, 3647–3679
- [110] Kanouté, P., Boso, D., Chaboche, J., Schrefler, B. (2009): Multiscale Methods for Composites: A Review. *Archives of Computational Methods in Engineering* 16, 31–75
- [111] Kepler, J., Dunsch, L. (2005): Vom sechseckigen Schnee. Hellerau-Verlag, Leipzig
- [112] Khisaeva, Z.F., Ostoja-Starzewski, M. (2006): Mesoscale bounds in finite elasticity and thermoelasticity of random composites. *Proceedings of the Royal Society A* 462, 1167–1180
- [113] Kirchhoff, G. (1868): Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. *Annalen der Physik* 210, 177–193
- [114] Kollmann, F.G. (1999): Maschinenakustik: Grundlagen, Meßtechnik, Berechnung, Beeinflussung. Springer, Berlin
- [115] Komatsu, T. (2008): Improvement of the Denlay-Bazley and Miki models for fibrous sound-absorbing materials. *Acoustical Science and Technology* 29, 2, 121–129
- [116] Kovacs, B. (2007): Herstellung und Eigenschaften syntaktischer Metallschäume mit verschiedenen Matrix- und Füllmaterialien. Ph.D. thesis, Technische Universität Bergakademie Freiberg
- [117] Kugler, S., Varallyay, Z. (2001): Possible unusual atomic arrangements in the structure of amorphous silicon. *Philosophical Magazine Letters* 81, 569–574

- [118] Lafarge, D. (1993): Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique. Ph.D. thesis, Université du Maine (Frankreich)
- [119] Lafarge, D., Lemarinier, P., Allard, J.F., Tarnow, V. (1997): Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies. *Journal of the Acoustical Society of America* 102, 1995–2006
- [120] Lakes, R. (1986): Lakes. Experimental microelasticity of two porous solids. *International Journal of Solids and Structures*, 22, 55–63
- [121] Lakes, R. (1987): Foam structures with negative Poisson's ratio. *Science* 235, 1038–1040
- [122] Lakes, R. (1991): Experimental micro mechanics methods for conventional and negative Poisson's ratio cellular solids as Cosserat continua. *Journal of Engineering Materials and Technology* 113, 148–155
- [123] Larsson, F., Runesson, K., Saroukhani, S., Vafadari, R. (2011): Computational homogenization based on a weak format of micro-periodicity for RVE-problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200, 11–26
- [124] Laura, P., Gutierrez, R., Bhat, R. (1989): Transverse vibrations of a trapezoidal cantilever plate of variable thickness. *AIAA Journal* 27, 921–922
- [125] Lautensack, C. and Kabel, M. (2008): Modelling and simulation of acoustic absorption of open cell metal foams. In: *Cellular metals for structural and functional applications, CELLMET 2008 : Proceedings of the International Symposium on Cellular Metals for Structural and Functional Applications*
- [126] Ledbetter, H., Migliori, A. (2006): A general elastic-anisotropy measure. *Journal of Applied Physics* 100, 063516–1 – 063516–5
- [127] Ledbetter, H.M., Frederick, N.V., Austin, M.W. (1980): Elastic constant variability in stainless steel 304. *Journal of Applied Physics* 51, 305–309
- [128] Leeuwenhoeck, M., Graaf, R. (1673): A Specimen of some observations made by a microscope, contrived by M. Leeuwenhoeck in Holland, lately communicated by Dr. Regnerus de Graaf. *Philosophical Transactions of the Royal Society* 8, 6037–6038
- [129] Lefebvre, L.P., Banhart, J. and Dunand, D. (2008): Porous metals and metallic foams: current status and recent developments. *Advanced Engineering Materials* 10, 775–787
- [130] Leissa, A. (1973): The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* 28, 579–584
- [131] Leissa, A.W. (1969): *Vibration of Plates*. U.S. Government Printing Office, NASA SP-160, reprinted by the Acoustical Society of America (1993).
- [132] Liew, K.M. (1998): *Vibration of Mindlin Plates: Programming the p-Version Ritz Method*. Elsevier, Amsterdam
- [133] Lim, T.J., Smith, B., McDowell, D.L. (2002): Behavior of a random hollow sphere metal foam. *Acta Materialia* 50, 2867–2879

- [134] Lochmann, K. (2009): Dichteooptimierung und Strukturanalyse von Hartkugelpackungen. Ph.D. thesis, Technische Universität Bergakademie Freiberg
- [135] Lochmann, K., Anikeenko, A., Elsner, A., Medvedev, N., Stoyan, D. (2006): Statistical verification of crystallization in hard sphere packings under densification. *The European Journal of Physics B* 53, 67–76
- [136] Lopatnikov, S., Gama, B., Gillespie, J. (2007): Modeling the progressive collapse behaviour of metal foams. *Int. J. Impact Eng.* 34, 587–595
- [137] Lovett, D.R. (1989): Tensor properties of crystals. Hilger, Bristol [u.a.]
- [138] Lu, T., Chen, C. (1999): Thermal transport and fire retardance properties of cellular aluminium alloys. *Acta Mater.* 1999 47, 1469–1485
- [139] Lu, T.J., Chen, F., He, D. (2000): Sound absorption of cellular metals with semiopen cells. *Journal of the Acoustical Society of America* 108, 4, 1697–1709
- [140] Lubachevsky, B.D., Stillinger, F.H. (1990): Geometric properties of random disk packings. *Journal of Statistical Physics* 60, 561–583
- [141] Makarov, P., Schmauder, S., Cherepanov, O., Smolin, I., Romanova, V., Balokhonov, R., Saraev, D., Soppab, E., Kizler, P., Fischer, G., Hu, S., Ludwig, M. (2001): Simulation of elastic-plastic deformation and fracture of materials at micro-, meso- and macrolevels. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 37, 183–244
- [142] Marcadon, V., Feyel, F. (2009): Modelling of the compression behaviour of metallic hollow-sphere structures: About the influence of their architecture and their constitutive material's equations. *Computational Materials Science* 47, 599–610
- [143] Matheson, A.J. (1974): Computation of a random packing of hard spheres. *Journal of Physics C: Solid State Physics* 7, 2569–2576
- [144] Mehrabadi, M., Cowin, S. (1990): Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *The quarterly journal of Mechanics and Applied Mathematics* 43, 1, 15–41
- [145] Meyers, M.A., Chawla, K.K. (2009): *Mechanical Behaviour of Materials*. Cambridge University Press
- [146] Miki, Y. (1990): Acoustical properties of porous materials - Generalizations of empirical models. *Journal of the Acoustical Society of Japan (E)* 11, 1, 25–28
- [147] Miki, Y. (1990): Acoustical properties of porous materials - Modifications of Delany-Bazley models. *Journal of the Acoustical Society of Japan (E)* 11, 1, 19–24
- [148] Mizusawa, T. (1986): Natural frequencies of rectangular plates with free edges. *Journal of Sound and Vibration* 106, 451–459
- [149] Müller, W.H., Ferber, F. (2011): *Technische Mechanik für Ingenieure*. Hanser Verlag, Leipzig
- [150] Moosrainer, M. (2004): Abbildung periodischer Randbedingungen in ANSYS. *CADFEM Service Newsletter* 4, 7–10

- [151] Moscinskici, J., Bargiel, M., Rycerz, Z.A., Jacobs, P.W.M. (1989): The Force-Biased algorithm for the irregular close packing of equal hard spheres. *Molecular Simulation* 3, 4, 201–212
- [152] Möser, M. (2012): Technische Akustik. 9., aktualisierte Aufl. Springer Vieweg, Berlin
- [153] Musgrave, M.J.P. (1970): *Crystal Acoustics*. Holden-Day San Francisco
- [154] N., N. (1971): Metal foam. *News Composites* 2, 11
- [155] N., N. (2008): 1.4404 -Nichtrostender austenitischer Chrom-Nickel-Molybdän-Stahl mit niedrigen Kohlenstoffgehalt. Deutsche Edelstahlwerke
- [156] Neugebauer, R., T., H., J., H., R., T. (2005): Metal foam as a combination of lightweight engineering and damping. In: *Cellular Metals and Polymers* (eds Singer, R.F., Körner, C., Altstet, V., and Münsterd H.). Trans Tech Publications *Stafa-Zürich*, 13–18
- [157] Newnham, R.E. (2005): *Properties of Materials - Anisotropy, Symmetry, Structure*. Oxford University Press
- [158] Norm: (1961). DIN52212 Bauakustische Prüfungen - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades im Hallraum. Deutsches Institut für Normung,
- [159] Norm: (1963). DIN52215 Bauakustische Prüfungen - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz im Rohr. Deutsches Institut für Normung,
- [160] Norm: (2001). DIN EN ISO 10534-1:2001-10 Akustik - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz in Impedanzrohren - Teil 1: Verfahren mit Stehwellenverhältnis (ISO 10534-1:1996); Deutsche Fassung EN ISO 10534-1:2001. Deutsches Institut für Normung
- [161] Norm: (2003). DIN EN ISO 354:2003-12 Akustik - Messung der Schallabsorption in Hallräumen (ISO 354:2003); Deutsche Fassung EN ISO 354:2003. Deutsches Institut für Normung
- [162] Norm: (2007). DIN EN ISO 10534-2 Berichtigung 1:2007-11 Akustik - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz in Impedanzrohren - Teil 2: Verfahren mit Übertragungsfunktion (ISO 10534-2:1998); Deutsche Fassung EN ISO 10534-2:2001, Berichtigungen zu DIN EN ISO 10534.2:2001-10. Deutsches Institut für Normung
- [163] Onck, P.R., Andrews, E.W., Gibson, L.J. (2001): Size effect in ductile cellular solids. Part I: Modeling. *International Journal of Mechanical Sciences* 43, 681–699
- [164] Ostoja-Starzewski, M. (2007): *Microstructural Randomness and Scaling in Mechanics of Materials*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla.
- [165] Paek, J., Kang, B.H.and Kim, S., Hyun, J. (2000): Effective thermal conductivity and permeability of aluminum foam materials. *Int. J. Thermophys.* 21, 453–464
- [166] Pannert, W., Winkler, R., Merkel, M. (2009): On the acoustical properties of metallic hollow sphere structures (MHSS). *Materials Letters* 63, 1211–1124
- [167] Pasternak, E., Dyskin, A. (2012): Materials and structures with macroscopic negative Poisson's ratio. *International Journal of Engineering Science* 52, 103–114

- [168] Pasternak, E., Dyskin, A.V. (2008): Materials with Poisson's ratio near -1: Properties and possible realisations. In: XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics
- [169] Pride, S.R., Morgan, F.D., Gangi, A.F. (1993): Drag forces of porous-medium acoustics. *Physical Review B* 47, 9, 4964–4978
- [170] Reddy, J.N. (2004): *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2. ed. CRC Press, Boca Raton, Fla. [u.a.]
- [171] Reissner, E. (1945): The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 12, 69–77
- [172] Reissner, E. (1946): Stresses and small displacements of shallow spherical shells [I]. *Journal of Mathematics and Physics* 25, 80–85
- [173] Reissner, E. (1946): Stresses and small displacements of shallow spherical shells [II]. *Journal of Mathematics and Physics* 25, 279–300
- [174] Reissner, H.J. (1931): Theorie der Biegungsschwingungen frei aufliegender Rechteckplatten unter dem Einfluß beweglicher, zeitlich periodisch veränderlicher Belastungen. *Ingenieur-Archiv* 2, 668–673
- [175] Reuss, A. (1929): Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen aufgrund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 9, 49–58
- [176] Ripley, B.D. (1981): *Spatial Statistics*. John Wiley & Sons, New York
- [177] Ritz, W. (1909): Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. *Annalen der Physik* 333, 4, 737–786
- [178] Rose, J.L. (2004): *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge University Press, Cambridge
- [179] Rösler, J., Harders, H., Bäker, M. (2012): *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. Springer Vieweg, Wiesbaden
- [180] Rycroft, C.H. (2007): *Multiscale Modeling in Granular Flow*. Ph.D. thesis, University of Cambridge
- [181] Rycroft, C.H. (2009): VORO++: A three-dimensional Voronoi cell library in C++ . *Chaos* 19, 041111–1
- [182] Sabine, W.C. (1923): *Collected Papers on Acoustics*. Harvard University Press, Cambridge
- [183] Sanders, W., Gibson, L. (2003): Mechanics of BCC and FCC hollow-sphere foams. *Materials Science and Engineering A* 352, 150–161
- [184] Sanders, W.S. (2002): *Mechanical behavior of closed-cell hollow-sphere metallic foams*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology
- [185] Sanders, W.S., Gibson, L.J. (2003): Mechanics of hollow sphere foams. *Materials Science and Engineering A* 347, 70–85

- [186] Schmidt, R. (ed.) (2001): Berechnung elastischer Konstanten für inhomogene Bauteile mit periodische Struktur, 19. CADFEM Users' Meeting., Potsdam
- [187] Schröder, J. (2000): Homogenisierungsmethoden der nichtlinearen Kontinuumsmechanik unter Beachtung von Stabilitätsproblemen. Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I, Universität Stuttgart
- [188] Schulz, J., S.T., Ronneberger, O., Burkhardt, H., P.T., Dovzhenko, A., Palme, K. (2006): Fast scalar and vectorial grayscale based invariant features for 3D cell Nuclei localization and classification. Proceedings of DAGM Annual Pattern Recognition Symposium, Springer, Berlin, Heidelberg , 182–191
- [189] Schulz-Mirbach, H. (ed.) (1995): Invariant features for gray scale images. Proceedings of DAGM Annual Pattern Recognition Symposium, Bielefeld
- [190] Schwarzer, D. (2010): Stochastische und mehrskalige Modellierung der Strukturmechanik von Metallschäumen. Ph.D. thesis, Universität Karlsruhe
- [191] Scott, G.D., Kilgour, D.M. (1969): The density of random close packing of spheres. British Journal of Applied Physics 2, 863–866
- [192] Seppi, M. (2009): Numerical and analytical vibro-acoustic modeling of porous materials: The cell method for poroelasticity and the case of inclusions. Ph.D. thesis, Universität Bologna
- [193] Shen, H.S. (2009): Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells. CRC Press, London
- [194] Shufrin, I., Pasternak, E., Dyskin, A.V. (2012): Planar isotropic structures with negative Poisson's ratio. International Journal of Solids and Structures 49, 2239–2253
- [195] Silber, G., Steinwender, F. (2005): Bauteilberechnung und Optimierung mit der FEM: Materialtheorie, Anwendungen, Beispiele. Teubner, Stuttgart
- [196] Smit, R.J.M., Brekelmans, W.A.M., Meijer, H.E.H. (1998): Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 155, 181–183
- [197] Smith, W.O., Foote, P.D., Busang, P.F. (1929): Packing of homogeneous spheres. Physical Review 34, 1271–1274
- [198] Song, B.H., Stuart, J. (2000): A transfer-matrix approach for estimating the characteristic impedance and wave numbers of limp and rigid porous materials. Journal of the Acoustical Society of America 107, 3, 1131–1152
- [199] Stein, E., de Borst, R., Hughes, T.J.R. (2004): Encyclopedia of Computational Mechanics, Vol. 2: Solids and Structures. Wiley, Weinheim
- [200] Stienen, J. (1982): Die Vergrößerung von Karbiden in reinen Eisen-Kohlenstoff-Stählen. Ph.D. thesis, RWTH Aachen
- [201] Stinson, M.R. (1991): The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary crosssectional shape. Journal of the Acoustical Society of America 89, 550–558

- [202] Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke., J. (1995): Stochastic Geometry and Its Applications. John Wiley & Sons
- [203] Sulong, M.A., Öchsner, A. (2012): Prediction of the elastic properties of syntactic perforated hollow sphere structures. *Computational Materials Science* 53, 60–66
- [204] Szabo, I. (2001): Höhere technische Mechanik: Nach Vorlesungen. 6. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg [u.a.]
- [205] Terada, K., Horib, M., Kyoyac, T., Kikuchid, N. (2000): Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches. *International Journal of Solids and Structures* 37, 2285–2311
- [206] Timoshenko, S. (1921): On the correction of shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. *Philosophical Magazine* 41, 288–289
- [207] Torquato, S. (2002): Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties. Springer, Dordrecht, New York
- [208] Torquato, S., Truskett, T.M., Debenedetti, P.G. (2000): Is random close packing of spheres well defined? *Physical Review Letters* 84, 10, 2064–2067
- [209] Tory, E.M. (1990): Ocean Waves Mechanics, Computational Fluid Dynamics and Mathematical Modelling., A Stochastic Model for the Slow Sedimentation of Small Particles in a Viscous Fluid. *Computational Mechanics*, 671–685
- [210] Tory, E.M., Ford, R.A. (2004): Simulation of sedimentation of bidisperse suspensions. *International Journal of Mineral Processing* 73, 119–130
- [211] Truesdell, C., Noll, W. (2004): The Non-Linear Field Theories of Mechanics. 3. ed. Springer, Berlin
- [212] Vesenjak, M., Fiedler, T., Ren, Z., Öchsner, A. (2008): Behaviour of syntactic and partial hollow sphere structures under dynamic loading. *Advanced Engineering Materials* 10, 185–191
- [213] Veyhl, C. (2012): Numerical and Experimental Analysis of Cellular Materials. Ph.D. thesis, University of Newcastle, Australia
- [214] Veyhl, C., Winkler, R., Merkel, M., Öchsner, A. (2008): Structural characterisation of diffusion-bonded hollow sphere structures. *Defect and Diffusion Forum* 280-281, 105–112
- [215] Vischer, W.M., Bolsterli, M. (1972): Random packing of equal and unequal spheres in two and three dimensions. *Nature* 239, 502–507
- [216] Voigt, W. (1887): Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. *Annalen der Physik* 38, 573–587
- [217] Voigt, W. (1928): Lehrbuch der Kristallphysik. Teubner Leipzig
- [218] Von Kármán, T. (1910): Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*

- [219] Wadley, H.N.G. (2006): Multifunctional periodic cellular metals. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 364, 31–68
- [220] Wauer, J. (2008): *Kontinuumschwingungen: Vom einfachen Strukturmodell zum komplexen Mehrfeldsystem*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden
- [221] Williams, S.R., Philipse, A.P. (2003): Random packings of spheres and spherocylinders simulated by mechanical contraction. *Physical Review E* 67, 051301–1 – 051301–9
- [222] Winkler, R., Merkel, M., Öchsner, A. (2009): Experimental and numerical analyses of diffusion bonded hollow sphere structures. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 40, 133 – 138
- [223] Winkler, R., Merkel, M., Öchsner, A., Günter, W. (2008): On the vibration analysis of adhesively bonded hollow sphere structures. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 39, 139–142
- [224] Winkler, R., Pannert, W., Merkel, M., Öchsner, A. (2011): Structure borne sound in metallic hollow sphere structures. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 42, 365–369
- [225] Winkler, R., Schulz, J., Merkel, M., Öchsner, A. (2010): Materials with Complex Behaviour, Finite Element Vibration Analysis of MHSS Based on 3D Tomography Image Processing. *Springer*, 243–256
- [226] Yuan, X., Cormack, A.N. (2003): Si-O-Si bond angle and torsion angle distribution in vitreous silica and sodium silicate glasses. *Journal of Non-Crystalline Solids* 319, 31–43
- [227] Zener, C. (1948): *Elasticity and Anelasticity of Metals*. University of Chicago Press Chicago
- [228] Zwikker, C., Kosten, W. (1949): *Sound absorbing materials*. Elsevier Publishing Company Amsterdam

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name **Rolf Alfred Winkler**
Akad. Grad **Dipl.-Ing. (FH)**
Geburt **18.05.1983** in Aalen / Baden-Württemberg

Werdegang

09/1989 - 07/1993 **Grundschule**
Schwarzfeldschule, Dewangen

09/1993 - 07/1999 **Realschule**
Uhland Realschule Aalen, Mittlere Reife

09/1999 - 07/2002 **Gymnasium**
Technisches Gymnasium Aalen, Allgemeine Hochschulreife

10/2002 - 04/2007 **Studium des Maschinenbaus**
Hochschule Aalen, Dipl.-Ing. (FH)

02/2004 - 08/2004 **1. Praxissemester**
John Deere Werke Mannheim

09/2005 - 03/2006 **2. Praxissemester**
Andreas Stihl AG, Waiblingen

09/2006 - 03/2007 **Diplomarbeit**
Hochschule Aalen

05/2007 - 03/2014 **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**
Hochschule Aalen

seit 09/2009 **Externer Doktorand**
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

seit 04/2014 **Berechnungsingenieur**
Fa. Erhard, Heidenheim

Aalen, 18.02.2015

Rolf Winkler

Online-Shops



**Fachliteratur und mehr -
jetzt bequem online recher-
chieren & bestellen unter:
www.vdi-nachrichten.com/
Der-Shop-im-Ueberblick**



**Täglich aktualisiert:
Neuerscheinungen
VDI-Schriftenreihen**



Im Buchshop von vdi-nachrichten.com finden Ingenieure und Techniker ein speziell auf sie zugeschnittenes, umfassendes Literaturangebot.

Mit der komfortablen Schnellsuche werden Sie in den VDI-Schriftenreihen und im Verzeichnis lieferbarer Bücher unter 1.000.000 Titeln garantiert fündig.

Im Buchshop stehen für Sie bereit:

VDI-Berichte und die Reihe **Kunststofftechnik**:

Berichte nationaler und internationaler technischer Fachtagungen der VDI-Fachgliederungen

Fortschritt-Berichte VDI:

Dissertationen, Habilitationen und Forschungsberichte aus sämtlichen ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen

Newsletter „Neuerscheinungen“:

Kostenfreie Infos zu aktuellen Titeln der VDI-Schriftenreihen bequem per E-Mail

Autoren-Service:

Umfassende Betreuung bei der Veröffentlichung Ihrer Arbeit in der Reihe Fortschritt-Berichte VDI

Buch- und Medien-Service:

Beschaffung aller am Markt verfügbaren Zeitschriften, Zeitungen, Fortsetzungsreihen, Handbücher, Technische Regelwerke, elektronische Medien und vieles mehr – einzeln oder im Abo und mit weltweitem Lieferservice

Die Reihen der Fortschritt-Berichte VDI:

- 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
 - 2 Fertigungstechnik
 - 3 Verfahrenstechnik
 - 4 Bauingenieurwesen
- 5 Grund- und Werkstoffe/Kunststoffe
 - 6 Energietechnik
 - 7 Strömungstechnik
- 8 Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik
 - 9 Elektronik/Mikro- und Nanotechnik
 - 10 Informatik/Kommunikation
 - 11 Schwingungstechnik
- 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
 - 13 Fördertechnik/Logistik
- 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
 - 15 Umwelttechnik
 - 16 Technik und Wirtschaft
- 17 Biotechnik/Medizintechnik
- 18 Mechanik/Bruchmechanik
- 19 Wärmetechnik/Kältetechnik
- 20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE CAQ, CIM ...)
 - 21 Elektrotechnik
 - 22 Mensch-Maschine-Systeme
- 23 Technische Gebäudeausrüstung

ISBN 978-3-18-375905-7