Das Funktionszeichen. Zur Logik der Rede von Funktionen in Mathematik und Philosophie

Kai Büttner

Der Ausdruck ›Funktionszeichen‹ bezieht sich in allen geläufigen Deutungen nicht auf *ein* spezifisches Zeichen – etwa den Buchstaben ›f‹ –, sondern auf eine Zeichen*klasse*. Der Buchstabe ›f‹ stellt, wo er als Funktionszeichen gebraucht wird, einen Funktions*namen* dar; als solcher wird er stets durch einen anderen Ausdruck definiert, welcher eben darum ebenfalls ein Funktionszeichen darstellt.

Im Folgenden soll zunächst ein knapper Überblick über die Entwicklung derjenigen Kriterien gegeben werden, welche zur Identifizierung von Zeichen als Funktionszeichen vorgeschlagen wurden; angefangen von der Einführung der Rede von Funktionen in der Analysis bis hin zu Freges Konzeption ungesättigter Zeichen. Abschliessend soll das Verhältnis von Funktion und Funktionszeichen für den Fall mathematischer Funktionen diskutiert werden. Hierbei werde ich Freges *realistischer* Auffassung dieses Verhältnisses eine von Wittgenstein inspirierte, *nominalistische* Auffassung gegenüberstellen.

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - CC BY-NC-ND

Funktionszeichen als variable Rechenausdrücke

Am Beginn der Mathematik steht das Rechnen. Wir erlernen das Einmaleins, das auch historisch den Anfang der Mathematik bedeutet[1], indem uns erklärt wird, wie man von einem Rechenausdruck wie etwa ›2+3‹ zu einer Ziffer – in diesem Fall ›5‹ – übergeht. Der Ausdruck für einen solchen Übergang – zunächst vage formuliert durch Redeweisen wie ›2+3 ergibt 5‹ – wird bald standardisiert durch die Form der Gleichung: ›2+3=5‹. Auch die Frage nach dem Ergebnis von 2+3 lässt sich dann durch eine Gleichung formulieren; und zwar durch eine Gleichung mit einer Unbekannten – etwa ›2+3=y‹ –, die dadurch beantwortet wird, dass das ›y‹ durch den Ergebnisausdruck, ›5‹, *ersetzt* wird.

Auch eine Gleichung mit zwei Unbekannten wie x+3=y kann als eine Frage aufgefasst werden, die durch die Ersetzung von ›x‹ und ›y‹ durch ein Ziffern*paar* zu beantworten ist. Anders als im Fall einer Unbekannten wäre ein solche Antwort allerdings nicht eindeutig bestimmt: ›2‹ und ›5‹ wären ebenso geeignet wie z.B. ›1‹ und ›4‹. Etwas anders verhält es sich, wenn die Ersetzung nicht simultan, sondern sukzessiv vorzunehmen ist; wenn also zunächst ›x‹ und *dann* ›y‹ durch eine Ziffer zu ersetzten sind. In diesem Fall bestimmt die erste Ersetzung die zweite. Denn während ›x‹ nun durch eine beliebige Ziffer ersetzt werden kann – man bezeichnet ›x‹ daher in diesem Zusammenhang als ›Variable‹ –, ist immerhin die anschliessende Ersetzung von ›y‹ eindeutig bestimmt im Sinne einer Gleichung mit einer Unbekannten. Somit ergeben sich also für die sukzessive Ersetzung Konditionalregeln der folgenden Art:

(1) Wenn in ›x+3=y‹ ›x‹ durch ›2‹ ersetzt wird, dann ist im resultierenden Ausdruck ›y‹ durch ›5‹ zu ersetzen.

Der Schritt von der Algebra zur Analysis – also der Schritt von der Rechenlehre zur Funktionstheorie – wird nun dadurch vollzogen, dass die durch Sätze wie (1) metasprachlich formulierten Ersetzungsregeln durch Sätze der folgenden Form ausgedrückt werden:

(2) Der Wert der Funktion x+3 für das Argument 2 ist 5

Variable Rechenausdrücke wie ›x+3‹ werden nun gemäss (2) als Funk-

1 | Oskar Becker: Grundlagen der Mathematik, Frankfurt/Main 1975, S. 3ff.

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access -

tionszeichen bezeichnet und oftmals per Definition durch bestimmte Buchstaben abgekürzt; etwa indem bestimmt wird: $f(x):=x+3$. In der Folge fungiert der Buchstabe ›f‹ dort als Funktions*name,* wo allgemeine Rechenregeln – in funktionaler Rede – als Sätze über die Eigenschaften von Funktionen ausgedrückt werden. Etwa dann, wenn die Regel, dass $x_1+3<x_2+3$, wenn $x_1<x_2$, durch den Satz formuliert wird: ›f ist eine monoton wachsende Funktion‹.

Natürlich wurden im Verlauf der Entwicklung der Analysis nicht nur neue Redeweisen für bekannte Operationen eingeführt, sondern auch neue Operationen selbst; allen voran der Limes, der Differentialquotient und das Integral. Da sich nun einerseits auch mithilfe der diesen Operationen entsprechenden Symbole Ausdrücke bilden liessen, die Ersetzungsregeln im Sinn von (1) bestimmten, anderseits die Entwicklung entsprechender Operationen kaum jemals als abgeschlossen gelten kann, gelangte man schliesslich dazu, in der Bestimmung des Funktionsbegriffs von einem Bezug auf spezifische Operationen gänzlich abzusehen. Gemäss dieser auch heute noch gängigen Bestimmung gelten folglich nicht nur variable arithmetische Rechenausdrücke als Funktionszeichen; vielmehr ist ein Zeichen *beliebiger* Form, das eine Variable enthält, genau dann ein Funktionszeichen, wenn jede Ersetzung der Variable durch eine Ziffer genau eine andere Ziffer bestimmt. Funktionszeichen in diesem Sinn, so könnte man sagen, sind Ausdrücke, die eine Regel für den Übergang von einer Ziffer zu einer anderen kodifizieren.

Funktionszeichen als ungesättigte Ausdrücke

Obschon auch die zuletzt genannte Erweiterung des Funktionsbegriffs überaus interessante philosophische Fragen aufwirft, möchte ich, anstatt diese Fragen zu diskutieren, zur Darstellung einer weiteren Erweiterung des Funktionsbegriffs übergehen, welche philosophische Fragen nicht nur aufwirft, sondern deren Motivation zum Teil selbst philosophischer Natur ist. Diese Erweiterung geht auf Frege zurück.[2] Ausgehend von dem Grundsatz, dass jedes bedeutungsvolle Zeichen etwas bezeichne, lag es für Frege nahe, arithmetische Gleichungen als Identitätssätze aufzufassen. So wie der Satz ›Kolumbus ist der Entdecker Amerikas‹ behauptet, dass die Ausdrücke ›Kolumbus‹ und ›der Entdecker Amerikas‹ ein und dieselbe Person bezeichnen, so besage

2 | Gottlob Frege: »Funktion und Begriff«, in: M. Textor (Hg.), Funktion – Begriff – Bedeutung, Göttingen 2007.

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - [cc] BY-NC-ND

demnach die Gleichung ›2+3=5‹, dass der Rechenausdruck ›2+3‹ und die Ziffer ›5‹ ein und dieselbe Zahl *bezeichnen*.

Laut Frege besteht nun der *wesentliche* Unterschied zwischen Ziffern und Rechenausdrücken auf der einen Seite und Funktionszeichen wie ›x+3‹ auf der anderen darin, dass die ersteren eine Zahl jeweils tatsächlich bezeichnen, wohingegen ein Funktionszeichen eine Zahl stets nur unbestimmt andeutet. Damit meint Frege, dass ein Funktionszeichens wie ›x+3‹ erst nach – und in Abhängigkeit von – der Ersetzung der Variablen ›x‹ durch eine Ziffer eine bestimmte Zahl bezeichnet. Dieses Merkmal der Funktionszeichen, welches Frege deren Ungesättigtheit nennt, liesse sich am Beispiel wie folgt formulieren:

(3) Wenn in ›x+3‹ ›x‹ durch ›2‹ ersetzt wird, dann bezeichnet der resultierende Ausdruck die Zahl Fünf.

Der Zusammenhang zwischen Satz (3) und den Sätzen (1) und (2) stellt sich nun für Frege folgendermassen dar. Die durch Satz (3) ausgedrückte Bezeichnungsregel liegt nach Frege der durch Satz (1) ausgedrückten Ersetzungsregel in folgendem Sinn zu Grunde: Wenn ›x+3‹ zu ›2+3‹ umgeformt wird, dann ist ›y‹ in ›2+3=y‹ deshalb durch ›5‹ zu ersetzen, *weil* ›2+3‹ und ›5‹ dieselbe Zahl bezeichnen. – Ich werde auf diesen Punkt weiter unten zurückkommen. – Dagegen stehen Satz (2) und Satz (3) aus logischer Sicht auf einer Stufe: Was Satz (2) in funktionaler Rede ausdrückt, wird von Satz (3) lediglich anders, nämlich metasprachlich, formuliert. Insofern liefert Satz (3) so weit nur eine Erläuterung, jedoch noch keine Erweiterung der Rede von Funktionen.

Zu einer solchen Erweiterung kommt es erst, wenn Frege von der Betrachtung von Rechenausdrücken und Gleichungen zu derjenigen von Ungleichungen wie etwa 3<5 übergeht. Auch der Ausdruck einer Ungleichung kann natürlich aufgefasst werden als das Resultat einer Ersetzung von Variablen; im genannten Fall etwa als das Resultat der Ersetzung von ›x‹ durch ›3‹ in ›x<5‹. Und in Abhängigkeit von der jeweiligen Ersetzung der Variable, behauptet der resultierende Ausdruck entweder etwas Wahres oder etwas Falsches: etwas Wahres z.B., wenn ›x‹ durch ›3‹ ersetzt wird; etwas Falsches, wenn ›x‹ durch ›6‹ ersetzt wird. Gebraucht man nun, wie Frege vorschlägt, anstelle der Formulierung ›behauptet etwas Wahres‹ die Formulierung ›bezeichnet das Wahre‹, so ergeben sich auch für Ungleichungen Bezeichnungsregeln in Analogie zu Satz (3); etwa:

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - CC BY-NC-ND

(3.1) Wenn in ›x<5‹ ›x‹ durch ›3‹ ersetzt wird, dann bezeichnet der resultierende Ausdruck das Wahre.

Und indem Frege so den Wahrheitsbezug von ›3<5‹ als eine Form der Bezeichnung deutet, scheint nichts mehr dagegen zu sprechen, die Rede von Funktionen auch auf diesen Fall zu übertragen, so dass sich also sagen liesse:

(4) Der Wert der Funktion x<5 für das Argument 3 ist das Wahre.

Auch ein Ausdruck wie ›x<5‹ und überhaupt alle mathematischen Ausdrücke, die eine Variable enthalten, können in Freges Sinn als Funktionszeichen aufgefasst werden; d.h. als ungesättigte Ausdrücke, welche erst nach der Ersetzung ihrer Variablen etwas bezeichnen; sei es eine Zahl oder ein Wahrheitswert.

Frege weist nun darauf hin, dass ein Funktionszeichen wie ›x<5‹ logisch betrachtet ein Begriffswort darstellt, insofern man sagen könne, es stehe für den Begriff: Zahl, kleiner als die Zahl Fünf. Die Ungleichung ›3<5‹ stellt demnach einen Satz dar, der behauptet, die Zahl Drei sei kleiner als die Zahl Fünf. Und aus diesem Grund könnte man sagen, Satz (4) besage dasselbe wie der folgende:

(5) Die Zahl Drei fällt unter den Begriff: Zahl, kleiner als die Zahl Fünf.

Satz (4) drückt also die logische Grundbeziehung des Fallens eines Gegenstands unter einen Begriff in funktionaler Rede aus, nämlich dadurch, dass das Wahre der Wert einer Funktion für ein Argument ist. Und Frege ist der Ansicht, dass es sich hierbei um einen ganz allgemeinen Zusammenhang handle: Begriffe, ganz egal welcher Art, sind Funktionen, deren Werte stets Wahrheitswerte sind. Und da somit alle Begriffswörter überhaupt Funktionszeichen sind, sind letztere nicht nur in der Sprache der Mathematik, sondern in allen Bereichen der Sprache zu finden. Auch ein Satz der Alltagssprache wie ›Sokrates ist sterblich‹ kann demnach aufgefasst werden als das Resultat der Ersetzung des Eigennamens ›Sokrates‹ für die Variable ›x‹ im Funktionszeichen ›x ist sterblich‹; und dass Sokrates unter den Begriff der Sterblichkeit fällt, bedeutet, dass, wie man sagen könnte, der Wert der Sterblichkeitsfunktion für das Argument Sokrates das Wahre ist.

Frege zeigt damit, dass die Abhängigkeit der Wahrheit eines Satzes von seiner sprachlichen Zusammensetzung funktionaler Art ist und

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - CC BY-NC-ND

dass, dem gemäss, für eventuelle Abkürzungen von Begriffswörtern Funktionsnamen wie ›f(x)‹ zu gebrauchen sind. Und die Tatsache, dass sowohl Logiker als auch sprachanalytische Philosophen an jener Abhängigkeit interessiert sind, erklärt die Prominenz von Funktionsnamen und entsprechenden, mathematisch anmutenden Formeln in deren Werken.

Funktionszeichen und Funktion

Neben den soeben dargestellten Erweiterungen des Funktionsbegriffs beschäftigte sich Frege ebenfalls mit dem Verhältnis zwischen Funktionszeichen und Funktion sowie der damit verbundenen philosophischen Frage danach, was Funktionen sind.[3] Die bis dato gegebenen Antworten auf diese Frage – welche sich allerdings nur auf mathematische Funktionen bezogen –, schienen ihm jedoch nicht zufriedenstellend. Die nominalistische Antwort, welche Funktionen mit ihrem Ausdruck – also mit dem Funktionszeichen – identifiziert, hebt sich nach Freges schon oben genanntem Grundsatz selbst auf: denn wenn Funktionszeichen überhaupt eine Bedeutung haben – wovon ja auch der Nominalist ausgeht –, dann muss es laut Frege auch etwas geben, das sie bezeichnen. Die gängige realistische Erklärung, wonach Funktionen veränderliche Zahlen seien, schien aus einem anderen Grund inadäquat: Abgesehen davon, dass Zahlen, wie Frege bemerkt, ihrem Wesen nach unveränderlich sind, werden sie von Funktionszeichen ja gerade *nicht* bezeichnet, sondern lediglich unbestimmt angedeutet. Da Frege aufgrund seines Grundsatzes eine realistische Position – also eine, die zwischen dem Funktionszeichen und der Funktion unterscheidet – dennoch unumgänglich erschien, erklärte er Funktionen durch Bezug auf ihren Ausdruck. Demnach sind Funktionen das, was Funktionszeichen bezeichnen; und der Ungesättigtheit des Funktionszeichens entspricht eine Ungesättigtheit der Funktion selbst.

Um in dieser Debatte Klarheit zu gewinnen, ist es nun wichtig zu sehen, was an Freges eigener Erklärung die nominalistische Antwort nicht lediglich negiert, sondern aufgrund beiderseits geteilter Voraussetzungen gegen sie spricht. Dies ist weder die von Freges Erklärung implizierte ontologische These, wonach es neben den Funktionszeichen auch die Funktionen selbst gibt, noch die metaphysische These,

3 | G. Frege: »Was ist eine Funktion?«, in: M. Textor (Hg.), Funktion – Begriff – Bedeutung, Göttingen 2007.

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - CC BY-NC-ND

dass diese Funktionen ebenfalls in irgendeinem Sinn ungesättigt sind. Freges eigentlicher Punkt ist die grundlegendere logisch-semantische These, dass Funktionszeichen etwas bezeichnen; und sein eigentliches Argument, dass sie anderenfalls keine Bedeutung hätten. Was es daher für eine Bewertung von Freges Argumentation zu klären gilt, ist die Verbindung zwischen dem Begriff des *Bezeichnens* und demjenigen der *Bedeutung*.

Eine solche Klärung findet sich bei Wittgenstein.[4] Nach Wittgenstein ist die Bedeutung eines Ausdrucks das, was die Erklärung seiner Bedeutung erklärt; und insofern wir die Bedeutung eines Ausdrucks erklären, indem wir erklären, *wie* er zu verwenden ist, kann man sagen: Die Bedeutung eines Ausdrucks besteht in der Art und Weise seines Gebrauchs. Nun wird der Gebrauch mancher Ausdrücke dadurch erklärt, dass man auf einen Gegenstand zeigt. Und in diesem Fall kann man sagen, dass der fragliche Ausdruck *bezeichnend* gebraucht werde und dass dasjenige, worauf gezeigt wird, das sei, was der Ausdruck bezeichnet. Aber im Gegensatz zu Freges Grundsatz, ist es gemäss dieser Auffassung dafür, dass ein Ausdruck eine Bedeutung hat, zunächst nur wesentlich, dass sein Gebrauch erklärt ist, nicht notwendigerweise, dass der Ausdruck etwas bezeichnet. Demnach sollte in unserem Fall die erste Frage auch nicht lauten, ob es etwas gibt, das Funktionszeichen bezeichnen – oder ob es nichts dergleichen gibt –, sondern: Werden Funktionszeichen bezeichnend gebraucht, oder werden sie in anderer *Weise* gebraucht? Und die Antwort auf diese Frage ist durch die Reflexion darauf zu finden, wie der Gebrauch von Funktionszeichen erklärt wird.

Ich werde mich im Folgenden zu zeigen bemühen, dass mathematische Funktionszeichen nicht bezeichnend gebraucht werden. Meine Ausführungen hierzu sind wesentlich inspiriert durch Überlegungen Wittgensteins.

Die Bedeutung mathematischer Funktionszeichen

Mathematische Funktionszeichen werden im Wesentlichen so erklärt und gebraucht, wie zu Beginn dieses Aufsatzes dargestellt; d.h.: Sie werden *verbal* definiert durch Operationszeichen, Ziffern und Variablen; und sie werden *rechnerisch* gebraucht zum Übergang von einer Ziffer zu einer anderen. Dabei gestaltet sich dieser Übergang

4 | Ludwig Wittgenstein: Philosophische Untersuchungen, Frankfurt/Main 1984. Insbesondere § 560 und § 370.

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - CC BY-NC-ND

wie gesehen derart, dass zunächst die Variable durch eine Ziffer ersetzt wird, bevor dann die gesuchte Ziffer dadurch berechnet wird, dass im resultierenden Rechenausdruck die Operationszeichen sukzessive eliminiert werden. Die Regeln, nach denen Operationszeichen eliminiert werden, werden ihrerseits durch die Erklärungen der Operationszeichen gegeben. Dabei können die zentralen arithmetischen Operationen aufbauend auf der elementaren Nachfolgeroperation erklärt werden: So erklärt man etwa die Potenzierung zum Exponenten *n* durch *n*-fache Multiplikation der Basis, so dass also das Potenzzeichen in Rechenausdrücken durch eine Ersetzung von entsprechenden Multiplikationszeichen eliminiert werden kann. Ebenso erklärt man die Multiplikation mit dem Faktor *m* durch *m*-fache Addition und, in einem letzten Schritt, die Addition mit dem Summanden *k* als die *k*-fache Anwendung der elementaren Nachfolgeroperation ›+1‹. Daher, so scheint mir, könnte man von mathematischen Funktionszeichen nur dann – und auch dann nur in einem abgeleiteten Sinn – sagen, sie würden bezeichnend gebraucht, wenn das Symbol der Nachfolgeroperation bezeichnend gebraucht würde. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt sich nun aber, wenn wir zuletzt darüber reflektieren, wie der Gebrauch des Symbols ›+1‹ erklärt wird. Denn dies geschieht nicht dadurch, dass in *irgendeinem* Sinn auf etwas gezeigt würde, das dieses Zeichen bezeichnet. – Und auch nicht dadurch, dass auf ein noch primitiveres Operationssymbol zurückgegriffen würde, bei dem sich die Frage nach etwas Bezeichnetem neuerlich stellte. – Vielmehr erklären wir die Nachfolgeroperation durch Rückgriff auf das Zählen: Wir erklären zunächst die Bildung der Grundzahlreihe ›1,2,3,...‹, indem wir erklären, wie man im entsprechenden Ziffernsystem von einer Ziffer zur nächsten übergeht. Dann erklären wir, wie man die einzelnen Übergänge mittels des Symbols ›+1‹ formuliert, indem wir erklären, wie man die Reihennotation, etwa ›...,4,5,...‹, in arithmetische Ausdrücke wie ›4+1 ergibt 5‹ oder ›4+1=5‹ überträgt. Man könnte also sagen, dass das Nachfolgersymbol die Technik des Zählens arithmetisch kodifiziere: es gibt ihr eine neue sprachliche Form.

Es war daher zwar korrekt von Frege, Funktionen durch Bezug auf ihren Ausdruck erklären zu wollen; aber dies eben darum, weil es in diesem Fall kein Bezeichnetes neben dem Zeichen gibt. Denn wir haben nicht: hier das Funktionszeichen, da die Funktion; und erklären dann die Bedeutung des Ersteren, indem wir auf Letzteres zeigen. Und es war ebenfalls korrekt, die Funktionszeichen anderen Zeichen – insbesondere den Ziffern und Rechenausdrücken – gegenüberzustellen. Doch, um es zu wiederholen: Die Funktionszeichen zeichnen sich gegenüber diesen anderen Zeichen nicht dadurch aus,

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - cc BY-NC-ND

dass sie zur Bezeichnung anderer Dinge – oder Dingen anderer Art – gebraucht werden, sondern dadurch, dass sie als Ersetzungsregeln im Sinn von (1) gebraucht werden.

Wie die Betrachtung der Erklärung der Nachfolgeroperation zeigt, gilt Analoges nun aber auch für den mathematischen Gebrauch von Ziffern. Auch Ziffern zeichnen sich gegenüber anderen Zeichen nicht durch das aus, was sie bezeichnen; denn auch sie werden nicht bezeichnend gebraucht. Wir erwerben das Ziffernsystem, um mit Ziffern zu rechnen, nicht, um mit ihnen mathematische Gegenstände zu bezeichnen. Und dieser rechnerische Gebrauch von Ziffern innerhalb arithmetischer Gleichungen wird wie gesehen letztlich durch das Zählen erklärt und nicht durch Hinweis auf etwas, das die Ziffern vermeintlich bezeichnen. Denn dass z.B. ›4+1=5‹ wahr ist, kann zwar ebenso gut dadurch ausgedrückt werden, dass man sagt: ›4+1‹ und ›5‹ bezeichnen dieselbe Zahl; aber die Geltung *beider* Sätze beruht darauf, dass wir *so* zählen: ›…,4,5,…‹. Die Gleichungen der Arithmetik sind keine Behauptungen über den Bezug arithmetischer Zeichen, sondern Formulierungen von Umformungsregeln für arithmetische Zeichen.

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - (cc) BY-NC-ND

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - CC BY-NC-ND

https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access - [cc] BY-NC-ND https://doi.org/10.14361/9783839409886-017 - am 14.02.2026, 09:39:44. https://www.inlibra.com/de/agb - Open Access -