

## Reihe 8

Mess-,  
Steuerungs- und  
Regelungstechnik

Nr. 1250

Dipl.-Ing. Jan Strubel,  
Darmstadt

## Synchronisierung agenten- basierter dynamischer Systeme mittels struktur- beschränkter Regelungen

Berichte aus dem

Institut für  
Automatisierungstechnik  
und Mechatronik  
der TU Darmstadt





# Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme mittels strukturbeschränkter Regelungen

Vom Fachbereich  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

**Dipl.-Ing. Jan Strubel**  
geboren am 20. Januar 1984 in Worms

Referent: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Uwe Klingauf

Tag der Einreichung: 19. Oktober 2015

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Januar 2016



D 17

Darmstädter Dissertationen



# Fortschritt-Berichte VDI

## Reihe 8

Mess-, Steuerungs-  
und Regelungstechnik

Dipl.-Ing. Jan Strubel,  
Darmstadt

## Nr. 1250

# Synchronisierung agenten- basierter dynamischer Systeme mittels struktur- beschränkter Regelungen

Berichte aus dem

Institut für  
Automatisierungstechnik  
und Mechatronik  
der TU Darmstadt



Strubel, Jan

## **Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme mittels strukturbeschränkter Regelungen**

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 1250. Düsseldorf: VDI Verlag 2016.

180 Seiten, 22 Bilder, 6 Tabellen.

ISBN 978-3-18-525008-8, ISSN 0178-9546,

€ 67,00/VDI-Mitgliederpreis € 60,30.

**Für die Dokumentation:** Agentenbasierte Systeme – Multi-Agenten Systeme (MAS) – Heterogene Systeme – Synchronisierung – Synchronisierung mittels Relativinformation – Entwurf von Ausgangsrückführungen – Entkopplung – Verkopplung – Strukturbeschränkung – Parametrische Eigenstrukturvorgabe

Autonome und nicht physikalisch gekoppelte dynamische Systeme, die über ein Netzwerk miteinander kommunizieren, sind in der regelungstechnischen Literatur als agentenbasierte Systeme beziehungsweise Multi-Agenten Systeme bekannt. Die vorliegende Arbeit behandelt die Synchronisierung dieser Systemklasse auf Grundlage strukturbeschränkter Regelungen. Ausgehend von parametrischen und teilparametrischen Methoden zum Entwurf von Ausgangsrückführungen lassen sich die verteilten Regler der Agenten basierend auf unterlagerten Entkopplungs- und Verkopplungsregelungen herleiten. Zudem wird ein dezentrales Regelungsverfahren entwickelt, welches die Synchronisierung des Gesamtsystems ausschließlich basierend auf Relativinformation ermöglicht. Ein adaptives Regelungsverfahren ermöglicht darüber hinaus die Synchronisierung einer speziellen Systemklasse nichtlinearer Agenten. Alle Methoden werden abschließend an Entwurfsbeispielen dargestellt und bewertet.

### **Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

### **Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek**

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie

(German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at

<http://dnb.ddb.de>.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Entwurf strukturbeschränkter Regelungen zur Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme. Sie entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt.

Ich möchte dieses Vorwort nutzen, um allen zu danken, die zum Gelingen der vorliegenden Arbeit beigetragen haben. Im besonderen Maße gilt mein Dank meinem Doktorvater und Fachgebietsleiter Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski, der mir die Promotion ermöglichte und mir alle Freiheiten bei der Ausrichtung meines Themas einräumte. In stets sehr guter Erinnerung werden mir die zahlreichen und intensiven fachlichen Diskussionen bleiben, die in entscheidendem Maße die Ergebnisse dieser Arbeit ermöglicht haben. Außerdem danke ich Prof. Dr.-Ing. Uwe Klingauf für die freundliche Übernahme des Korreferats, die hilfreichen Anmerkungen zu meiner Arbeit und die stets angenehme Zusammenarbeit während meiner Tätigkeit als Koordinator des Studienbereichs Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt.

Gleich zu Beginn meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter habe ich die ausgezeichnete Atmosphäre am Fachgebiet schätzen gelernt. Dies ist nicht zuletzt auf die vorbildliche Unterstützung und Organisation des Sekretariats zurückzuführen, weshalb mein besonderer Dank in diesem Zusammenhang Brigitte Hoppe und Corina Fischer gilt. An dieser Stelle danke ich allen Kollegen für die schöne Zeit am Institut, den fachlichen Austausch und die angenehme Zusammenarbeit. Hervorheben möchte ich an dieser Stelle meine ehemaligen Kollegen Dr.-Ing. Daniel Labisch, Lukas Stein und Andreas Horn, mit denen ich nicht nur ausgezeichnete fachliche Diskussionen führte, sondern denen ich auch zukünftig freundschaftlich verbunden bleiben werde.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank meiner Familie. Meinen Eltern und Großeltern, auf deren Unterstützung ich jederzeit zählen kann, meiner Tante und meinem Onkel in Oregon, die mit Begeisterung meinen wissenschaftlichen Werdegang verfolgten sowie unterstützen und natürlich meiner Frau Melanie für ihre liebevolle Art, ihr Verständnis sowie ihren Rückhalt insbesondere während des herausfordernden Schreibprozesses der Arbeit.

Darmstadt, im Januar 2016

*Jan Strubel*

*Dr.-Ing. Karl-Josef Junglas (Kalle) – in stillem Gedenken gewidmet*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>III</b>
<b>Symbole und Abkürzungen</b>	<b>VIII</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>XII</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Einleitung . . . . .	1
1.2 Literaturübersicht . . . . .	3
1.2.1 Lineare homogene Multi-Agenten Systeme . . . . .	4
1.2.2 Lineare heterogene Multi-Agenten Systeme . . . . .	6
1.2.3 Nichtlineare Multi-Agenten Systeme . . . . .	8
1.3 Struktur der Arbeit . . . . .	9
<b>2 Agentenbasierte dynamische Systeme</b>	<b>11</b>
2.1 Präzisierung des Agentenbegriffs . . . . .	11
2.2 Graphentheoretische Grundlagen . . . . .	12
2.3 Agenten und Multi-Agenten Systeme . . . . .	15
2.3.1 Homogene Agenten und Multi-Agenten Systeme . . . . .	15
2.3.2 Heterogene Agenten und Multi-Agenten Systeme . . . . .	18
2.3.3 Synchronisierung . . . . .	21
2.4 Problemstellung und Beiträge der Arbeit . . . . .	22
<b>3 Entwurf strukturbeschränkter Rückführungen</b>	<b>23</b>
3.1 Parametrisches Entwurfsverfahren für statische Ausgangsrückführungen . . . . .	23
3.1.1 Vorgabe von Eigenwerten und Rechtseigenvektoren . . . . .	25
3.1.2 Vorgabe von Eigenwerten und Linkseigenvektoren . . . . .	27
3.1.3 Berechnung der Rückführmatrix . . . . .	29
3.1.4 Dynamische Ausgangsrückführung . . . . .	32
3.1.5 Vorgabe komplexer und mehrfacher Eigenwerte . . . . .	33
3.2 Beeinflussung des Stör- und Führungsverhaltens . . . . .	36
3.2.1 Robuste Eigenwertvorgabe . . . . .	36
3.2.2 Entwurf einer Entkopplungsregelung . . . . .	45
3.2.3 Entwurf einer Verkopplungsregelung . . . . .	50
3.3 Teilparametrisches Entwurfsverfahren . . . . .	55
3.3.1 Vorgabe von Eigenwertbereichen . . . . .	56
3.3.2 Lösung unbeschränkter Min-Max Optimierungsprobleme . . . . .	58
3.3.3 Robuste Entkopplungsregelung . . . . .	60
3.4 Entwurfsbeispiel . . . . .	63
3.5 Kurzzusammenfassung . . . . .	65

<b>4</b>	<b>Synchronisierung basierend auf Absolut- und Relativinformation</b>	<b>66</b>
4.1	Synchronisierung homogener Agenten . . . . .	67
4.1.1	Vorüberlegungen und Synchronisierungsbedingungen . . . . .	67
4.1.2	Synchronisierung durch LQR-Entwurf . . . . .	69
4.1.3	Synchronisierung durch Vorgabe von Eigenwertbereichen . . . . .	71
4.2	Synchronisierung heterogener Agenten . . . . .	74
4.2.1	Vorüberlegungen zur Synchronisierung heterogener Agenten . . . . .	74
4.2.2	Synchronisierung durch Entkopplung . . . . .	76
4.2.3	Synchronisierung durch Verkopplung . . . . .	83
4.2.4	Abschließende Bemerkungen zur synchronen Zeitlösung . . . . .	88
4.3	Synchronisierung nichtlinearer Agenten mit Vektorrelativgrad eins . . . . .	90
4.3.1	Vorüberlegungen zur betrachteten Systemklasse . . . . .	90
4.3.2	Passivitätsbasierte Synchronisierung . . . . .	92
4.3.3	Struktur des adaptiven Reglers . . . . .	94
4.3.4	Ausgangssynchronisierung . . . . .	97
4.4	Entwurfsbeispiel . . . . .	100
4.5	Kurzzusammenfassung . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Synchronisierung ausschließlich basierend auf Relativinformation</b>	<b>103</b>
5.1	Vorüberlegungen zur Regelungsstruktur . . . . .	104
5.2	Synchronisierungsbedingungen . . . . .	106
5.3	Konstruktive Bestimmung der Reglerparameter . . . . .	112
5.4	Hinzunahme weiterer Gütekriterien . . . . .	114
5.5	Entwurfsbeispiel . . . . .	116
5.6	Kurzzusammenfassung . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Entwurfsbeispiele</b>	<b>120</b>
6.1	Entkopplungsregelung einer xy-Positioniereinheit . . . . .	120
6.2	Entkopplungs- und Verkopplungsbasierte Synchronisierung von Helikoptern . . . . .	128
6.3	Dezentrale Synchronisierung einer autonomen Fahrzeugkolonne . . . . .	136
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung der Arbeit</b>	<b>142</b>
<b>A</b>	<b>Beweise</b>	<b>144</b>
A.1	Beweis von Satz 3.9 . . . . .	144
A.2	Beweis von Satz 3.14 . . . . .	147
<b>B</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>148</b>
B.1	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	148
B.2	Matrix Analysis . . . . .	148
B.3	Kronecker Produkt . . . . .	149
B.4	Rechnen mit Differentialen . . . . .	150
<b>C</b>	<b>Eigenschaften linearer Zustandssysteme</b>	<b>153</b>



# Symbole und Abkürzungen

## Vektoren, Matrizen, Eigenwerte, Skalare

$A$ ,	Systemmatrix
$\tilde{A}$ , $\tilde{A}$	Systemmatrix in neuen Koordinaten
$A_d$ ,	Systemmatrix eines dynamischen Reglers
$A_K$	$:= A + BKC$
$A_{\text{SNF}}$	Systemmatrix in Steuerungsnormalform
$A_{\mathcal{G}}$	Adjazenzmatrix eines Graphen $\mathcal{G}$
$B$	Eingangsmatrix
$\tilde{B}$ , $\tilde{B}$	Eingangsmatrix in neuen Koordinaten
$B_d$ ,	Eingangsmatrix eines dynamischen Reglers
$b_{\text{SNF}}$	Eingangsmatrix in Steuerungsnormalform
$C$	Ausgangsmatrix
$\tilde{C}$ , $\tilde{C}$	Ausgangsmatrix in neuen Koordinaten
$C_d$ ,	Ausgangsmatrix eines dynamischen Reglers
$c_{\text{SNF}}^T$	Ausgangsmatrix in Steuerungsnormalform
$C_v$	Ausgangsmatrix der Verkopplungsbedingungen
$C_w$	Ausgangsmatrix der Führungsgrößen
$\mathcal{C}$	Steuerbarkeitsmatrix nach Kalman, vgl. (C.2)
$D$	Durchgriffsmatrix
$D_d$	Durchgriffsmatrix eines dynamischen Reglers
$D_{\text{in}}$	Gradmatrix eines Graphen $\mathcal{G}$
$e_i$	Koordinateneinheitsvektor
$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$	Kanten eines Graphes $\mathcal{G}$
$f(\cdot)$	Vektorfeld
$F$	Vorfiltermatrix
$g_i(\cdot)$	Eingangsvektorfeld
$\mathcal{G}$	Graph
$G(\lambda)$	Übertragungsmatrix an der Stelle $\lambda$
$h(\cdot)$	Ausgangsabbildung
$I$	Einheitsmatrix
$I_n$	Einheitsmatrix der Dimension $n$
$J$	Matrix in Jordan Normalform
$J(\cdot)$	Gütefunktion
$K$	Ausgangsrückführmatrix
$K_{(\cdot)}$	Kommutierungsmatrix, vgl. Abschnitt B.2
$L_{\mathcal{G}}$	Laplace Matrix eines Graphen $\mathcal{G}$
$M_{wi}$	Aufteilung der Nullraumbasis gemäß (3.9)
$M_{vi}$	Aufteilung der Nullraumbasis gemäß (3.4)

$N_{wi}$	Aufteilung der Nullraumbasis gemäß (3.9)
$N_{vi}$	Aufteilung der Nullraumbasis gemäß (3.4)
$P_R(\lambda)$	Rosenbrock'sche Systemmatrix
$p_{vi}$ bzw. $p_{wi}$	Steuer- bzw. Messmodus
$q_{vi}$ bzw. $q_{wi}$	Parametervektor zu Rechts- bzw. Linkseigenvektoren
$Q_r$ bzw. $Q_s$	Matrix der $r$ Steuermoden bzw. $s$ Messmoden
$R$	Zustandsrückführmatrix
$S_{Bi}$	Vgl. (3.3)
$S_{Ci}$	Vgl. (3.8)
$t_0$	Anfangszeitpunkt
$T_{\perp}$	Matrix mit orthogonalen Spaltenvektoren
$T_v$	Ausgangsgrößentransformation zur Verkopplung
$u$	Vektor der Eingangsgrößen
$v_i$	Rechtseigenvektor
$v$	Kommunizierte Variable
$V$	Rechtseigenvektormatrix
$\mathcal{V}_G$	Knoten eines Graphs $\mathcal{G}$
$V_r$	Rechtseigenvektormatrix der ersten $r$ Rechtseigenvektoren
$w_i$	Linkseigenvektor
$w$	Führungsgröße
$W$	Linkseigenvektormatrix
$x$	Zustandsvektor
$x_d$	Zustandsvektor eines dynamischen Reglers
$y$	Vektor der Ausgangsgrößen
$y_s$	Ausgang zur synchronen Zeitlösung
$y_v$	Verkopplungsausgang
$y_w$	Vektor der Führungsgrößen
$\delta$	Differenzordnung
$\delta_v$	Dimension des größten invarianten Unterraums im Kern von $C_v$
$\xi$	Optimierungsvariablen
$\zeta$	Parameter
$\Pi, \Gamma$	Lösung der Matrixgleichung (4.22)
$\lambda_i$	Eigenwert
$\Lambda$	Diagonalmatrix, Elemente sind die Eigenwerte $\lambda_i$
$1_N$	Eins-Vektor der Dimension $N$

## Indizes

$e$	erweitertes System
$i, j, k, l$	Zählindizes
$K$	Ausgangsrückführung
$R$	Zustandsrückführung
$re$	reelle Darstellung
$S$	Synchronisierung

## Dimensionen

$m$	Anzahl der Eingangsgrößen
$n$	Anzahl der Zustandsvariablen
$n_d$	Ordnung eines dynamischen Reglers
$N$	Anzahl der Agenten in einem Multi-Agenten System
$p$	Anzahl der Ausgangsgrößen

## Funktionen, Operatoren

$\text{bild}(\cdot)$	Bild einer linearen Abbildung
$d(\cdot)$	Differential
$\text{diag}(\cdot)$	(Block-)diagonalmatrix
$\text{dim}(\cdot)$	Dimension
$\text{Im}(\cdot)$	Imaginärteil einer komplexen Zahl/Matrix
$\text{kern}(\cdot)$	Kern einer linearen Abbildung
$L_{(\cdot)}(\cdot)$	Lie-Ableitung
$\max(\cdot)$	Maximumsfunktion
$\min(\cdot)$	Minimumsfunktion
$\text{rang}(\cdot)$	Rang einer Matrix
$\text{Re}(\cdot)$	Realteil einer komplexen Zahl/Matrix
$\text{sign}(\cdot)$	Signumfunktion
$\text{span}(\cdot)$	Raum, der von Vektoren aufgespannt wird
$\text{spur}(\cdot)$	Spur-Operator
$\text{vec}(\cdot)$	Vektorisierungsoperator, vgl. (B.4)
$\kappa(\cdot)$	$:= \ \cdot\  \ \cdot\ ^{-1}$ , Konditionszahl einer Matrix
$\kappa_F(\cdot)$	Konditionszahl einer Matrix bezüglich der Frobeniusnorm
$\sigma(\cdot)$	Spektrum, Menge der Eigenwerte einer Matrix
$\tilde{P}_N$	Blockdiagonalmatrix $:= \text{diag}(P_1, \dots, P_N)$
$(\dot{\cdot})$	Zeitableitung
$(\cdot)^{-1}$	Inverse Matrix
$(\cdot)^+$	Pseudoinverse einer Matrix

$(\cdot)^T$	Transponiert
$(\cdot)^{-T}$	$:= \left((\cdot)^{-1}\right)^T$ , inverse und transponierte Matrix
$(\cdot)^*$	Transponiert, konjugiert komplex
$(\cdot)^H$	Hermesch
$(\cdot) \otimes (\cdot)$	Kronecker Produkt
$\nabla(\cdot)$	Gradient
$\nabla^2(\cdot)$	Hesse-Matrix
$\underline{\sigma}(\cdot)$ bzw. $\overline{\sigma}(\cdot)$	Kleinster bzw. größter Singulärwert einer Matrix
$\ \cdot\ $	Norm eines Vektors und einer Matrix, bei Matrizen wird die Spektralnorm angenommen, d.h. es ist $\ A\  = \overline{\sigma}(A)$
$\ \cdot\ _F$	$:= \sqrt{\text{spur}((\cdot)^T(\cdot))}$ , Frobeniusnorm

## Räume, Mengen

$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen
$\mathcal{D}_n$	Selbst-konjugierte Menge mit $ \mathcal{D}_n  = n$ , vgl. (3.17)
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathcal{M}$	Mannigfaltigkeit
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\underline{q}, \underline{q}_n$	Indexmengen, $\underline{q} := \{1, \dots, q\}$ bzw. $\underline{q}_n := \{1, \dots, n\}$
$\mathcal{V}$	Untermannigfaltigkeit
$\mathcal{S}$	Synchronisierbarer Unterraum
$\mathbb{S}_n$	$n$ -dimensionale Einheitskugel
$\emptyset$	Leere Menge

## Abkürzungen

EKR	Entkopplungsregelung
Ge	Gerade
Hy	Hyperbel
Kr	Kreis
LMI	<i>engl.</i> linear matrix inequality
LQR	<i>engl.</i> linear quadratic regulator
MAS	Multi-Agenten System
MGEA	<i>engl.</i> minimum gain eigenstructure assignment
REEA	<i>engl.</i> robust exact eigenstructure assignment
SNF	Steuerungsnormalform
TCP	<i>engl.</i> tool center point
VKR	Verkopplungsregelung

# Kurzfassung

Synchronisierung ist der Wertherkunft nach der Prozess, Vorgänge in zeitliche Übereinkunft zu bringen. In vielen technischen Anwendungen ist dies ein zentraler Aspekt, um den störungsfreien Betrieb zu gewährleisten. Beispielhaft sei hier die Frequenzregelung des elektrischen Energienetzes genannt, die insbesondere dann von Bedeutung ist, wenn nach Stromausfällen einzelne Netzsegmente wieder miteinander verschaltet und dabei synchronisiert werden müssen.

Neben dieser technischen Anwendung eines Synchronisierungsvorgangs wurde in der regelungstechnischen Literatur in den vergangenen Jahren verstärkt die Synchronisierung von agentenbasierten dynamischen Systemen beziehungsweise Multi-Agenten Systemen untersucht. Hierbei handelt es sich zunächst um autonome und nicht physikalisch gekoppelte dynamische Systeme, die die Fähigkeit besitzen, über ein Netzwerk miteinander zu kommunizieren. Die aus dem Netzwerk empfangene Information wird von den lokalen Reglern der Teilsysteme verarbeitet, mit dem Ziel, asymptotisch Übereinkunft in den Zuständen oder – je nach Aufgabenstellung – lediglich in Teilzuständen der Agenten zu erreichen. Erwähnenswert ist dabei die Tatsache, dass es ausreichend ist, lediglich relative Information zur Synchronisierung zu kommunizieren. Die messtechnische Erfassung des absoluten Zustandes oder Ausgangs des einzelnen Agenten muss somit nicht notwendigerweise vorausgesetzt werden.

In der vorliegenden Arbeit erfolgt daher die Weiterentwicklung bestehender und die Entwicklung neuer Ansätze, um strukturbeschränkte Regelungen für agentenbasierte dynamische Systeme zu entwerfen, wobei alle betrachteten Methoden die eingangs erwähnte Synchronisierung des geregelten Multi-Agenten Systems zum Ziel haben. Ausgangspunkt der Methoden in dieser Arbeit stellt zunächst die Systemanalyse der betrachteten Systemklassen dar, woraus sich notwendige Bedingungen für die Synchronisierung der entsprechenden Systemklassen ableiten und interpretieren lassen.

Als Entwurfsmethodik in dieser Arbeit werden fast durchgängig parametrische beziehungsweise teilparametrische Ansätze genutzt. Darüber hinaus wird konsequent von einer konstanten beziehungsweise dynamischen Ausgangsregelung der Agenten ausgegangen, was eine der Strukturbeschränkungen der Regelung darstellt. In diesem Zusammenhang entstehen – losgelöst vom Kernthema der Arbeit – Weiterentwicklungen von Methoden zur robusten Eigenstrukturvorgabe sowie Methoden zum Entwurf von Ent- und Verkopplungsregelungen.

Hinsichtlich der Synchronisierung agentenbasierter Systeme erfolgt in dieser Arbeit eine Unterscheidung der Ansätze bezüglich der Messgrößen der Agenten. Zunächst wird der Fall diskutiert, dass jeder Agent neben der Relativinformation zusätzlich Absolutinformation messtechnisch erfassen kann. Dies ermöglicht durch unterlagerte Regelkreise die Agenten zu homogenisieren, was basierend auf den parametrischen Ansätzen mittels Ent- und Verkopplungsregelung erfolgt. Die Homogenisierung gestattet dann Standardverfahren zur Synchronisierung identischer Agenten anzuwenden. Darüber hinaus gelingt es, diese Idee ebenfalls auf eine spezielle Systemklasse nichtlinearer Agenten zu übertragen, was auf ein adaptives Regelgesetz zur Synchronisierung führt.



Wie eingangs erwähnt, muss die Verfügbarkeit von Absolutinformation zur Synchronisierung nicht vorausgesetzt werden. Auch für diesen Fall wird in der vorliegenden Arbeit ein Regelgesetz zur Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme angegeben. Der Entwurf der synchronisierenden Regelung lässt sich dabei in ein dezentrales Stabilisierungsproblem und damit in ein strukturbeschränktes Regelungsproblem übersetzen, welches sich durch numerische Optimierung lösen lässt.

Alle Methoden werden an Entwurfsbeispielen am Ende der Arbeit dargestellt und bewertet. Die Leistungsfähigkeit der Methoden zur Synchronisierung werden an Simulationsbeispielen verdeutlicht. Die weiterentwickelte Methode zum parametrischen Entwurf von Ausgangsreglern wird darüber hinaus in der Simulation und an einem Laboraufbau einer xy-Positioniereinheit am Beispiel einer Entkopplungsregelung anschaulich dargestellt.



# 1 Einführung

## 1.1 Einleitung

*„We understand synchronization as an adjustment of rhythms of oscillating objects due to their weak interaction.“*

Dieses Verständnis von Synchronisierung entwickeln Pikovsky, Rosenblum und Kurths in [82] und formulieren damit eine Auffassung von Synchronisierung, die sich mit der griechischen Wortherkunft deckt: Synchronisierung ist ein Vorgang, der das zeitliche (griechisch *chrónos* „Zeit“) Zusammenführen (griechisch *syn* „zusammen“) von Prozessen zum Ziel hat.

Der erste wissenschaftlich dokumentierte Synchronisierungsvorgang geht auf den niederländischen Wissenschaftler Christian Huygens (1629 – 1695) zurück, der im Jahre 1665 in einem Brief an seinen Vater die Beobachtung schilderte, dass zwei von ihm gefertigte und an der Wand aufgehängte Pendeluhrn mit fortlaufender Zeit ihre Pendelwinkel gegenphasig synchronisierten. Dabei sind zweierlei Dinge bemerkenswert: Zum einen gelangen die Experimente selbst bei unterschiedlichen Pendellängen und somit bei einer unterschiedlichen Dynamik der Pendeluhrn. Zum anderen ist die Kopplung der beiden Pendeluhrn über die gemeinsame Aufhängung ausreichend, um die Pendeluhrn zu synchronisieren, was im Einklang mit der eingangs erwähnten Anpassung der Rhythmen oszillierender Objekte durch schwache Interaktion steht.

Beispiele aus vielen Bereichen zeigen, dass Synchronisierung nicht nur auf technische bzw. mechanische Prozesse beschränkt ist. So zeigt eine Studie [73], dass der zu Beginn tumultartige Applaus bei Oper- und Theateraufführungen nach kurzer Zeit in rhythmisches Klatschen übergeht. Dabei ist auffallend, dass sich der Rhythmus des Klatschens von isoliert betrachteten Zuschauern gegenüber dem Rhythmus des Klatschens in der Gruppe ungefähr um den Faktor zwei unterscheidet. Das heißt der Applaus in der Gruppe hat eine doppelt so große Periodendauer im Vergleich zum individuellen Klatschen. Darüber hinaus beträgt die Intensität des rhythmischen Klatschens nur etwa die Hälfte des zu Beginn des Experiments festzustellenden tumultartigen Applauses. Offensichtlich hierbei ist, dass Synchronisierung ein spontaner Vorgang ist, der ohne zentrale Instanz auskommt, die beispielsweise einen gemeinsamen Rhythmus vorgibt. Dies zeigt sich auch daran, dass sich das individuelle Verhalten der Zuschauer vom Verhalten der Gruppe unterscheidet. Diese Beobachtung ist auf die Interaktionen der Zuschauer untereinander zurückzuführen und verdeutlicht, dass das synchrone Verhalten nicht notwendigerweise identisch mit dem autonomen Verhalten eines Individuums sein muss.

Auch in der Natur finden sich Beispiele für die Selbstorganisation großer Populationen, die sich mit Hilfe von Synchronisierungsvorgängen erklären lassen. So findet die Fortbewegung von großen Fischpopulationen oder Vögeln in Schwärmen statt, da sich hierdurch eine größere Sicherheit der Gruppe im Vergleich zum einzelnen Individuum gegenüber Angreifern ergibt. In [91] wird eine

Animation eines Schwarms entwickelt, die sich auf drei einfache Regeln für ein einzelnes Individuum zurückführen lässt: Vermeide Kollisionen mit deinen Nachbarn, passe deine Geschwindigkeit an die der Nachbarn an sowie versuche möglichst nah bei deinen Nachbarn zu bleiben. Durch die Implementierung dieser Regeln für jedes Individuum lässt sich ein verteilt *geregelter* System entwerfen, welches ohne zentral koordinierende Instanz auskommt und im Kern auf der Synchronisierung der Positionen und Geschwindigkeiten der einzelnen Individuen basiert. Neben diesem Beispiel zeigen noch weitere Naturphänomene, dass Synchronisierung häufig ein durch Interaktion induzierter Prozess ist. So lässt sich bei einer Leuchtkäfer-Population in Süd-Thailand das folgende Phänomen beobachten [107]: Bei Beginn der Dämmerung ist zunächst nur das chaotische Aufblitzen der Leuchtorgane der Käfer zu erkennen. Nach kurzer Zeit geht das Aufblitzen in einen koordinierten Rhythmus über, und die Leuchtkäfer emittieren in nahezu perfektem Rhythmus Licht. Gegenstand der Forschung war hierbei, diesen Synchronisierungsvorgang durch mathematische Modelle nachzubilden [108], was mithilfe von gekoppelten Oszillatoren gelang.

Diese Beispiele legen dar, dass die Natur in der Lage ist, in effizienter Weise komplexe Systeme ohne zentral koordinierende Instanz zu organisieren. Hierbei lässt sich offensichtlich die individuelle Verarbeitung des Informationsflusses unter den einzelnen Individuen als verteiltes komplexes Regelungssystem interpretieren, welches dem Gesamtsystem einen – gegenüber der Summe der Eigenschaften der einzelnen Individuen – zusätzlichen Nutzen stiftet.

Dies begründet, weshalb in den letzten Jahren in der regelungstechnischen Forschung verstärkt der Entwurf komplexer Systeme erforscht wurde, wobei insbesondere Systeme in den Mittelpunkt rückten, die über einen gewissen Grad an Vernetzung verfügen. Sind Prozess und Regeleinrichtung nicht notwendigerweise am selben Ort installiert und über Funkstrecken samt deren Vor- und Nachteilen miteinander verschaltet, ist dies unter dem Stichwort *Networked Control Systems* zusammengefasst. Auch Kommunikations- und Sensornetzwerke wurden in den vergangenen Jahren verstärkt aus einer regelungstechnischen Perspektive untersucht [4, 105], was verdeutlicht, dass die Interdisziplinarität essentiell für den Entwurf komplexer Systeme ist, da Lösungsansätze häufig aus der Schnittmenge von Graphen-, Kommunikations- und Regelungstheorie entstehen. Um dieser Entwicklung gerecht zu werden, wurde im Jahr 2014 mit der *IEEE Transactions on Control of Network Systems* [78] ein neues Forum geschaffen, um neue Resultate zu publizieren.

In die oben genannte Schnittmenge lassen sich auch Multi-Agenten Systeme (MAS) einordnen, die Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit sind. Hierbei handelt es sich zunächst um autonome und nicht physikalisch gekoppelte dynamische Systeme, die die Fähigkeit besitzen, über ein Netzwerk miteinander zu kommunizieren. Dabei wird der Regelung jedes Agenten die Aufgabe zuteil, die aus dem Netzwerk empfangene Information in geeigneter Weise zu verarbeiten, mit dem Ziel, asymptotisch Übereinkunft – und somit Synchronisierung – in den für die jeweilige Aufgabenstellung angepassten Ausgangsgrößen zu erzielen. Mithilfe der Graphentheorie lässt sich in einfacher Weise der Informationsfluss zwischen den einzelnen Agenten modellieren. Erwähnenswert ist dabei die Tatsache, dass lediglich relative Information zur Synchronisierung kommuniziert wird und somit die messtechnische Erfassung des absoluten Zustandes oder Ausgangs des einzelnen Agenten nicht notwendigerweise vorausgesetzt werden muss. Gleichwohl bedeutet dies eine Strukturbeschränkung für die Regelung, weshalb der Entwurf nicht mehr mit Standardverfahren durchge-

führt werden kann. Ziel dieser Arbeit ist es deshalb, strukturbeschränkte Regelungsverfahren zu entwickeln, die die Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme ermöglichen.

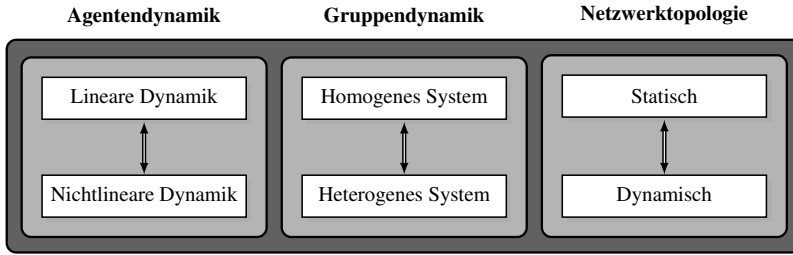
## 1.2 Literaturübersicht

Die aktuelle Entwicklung hinsichtlich des Entwurfes von Multi-Agenten Systemen geht in historischer Perspektive auf Probleme des verteilten Rechnens in der Informatik zurück [118]. Dabei findet sich in [90] eine notwendige und hinreichende Bedingung für das sogenannte Konsens-Protokoll, welches zur Synchronisierung identischer Integratoren nutzbar ist. Die Bedingung verknüpft dabei das verteilte Regelgesetz mit dem zugrunde liegenden Graphen des Netzwerks und lautet: Konsens wird *genau dann* erreicht, wenn der Graph einen *Spannbaum* besitzt. Ein Spannbaum im Netzwerk liegt vor, wenn wenigstens ein Knoten im Netzwerk existiert, der über Pfade alle anderen Knoten im Netzwerk erreichen kann.

Einen Überblick über Konsens-Protokolle im Hinblick auf die Modellierung des Informationsflusses, der Konvergenzgeschwindigkeit der Protokolle und der Robustheit gegenüber Ausfällen von Knoten geben Olfati-Saber, Fax und Murray [75]. Die Untersuchung des Konsens-Protokolls bei zeitvarianter Kommunikationstopologie geht auf die Arbeiten von Moreau [70, 71] zurück, wobei insbesondere das Umschalten zwischen verschiedenen Graphen beleuchtet wird. Ren, Beard und Atkins geben in [89] eine einführende Übersicht hinsichtlich der Anwendung von Konsens-Protokollen zur kooperativen Regelung in Fahrzeugkolonnen (engl. *multi-vehicle systems*), die beispielsweise zur Vereinbarung eines Treffpunktes (Rendezvous-Problem) oder auch zur Einhaltung einer Formation der verschiedenen Fahrzeuge nutzbar ist.

Grundsätzlich lässt sich festhalten, dass Netzwerke von autonomen Robotern eines der Hauptanwendungsgebiete für Multi-Agenten Systeme darstellen. In [12] wird eine übersichtliche Einführung in die Koordination von autonomen Robotern mit dem Fokus auf die Rendezvous-Probleme, der Formationsregelung aber auch von Erkundungsmissionen gegeben. Weitere Darstellungen dieser Art finden sich ebenfalls in [85, 88]. Eine Erweiterung des Konsens-Protokolls, welches lediglich für einfache Integratordynamiken verwendet werden kann, findet sich in [87]. Darin zeigen Ren und Atkins, wie sich unter Annahmen an das Netzwerk das Konsens-Protokoll auf DoppelinTEGRATORDYNAMIKEN erweitern lässt. Unter Ausnutzung einer geschickten Transformation und der exakten Linearisierung gelingt es, das aus der Literatur bekannte Modell eines einfachen kinematischen Fahrzeugmodells (engl. *unicycle model*) als zweifachen Doppelintegrator zu betrachten, so dass sich eine Formationsregelung basierend auf dem vorgestellten Protokoll erzielen lässt.

Aufgrund der in den letzten Jahren zahlreichen Veröffentlichungen im Bereich der Multi-Agenten Systeme, sollen die nachfolgenden Resultate zunächst gemäß den betrachteten Systemklassen der individuellen Agentendynamik, der Dynamik des Multi-Agenten Systems sowie der Eigenschaften des Netzwerks eingeordnet werden. Bild 1.1 zeigt hierzu die gewählte Unterscheidung, wobei bei der individuellen Dynamik der Agenten zunächst zwischen einer linearen bzw. einer nichtlinearen Dynamik unterschieden werden kann. Wird das gesamte Multi-Agenten System betrachtet,



**Bild 1.1:** Einordnung von Multi-Agenten Systemen nach der betrachteten Klasse der individuellen Dynamik der Agenten, des Gesamtsystems sowie des Netzwerks

so lässt sich zwischen homogenen Systemen, also Systemen bei denen die Dynamik der Agenten identisch ist, und heterogenen Systemen, bei denen die Agentendynamik nicht identisch ist, unterscheiden. Darüber hinaus ist auch eine Trennung hinsichtlich der betrachteten Struktur des Netzwerkes zu ziehen. Die Unterscheidung erfolgt zwischen statischen sowie dynamischen Graphen, wobei im ersten Fall von einer kontinuierlichen Kommunikation der Agenten untereinander auszugehen ist. Mit dem letzten Fall lassen sich beispielsweise wechselnde Kommunikationstopologien oder aber auch das Ausfallen bzw. Hinzunehmen von einzelnen Kommunikationskanälen abbilden. In dieser Arbeit wird zumeist von statischen Graphen ausgegangen.

### 1.2.1 Lineare homogene Multi-Agenten Systeme

Ausgehend vom Konsens-Protokoll wurde untersucht, unter welchen Bedingungen sich lineare homogene Multi-Agenten Systeme synchronisieren lassen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung geht auf Fax [25] sowie Fax und Murray [26] zurück. Unter der Annahme, dass alle Agenten dasselbe Regelgesetz implementieren, ist gezeigt, dass Synchronisierung genau dann erreicht wird, wenn der lokale Regler simultan  $N$  Systeme stabilisiert. Dabei ergeben sich die Systeme mit Hilfe der Dynamik des einzelnen Agenten sowie mit den Eigenwerten des zugrunde liegenden Graphen, wobei  $N$  die Anzahl der Agenten bezeichnet.

Diese Bedingungen wurden von Tuna genutzt, um ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung eines synchronisierenden Zustandsreglers sowie dual dazu einer synchronisierenden Ausgangsaufschaltung anzugeben. Dies gelingt für zeit-kontinuierliche lineare Systeme in [119] durch Lösung einer Riccati-Gleichung, während in [120] ein dazu duales Ergebnis zur Bestimmung einer Ausgangsaufschaltung für zeit-diskrete lineare Agenten zu finden ist.

Die vorgenannten Resultate zur Synchronisierung setzen voraus, dass entweder der Zustand kommuniziert wird oder dass der Agent voll aktuiert und damit jede Zustandsgröße unabhängig steuerbar ist, was unter praktischen Gesichtspunkten sehr restriktiv ist. Vor diesem Hintergrund untersuchen Ma und Zhang in [62], unter welchen Bedingungen Synchronisierung gelingt, falls lediglich Ausgangsinformation kommuniziert und somit eine Ausgangsrückführung zur Synchronisierung genutzt wird. Die Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit der Dynamik des Agenten sowie die

Anforderung, dass der zugrunde liegende Graph einen Spannbaum enthält, ergeben sich als notwendige Bedingungen für die Synchronisierung. Allerdings basiert die hinreichende Bedingung zur Bestimmung einer synchronisierenden Ausgangsrückführung auf einer sehr restriktiven Rangbedingung, wobei Ma und Zhang bereits darauf hinweisen, dass die Bestimmung des Reglers in der Regel numerisch bestimmt werden muss. Ein äquivalentes Resultat von Lunze findet sich in der deutschsprachigen Literatur in [60], wobei lediglich Agenten betrachtet werden, die sich als Eingrößensysteme darstellen lassen.

Die notwendigen Bedingungen aus [26] werden ebenfalls in [132] von Zhang, Lewis und Das zum Entwurf eines identischen Zustandsreglers samt Beobachters für jeden Agenten genutzt. Dabei wird der Beobachter nicht durch Messung des absoluten Ausgangs des Agenten gestützt sondern durch die Ausgangsdifferenzen der Agenten untereinander, so dass nur Ausgangsinformation über das Netzwerk kommuniziert werden muss. Allerdings wird vorausgesetzt, dass ein Agent – der sogenannte Anführer – im Netzwerk die synchrone Bewegung vorgibt und diese an jeden Agenten im Netzwerk kommuniziert, was eine Einschränkung in den möglichen Kommunikationstopologien darstellt. In der englischsprachigen Literatur wird diese spezielle Struktur eines Multi-Agenten Systems als *leader-follower network* bezeichnet.

Ein verwandtes Resultat findet sich in [34], wobei hier davon ausgegangen wird, dass die Dynamik des Anführers sich von der Dynamik der anderen Agenten im Netzwerk unterscheiden kann, weshalb auf Ergebnisse aus dem Bereich der Ausgangsfolgeregelung (engl. *output regulation*) zurückgegriffen wird. Weitere Resultate zur Synchronisierung identischer linearer Systeme finden sich in [96, 97], wobei auch darin nicht nur Zustandsinformation sondern auch Information über einen dynamischen Reglerzustand kommuniziert werden muss.

Um den Kommunikationsaufwand zu reduzieren, was unter praktischen Gesichtspunkten immer anzustreben ist, sollte lediglich Ausgangsinformation über das Netzwerk kommuniziert werden. Hierzu ist in [102] von Seo, Shim und Back ein Verfahren angegeben. Ausgehend von den notwendigen Bedingungen aus [26] wird ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung einer beobachterbasierten Zustandsrückführung angegeben. Die Berechnung des Reglers erfolgt über die Lösung einer Riccati Gleichung und hat den Nebeneffekt, dass große Verstärkungen in der Rückführung minimiert werden.

Ein ähnlicher Ansatz wird in [53, 56] verfolgt mit dem Unterschied, dass keine beobachterbasierte Zustandsrückführung sondern eine dynamische Ausgangsrückführung entworfen wird. Die Berechnung des Reglers wird als Optimierungsproblem mit linearen Matrixungleichungen (LMI, engl. *linear matrix inequality*) als Nebenbedingung formuliert, wobei hierzu die Ergebnisse aus [98] genutzt werden. Deshalb entspricht hier die Reglerordnung der Ordnung des Agenten.

In der vorliegenden Arbeit wird auf die vorgenannten, vereinfachenden Annahmen weitestgehend verzichtet. Es wird eine Methode aus der Literatur [45] modifiziert, die den Entwurf identischer Agenten durch ein optimierungsbasiertes Verfahren und damit *konstruktiv* ermöglicht. Einschränkungen bezüglich der betrachteten Systemklasse der Agenten werden nicht gemacht. Darüber hinaus erfolgt lediglich die Kommunikation des Ausgangs des Agenten, was den minimalen Anforderungen an die Kommunikation entspricht. Auch hinsichtlich der Kommunikationstopologie

muss lediglich die Existenz eines Spannbaums vorausgesetzt werden, so dass mit der Methodik komplexe Synchronisierungsprobleme entworfen werden können.

### 1.2.2 Lineare heterogene Multi-Agenten Systeme

Ausgehend von den Ergebnissen zur Synchronisierung homogener linearer Multi-Agenten Systeme, ist in den vergangenen Jahren verstärkt die Synchronisierung heterogener Multi-Agenten Systeme in den Fokus gerückt. Dies ist von einem praktischen Standpunkt aus gesehen sinnvoll, da beispielsweise aufgrund fertigungstechnischer Ungenauigkeiten, die Agenten niemals perfekt identisch sein können.

Vor diesem Hintergrund wurde zunächst von Wieland und Allgöwer in [124] eine notwendige Bedingung für Synchronisierung in Netzwerken von heterogenen linearen Agenten angegeben. Offensichtlich ist ein gemeinsames identisches internes Modell, welches die Agenten aufgrund ihrer Systemdynamik oder aber auch aufgrund eines dynamischen Reglers aufweisen müssen, notwendig für Synchronisierung. Entsprechend kann diese notwendige Bedingung als Erweiterung des bekannten internen Modellprinzips nach Francis und Wonham [29] im Hinblick auf agentenbasierte Systeme gesehen werden, weshalb Wieland und Allgöwer die notwendigen Bedingungen als *Internal Model Principle for Synchronization* bezeichnen. Eine hinreichende Bedingung wurde von Wieland, Sepulchre und Allgöwer in [126] angegeben, wobei die Bestimmung der Regelung voraussetzt, dass absolute Ausgangsinformation verfügbar ist, um den Zustand des einzelnen Agenten mittels eines Beobachters zu rekonstruieren.

Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt Lunze in [58, 59]. Als notwendige Bedingung zur Synchronisierung heterogener Agenten ergibt sich, dass alle Agenten bei Wahl konsistenter Anfangswerte identische Ausgangsgrößenverläufe erzeugen. Lunze bezeichnet dies als System-Schnittmenge der Agenten (engl. *system intersection*), die notwendigerweise nicht die leere Menge darstellen darf, um triviale Synchronisierung zu vermeiden. Auch Lunze gelangt zu dem Ergebnis, dass gegebenenfalls die Agenten durch eine geeignete dynamische Regelung erweitert werden müssen, falls die Dynamik der Agenten keinen gemeinsamen Schnitt aufweist, was dann wieder dem *Internal Model Principle for Synchronization* nach Wieland und Allgöwer entspricht. Eine hinreichende Bedingung für Synchronisierung basiert auf der Annahme kreisfreier Kommunikationstopologien [59] beziehungsweise auf der Überprüfung einer um die synchrone Bewegung reduzierten Darstellung des Gesamtsystems [58].

Wie aus den Ergebnissen von Wieland, Sepulchre und Allgöwer [126] sowie Lunze [58] ersichtlich ist, basieren hinreichende Bedingungen häufig auf Einschränkungen der erlaubten Topologie des Netzwerks oder auf einem erhöhten Kommunikationsaufwand. Im letztgenannten Zusammenhang finden sich zahlreiche Resultate, die sich auf die Voraussetzung stützen, dass der Agent messtechnisch seinen eigenen Zustand beziehungsweise Ausgang erfassen kann. Yang u. a. bezeichnen den Agenten daher in [131] als introspektiv (engl. *introspective agent*), da der Agent – basierend auf der lateinischen Wortherkunft – in sich „hineinsehen“ kann (vgl. [72], Introspektion aus dem lat. „Hineinsehen“). In diesem Zusammenhang entwickeln Su und Huang in [115]



eine dynamische Ausgangsrückführung, in die ein für alle Agenten identisches Exosystem zur Generierung der synchronen Trajektorie eingebettet wird. Eine synchronisierende Regelung für rechts-invertierbare zeit-diskrete Agenten geben Wang, Saberi und Yang [123] an, während Persis, Liu und Cao ein Verfahren zur Synchronisierung heterogener unsicherer Agenten beschreiben [79]. Ein ähnlicher Ansatz ist von Kim, Shim und Seo in [42] zu finden.

Wird die stabile Entkoppelbarkeit jedes Agenten vorausgesetzt, so lässt sich aufgrund der Kenntnis absoluter Ausgangsinformation stets eine beobachterbasierte Zustandsrückführung für jeden Agenten entwerfen, die das Führungsverhalten stabil entkoppelt. Die Synchronisierung von Multi-Agenten Systemen mit mehreren Ein- und Ausgängen ist somit auf die getrennte Betrachtung der einzelnen Kanäle zurückgeführt. Hierzu nutzen De Campos, Brinón-Arranz und Niculescu in [21] die spezielle Struktur der Agenten mit Vektorrelativgrad eins aus, um zunächst die Agenten in einfacher Weise zu entkoppeln und im Anschluss das Konsens-Protokoll zur Synchronisierung anzuwenden. Eine Erweiterung dieser Idee findet sich ebenfalls in [41]. Hingegen nutzen Khodaverdian und Adamy in [39] das bekannte Verfahren zur Entkopplung nach Falb und Wolovich [24], um die vorgenannten Ergebnisse auf Agenten zu erweitern, die sich mit einer statischen Zustandsrückführung stabil entkoppeln lassen.

Die Annahme der Verfügbarkeit absoluter Information vereinfacht in vielerlei Hinsicht den Entwurf synchronisierender verteilter Regler für heterogene Multi-Agenten Systeme – notwendig zur Synchronisierung ist diese Annahme jedoch nicht. Insbesondere vor dem Hintergrund der in der Einleitung dargestellten und aus der Natur motivierten Beispiele wird deutlich, dass durch die Verwendung von lediglich Relativinformation Synchronisierung des Gesamtsystems möglich ist, weshalb dies den derzeitigen Gegenstand der Forschung in diesem Bereich darstellt.

Eine Erweiterung des Konsens-Protokolls für Doppelintegratoren, die rauschbehaftet sind, kann als erste Entwicklung in diese Richtung verstanden werden und ist in [16] dargestellt. Ein Verfahren, welches ebenfalls ein Exosystem in die Regelungsstruktur eines jeden Agenten einbettet, ist von Listmann u. a. in [55] dargestellt. Um dem Exosystem asymptotisch zu folgen, wird allerdings der absolute Zustand des Agenten benötigt, der mit Hilfe eines dezentralen Beobachters zu bestimmen ist. Allerdings konnte keine konstruktive Bedingung angegeben werden, wann sich mittels des angegebenen LMI-Verfahrens die dezentrale Beobachterrückführung bestimmen lässt. Darüber hinaus muss neben dem Ausgang des Agenten ebenfalls der Beobachterzustand sowie der Zustand des Exosystems kommuniziert werden, was einen erheblichen Aufwand bei der Kommunikation bedeutet. Einen Zugang mittels eines dezentralen Beobachters beschreiben Grip u. a. ebenfalls in [31, 32]. Allerdings erfordert auch hier die Implementierung des Beobachters die Kommunikation von internen Beobachterzuständen.

Wahrburg und Adamy untersuchen in [122] eine spezielle Systemklasse heterogener Multi-Agenten Systeme, nämlich solche Agenten, die nominell identisch, allerdings aufgrund von Unsicherheiten unterschiedlich und somit heterogen sind. Diese Systemklasse wird auch als quasihomogene Multi-Agenten Systeme bezeichnet. Die synchronisierende Regelung basiert darauf, dass für jeden Agent ein Beobachter für sich und seine Nachbarn entworfen wird, um daraus den absoluten Zustand zu schätzen. Im Anschluss muss durch Überprüfung einer Rangbedin-

gung sichergestellt werden, dass die Unsicherheiten exakt kompensiert werden können. Dieser Ansatz erfordert einen erhöhten Kommunikationsaufwand, da Ausgangs-, Beobachter- sowie Eingangsgrößeninformation kommuniziert werden muss. Allerdings ist gezeigt, dass in heterogenen Multi-Agenten Systemen, das Gesamtsystem bezüglich der relativen Ausgänge im Allgemeinen – gegensätzlich zum homogenen Fall – beobachtbar ist.

Dies ist im Einklang mit den Ergebnissen von Seyboth u. a. [103]. Darin untersuchen die Autoren, welche Aussagen sich über Synchronisierung mittels konstanter Ausgangsrückführung treffen lassen, wenn die Agenten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Synchronisierung aus [126] nicht erfüllen. Am Beispiel von nicht-identischen harmonischen Oszillatoren sowie nicht-identischen Doppelintegratoren ist verdeutlicht, dass das Gesamtsystem der Oszillatoren asymptotisch stabil ist, während die Doppelintegratoren asymptotisch einen konstanten Synchronisierungsfehler aufweisen.

Im Hinblick auf die vorgenannten Resultate werden in der vorliegenden Arbeit zunächst Methoden zur Synchronisierung basierend auf Absolut- und Relativinformation entwickelt. Hierbei hat die unterlagerte Regelung jedes Agenten eine Homogenisierung der Dynamik, die bezüglich des Netzwerks asymptotisch wirksam ist, zur Folge. Die konstruktiven Methoden basieren auf der unterlagerten Ent- beziehungsweise Verkopplungsregelung der Agenten, was keine allzu einschränkenden Annahmen an die betrachtete Systemklasse darstellt. Darüber hinaus erfolgt auch bei diesen Methoden lediglich die Kommunikation des Ausgangs des Agenten, was den minimalen Anforderungen an die Kommunikation entspricht. Auch hinsichtlich der Kommunikationstopologie muss lediglich die Existenz eines Spannbaums vorausgesetzt werden.

Durch den Verzicht auf Absolutinformation entfällt die Möglichkeit, eine unterlagerte Regelung für die Agenten zu entwerfen. Für diesen Fall wird in der Arbeit eine konstruktive Methode entwickelt, um das Synchronisierungsproblem in ein dezentrales Stabilisierungsproblem zu übersetzen, was den Entwurf der Regelung am Gesamtsystem nach sich zieht. Die Methode erfordert ebenfalls lediglich Ausgangsinformation zu kommunizieren und die Existenz eines Spannbaums. Dies hat zur Folge, dass die Methoden in der vorliegenden Arbeit auf nahezu alle Synchronisierungsprobleme linearer Multi-Agenten Systeme bei zeitinvarianter Kommunikationstopologie anwendbar sind.

### 1.2.3 Nichtlineare Multi-Agenten Systeme

Lässt sich die Agentendynamik nicht mehr mittels linearer Differentialgleichungen darstellen, müssen die Agenten durch nichtlineare Modelle beschrieben werden. Auch hierbei ist eine zentrale Fragestellung, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen Synchronisierung der Agenten garantieren. In Erweiterung der notwendigen Bedingungen für lineare heterogene Agenten in [124], formulieren Wieland und Allgöwer in [125] ein äquivalentes Resultat für nichtlineare heterogene Agenten. Es zeigt sich, dass auch im nichtlinearen Fall das *Internal Model Principle for Synchronization* Gültigkeit besitzt und somit notwendig für Synchronisierung ist. Damit muss

ein invarianter Unterraum des Gesamtsystems existieren, in welchem die Agenten in der Lage sind, identische Ausgangsverläufe samt den dazugehörigen zeitlichen Ableitungen zu erzeugen.

Im Hinblick auf die Bestimmung hinreichender Bedingungen zur Synchronisierung nichtlinearer Agenten, finden sich in der Literatur meist Ansätze, die auf der Konstruktion geeigneter Lyapunov Funktionen basieren. Hierbei ist häufig vorausgesetzt, dass die Dynamik der Agenten *passiv* ist, so dass eine Lyapunov Funktion für das Gesamtsystem aus der Aggregation der Speicherfunktionen der einzelnen Agenten resultiert. Von Arcak findet sich hierzu eine Lösung, die Anwendung in der Formationsregelung beziehungsweise der Koordination von Agenten findet [6]. Ein Beitrag zur Stabilitätsanalyse von Netzwerken, die über kaktusartige Strukturen verfügen, ist ebenfalls von Arcak in [5] zu finden. Weitere, die Passivität der Agenten ausnutzende Resultate, finden sich in [19], wobei hierin ebenfalls Synchronisierung gelingt, falls Schaltvorgänge und Zeitverzögerungen in der Kommunikation auftreten.

Sind die Agenten nicht passiv, so lässt sich unter gewissen Voraussetzungen eine Zustandsrückführung finden, so dass die Agenten rückgekoppelt äquivalent zu einem passiven System sind. Für nichtlineare Systeme mit Vektorrelativgrad eins und Lyapunov stabiler Nulldynamik ist dies erfüllt. Chopra und Spong nutzen diese Eigenschaft aus, um in [18] eine hinreichende Bedingung für Synchronisierung nichtlinearer Agenten basierend auf der Konstruktion einer aggregierten Lyapunov Funktion und unter der Annahme eines stark verbundenen sowie balancierten Graphen anzugeben. Eine Erweiterung dieses Ergebnisses, in welchem der Graph nur noch stark verbunden sein muss, ist von Chopra in [17] angegeben.

Eine Erweiterung der vorgenannten Ergebnisse findet sich in [52]. Darin wird ein modifiziertes Backstepping-Verfahren zur Herleitung eines synchronisierenden Reglers für identische nichtlineare Agenten in einer verketteten Systemstruktur angegeben. Der Entwurf adaptiver Regler zur Synchronisierung nichtlinearer Multi-Agenten Systeme, welcher auch in dieser Arbeit genutzt wird, ist unter anderem in [20] und [66] dargestellt. Auch die in der Einleitung erwähnte Entdeckung von Huygens wurde in der aktuelleren Literatur aufgegriffen. In der Aufsatzsammlung [80] ist zum einen die Modellbildung [83] als auch die experimentelle Überprüfung des Experimentes dargestellt [77].

In dieser Arbeit erfolgt eine Erweiterung der Ergebnisse von Chopra in [17]. Ausgehend von der Annahme, dass die Agenten durch ein Zustandssystem mit Vektorrelativgrad eins und mit Lyapunov stabiler Nulldynamik darstellbar sind, ermöglicht die neue Methode darüber hinaus parametrische Unsicherheiten in den Vektorfeldern der Agenten zu berücksichtigen. Dies gelingt durch die Verwendung eines adaptiven Ansatzes zur Kompensation der unsicheren Vektorfelder in Kombination mit den Ergebnissen aus [17].

## 1.3 Struktur der Arbeit

Neben einer Einführung in die wesentlichen Begriffe der agentenbasierten dynamischen Systeme – was eine Übersicht über die wichtigsten Graphentheoretischen Definitionen und Konzepte mit

einschließt – führt Kapitel 2 die in dieser Arbeit betrachteten Systemklassen der Agenten ein. Darüber hinaus wird auf die grundlegende Problemstellung der Arbeit eingegangen: die Synchronisierung der Agenten. Abschließend erfolgt ein Überblick über die Beiträge der Arbeit.

Kapitel 3 stellt den methodischen Rahmen zum Entwurf der synchronisierenden Regelungen vor, die im Laufe der Arbeit hergeleitet werden. Es wird ein parametrischer Ansatz zur Eigenstrukturvorgabe mittels Ausgangsrückführung genutzt. Neben den Eigenwerten, die durch die Regelung vorgegeben werden sollen, existieren weitere Freiheitsgrade, die einem Optimierungsverfahren zugänglich gemacht werden. Damit lassen sich Gütemaße zur Verbesserung der Robustheit oder auch der Reglernorm optimieren. Zusätzlich ist es mit dem Verfahren möglich, eine Entkopplungsbeziehungsweise Verkopplungsregelung zu entwerfen. Die Freiheitsgrade bei der Entkopplungsregelung sind durch den Übergang zu einem teil-parametrischen Entwurf ebenfalls durch das Optimierungsverfahren nutzbar, was auf eine robuste Entkopplungsregelung führt.

In Kapitel 4 wird angenommen, dass die Agenten Kenntnis über lokale Ausgangs- oder Zustandsinformation besitzen. Hiermit wird es möglich, die Methodik aus Kapitel 3 zur Synchronisierung anzuwenden. Es wird zunächst auf die Synchronisierung homogener Agenten eingegangen. Diese Ergebnisse ermöglichen, auch Regelungen zur Synchronisierung heterogener Agenten zu entwerfen. Abschließend kann für eine Systemklasse nichtlinearer Agenten ein adaptives Regelgesetz zur Konsensfindung hergeleitet werden.

Die Annahme, dass Absolutinformation der Agenten verfügbar ist, wird in Kapitel 5 nicht mehr getroffen. Durch Formulierung als dezentrales Regelungsproblem, gelingt es, das Synchronisierungsproblem für heterogene Agenten mittels numerischer Min-Max Optimierung zu lösen.

Während in den Kapiteln 3, 4 und 5 kurze akademische Beispiele die Ergebnisse verdeutlichen sollen, erfolgt in Kapitel 6 die Anwendung der Ergebnisse an praktisch motivierten Beispielsystemen. Neben der Entkopplungsregelung einer xy-Positioniereinheit, die neben Simulationsergebnissen auch durch reale Messungen an einem Laboraufbau ergänzt werden, wird die Anwendung der synchronisierenden Regelung anhand eines Multi-Agenten Systems bestehend aus Modellhelikoptern sowie durch die dezentrale Synchronisierung einer autonomen Fahrzeugkolonne verdeutlicht.

Ein Fazit der Arbeit und ein Ausblick wird in Kapitel 7 gezogen. Ergänzende Betrachtungen und Beweise zum Hauptteil der Arbeit finden sich im Anhang.

## 2 Agentenbasierte dynamische Systeme

Dieses Kapitel führt die in dieser Arbeit betrachtete Systemklasse ein. Eine aus der Literatur entnommene Definition präzisiert hierbei den Agentenbegriff. Da die Kommunikation der Agenten ein zentraler Bestandteil für die Synchronisierung ist, erfolgt die Modellierung der Kommunikationsstopologie durch die Graphentheorie. Die zugrunde liegende Dynamik der Agenten wird ebenfalls eingeführt, wobei eine Unterscheidung zwischen homogenen und heterogenen Agenten erfolgt. Eine Untersuchung der Steuer- und Beobachtbarkeit der daraus resultierenden Gesamtsysteme – der Multi-Agenten Systeme – wird vorgenommen, um die Unterschiede zwischen homogenen und heterogenen Multi-Agenten Systemen heraus zu arbeiten. Darüber hinaus erfolgt die Definition der zentralen Problemstellung der Arbeit – der Synchronisierung. Ein Überblick über die Beiträge der Arbeit findet sich am Ende des Kapitels.

### 2.1 Präzisierung des Agentenbegriffs

Die Nutzung des Agentenbegriffs erfolgt in vielen Bereichen. So wird beispielsweise in der Informatik häufig der Begriff des Agenten in Zusammenhang mit Softwaresystemen verwendet, die über einen gewissen Grad an Intelligenz verfügen. Allerdings herrscht auch dort Uneinigkeit über eine präzise Definition eines Agenten, wie Wooldridge kommentiert [129]:

*„Surprisingly, there is no such agreement: there is no universally accepted definition of the term agent, and indeed there is a good deal of ongoing debate and controversy on this very subject.“*

Nichtsdestotrotz findet sich von Wooldridge und Jennings die folgende Definition [130]:

*„An agent is a computer system that is situated in some environment, and that is capable of autonomous action in this environment in order to meet its design objectives.“*

Zur Einführung des Agentenbegriffs, wie er in dieser Arbeit verstanden wird, soll zunächst auf ein Missverständnis hingewiesen werden, welches in Zusammenhang mit der direkten Übersetzung des englischen Begriffes *agent* in das deutsche Wort *Agent* entsteht. Korrekt wäre die Übersetzung in das Wort *Agens*, was dem Duden nach die Bedeutung „wirkendes, handelndes, tätiges Wesen oder Prinzip“ hat. Entsprechend definiert Lüth in [61] auch den Begriff des *technischen Agenten*, der innerhalb eines Multi-Agenten die folgenden grundsätzlichen Eigenschaften beziehungsweise Fähigkeiten besitzt (in Anlehnung an [61, Seite 13]):

- *Autonomes Verhalten*: Die Autonomie des technischen Agenten ist dadurch gekennzeichnet, dass der Agent oder zumindest ein Teil des Agenten quasi kontinuierlich aktiv ist, um auf

das Ziel der Gruppe hinzuwirken. Hierzu nutzt der Agent eine Regelung, die Informationen aus der Nachbarschaft des Agenten selbständig erfasst und verarbeitet.

- *Beherrschung von Interaktionen:* Ein technischer Agent nutzt in einem Multi-Agenten System mögliche Wechselwirkungen zwischen Agenten zum Erreichen eines Ziels. Je nach Agent können dies physikalische oder informationstechnische Interaktionen sein.
- *Stabilisieren und Optimieren von Prozessen:* Ein technischer Agent agiert als Bestandteil eines Multi-Agenten Systems so, dass er versucht, einen oder mehrere technische Prozesse zu optimieren, d.h. optimale Prozesszustände zu erreichen oder zu stabilisieren.

Der Begriff des Agenten steht damit nach Lüth [61] stellvertretend für *Autonome Interagierende Einheit in komplexen Systemen*. Interagieren mehrere Agenten und verfolgen dabei ein gemeinsames Ziel, so handelt es sich um ein *Multi-Agenten System* (MAS). Die Regelungsaufgabe jedes Agenten ist dabei, stets das Erreichen des gemeinsamen Ziels zu gewährleisten und möglicherweise weitere Regelziele – beispielsweise hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit auf das gemeinsame Ziel oder auch die Unterdrückung unerwünschter äußerer Einflüsse – zu erfüllen.

Ausgehend von den vorgenannten Überlegungen zum Agentenbegriff präzisieren die folgenden Definitionen den Agentenbegriff und ein Multi-Agenten System, wie sie in dieser Arbeit verstanden werden.

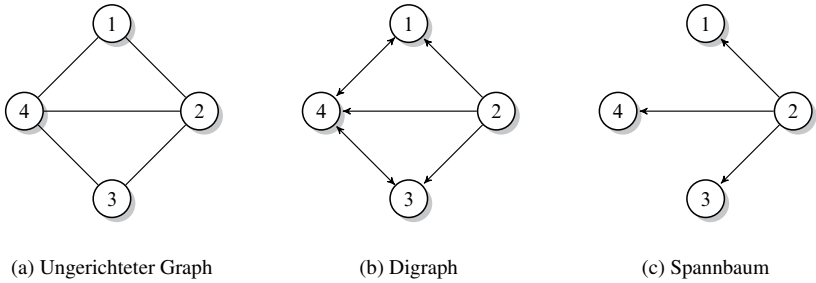
**Definition 2.1.** *Ein Agent ist ein dynamisches System, welches über Sensoren und Aktoren verfügt. Der Agent besitzt die Fähigkeit mit anderen Agenten zu kommunizieren und verfügt über informationsverarbeitende Möglichkeiten – eine Regelung – zur Erreichung eines gemeinsamen Ziels.*

**Definition 2.2.** *Ein Multi-Agenten System besteht aus untereinander kommunizierenden Agenten gemäß Definition 2.1.*

## 2.2 Graphentheoretische Grundlagen

Die Definitionen 2.1 und 2.2 implizieren einen Informationsfluss unter den Agenten, der von den Regelungen der Agenten geeignet verarbeitet werden muss, um das Regelziel des Multi-Agenten Systems zu erreichen. Dies erfordert eine Modellierung des Informationsflusses, die zum Entwurf der Regelungen genutzt werden kann. Die Graphentheorie bietet hierzu einen intuitiven Zugang, wobei jeder Agent als Knoten eines Graphen und der Informationsfluss zwischen benachbarten Agenten als Kante abgebildet ist. Im Folgenden werden deshalb einige Definitionen und Eigenschaften von Graphen vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit Verwendung finden. Diese sind vornehmlich der Literatur entnommen (s. z.B. [30, 67]).

Ein *Graph*  $\mathcal{G}$  ist ein geordnetes Paar  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}})$ , wobei  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$  die endliche Menge der *Knoten* des Graphen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  die Menge der *Kanten* des Graphen  $\mathcal{G}$  bezeichnet. Die Menge der Knoten des Graphen folgt aus  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}} = \{v_1, \dots, v_N\}$ , während die Menge der Kanten durch  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  gegeben



**Bild 2.1:** Beispiele für einen ungerichteten Graphen (a), gerichteten Graphen (b) und einen Spannbaum (c)

ist. Eine Kante ist deshalb ein geordnetes Paar von zwei Knoten und durch  $(v_i, v_j)$  wird zum Ausdruck gebracht, dass eine Kante vom Knoten  $v_i$  zum Knoten  $v_j$  existiert. Die Kante  $(v_i, v_j)$  wird als einlaufend bezüglich  $v_j$  und austretend bezüglich  $v_i$  bezeichnet. Graphisch lässt sich dieser Sachverhalt als Pfeil veranschaulichen, wobei der Knoten  $v_i$  den Startpunkt des Pfeils und der Knoten  $v_j$  die Pfeilspitze kennzeichnet. Im Hinblick auf die Modellierung des Informationsflusses in Multi-Agenten Systemen wird damit ausgedrückt, dass der Informationsfluss vom Agenten  $i$  zum Agenten  $j$  erfolgt.

Wenn für alle  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  ebenfalls  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  erfüllt ist, dann ist der Graph *ungerichtet*. Im anderen Fall ist der Graph *gerichtet*, und man bezeichnet ihn auch als *Digraphen*.

Ein *Pfad* der Länge  $r$  in einem gerichteten Graphen ist eine Abfolge  $v_0, \dots, v_r$  von  $r + 1$  verschiedenen Knoten, so dass für jedes  $i \in \{0, \dots, r - 1\}$ ,  $(v_i, v_{i+1})$  eine Kante des Graphen ist.

Ein gerichteter Graph ist *stark verbunden*, wenn zwischen  $v_i$  und  $v_j$  ein Pfad für alle  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  und  $i \neq j$  existiert. Ein gerichteter Graph ist *verbunden*, wenn mindestens ein Knoten  $v_i$  existiert, so dass ein Pfad von  $v_i$  zu allen anderen Knoten existiert. Der Knoten  $v_i$  wird als *Wurzelknoten* bezeichnet, und der Graph enthält einen *Spannbaum*.

Für einen gerichteten Graphen  $\mathcal{G}$  mit  $N$  Knoten ist die gewichtete *Adjazenzmatrix*  $A_{\mathcal{G}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  durch

$$A_{\mathcal{G}} = [a_{\mathcal{G}ij}] = \begin{cases} w_{ij}, & \text{wenn } (v_j, v_i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.1)$$

definiert, wobei  $w_{ij} > 0$  gilt. Für einen ungewichteten Graphen gilt typischerweise  $w_{ij} = 1$ . Die gewichtete Laplacematrix  $L_{\mathcal{G}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ergibt sich mit (2.1) aus

$$L_{\mathcal{G}} = [l_{\mathcal{G}ij}] = \begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{\mathcal{G}ij}, & \text{wenn } i = j, \\ -a_{\mathcal{G}ij}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Mit Hilfe der *Gradmatrix* eines Graphen  $\mathcal{G}$ , die durch

$$D_{\text{in}} = \text{diag}(A_{\mathcal{G}} \mathbf{1}_N) \quad (2.3)$$

definiert ist, wobei  $1_N$  den  $N$ -dimensionalen Einsvektor bezeichnet, lässt sich die Laplacematrix auch durch  $L_G = D_{\text{in}} - A_G$  berechnen.

Mit Hilfe der folgenden Ergebnisse lassen sich die Eigenschaften eines Graphen  $\mathcal{G}$  anhand der Eigenschaften der in (2.1) und (2.2) definierten Matrizen ableiten.

Aus der Definition der Laplace Matrix (2.2) folgt, dass sich die Summe jeder Zeile zu Null ergibt. Damit ist  $1_N$  ein Rechtseigenvektor von  $L_G$  zum Eigenwert  $\lambda = 0$  und es gilt  $L_G 1_N = 0$ . Eine Aussage, die die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda = 0$  mit der Verbundenheit des Graphen verbindet, geht auf die Ergebnisse von Tuna zurück.

**Lemma 2.3.** [119] *Die Laplacematrix  $L_G$  eines gerichteten Graphen  $\mathcal{G}$  hat genau einen Eigenwert in  $\lambda = 0$  mit dem assoziierten Eigenvektor  $1_N$ , wenn der Graph verbunden ist.*

Außerdem gilt

**Lemma 2.4.** [75] *Ein gerichteter Graph ist genau dann verbunden, wenn er einen Spannbaum enthält.*

Eine Aussage über den Linkseigenvektor eines stark verbundenen Graphen gelingt mit

**Lemma 2.5.** *Wenn der Graph  $\mathcal{G}$  stark verbunden ist und die Gewichte der Adjazenzmatrix  $w_{ij}$  in (2.1) positiv sind, dann existiert ein positiver Vektor  $\gamma$ , der  $\gamma^T L_G = 0$  erfüllt.*

*Beweis.* Aufgrund von (2.2) gilt  $L_G 1_N = 0$ . Da der Graph stark verbunden ist, hat der Eigenwert  $\lambda = 0$  aufgrund von Lemma 2.3 die algebraische Vielfachheit eins. Mit  $L_G = D_{\text{in}} - A_G$  und  $L_G 1_N = 0$  folgt daher

$$D_{\text{in}} 1_N = A_G 1_N$$

beziehungsweise

$$1_N = \mathcal{D}_{\text{in}}^{-1} A_G 1_N.$$

Somit hat die Matrix  $\mathcal{D}_{\text{in}}^{-1} A_G$  den Eigenwert  $\lambda = 1$ . Da die Adjazenzmatrix  $A_G$  aufgrund der Definition in (2.1) nicht-negativ ist und die Multiplikation von links mit  $\mathcal{D}_{\text{in}}^{-1}$  nur die Zeilen von  $A_G$  in positiver Weise skaliert, folgt aus Satz B.5, dass die Matrix  $\mathcal{D}_{\text{in}}^{-1} A_G$  irreduzibel ist, da der zugrunde liegende Graph als stark verbunden angenommen wurde. Mit Satz B.6 folgt, dass der Spektralradius einer nicht-negativen und irreduziblen Matrix positiv ist und einem einfachen Eigenwert der Matrix entspricht. Darüber hinaus ist der zum Spektralradius gehörende Linkseigenvektor positiv. Durch Anwendung des Gerschgorin Theorems (s. z.B. [35]) folgt, dass die Eigenwerte von  $\mathcal{D}_{\text{in}}^{-1} A_G$  in einem Kreis mit dem Radius  $r = 1$  und dem Mittelpunkt Null in der komplexen Ebene liegen. Damit entspricht der Eigenwert  $\lambda = 1$  dem Spektralradius  $\sigma$ , und es existiert ein positiver Linkseigenvektor  $\eta^T$ , so dass

$$\begin{aligned} \eta^T (\sigma I - \mathcal{D}_{\text{in}}^{-1} A_G) &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta^T \mathcal{D}_{\text{in}}^{-1} (D_{\text{in}} - A_G) &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta^T \mathcal{D}_{\text{in}}^{-1} L_G &= 0 \end{aligned}$$



gilt. Somit gilt  $\gamma^T D_{in} = \eta^T$ , und die Vektoren  $\gamma$  und  $\eta$  unterscheiden sich nur durch einen positiven Skalierungsfaktor, woraus die Aussage folgt.  $\square$

## 2.3 Agenten und Multi-Agenten Systeme

Mit Ausnahme von Abschnitt 4.3 wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass sich die Dynamik der Agenten durch lineare zeitinvariante Zustandssysteme beschreiben lässt. Dabei wird unterschieden, ob die Dynamik der Agenten in einem Multi-Agenten System identisch ist, was einem homogenen Multi-Agenten System entspricht, oder ob die Dynamik der Agenten nicht identisch ist, was auf ein heterogenes Multi-Agenten System führt. Je nach betrachteter Systemklasse ergeben sich unterschiedliche Eigenschaften der Multi-Agenten Systeme, die in den späteren Entwurfsverfahren zu berücksichtigen sind. Für den Entwurf einer Regelung – ausgehend von einem linearen zeitinvarianten Zustandssystem – ist es entscheidend, ob das System steuer- und beobachtbar ist, da nur die steuer- und beobachtbaren Eigenwerte des Systems durch eine Regelung mittels Ausgangsrückführung gezielt verändert werden können. Durch eine Analyse der beiden Eigenschaften für homogene und heterogene Multi-Agenten Systeme ergeben sich daraus bereits erste Erkenntnisse, die für die Synchronisierung wesentlich sind, was in den nachfolgenden Abschnitten diskutiert wird.

### 2.3.1 Homogene Agenten und Multi-Agenten Systeme

In homogenen Multi-Agenten Systemen mit  $N$  Agenten lässt sich die Dynamik jedes Agenten für  $i = 1, \dots, N$  durch das Zustandssystem

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad (2.4a)$$

$$y_i = Cx_i \quad (2.4b)$$

beschreiben, wobei für den Zustandsvektor  $x_i \in \mathbb{R}^n$ , den Anfangswert  $x_i(t_0) = x_{i,t_0}$ , den Eingang  $u_i \in \mathbb{R}^m$  und für den Ausgang  $y_i \in \mathbb{R}^p$  gilt. Die Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  seien von passender Dimension. Durch die Kommunikation der Agenten untereinander, steht jedem Agenten die *relative Messung* seines eigenen Ausgangs (2.4b) zu den Ausgängen seiner unmittelbaren Nachbarn zur Verfügung. Er verfügt über *Relativinformation*. Mit Hilfe der Adjazenzmatrix (2.1) und der Laplacematrix (2.2) lässt sich dies durch

$$v_i = \sum_{j=1}^N a_{gij} (y_i - y_j) \quad (2.5a)$$

$$= \sum_{j=1}^N l_{gij} y_j \quad (2.5b)$$

angeben. Das Gesamtsystem bestehend aus  $N$  Agenten entsteht, indem die Rechenregeln des Kronecker Produktes ausgenutzt werden (vgl. Abschnitt B.3). Mit dem Zustand des homogenen

Multi-Agenten Systems  $x = [x_1^T \ \dots \ x_N^T]^T$  folgt daher

$$\dot{x} = (I_N \otimes A)x + (I_N \otimes B)u, \quad (2.6a)$$

$$y = (I_N \otimes C)x, \quad (2.6b)$$

wobei für den Eingang  $u = [u_1^T \ \dots \ u_N^T]^T$  und für den Ausgang  $y = [y_1^T \ \dots \ y_N^T]^T$  gilt. Damit gilt  $\dim(x) = N \cdot n$ ,  $\dim(u) = N \cdot m$  und  $\dim(y) = N \cdot p$ . Für die relativen Ausgänge des Gesamtsystems folgt ausgehend von (2.5) daher mit  $v = [v_1^T \ \dots \ v_N^T]^T$  schließlich

$$\begin{aligned} v &= (L_G \otimes I_p)(I_N \otimes C)x \\ &= (L_G \otimes C)x. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Eine Aussage über die Steuerbarkeit von (2.6) gelingt durch

**Lemma 2.6.** *Das homogene Multi-Agenten System (2.6), bzw. das Paar  $((I_N \otimes A), (I_N \otimes B))$  ist genau dann steuerbar, wenn jeder Agent (2.4) steuerbar ist.*

*Beweis.* Der einzelne Agent (2.4) ist nach Hautus genau dann steuerbar, wenn

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = n$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt. Daher ist (2.6) genau dann steuerbar, wenn

$$\text{rang} \begin{pmatrix} (I_N \otimes A) - \lambda I_{Nn} & (I_N \otimes B) \end{pmatrix} = N \cdot n$$

gilt. Da  $(I_N \otimes A) - \lambda I_{Nn} = I_N \otimes (A - \lambda I_n)$  und sich der Rang einer Matrix nicht ändert, wenn von rechts oder links mit einer quadratisch regulären Matrix multipliziert wird, lässt sich eine Permutationsmatrix  $P \in \mathbb{R}^{(Nn+Nm) \times (Nn+Nm)}$  finden, so dass

$$\begin{bmatrix} I_N \otimes (A - \lambda I_n) & (I_N \otimes B) \end{bmatrix} P = I_N \otimes \begin{bmatrix} (A - \lambda I_n) & B \end{bmatrix}$$

ist. Daraus folgt mit (B.3), dass

$$\text{rang} \begin{pmatrix} (I_N \otimes A) - \lambda I_{Nn} & (I_N \otimes B) \end{pmatrix} = \text{rang} \left( I_N \otimes \begin{bmatrix} (A - \lambda I_n) & B \end{bmatrix} \right) = N \cdot n$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  erfüllt ist. □

Die gleiche Argumentation lässt sich ebenfalls für die Untersuchung der Beobachtbarkeit von (2.6) heranziehen, indem die Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit ausgenutzt wird. Damit folgt ohne Beweis

**Lemma 2.7.** *Das homogene Multi-Agenten System (2.6), bzw. das Paar  $((I_N \otimes A), (I_N \otimes C))$  ist genau dann beobachtbar, wenn jeder Agent (2.4) beobachtbar ist.*

Beim Entwurf der Regelung für das Gesamtsystem (2.6a) ist es darüber hinaus entscheidend, welche Information von den lokalen Reglern der Agenten verarbeitet werden kann. Ausgehend von (2.4b) und (2.5b) ist die Strukturbeschränkung der Regelung zunächst dadurch gekennzeichnet, dass der Regelung lediglich Ausgangsinformation zur Verfügung steht. Zusätzlich ist zu unterscheiden, ob Absolut- und Relativinformation oder ob lediglich Relativinformation verfügbar ist. Insbesondere im letztgenannten Fall ergeben sich bereits Einschränkungen hinsichtlich der erzielbaren geregelten Dynamik, was auf die Unbeobachtbarkeit des Gesamtsystems bezüglich des Paares  $((I_N \otimes A), (L_G \otimes C))$  zurückzuführen ist.

**Lemma 2.8.** *Betrachtet wird die Dynamik des homogenen Multi-Agenten Systems (2.6a) zusammen mit den relativen Ausgängen (2.7). Ist der Kommunikationsgraph, der der Laplacematrix  $L_G$  zugrunde liegt, verbunden und ist der einzelne Agent (2.4) vollständig beobachtbar, dann existiert ein unbeobachtbarer Unterraum des Gesamtsystems der Dimension  $n$ .*

*Beweis.* Da der Kommunikationsgraph verbunden ist, ist der Eigenwert  $\lambda = 0$  nach Lemma 2.3 einfach. Damit existiert eine reguläre Matrix  $V = [I_N \ V_2]$  mit  $V_2 \in \mathbb{C}^{N \times N-1}$ , die die Laplace Matrix  $L_G$  in ihre Jordan'sche Normalform  $J = \text{diag}(0, J_2)$  überführt, wobei  $J_2 \in \mathbb{C}^{N-1 \times N-1}$  alle Eigenwerte von  $L_G$  mit positivem Realteil entsprechend ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheit enthält. Mit Hilfe des Hautus Kriteriums folgt zunächst

$$\begin{aligned} & \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_N \otimes (A - \lambda I_n) \\ (L_G \otimes C) \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} V^{-1} \otimes I_n & 0 \\ 0 & V^{-1} \otimes I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N \otimes (A - \lambda I_n) \\ (L_G \otimes C) \end{bmatrix} (V \otimes I_n) \right) \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_N \otimes (A - \lambda I_n) \\ (\text{diag}(0, J_2) \otimes C) \end{bmatrix} \right) < N \cdot n, \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \end{aligned}$$

aufgrund der Blockdiagonalstruktur der resultierenden Matrix. Dies zeigt, dass das Gesamtsystem nicht vollständig beobachtbar ist. Mit Hilfe der Koordinatentransformation  $\bar{x} = (V^{-1} \otimes I_n)x$  folgt daher mit

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (I_N \otimes A)\bar{x} + (V^{-1} \otimes B)u, \\ v &= (L_G V \otimes C)\bar{x} = ([0 \ L_G V_2] \otimes C) \bar{x} \end{aligned}$$

eine Kalman Zerlegung des Gesamtsystems, wobei hierzu vorausgesetzt werden muss, dass das Paar  $(I_{N-1} \otimes A), (L_G V_2 \otimes C)$  vollständig beobachtbar ist. Dies ist allerdings stets erfüllt, da

$$\begin{aligned} & \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes (A - \lambda I_n) \\ (L_G V_2 \otimes C) \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_{(N-1)n} & 0 \\ 0 & \text{diag}(1, J_2^{-1}) \end{bmatrix} V^{-1} \otimes I_p \begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes (A - \lambda I_n) \\ (L_G V_2 \otimes C) \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes (A - \lambda I_n) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-1} \end{bmatrix} \otimes C \end{bmatrix} \right) = (N-1)n, \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \end{aligned}$$

aufgrund von Lemma 2.7 gilt. Somit existiert ein unbeobachtbarer Unterraum des Gesamtsystems der Dimension  $n$ , da genau einmal die Dynamik von  $A$  gemäß der Kalman Zerlegung nicht beobachtbar ist.  $\square$

Die Aussagen von Lemma 2.8 lassen sich auch anschaulich interpretieren. Aufgrund der relativen Messgrößen (2.7) erfasst jeder Agent nur die Abweichung des eigenen Ausgangs von den Ausgängen der Agenten, die mit ihm kommunizieren. Eine Bestimmung des absoluten Ausgangs aus dieser Information ist nicht möglich. Besitzt die Matrix  $A$  darüber hinaus Eigenwerte mit nicht-negativem Realteil, so folgt daraus, dass sich das Gesamtsystem mittels einer Ausgangsrückführung nicht stabilisieren lässt. Wie allerdings im Verlauf der Arbeit noch gezeigt wird, ist dies für die Synchronisierung des Gesamtsystems auch nicht notwendig, da, wie eingangs dargestellt wurde, nach der Synchronisierung eine Bewegung des Gesamtsystems verbleibt. Dies entspricht genau der identischen Bewegung aller Agenten und mit Lemma 2.8 ist damit auch ein systemtheoretisches Konzept verknüpft, was unter einer synchronen Trajektorie verstanden wird: Synchronische Trajektorien sind diejenigen Trajektorien des Gesamtsystems, die bezüglich den relativen Ausgängen unbeobachtbar sind.

### 2.3.2 Heterogene Agenten und Multi-Agenten Systeme

In heterogenen Multi-Agenten Systemen mit  $N$  Agenten lässt sich die Dynamik jedes Agenten für  $i = 1, \dots, N$  durch das Zustandssystem

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad (2.8a)$$

$$y_i = C_i x_i \quad (2.8b)$$

beschreiben, wobei für den Zustandsvektor  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ , den Anfangswert  $x_i(t_0) = x_{i,t_0}$ , den Eingang  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  und für den Ausgang  $y_i \in \mathbb{R}^p$  gilt. Die Matrizen  $A_i$ ,  $B_i$  und  $C_i$  seien von passender Dimension. Im Unterschied zu homogenen Multi-Agenten Systemen muss offensichtlich nicht vorausgesetzt werden, dass die Agenten identische Zustands- und Eingangsdimensionen besitzen. Lediglich die Ausgangsdimension muss als identisch vorausgesetzt werden, da nur die Synchronisierung von Ausgängen mit identischen physikalischen Eigenschaften eine praktische Bedeutung hat.

Durch die Kommunikation der Agenten untereinander, steht jedem Agenten auch in heterogenen Systemen die *relative Messung* seines eigenen Ausgangs (2.8b) zu den Ausgängen seiner unmittelbaren Nachbarn zur Verfügung. Mit Hilfe der Laplacematrix (2.2) lässt sich dies wieder durch

$$v_i = \sum_{j=1}^N l_{gij} y_j = \sum_{j=1}^N l_{gij} C_j x_j \quad (2.9)$$

angeben. Das Gesamtsystem bestehend aus  $N$  Agenten entsteht auch hier, indem die Zustandsvektoren aller Agenten gemäß  $x = [x_1^T \ \dots \ x_N^T]^T$  zusammengefasst werden. Zu beachten ist

hierbei, dass die Zustands- und Eingangsdimensionen der einzelnen Agenten unterschiedlich sein können. Daher gilt für die Zustandsdimension

$$n = \sum_{i=1}^N n_i \quad (2.10)$$

und für die Eingangsdimension

$$m = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (2.11)$$

Das gesamte heterogene Multi-Agenten System lässt sich durch

$$\dot{x} = \tilde{A}_N x + \tilde{B}_N u, \quad (2.12a)$$

$$y = \tilde{C}_N x \quad (2.12b)$$

darstellen, wobei hierbei die abkürzende Schreibweise für Blockdiagonalmatrizen gemäß

$$\tilde{A}_N = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_N = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_N = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_N \end{bmatrix}$$

verwendet wird. Damit gilt  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  und  $y \in \mathbb{R}^{N \cdot p}$ . Für die relativen Ausgänge des Gesamtsystems folgt ausgehend von (2.9) daher mit  $v = [v_1^T \ \dots \ v_N^T]^T$  schließlich

$$v = (L_G \otimes I_p) \tilde{C}_N x. \quad (2.13)$$

Eine Aussage über die Steuerbarkeit von (2.12) gelingt auch im heterogenen Fall durch

**Lemma 2.9.** *Das heterogene Multi-Agenten System (2.12) bzw. das Paar  $(\tilde{A}_N, \tilde{B}_N)$  ist genau dann steuerbar, wenn jeder Agent (2.8) steuerbar ist.*

*Beweis.* Nach Kalman ist der Agent (2.8), also das Paar  $(A_i, B_i)$ , genau dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$C_{i,j} := \begin{bmatrix} B_i & A_i B_i & \dots & A_i^j B_i \end{bmatrix}$$

vollen Zeilenrang für  $j = n_i - 1$  hat (vgl. Abschnitt C). Das Gesamtsystem (2.12) ist demnach genau dann steuerbar, wenn für die Steuerbarkeitsmatrix des heterogenen Multi-Agenten Systems

$$\tilde{C} := [\tilde{B}_N \quad \tilde{A}_N \tilde{B}_N \quad \dots \quad \tilde{A}_N^{n-1} \tilde{B}_N]$$

$\text{rang}(\tilde{C}) = n$  mit  $n$  aus (2.10) gilt. Es lässt sich nun aufgrund der Blockdiagonalstruktur der Matrizen  $\tilde{A}_N$  und  $\tilde{B}_N$  eine Permutationsmatrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $m$  aus (2.11) finden, so dass  $\tilde{C}P = \text{diag}(C_{1,n}, \dots, C_{N,n})$  gilt. Da  $n_i < n$  und somit  $\text{rang}(C_{i,n_i}) = \text{rang}(C_{i,n}) = n_i$ , folgt aufgrund der Blockdiagonalstruktur von  $\text{diag}(C_{1,n}, \dots, C_{N,n})$  mit (2.10)

$$\text{rang}(\tilde{C}) = \text{rang}(\text{diag}(C_{1,n}, \dots, C_{N,n})) = \sum_{i=1}^N \text{rang}(C_{i,n}) = \sum_{i=1}^N n_i = n,$$

was die Aussage beweist. □

Auch bei heterogenen Multi-Agenten Systemen lässt sich die gleiche Argumentation für die Untersuchung der Beobachtbarkeit von (2.12) heranziehen, indem die Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit ausgenutzt wird. Damit folgt ebenfalls wie im homogenen Fall ohne Beweis

**Lemma 2.10.** *Das heterogene Multi-Agenten System (2.12) bzw. das Paar  $(\tilde{A}_N, \tilde{C}_N)$  ist genau dann beobachtbar, wenn jeder Agent (2.8) beobachtbar ist.*

Im Hinblick auf homogene Multi-Agenten Systeme ist mit den Lemmata 2.9 und 2.10 ein heterogenes Äquivalent gegeben. Es stellt sich die Frage, ob nun auch heterogene Multi-Agenten Systeme bezüglich den relativen Ausgängen (2.13) stets unbeobachtbar sind, wie es im homogenen Fall durch Lemma 2.8 gezeigt wurde. Aus der Anschauung heraus und im Hinblick auf Lemma 2.8, ist zu erwarten, dass, falls bei heterogenen Agenten Teildynamiken existieren, die identisch und an den Ausgängen in gleicher Weise sichtbar sind, auch dann diese Teildynamiken bezüglich den relativen Ausgängen unbeobachtbar sind. Dieser Sachverhalt wird nachfolgend zusammengefasst.

**Lemma 2.11.** *Betrachtet wird die Dynamik des heterogenen Multi-Agenten Systems (2.12a) bezüglich der relativen Ausgänge (2.13). Darüber hinaus sei der Kommunikationsgraph, der der Laplacematrix  $L_G$  zugrunde liegt, verbunden. Dann ist das heterogene Multi-Agenten System bezüglich den relativen Ausgängen (2.13) und somit das Paar  $(\tilde{A}_N, (L_G \otimes I_p)\tilde{C}_N)$  genau dann unbeobachtbar, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Es existiert mindestens ein Eigenwert  $\lambda_*$  von  $\tilde{A}_N$ , der auch Eigenwert von  $A_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  ist.*
2. *Es gilt  $C_i v_i = C_j v_j$  für alle  $i, j$  mit  $A_i v_i = \lambda_* v_i$  für alle  $i$ .*

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ) Wenn  $\lambda_*$  Eigenwert von  $A_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  ist, dann ist  $v_i$  der dazugehörige Rechtseigenvektor, und es gilt  $A_i v_i = \lambda_* v_i$  für alle  $i$ . Aufgrund der Blockdiagonalstruktur ist dann auch  $v = \begin{bmatrix} v_1^T & \dots & v_N^T \end{bmatrix}^T$  Rechtseigenvektor von  $\tilde{A}_N$ , da  $\tilde{A}_N v = \lambda_* v$  gilt. Mit Hilfe des Hautus Kriteriums und den Rechenregeln des Kronecker Produkts folgt dann

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \tilde{A}_N - \lambda_* I_n \\ (L_G \otimes I_p)\tilde{C}_N \end{bmatrix} \right) < n,$$

da aufgrund der Voraussetzung  $C_i v_i = C_j v_j$  für alle  $i, j$  mit  $C_i v_i =: r$  der Zusammenhang  $\tilde{C}_N v = 1_N \otimes r$  gilt. Da der Kommunikationsgraph verbunden ist, gilt  $L_G 1_N = 0$ , und daher folgt mit

$$(L_G \otimes I_p)\tilde{C}_N v = (L_G \otimes I_p)(1_N \otimes r) = (L_G 1_N \otimes r) = 0$$

die Aussage.

( $\Leftarrow$ ) Das Ergebnis folgt nach Anwendung derselben Argumente in umgekehrter Reihenfolge.  $\square$

Mit Lemma 2.11 ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium gegeben, um zu überprüfen, ob es bei einem gegebenen heterogenen Multi-Agenten System bereits Eigenbewegungen gibt, die an den relativen Ausgängen unbeobachtbar sind. Dies entspricht genau den Eigenwerten, die allen Agenten gemeinsam sind und die an den Ausgängen in identischer Weise sichtbar sind. Im Hinblick auf die Aussage von Lemma 2.8 im homogenen Fall lässt sich daraus schließen, dass jeder Agent eine Teildynamik aufweist, die bei allen Agenten identisch ist. Da die verbleibenden Eigenbewegungen steuer- und beobachtbar sind, lassen sich diese dann durch eine Regelung stabilisieren, und es verbleibt die unbeobachtbare Dynamik im geschlossenen Regelkreis. Im Gegensatz zum homogenen Fall ist die Dimension des unbeobachtbaren Unterraums a priori nicht bekannt und muss daher ausgehend von den einzelnen Systembeschreibungen ermittelt werden. Darüber hinaus lässt sich, falls das heterogene Multi-Agenten System bezüglich den relativen Ausgängen detektierbar ist, das Gesamtsystem stabilisieren, was bei homogenen Agenten mit instabiler Dynamik grundsätzlich nicht möglich ist.

### 2.3.3 Synchronisierung

Nach der Einführung der in dieser Arbeit betrachteten Systemklassen und der Untersuchung der mit diesen Systemklassen assoziierten systemtheoretischen Eigenschaften, ist nun zu klären, welche Aufgabe der in dieser Arbeit zu entwickelnden strukturbeschränkten Regelungsverfahren zuteil wird. Ausgehend von der in Abschnitt 1.2 dargestellten Literatur zu Multi-Agenten Systemen, ist hierbei stets eine der zentralen Aufgaben die Synchronisierung von Ausgangs- oder Zustandsgrößen der Agenten. Formal ergibt sich

**Definition 2.12** ([17]). *Betrachtet werden homogene Multi-Agenten Systeme gemäß (2.6) und heterogene Multi-Agenten Systeme gemäß (2.12) mit  $N$  Agenten. Die Agenten erzielen Ausgangssynchronisierung, wenn*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (2.14)$$

erfüllt ist.

Angemerkt sei, dass durch die Wahl von  $y_i(t) = x_i(t)$  die Zustandssynchronisierung als Spezialfall in der Definition von Ausgangssynchronisierung enthalten ist. Aufgrund der Forderung, dass die Ausgangsdifferenzen bzw. Zustandsdifferenzen aller Agenten asymptotisch verschwinden sollen, wird offensichtlich, dass hierbei eine Verbindung zu den Ergebnissen zur Beobachtbarkeit der Multi-Agenten Systeme bezüglich den relativen Ausgängen in den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 besteht. Die Synchronisierung von homogenen und heterogenen Multi-Agenten Systemen ist daher mit der Identifikation eines unbeobachtbaren Unterraums des Gesamtsystems gleichzusetzen, dem durch eine Regelung gezielt die Eigenschaft der *Attraktivität* verliehen werden muss.

## 2.4 Problemstellung und Beiträge der Arbeit

Ausgehend von der Einführung des Agentenbegriffs, den graphentheoretischen Grundlagen und der Einführung und Untersuchung der grundlegenden Eigenschaften homogener und heterogener Multi-Agenten Systeme in den voran gegangenen Abschnitten, soll nun kurz die Problemstellung dieser Arbeit zusammengefasst werden:

- Ausgangspunkt der Betrachtungen ist eine Systembeschreibung eines homogenen oder heterogenen Multi-Agenten Systems gemäß (2.6) oder (2.12).
- Die Agenten kommunizieren untereinander. Somit steht jedem Agenten eine relative Messung seines Ausgangs zu den Ausgängen seiner Nachbarn zur Verfügung, was mittels der Struktur des Netzwerks modelliert wird.
- Es ist für jeden Agenten eine Regelung zu entwerfen, die Zugriff auf die relativen Messungen hat, mit dem Ziel, asymptotisch alle Ausgänge der Agenten im Sinne von (2.14) zu synchronisieren.

Zur Lösung der vorgenannten Problemstellung werden in dieser Arbeit strukturbeschränkte Regelungsverfahren entwickelt. Dabei ist unter Strukturbeschränkung zu verstehen, dass zunächst auf die Annahme verzichtet wird, den kompletten Zustandsvektor des Agenten messtechnisch zu erfassen. In diesem Zusammenhang werden zunächst in Kapitel 3 verschiedene Methoden vorgestellt, um für ein Zustandssystem eine Ausgangsrückführung zu entwerfen. Es wird dabei zwischen Methoden unterschieden, die eine exakte Eigenwertvorgabe oder eine Polbereichsvorgabe des geschlossenen Regelkreises ermöglichen. Die Anwendung der Verfahren zum Entwurf von Ver- und Entkopplungsregeln wird ebenso diskutiert wie die robuste Eigenwertvorgabe.

Die Anwendung der Entwurfsverfahren zur Synchronisierung von Multi-Agenten Systemen erfolgt in den Kapiteln 4 und 5, wobei hier die Strukturbeschränkung der Regelung durch die Hinzunahme der Kommunikation der Agenten untereinander berücksichtigt werden muss. In Kapitel 4 erfolgt der Entwurf der Regelung daher zunächst unter der Annahme, dass der Agent Kenntnis über seinen absoluten Ausgang besitzt. Dies eröffnet weitreichende Möglichkeiten, um die dynamischen Eigenschaften des Agenten, wie er sich im gesamten Multi-Agenten System darstellt, zu verändern. Abschließend gelingt es, ein adaptives Entwurfsverfahren zur Synchronisierung nichtlinearer Agenten mit Vektorrelativgrad eins anzugeben, wobei in diesem Fall die Kenntnis des vollständigen Zustands des Agenten vorausgesetzt werden muss.

In Kapitel 5 ist die Kenntnis von Absolutinformation keine Voraussetzung mehr. Es wird daher ein dezentrales Entwurfsverfahren zur Synchronisierung von Multi-Agenten Systemen entwickelt, welches die Synchronisierung aller Agenten auf eine vorab festgelegte Trajektorie ermöglicht. Die Verifikation der Ergebnisse aus den Kapiteln 3, 4 und 5 erfolgt abschließend in Kapitel 6, wobei zur Verdeutlichung der Ergebnisse aus Kapitel 3 zusätzlich Messergebnisse von einem Laboraufbau einer xy-Positioniereinheit präsentiert werden.



## 3 Entwurf strukturbeschränkter Rückführungen

Zum Entwurf von Multi-Agenten Systemen ist ein methodisches Werkzeug notwendig, welches die Parametrierung der lokalen Regler aller Agenten ermöglicht. Deshalb werden in diesem Kapitel Entwurfsverfahren vorgestellt, die die Berechnung von Ausgangsreglern für lineare, zeitinvariante Systeme gestatten, da dies den Ausgangspunkt für die Synchronisierung von Multi-Agenten Systemen in den Kapiteln 4 und 5 darstellt.

Zunächst wird ein parametrisches Entwurfsverfahren eingeführt, was unter der Voraussetzung einer aus der Literatur bekannten Bedingung an die Anzahl der Zustands-, Eingangs- und Ausgangsgrößen die vollständige Vorgabe der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises ermöglicht. Da bei Mehrgrößensystemen stets noch weitere Freiheitsgrade neben den Regelungseigenwerten existieren, wird daran anknüpfend gezeigt, wie diese unter Formulierung eines Optimierungsproblems genutzt werden können, um gezielt Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises hinsichtlich einer robusten Eigenstrukturvorgabe zu verbessern. Dies führt auf die robuste Eigenwertvorgabe. Darüber hinaus gelingt die Anwendung des Verfahrens ebenfalls, wenn gezielt das Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises beeinflusst werden soll, was am Beispiel der Ver- und Entkopplungsregelung gezeigt wird.

Sollen die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises nicht an festen Stellen der komplexen Ebene zum Liegen kommen sondern vielmehr in einem vorab vorzugebenden Bereich, dann führt dies zur Vorgabe von Eigenwertbereichen. Hierzu wird zunächst ein grundsätzliches Vorgehen diskutiert und im Anschluss mit dem parametrischen Ansatz kombiniert. Daraus resultiert ein teilparametrisches Verfahren. Eine nutzbringende Anwendung dieser Methodik wird am Beispiel der robusten Entkopplungsregelung vorgestellt.

### 3.1 Parametrisches Entwurfsverfahren für statische Ausgangerückführungen

Neben den Frequenzbereichsmethoden, wie beispielsweise der  $H_\infty$ - oder  $H_2$ -Regelungssynthese, hat sich im Zeitbereich die Vorgabe der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises beziehungsweise in der regelungstechnischen Literatur meist als *Polvorgabe* bezeichnete Methodik als eines der meist verwendeten Werkzeuge zum Entwurf linearer Systeme durch Zustandsrückführung etabliert. So ist aus der Literatur bekannt, dass bei Eingrößensystemen die Zustandsrückführmatrix eindeutig durch die Wahl der Regelungseigenwerte festgelegt wird. Mit Hilfe der *Ackermann Formel* (vgl. z.B. [27, 76]) ist beispielsweise eine Methode gegeben, um die Rückführmatrix zu berechnen. Durch geschickte Wahl der Regelungseigenwerte lässt sich dann das transiente Verhalten des durch Zustandsrückführung geregelten Systems gezielt beeinflussen.

Im Mehrgrößenfall ist der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten des geregelten Systems und der Rückführmatrix nicht mehr eindeutig [69], so dass zu fest gewählten Regelungseigenwerten stets unendlich viele Rückführmatrizen existieren. Um dies aufzulösen, ist mit der von Roppenecker [94] eingeführten *Vollständigen Modalen Synthese* eine Methodik gegeben, um die zusätzlichen Freiheitsgrade zugänglich zu machen. Durch Einführung der invarianten Parametervektoren lassen sich damit sämtliche Freiheitsgrade einer Zustandsrückführung  $u = Rx$  anschaulich interpretieren. Die Rückführmatrix ergibt sich bei dem Ansatz nach Roppenecker aus

$$R = PV_R^{-1},$$

wobei in den Matrizen  $P$  und  $V_R$  spaltenweise die invarianten Parametervektoren  $p_i$  und die Rechtseigenvektoren des geschlossenen Regelkreises  $v_{Ri}$  zusammengefasst sind. Diese sind über den Zusammenhang

$$v_{Ri} = -(A - \lambda_{Ri}I)^{-1}Bp_i$$

verknüpft. Dieser Zusammenhang verdeutlicht, dass zusätzliche Freiheitsgrade existieren, um die Richtung des Rechtseigenvektors  $v_{Ri}$  in dem durch die Spaltenvektoren der Matrix  $(A - \lambda_{Ri}I)^{-1}B$  aufgespannten Unterraum zu verändern, was sich durch den invarianten Parametervektor  $p_i$  ausdrückt. Zusammen mit den Regelungseigenwerten  $\lambda_{Ri}$  legen nun die Richtungen der Parametervektoren – es lässt sich leicht zeigen, dass die Länge der  $p_i$  keinen zusätzlichen Freiheitsgrad darstellt – die Rückführmatrix  $R$  *vollständig* fest.

Vor diesem Hintergrund und im Hinblick auf den Entwurf von Ausgangsrückführungen ergibt sich daraus eine zentrale Fragestellung, ob sich ebenfalls Parametrierungen einer Ausgangsrückführmatrix angeben lassen, die neben der Vorgabe der Regelungseigenwerte zusätzlich, sofern vorhanden, die weiteren Freiheitsgrade in parametrischer Form zugänglich machen. Ein naheliegender Zugang zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, eine vorhandene Parametrierung einer Zustandsrückführung zu nutzen und nur solche Werte der freien Parameter zuzulassen, so dass sich aus der Zustandsrückführung eine Ausgangsrückführung ergibt [23, 92, 93]. Häufig ist hierzu allerdings ein Optimierungsproblem zu lösen, so dass diese Lösungen iterative Verfahren darstellen. Das Entwurfsverfahren zur Bestimmung einer Ausgangsrückführung, welches in den folgenden Abschnitten eingeführt und erweitert wird, ist im Gegensatz dazu nicht auf die Lösung eines Optimierungsproblems angewiesen. Es lässt sich damit direkt ein analytischer Ausdruck für die Rückführmatrix angeben. Das Vorgehen basiert in seinem Grundgedanken auf der Vollständigen Modalen Synthese und ist somit den parametrischen Ansätzen zuzurechnen. Hierbei werden die Ergebnisse aus [46] genutzt.

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist das lineare Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1a)$$

$$y = Cx, \quad (3.1b)$$

wobei für den Zustandsvektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , für den Eingangsvektor  $u \in \mathbb{R}^m$  sowie für den Ausgangsvektor  $y \in \mathbb{R}^p$  gilt. Zunächst wird vereinfachend Steuerbarkeit von  $(A, B)$  und Beobachtbarkeit

von  $(A, C)$  vorausgesetzt. Ziel ist die Bestimmung einer Ausgangsrückführung

$$u = Ky, \quad (3.2)$$

die die Vorgabe sämtlicher Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises an beliebigen Stellen der komplexen Ebene ermöglicht, so dass  $\sigma(A + BKC) = \Lambda_K = \{\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{Kn}\}$  gilt.

Zur Verdeutlichung der Grundidee der Methodik zum Entwurf parametrischer Ausgangsrückführungen ist es hilfreich, im Folgenden zwei duale Teilprobleme zu diskutieren. Zunächst wird der Entwurf einer Teilzustandsrückführung vorgestellt, was auf die Vorgabe einer Teilmenge von Eigenwerten und Rechtseigenvektoren des geschlossenen Regelkreises führt. Darüber hinaus ergibt sich dual dazu der Entwurf einer Teilausgangsaufschaltung, womit die Vorgabe einer Teilmenge der Eigenwerte und Linkseigenvektoren des geschlossenen Regelkreises verknüpft ist.

### 3.1.1 Vorgabe von Eigenwerten und Rechtseigenvektoren

Ausgehend von (3.2) wird mit (3.1b) offensichtlich, dass sich jede Ausgangsrückführung als spezielle Zustandsrückführung interpretieren lässt, da immer  $KC = R$  gilt. Auch im Fall einer Ausgangsrückführung muss daher die Eigenwert-/Rechtseigenvektor-Gleichung

$$(A + BKC)v_{Ki} = \lambda_{Ki}v_{Ki}$$

erfüllt sein, um in Anlehnung an die Vollständige Modale Synthese einen parametrischen Zugang zur Bestimmung von  $K$  zu erhalten. Darin bezeichnet  $\lambda_{Ki}$  einen über die Rückführung (3.2) erzeugten Eigenwert sowie  $v_{Ki}$  den dazugehörigen Rechtseigenvektor des geschlossenen Regelkreises. Äquivalent zur Eigenwert-/Eigenvektorgleichung ist daher

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda_{Ki}I) & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ki} \\ KCv_{Ki} \end{bmatrix} = 0.$$

Wird darin  $KCv_{Ki} =: p_{vi}$  als der *Steuermodus* zum Eigenwert  $\lambda_{Ki}$  definiert, folgt daraus

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda_{Ki}I) & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ki} \\ p_{vi} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

Weiterhin kann  $S_{Bi} := \begin{bmatrix} (A - \lambda_{Ki}I) & B \end{bmatrix}$  abgekürzt werden. Im Allgemeinen ist  $S_{Bi} \in \mathbb{C}^{n \times n+m}$ , da Regelungseigenwerte komplex sein können. Aufgrund der vorausgesetzten Steuerbarkeit des Paares  $(A, B)$  besitzt die Matrix  $S_{Bi}$  einen  $m$ -dimensionalen Nullraum, und es existieren Matrizen  $N_{vi}$  und  $M_{vi}$ , so dass

$$\text{kern}(S_{Bi}) = \text{bild} \left( \begin{bmatrix} N_{vi} \\ M_{vi} \end{bmatrix} \right)$$

gilt. Mit (3.3) lassen sich nun Parametervektoren  $q_{vi}$  einführen, so dass für den Rechtseigenvektor  $v_{Ki} = N_{vi}q_{vi}$  sowie für den Steuermodus  $p_{vi} = M_{vi}q_{vi}$  gilt. Daher ist

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda_{Ki}I) & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{vi} \\ M_{vi} \end{bmatrix} \cdot q_{vi} = 0 \quad (3.4)$$

äquivalent zu (3.3), woraus offensichtlich wird, dass bei einem steuerbaren Mehrgrößensystem mit  $m > 1$  neben den Regelungseigenwerten noch weitere Freiheitsgrade existieren, die es erlauben, die Richtung der Rechtseigenvektoren in dem von den Spaltenvektoren der Matrix  $N_{vi}$  aufgespannten Unterraum vorzugeben. Darüber hinaus lässt sich (3.3) durch Ausmultiplizieren und Umstellen nach  $v_{ki}$  auch als  $v_{ki} = -(A - \lambda_{ki}I)^{-1}Bp_{vi}$  schreiben, wobei darin die inverse Matrix nur dann existiert, wenn  $\lambda_{ki} \notin \sigma(A)$  gewählt wird. Daraus ergibt sich die Äquivalenz der Lösungen der Eigenwert-/Eigenvektorgleichungen (3.3) beziehungsweise (3.4) zu der eingangs des Abschnitts diskutierten Vollständigen Modalen Synthese nach Roppenecker.

Im Gegensatz zum Entwurf einer Zustandsrückführung lassen sich aufgrund der Strukturbeschränkung  $R = KC$  nicht mehr alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises über den Zusammenhang  $R = PV_R^{-1}$  vorgeben, wie nachfolgend diskutiert wird. Hierzu werden mit einem noch nicht festgelegten Index  $r$  die Matrizen

$$V_r := [v_{k1} \quad \dots \quad v_{kr}] \quad (3.5a)$$

$$Q_r := [p_{v1} \quad \dots \quad p_{vr}] \quad (3.5b)$$

definiert, die sich spaltenweise aus (3.3) bzw. (3.4) ergeben. Aufgrund der Definition des Steuermodus gemäß  $p_{vi} = KC v_{ki}$  folgt mit (3.5) das lineare Gleichungssystem

$$KC V_r = Q_r \quad (3.6)$$

in der Variable  $K$ . Diese Gleichung ist gemäß der Theorie zu linearen Gleichungssystemen sicher dann lösbar, wenn  $Q_r^T \in \text{bild}((C V_r)^T)$  erfüllt ist. Wird darüber hinaus vorausgesetzt, dass  $r \leq p$  gewählt wird, und die Matrix  $C V_r$  vollen Spaltenrang hat, dann ist für  $r < p$  die Matrix  $C V_r$  linksinvertierbar beziehungsweise für  $r = p$  quadratisch regulär. Insbesondere im ersten Fall für  $r < p$  ist die sich daraus ergebende Lösung für  $K$  nicht mehr eindeutig bestimmt, was im weiteren Verlauf zur Parametrierung der Ausgangsrückführmatrix ausgenutzt wird. Weiterhin lassen sich durch Lösung von (3.6) genau  $r$  Eigenwert-/Rechtseigenvektorpaaire  $(\lambda_{ki}, v_{ki})$  im geschlossenen Regelkreis erzeugen, wie folgendes Lemma ausgehend von den vorstehenden Diskussionen ohne Beweis zusammenfasst.

**Lemma 3.1.** *Betrachtet wird das steuer- und beobachtbare Zustandssystem (3.1). Die Ausgangsrückführung (3.2) erzeugt für  $i \in \{1, \dots, r\}$  und  $r \leq p$  die Eigenwert-/Rechtseigenvektorpaaire  $(\lambda_{ki}, v_{ki})$ , wenn  $\text{rang}(C V_r) = r$  gilt und für  $r = p$  die Rückführmatrix  $K$  gemäß*

$$K = Q_r(C V_r)^{-1}$$

bzw. für  $r < p$  gemäß

$$K = Q_r(C V_r)^+ + K_1 U_1$$

mit beliebigem  $K_1$  berechnet wird. Dabei ist  $U_1$  eine Basis des Linkskerns der Matrix  $C V_r$ , und somit gilt  $\text{bild}(U_1^T) = \text{kern}((C V_r)^T)$ .

Mit Lemma 3.1 folgt, dass mit dem parametrischen Ansatz ausgehend von (3.3) beziehungsweise (3.4) maximal  $p$  Eigenwert-/Rechtseigenvektorkpaare im geschlossenen Regelkreis zu erzeugen sind. Dabei stehen durch jedes  $(\lambda_{Ki}, v_{Ki})$  genau  $m$  Freiheitsgrade zur Verfügung. Diese setzen sich aus dem Freiheitsgrad durch die Wahl des Regelungseigenwertes  $\lambda_{Ki}$  sowie der Richtung des Parametervektors  $q_{vi}$  zusammen, was  $m - 1$  Freiheitsgrade darstellt. Die Länge des Vektors  $q_{vi}$  ist somit unwesentlich, was sich ebenfalls an Gleichung (3.6) zusammen mit den Zusammenhängen  $v_{Ki} = N_{vi}q_{vi}$  und  $p_{vi} = M_{vi}q_{vi}$  verdeutlichen lässt. Wird jedes  $q_{vi}$  mit einem Skalierungsfaktor  $c_i \neq 0$  multipliziert, so entspricht dies der Rechtsmultiplikation von (3.6) mit der quadratisch regulären Matrix  $\text{diag}(c_1, \dots, c_r)$ , was die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert.

Somit ist für  $r = p$  die Rückführmatrix  $K$  durch die  $p$  Eigenwert-/Parametervektorkpaare  $(\lambda_{Ki}, q_{vi})$  vollständig parametrisch festgelegt. Ist allerdings  $r < p$ , so stehen noch die verbleibenden  $(p - r) \cdot m$  Freiheitsgrade zur Verfügung, was der Rückführmatrix  $K_1$  entspricht. Diese werden in Abschnitt 3.1.3 genutzt, um auch die verbleibenden  $n - r$  Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorzugeben. Zunächst ist hierzu allerdings ein dualer Ansatz zu der Methodik in diesem Abschnitt zu diskutieren, was auf die Vorgabe von Eigenwerten und Linkseigenvektoren führt.

### 3.1.2 Vorgabe von Eigenwerten und Linkseigenvektoren

Da der Entwurf einer Zustandsrückführung und der Entwurf einer Ausgangsaufschaltung zueinander duale Entwurfsprobleme sind, lässt sich ausgehend von dem vorangegangenen Abschnitt sowie von (3.2) und (3.1b) ebenfalls argumentieren, dass sich jede Ausgangsrückführung als spezielle Ausgangsaufschaltung interpretieren lässt, da immer  $BK = L$  ist. Wird nun das Eigenwert/Linkseigenvektor Problem

$$w_{Ki}^T (A + BKC) = \lambda_{Ki} w_{Ki}^T$$

betrachtet, folgt in dualer Weise zu (3.3) durch Transponieren zunächst

$$\left[ (A^T - \lambda_{Ki} I) \quad C^T \right] \begin{bmatrix} w_{Ki} \\ K^T B^T w_{Ki} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.7)$$

Darin wird  $K^T B^T w_{Ki} =: p_{wi}$  als der *Messmodus* zum Eigenwert  $\lambda_{Ki}$  definiert, woraus

$$\left[ (A^T - \lambda_{Ki} I) \quad C^T \right] \begin{bmatrix} w_{Ki} \\ p_{wi} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

folgt. Weiterhin kann  $S_{Ci} := \left[ (A^T - \lambda_{Ki} I) \quad C^T \right]$  abgekürzt werden. Im Allgemeinen ist  $S_{Ci} \in \mathbb{C}^{n \times n + p}$ , da Regelungseigenwerte komplex sein können. Aufgrund der vorausgesetzten Beobachtbarkeit des Paares  $(C, A)$  besitzt die Matrix  $S_{Ci}$  einen  $p$ -dimensionalen Nullraum, und es existieren Matrizen  $N_{wi}$  und  $M_{wi}$ , so dass

$$\text{kern}(S_{Ci}) = \text{bild} \left( \begin{bmatrix} N_{wi} \\ M_{wi} \end{bmatrix} \right)$$

gilt. Mit (3.8) lassen sich nun Parametervektoren  $q_{wi}$  einführen, so dass für den Linkseigenvektor  $w_{Ki} = N_{wi}q_{wi}$  sowie für den Messmodus  $p_{wi} = M_{wi}q_{wi}$  gilt. Daher ist

$$\left[ (A^T - \lambda_{Ki} I) \quad C^T \right] \begin{bmatrix} N_{wi} \\ M_{wi} \end{bmatrix} q_{wi} = 0 \quad (3.9)$$

äquivalent zu (3.8), woraus offensichtlich wird, dass bei einem beobachtbaren Mehrgrößensystem mit  $p > 1$  neben den Regelungseigenwerten noch weitere Freiheitsgrade existieren, die es erlauben, die Richtung der Linkseigenvektoren in dem von den Spaltenvektoren der Matrix  $N_{wi}$  aufgespannten Unterraum vorzugeben.

Auch in diesem Fall lassen sich im Gegensatz zum Entwurf einer Ausgangsaufschaltung aufgrund der Strukturbeschränkung  $L = BK$  nicht mehr alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorgeben. Mit einem noch nicht festgelegten Index  $s$  werden die Matrizen

$$W_s^T := [w_{K1} \quad \dots \quad w_{Ks}] \quad (3.10a)$$

$$Q_s^T := [p_{w1} \quad \dots \quad p_{ws}] \quad (3.10b)$$

definiert, die sich spaltenweise aus (3.8) bzw. (3.9) ergeben. Aufgrund der Definition des Messmodus gemäß  $p_{wi} = K^T B^T w_{Ki}$  folgt mit (3.10) daraus das lineare Gleichungssystem

$$W_s B K = Q_s \quad (3.11)$$

in der Variable  $K$ . Auch diese Gleichung ist gemäß der Theorie zu linearen Gleichungssystemen sicher dann lösbar, wenn  $Q_s \in \text{bild}(W_s B)$  erfüllt ist. Wird darüber hinaus vorausgesetzt, dass  $s \leq m$  gewählt wird, und die Matrix  $W_s B$  vollen Zeilenrang hat, dann ist für  $s < m$  die Matrix  $W_s B$  rechtsinvertierbar beziehungsweise für  $s = m$  quadratisch regulär. Insbesondere im ersten Fall für  $s < m$  ist die sich daraus ergebende Lösung für  $K$  nicht mehr eindeutig bestimmt, was im weiteren Verlauf zur Parametrierung der Ausgangsrückführmatrix ausgenutzt werden kann. Weiterhin lassen sich durch Lösung von (3.11) genau  $s$  Eigenwert-/Linkseigenvektorkpaare  $(\lambda_{Ki}, w_{Ki})$  im geschlossenen Regelkreis erzeugen, wie folgendes Lemma aufgrund der Dualität zu Lemma 3.1 ohne Beweis zusammenfasst.

**Lemma 3.2.** *Betrachtet wird das steuer- und beobachtbare Zustandssystem (3.1). Die Ausgangsrückführung (3.2) erzeugt für  $i \in \{1, \dots, s\}$  und  $s \leq m$  die Eigenwert-/Linkseigenvektorkpaare  $(\lambda_{Ki}, w_{Ki})$ , wenn rang  $(W_s B) = s$  gilt und für  $s = m$  die Rückführmatrix  $K$  gemäß*

$$K = (W_s B)^{-1} Q_s$$

bzw. für  $s < m$  gemäß

$$K = (W_s B)^+ Q_s + U_2 K_2$$

mit beliebigem  $K_2$  berechnet wird. Dabei ist  $U_2$  eine Basis des Rechtskerns der Matrix  $W_s B$ , und somit gilt  $\text{bild}(U_2) = \text{kern}(W_s B)$ .

Auch in diesem Fall ist mit Lemma 3.2 gezeigt, dass sich mit dem parametrischen Ansatz ausgehend von (3.8) beziehungsweise (3.9) maximal  $m$  Eigenwert-/Linkseigenvektorkopare im geschlossenen Regelkreis erzeugen lassen. Dabei stehen durch jedes  $(\lambda_{Ki}, w_{Ki})$  genau  $p$  Freiheitsgrade zur Verfügung. Diese setzen sich aus dem Freiheitsgrad durch die Wahl des Regelungseigenwertes  $\lambda_{Ki}$  sowie der Richtung des Parametervektors  $q_{wi}$  zusammen, was  $p - 1$  Freiheitsgrade darstellt. Die Länge des Vektors  $q_{wi}$  ist, wie die Länge des Vektors  $q_{vi}$  im vorhergehenden Abschnitt, unwesentlich. Somit ist für  $s = m$  die Rückführmatrix  $K$  durch die  $m$  Eigenwert-/Parametervektorkopare  $(\lambda_{Ki}, q_{wi})$  vollständig parametrisch festgelegt. Ist allerdings  $s < m$ , so stehen noch die verbleibenden  $(m - s) \cdot p$  Freiheitsgrade zur Verfügung, was der Rückführmatrix  $K_2$  entspricht.

### 3.1.3 Berechnung der Rückführmatrix

In den Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2 wurde aufgezeigt, dass sich ausgehend von der Systembeschreibung (3.1) die Ausgangsrückführung (3.2) auf zwei verschiedene, duale Herangehensweisen bestimmen lässt. Dabei lassen sich bei der Vorgabe von Rechtseigenvektoren maximal  $p$  Rechtseigenmoden beziehungsweise bei der Vorgabe von Linkseigenvektoren maximal  $m$  Linkseigenmoden vorgeben. Ist dabei  $p = n$  oder  $m = n$ , dann ergibt sich dadurch der Spezialfall einer Zustandsrückführung beziehungsweise einer Ausgangsaufschaltung. Weiterhin wurde auch deutlich, dass in den Fällen  $r < p$  und  $s < m$  stets noch weitere Freiheitsgrade durch die Rückführmatrizen  $K_1$  und  $K_2$  zur Verfügung stehen, um  $K$  noch weiter zu verändern. Dies motiviert das nachfolgend dargestellte Vorgehen, welches darin besteht, die beiden in den Lemmata 3.1 und 3.2 festgehaltenen Ergebnisse zu kombinieren, um so einen geschlossenen analytischen Ausdruck für  $K$  anzugeben, womit alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorgegeben werden können.

Wird daher in Lemma 3.1 die spezielle Wahl  $r = p - 1$  getroffen und der volle Spaltenrang von  $C V_r$  angenommen, folgt daraus die Rückführmatrix

$$K = Q_r(C V_r)^+ + K_1 U_1 = K_0 + K_1 U_1 \quad (3.12)$$

mit  $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  und  $U_1 \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ , da  $U_1 C V_r = 0$  mit  $C V_r \in \mathbb{C}^{p \times p-1}$  erfüllt sein muss. Wird nun (3.12) in (3.2) und dann in (3.1a) eingesetzt, so folgt daraus für die Dynamik des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{x} = (A + B K_0 C + B K_1 U_1 C) x.$$

Wird in dieser Gleichung

$$A_1 := A + B Q_r(C V_r)^+ C, \quad (3.13a)$$

$$C_1 := U_1 C \quad (3.13b)$$

abgekürzt, so folgt daraus das über (3.12) geregelte Zustandssystem

$$\dot{x} = (A_1 + B K_1 C_1) x, \quad (3.14a)$$

$$y_1 = C_1 x, \quad (3.14b)$$

wobei durch  $K_1$  weitere Freiheitsgrade existieren, um die Dynamik von (3.14a) zu verändern. Um zu verdeutlichen, dass durch die Reglerparametrierung in (3.12), die  $p-1$  Eigenwert-/Rechtseigenvektorkopare erzeugt werden, und dass diese durch jede Wahl von  $K_1$  auch nicht mehr verändert werden, wird auf eine neue Koordinatendarstellung übergangen. Hierzu wird zunächst die Diagonalmatrix  $\Lambda_r = \text{diag}(\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{Kr})$  eingeführt. Mit (3.3), (3.5) und (3.14a) folgt daraus  $(A_1 + BK_1C_1)V_r = A_1V_r = V_r\Lambda_r$ , was die Vorgabe der Eigenwerte  $\{\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{Kr}\}$  zeigt. Zum Übergang auf eine neue Koordinatendarstellung wird eine Matrix  $T_\perp$  mit orthogonalen Spaltenvektoren bestimmt, die  $\text{bild}(T_\perp) = \text{kern}(V_r^T)$  sowie  $T_\perp^T T_\perp = I_{n-r}$  erfüllt. Daraus folgt die neue Koordinatendarstellung aus  $\tilde{x} = [V_r \ T_\perp]^{-1}x$  sowie mit  $[V_r \ T_\perp]^{-1} = [W_r \ T_\perp]^T$ , und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W_r^T A_1 V_r & W_r^T (A_1 + BK_1 C_1) T_\perp \\ T_\perp^T A_1 V_r & T_\perp^T (A_1 + BK_1 C_1) T_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} \Lambda_r & W_r^T A_1 T_\perp \\ 0 & T_\perp^T A_1 T_\perp \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_r^T B \\ T_\perp^T B \end{bmatrix} K_1 \begin{bmatrix} 0 & C_1 T_\perp \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \\ y_1 &= [0 \ C_1 T_\perp] \tilde{x}, \end{aligned}$$

was eine Kalman Zerlegung von (3.14) darstellt. Aufgrund der Blockdreiecksstruktur der resultierenden Systemmatrix, lässt sich schließen, dass der Teilzustand  $\tilde{x}_1$  bezüglich des Ausgangs  $y_1$  nicht beobachtbar ist, weshalb die Eigenwerte  $\{\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{Kr}\}$  über die Ausgangsrückführung  $K_1$  auch nicht mehr verändert werden. Die verbleibenden Eigenwerte der Matrix sind allerdings noch über  $K_1$  verschiebbar, weshalb Lemma 3.2 zur Vorgabe der Eigenwerte genutzt werden kann. Allerdings muss in diesem Fall anstatt von (3.1) von (3.14) ausgegangen werden, weshalb (3.8) bzw. (3.9) zu

$$[(A_1^T - \lambda_{Ki} I) \ C_1^T] \begin{bmatrix} w_{Ki} \\ p_{wi} \end{bmatrix} = [(A_1^T - \lambda_{Ki} I) \ C_1^T] \begin{bmatrix} N_{wi} \\ M_{wi} \end{bmatrix} q_{wi} = 0 \quad (3.15)$$

für  $i \in \{r+1, \dots, n\}$  modifiziert werden müssen. Allerdings ist in diesem Fall  $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  und daher  $\dim(\text{kern}([(A_1^T - \lambda_{Ki} I) \ C_1^T])) = 1$ , weshalb durch die spezielle Wahl  $r = p-1$  keine Freiheitsgrade durch die Parametervektoren  $q_{wi}$  für  $i \in \{r+1, \dots, n\}$  zur Verfügung stehen. Nur über die Wahl der Regelungseigenwerte lässt sich damit die Dynamik des geschlossenen Regelkreises noch gezielt beeinflussen. Darüber hinaus resultiert der Index  $s$  aus  $n-r = s$ . Im Hinblick auf Lemma 3.2 muss daher  $m \geq s$  gefordert werden, um über den modifizierten Zusammenhang  $K_1$  für  $s = m$  aus

$$K_1 = (W_s B)^+ Q_s$$

beziehungsweise für  $s < m$  aus

$$K_1 = (W_s B)^+ Q_s + U_2 K_2$$

zu berechnen. Ist allerdings  $m \geq s = n-r$ , so muss ebenfalls mit  $r = p-1$  die Ungleichung  $m \geq n-p+1$  beziehungsweise

$$m + p \geq n + 1 \quad (3.16)$$



erfüllt sein. Diese Ungleichung ist in der Literatur auch als *Bedingung nach Kimura* (engl. *Kimura's condition*) bekannt und geht auf die Ergebnisse in [43] zurück. Darin zeigt Kimura, dass (3.16) hinreichend für die generische *Polzuweisbarkeit* mittels reeller Rückführmatrix  $K$  ist, wenn das Zustandssystem steuer- und beobachtbar sowie die Menge der Regelungseigenwerte selbst-konjugiert ist und die Regelungseigenwerte paarweise verschieden gewählt werden. Dabei ergibt sich die Definition einer selbst-konjugierten Menge bestehend aus paarweise verschiedenen Eigenwerten zu

$$\mathcal{D}_n = \{\lambda_k \in \mathbb{C} \mid k \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda \in \mathcal{D}_n \Rightarrow \lambda^* \in \mathcal{D}_n\}. \quad (3.17)$$

Die Eigenwerte einer selbst-konjugierten Menge  $\mathcal{D}_n$  sind somit symmetrisch zur reellen Achse. Damit folgt der nachstehende Satz.

**Satz 3.3** (Polzuweisbarkeit nach Kimura [43]). *Wenn das Zustandssystem (3.1) steuer- und beobachtbar sowie die Bedingung (3.16) erfüllt ist, dann ist es polzuweisbar. Für jede selbst-konjugierte Menge  $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n\} \in \mathcal{D}_n$  existieren  $\lambda_i$  in der Umgebung von  $\tilde{\lambda}_i$ , so dass ein reelles  $K$  mit  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathcal{D}_n$  und  $\sigma(A + BKC) = \Lambda$  existiert.*

Im Hinblick auf das Resultat in Satz 3.3 lässt sich ausgehend von den Diskussionen in diesem Abschnitt über die Kombination der beiden Ansätze in den Lemmata 3.1 und 3.2 festhalten, dass damit direkt eine Möglichkeit der Parametrierung der Ausgangsrückführung (3.2) gegeben ist, wenn die Bedingung nach Kimura (3.16) erfüllt ist. Bemerkenswert hierbei ist, dass sich die Ausgangsrückführung ausgehend von der Lösung zweier linearer Gleichungssystemen (3.6) und (3.11) ergibt. Zudem ist zu erwähnen, dass mit Satz 3.3 auch folgt, dass für Zustandssysteme gemäß (3.1) Mengen von Regelungseigenwerten aus  $\mathcal{D}_n$  existieren können, die mit (3.2) und reellem  $K$  nicht erzeugt werden können. Auch beim Auftreten von Übertragungsnullstellen funktioniert das Vorgehen beispielsweise nicht, wie das dritte Beispiel in [43] zeigt. Damit lässt sich ebenfalls die sogenannte *generische* Eigenschaft der Polzuweisbarkeit interpretieren, die insoweit zu verstehen ist, dass es für *fast alle*  $\tilde{\Lambda}$  möglich ist, ein reelles  $K$  zu finden, so dass  $\sigma(A + BKC) = \tilde{\Lambda}$  gilt. Mit Satz 3.3 ist daher garantiert, dass stets in der Umgebung von  $\tilde{\lambda}_i$  Eigenwerte  $\lambda_i$  existieren, so dass ein reelles  $K$  mit  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathcal{D}_n$  und  $\sigma(A + BKC) = \Lambda$  existiert. Abschließend wird das Verfahren zur Vorgabe der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mittels einer Ausgangsrückführung in dem folgenden Satz zusammengefasst.

**Satz 3.4** (Proposition 2 [46]). *Betrachtet wird das Zustandssystem (3.1) mit  $m \geq 2$  und  $p \geq 2$  sowie mit  $m + p \geq n + 1$ , d.h. die Bedingung nach Kimura (3.16) ist erfüllt. Wird die Menge der Regelungseigenwerte  $\Lambda_K \in \mathcal{D}_n$  in zwei selbst-konjugierte Mengen  $\Lambda_{K1} = \{\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{Kp-1}\}$  und  $\Lambda_{K2} = \{\lambda_{Kp}, \dots, \lambda_{Kn}\}$  aufgeteilt und sind in (3.4) für  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  die Parametervektoren  $q_{vi} \neq 0$ , in (3.15) für  $j \in \{p, \dots, n\}$  die Parametervektoren  $q_{wj} \neq 0$  sowie zu komplexen Regelungseigenwerten selbst-konjugiert, dann existiert für  $s = n - p + 1$  ein reelles  $K$  gemäß*

$$K = \begin{cases} Q_r(CV_r)^+ + (W_s B)^+ Q_s U_1, & m = s, \\ Q_r(CV_r)^+ + (W_s B)^+ Q_s U_1 + U_2 K_2 U_1, & m > s, K_2 \in \mathbb{R}^{m-s \times 1} \text{ beliebig,} \end{cases} \quad (3.18)$$

so dass  $\sigma(A + BKC) = \Lambda_K = \{\Lambda_{K1}, \Lambda_{K2}\}$ , wenn mit (3.5) und (3.10)

$$(A1) \text{ rang}(C V_r) = r = p - 1, V_r \in \mathbb{R}^{n \times p-1}$$

$$(A2) \text{ rang}(W_s B) = s, W_s \in \mathbb{R}^{s \times n}$$

erfüllt ist.

Dass in den Annahmen (A1) und (A2) in Satz 3.4 die Matrizen  $V_r$  und  $W_s$  als reellwertig angenommen werden, stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da auch bei komplexen Regelungseigenwerten eine reelle Parametrierung vorgenommen werden kann. Hierzu wird allerdings auf Abschnitt 3.1.5 verwiesen, worin ebenfalls diskutiert wird, wie mehrfache Regelungseigenwerte in den Entwurfsprozess einbezogen werden können. Darüber hinaus scheint die Bedingung von Kimura (3.16) unter praktischen Gesichtspunkten sehr restriktiv zu sein, insbesondere im Hinblick auf Systeme hoher Ordnung mit vergleichsweise wenigen Ein- und Ausgängen. Dass man sich von dieser Einschränkung stets befreien kann, indem eine dynamische Ausgangsrückführung verwendet wird, zeigt der folgende Abschnitt.

### 3.1.4 Dynamische Ausgangsrückführung

Sollte die Bedingung nach Kimura (3.16) nicht erfüllt sein, so können durch den Entwurf einer *dynamischen Ausgangsrückführung*

$$\dot{x}_d = A_d x_d + B_d y \quad (3.19a)$$

$$u = C_d x_d + D_d y \quad (3.19b)$$

mit  $x_d \in \mathbb{R}^{n_d}$  stets zusätzliche Freiheitsgrade generiert werden, um sämtliche Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorzugeben. Allerdings lässt sich der Entwurf einer dynamischen Ausgangsrückführung auf den Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung für ein erweitertes System zurückführen, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 3.5.** *Der Entwurf der dynamischen Ausgangsrückführung (3.19) für das Zustandsraumssystem (3.1) kann durch den Entwurf des statischen Regelgesetzes*

$$\begin{bmatrix} u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_d & C_d \\ B_d & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_d \end{bmatrix}$$

für das erweiterte Zustandsraumssystem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y \\ x_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

erfolgen.

*Beweis.* Das Zustandsraumssystem (3.1) und der dynamische Regler (3.19) lassen sich in die Form

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BD_dC & BC_d \\ B_dC & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_d & C_d \\ B_d & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bringen, wie sich leicht nachrechnen lässt. Damit ist der Entwurf der dynamischen Ausgangsrückführung (3.19) für das Zustandsraumssystem (3.1) auf den Entwurf der statischen Ausgangsrückführung

$$K_e := \begin{bmatrix} D_d & C_d \\ B_d & A_d \end{bmatrix}$$

für das erweiterte Zustandsraumssystem (3.20) mit  $\begin{bmatrix} x^T & x_d^T \end{bmatrix}^T =: x_e \in \mathbb{R}^{n+n_d}$  sowie der erweiterten Zustands-, Eingangs- und Ausgangsmatrix gemäß

$$A_e := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e := \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_e := \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

zurückgeführt. □

Ausgehend von den Dimensionen der erweiterten Systemmatrizen (3.21) ergibt sich für die Bedingung nach Kimura (3.16) der Zusammenhang  $m + n_d + p + n_d \geq n + n_d + 1$  beziehungsweise aus

$$n_d \geq n - m - p + 1 \quad (3.22)$$

eine untere Schranke für die benötigte Reglerordnung, die im Sinne von Satz 3.3 die Vorgabe der Eigenwerte des mittels der dynamischen Ausgangsrückführung (3.19) geregelten System garantiert.

### 3.1.5 Vorgabe komplexer und mehrfacher Eigenwerte

In Satz 3.4 wurden in den Annahmen (A1) und (A2) die Matrizen  $V_r$  und  $W_s$  als reellwertig angenommen. Dies stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar und wird in diesem Abschnitt diskutiert. Die Begründung hierfür ist, dass aufgrund  $\Lambda_K \in \mathcal{D}_n$  für einen Regelungseigenwert  $\lambda_K \in \Lambda_K$  ebenfalls  $\bar{\lambda}_K \in \Lambda_K$  erfüllt ist. Somit lässt sich auch bei komplexen Regelungseigenwerten eine reelle Parametrierung vornehmen, wie nachfolgend gezeigt wird. Ähnliche Überlegungen zu einer reellen Parametrierung aber auch zur Vorgabe mehrfacher Regelungseigenwerte finden sich ebenfalls in [64, 94]. Zur Vereinfachung der Notation wird daher, falls nötig, auf den Zählindex  $i$  verzichtet, und es sei angemerkt, dass die gleichen Überlegungen auf die Vorgabe von

Linkseigenvektoren übertragbar und damit auf die Entwurfsverfahren in den Abschnitten 3.1.1, 3.1.2 und 3.1.3 anwendbar sind. Mit  $\Lambda_K \in \mathcal{D}_n$  kann daher stets die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \lambda_{Ki} &= \sigma + j\omega & \lambda_{Ki+1} &= \bar{\lambda}_{Ki} = \sigma - j\omega \\
 v_{Ki} &= v_\sigma + jv_\omega & v_{Ki+1} &= \bar{v}_{Ki} = v_\sigma - jv_\omega \\
 p_{vi} &= p_\sigma + jp_\omega & p_{vi+1} &= \bar{p}_{vi} = p_\sigma - jp_\omega \\
 N_{vi} &= N_\sigma + jN_\omega & N_{vi+1} &= \bar{N}_{vi} = N_\sigma - jN_\omega \\
 M_{vi} &= M_\sigma + jM_\omega & M_{vi+1} &= \bar{M}_{vi} = M_\sigma - jM_\omega \\
 q_{vi} &= q_\sigma + jq_\omega & q_{vi+1} &= \bar{q}_{vi} = q_\sigma - jq_\omega
 \end{aligned}$$

gewählt werden. Das Eigenwertproblem des geschlossenen Regelkreises für ein solches komplexes Eigenwert-Paar ergibt sich daher aus

$$\begin{bmatrix} v_{Ki} & \bar{v}_{Ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{Ki} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{Ki} \end{bmatrix} - (A + BKC) \begin{bmatrix} v_{Ki} & \bar{v}_{Ki} \end{bmatrix} = 0$$

beziehungsweise mit Hilfe der Steuermoden in (3.3) aus

$$\begin{bmatrix} v_{Ki} & \bar{v}_{Ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{Ki} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{Ki} \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} v_{Ki} & \bar{v}_{Ki} \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} p_{vi} & \bar{p}_{vi} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.23)$$

Auf die Verwendung komplexer Größen zur Bestimmung der Rückführung (3.2) und aus Gründen der Konsistenz mit der Formulierung von Satz 3.4 lässt sich die komplexe Darstellung von (3.23) durch rechtsseitige Multiplikation mit der quadratisch regulären Matrix

$$T_{re} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

in eine reelle Darstellung überführen. Daraus ergibt sich

$$\begin{bmatrix} v_\sigma & v_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} v_\sigma & v_\omega \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} p_\sigma & p_\omega \end{bmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

und damit eine zu (3.23) äquivalente, reelle Darstellung sowie mit

$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{bmatrix} A - \sigma I & -\omega I & B & 0 \\ \omega I & A - \sigma I & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\sigma \\ v_\omega \\ p_\sigma \\ p_\omega \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A - \sigma I & -\omega I & B & 0 \\ \omega I & A - \sigma I & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_\sigma & -N_\omega \\ N_\omega & N_\sigma \\ M_\sigma & -M_\omega \\ M_\omega & M_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_\sigma \\ p_\omega \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

eine zu (3.3) bzw. (3.4) äquivalente, handhabbare Entwurfsgleichung.

Im Vergleich zur Vorgabe komplexer Regelungseigenwerte, die insbesondere bei der gezielten Beeinflussung schwingungsfähiger Systeme durch eine Regelung eine praktische Bedeutung haben, ist die Vorgabe mehrfacher Regelungseigenwerte unter praktischen Gesichtspunkten weniger häufig erforderlich. Als nennenswertes Beispiel ist hierbei vor allem der Entwurf auf endliche Einstellzeit bei Abtastsystemen anzuführen, da die Regelung in diesem Fall alle Regelungseigenwerte in den Ursprung der komplexen Ebene verschieben muss. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Abtastsysteme nicht behandelt, so dass eine knappe Beschreibung des Vorgehens zur Vorgabe mehrfacher Eigenwerte ausreichend ist.

Mit Hilfe der Jordan Normalform lassen sich daher auch für die Vorgabe mehrfacher Regelungseigenwerte in Anlehnung an (3.3) bzw. (3.4) handhabbare Entwurfsgleichungen herleiten. Hierzu wird die Definition eines *Hauptvektors* genutzt. Allgemein gilt für einen Hauptvektor  $j$ -ter Stufe  $v_{i,j}$  zum Eigenwert  $\lambda_i$

$$A v_{i,j} = \lambda_i v_{i,j} + v_{i,j-1}, \quad (3.25)$$

wobei für einen Hauptvektor nullter Stufe  $v_{i,0} = 0$  gilt. Damit sind Eigenvektoren Hauptvektoren erster Stufe. Um nun einen Regelungseigenwert  $\lambda_{Ki} \in \Lambda_K$   $k$ -fach vorzugeben, also einen Jordanblock

$$J_{i,k} = \begin{bmatrix} \lambda_{Ki} & 1 & & 0 \\ & \lambda_{Ki} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_{Ki} & 1 \\ 0 & & & & \lambda_{Ki} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k}$$

im geschlossenen Regelkreis mit  $(A + BKC)[v_{Ki,1} \ \dots \ v_{Ki,k}] = [v_{Ki,1} \ \dots \ v_{Ki,k}] J_{i,k}$  zu erzeugen, ergibt sich ausgehend von der Definitionsgleichung (3.25)

$$\begin{aligned} (A + BKC - \lambda_{Ki} I) v_{Ki,1} &= 0 \\ (A + BKC - \lambda_{Ki} I) v_{Ki,2} - v_{Ki,1} &= 0 \\ &\vdots \\ (A + BKC - \lambda_{Ki} I) v_{Ki,k} - v_{Ki,k-1} &= 0 \end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise und zusammen mit den Steuermoden  $p_{vi,j} = KC v_{Ki,j}$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_{Ki} I & & 0 & B & & 0 \\ -I & A - \lambda_{Ki} I & & & B & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & -I & A - \lambda_{Ki} I & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ki,1} \\ v_{Ki,2} \\ \vdots \\ v_{Ki,k} \\ p_{vi,1} \\ p_{vi,2} \\ \vdots \\ p_{vi,k} \end{bmatrix} = 0.$$

## 3.2 Beeinflussung des Stör- und Führungsverhaltens

Mit der Parametrierung der Ausgangsrückführung (3.2), die im Abschnitt 3.1 diskutiert wurde, lassen sich unter der Voraussetzung der Bedingung nach Kimura (3.16) in generischer Hinsicht stets alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises beliebig vorgeben. Hierbei ist allerdings für  $m \geq 2$  sowie  $p \geq 2$  meist auch  $m \cdot p > m + p$ , und somit existieren neben den Regelungseigenwerten noch weitere Freiheitsgrade in Form der Parametervektoren  $q_{vi}$  für  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ , die für eine weitere Beeinflussung der Dynamik des geschlossenen Regelkreises genutzt werden können.

Häufig erfolgt die Wahl der noch verbleibenden Freiheitsgrade so, dass die Regelung auch bei Störungen in den Daten der Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  stets die Stabilität der geregelten Strecke sicherstellt. In der Literatur wird dies als *robuste Eigenstrukturvorgabe* (engl. *robust exact eigenstructure assignment*, REEA) bezeichnet. Darüber hinaus ist es oft wünschenswert, die Strecke nicht mit allzu großen Stellbeträgen zu beaufschlagen, weshalb sich hierbei die Norm der statischen Rückführmatrix als ein Kriterium in der Literatur etabliert hat. Dieses Problem wird als Eigenstrukturvorgabe mit *minimaler Verstärkung* (engl. *minimum gain eigenstructure assignment*, MGEA) bezeichnet. Die vorgenannten Probleme zielen dabei meist auf die Verbesserung des Störverhaltens der geregelten Strecke ab, was im Abschnitt 3.2.1 diskutiert wird.

Soll hingegen gezielt das Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises beeinflusst werden, so wird unter praktischen Aspekten oftmals gezielt die Entkopplung der Regelgrößen oder aber auch die Einhaltung algebraischer Beziehungen zwischen einzelnen Regelgrößen gefordert. Dies führt auf den Entwurf einer Ent- bzw. Verkopplungsregelung und ist Bestandteil der Untersuchungen in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3.

### 3.2.1 Robuste Eigenwertvorgabe

Bei der Modellierung realer physikalischer Systeme, die sich in der Nähe eines Arbeitspunktes als lineare Zustandssysteme wie in (3.1) darstellen lassen, sind die Daten in den Systemmatrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  in den meisten Fällen nie exakt bekannt. Daher ist im Sinne der Stabilität der Regelung zu überprüfen, ob der geschlossene Regelkreis mit der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises  $A + BKC + \Delta$  durch die Auslegung von  $K$  weithin stabil ist, wenn die Systemmatrix durch die Matrix  $\Delta$  gestört wird. Unter praktischen Gesichtspunkten wird die Matrix  $\Delta$  nie exakt bekannt sein, weshalb zumindest Aussagen über eine obere Schranke für die Norm von  $\Delta$  in Abhängigkeit von  $K$  hilfreich sind, um die Stabilität der gestörten, geregelten Strecke zu bewerten.

Argumentationsgrundlage der folgenden Betrachtungen ist deshalb das *Bauer-Fike Theorem* in Satz B.7, welches besagt, dass für jedes  $\hat{\lambda} \in \sigma(A + BKC + \Delta)$  ein  $\lambda_K \in \Lambda_K$  existiert, so dass die Ungleichung

$$|\hat{\lambda} - \lambda_K| \leq \|V_K\| \|V_K^{-1}\| \|\Delta\| = \kappa(V_K) \|\Delta\|$$

erfüllt ist. Darin ist  $(A + BKC)V_K = V_K\Lambda_K$  und

$$\kappa(V_K) = \|V_K\| \|V_K^{-1}\| \quad (3.26)$$

bezeichnet die Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix des geregelten Systems  $V_K$ . Daraus wird ersichtlich, dass die betragsmäßige Abweichung der Eigenwerte  $\hat{\lambda} - \lambda_K$  und damit die Verschiebung der Eigenwerte des gestörten gegenüber dem ungestörten System umso geringer ausfällt, je kleiner die Konditionszahl  $\kappa(V_K)$  ist. Dies bildet den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen, die in Auszügen bereits in [109] publiziert wurden und als Erweiterung der Ergebnisse in [37] auf den Fall einer Ausgangsrückführung zu sehen sind.

In [37] untersuchen Kautsky, Nichols und Van Dooren das Problem der robusten Eigenwertvorgabe mittels Zustandsrückführung. Es sei ergänzend erwähnt, dass die Ergebnisse algorithmisch als Funktion `place` im Programmpaket MATLAB umgesetzt sind. Grundidee der Autoren ist die Nutzung der verbleibenden Freiheitsgrade einer Zustandsrückführung, die neben den Regelungseigenwerten bei Mehrgrößensystemen existieren, um die Rechtseigenvektormatrix des geschlossenen Regelkreises optimal zu konditionieren. Aufgrund des Bauer-Fike Theorems sind die vorgegebenen Eigenwerte des geregelten Systems dann weniger sensitiv gegenüber Störungen in der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises. Darüber hinaus ergeben sich mit diesem Ansatz weitere günstige Eigenschaften für die Dynamik des geregelten Systems, wie in den beiden nachfolgenden Sätzen dargestellt wird. Die Beweise finden sich ebenfalls in [37], werden aber der Vollständigkeit halber trotzdem geführt, da die Aussagen auf die Methodik im Abschnitt 3.1 angepasst wurden. Damit folgt zunächst eine Aussage über die Impulsantwort der geregelten Strecke.

**Satz 3.6** ([37]). *Die Rückführmatrix  $K$  und die Impulsantwort  $x(t)$  des geschlossenen Regelkreises  $\dot{x} = (A + BKC)x$ , wobei  $x(t_0) = x_0$  gilt, erfüllen die Ungleichung*

$$\|x(t)\| \leq \kappa(V_K) \cdot \max_i \left\{ e^{\lambda_{Ki}t} \right\} \cdot \|x_0\|.$$

*Beweis.* Die Ungleichung folgt aus der Impulsantwort  $x(t) = \exp((A + BKC)t)x_0$ . Mit  $\|x(t)\|$  und  $(A + BKC) = V_K\Lambda_KV_K^{-1}$  folgt

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|V_K\| \|\exp(\Lambda_K t)\| \|V_K^{-1}\| \|x_0\| \\ &\leq \kappa(V_K) \|\exp(\Lambda_K t)\| \|x_0\| \\ &\leq \kappa(V_K) \max_i \left\{ e^{\lambda_{Ki}t} \right\} \|x_0\|, \end{aligned}$$

woraus die Aussage folgt. □

Mit Satz 3.6 wird deutlich, dass durch eine Minimierung der Konditionszahl  $\kappa(V_K)$  eine obere Schranke für die Impulsantwort des geregelten Systems minimiert wird. In Abbildung 3.1 ist in der linken Darstellung darüber hinaus veranschaulicht, welche Verbesserung sich durch eine Minimierung der Konditionszahl im Hinblick auf die Impulsantwort ergibt. Anschaulich wird der „Schlauch“, der die Norm aller Impulsantworten nach oben begrenzt, gestaucht. Somit ist zu erwarten, dass durch die Minimierung der Konditionszahl Verbesserungen im Hinblick auf ein

mögliches Überschwingen des Regelkreises zu erzielen sind, was häufig eine Anforderung an den geschlossenen Regelkreis darstellt. Darüber hinaus ergibt sich durch eine geringere Konditionszahl auch eine Verbesserung des Stabilitätsrandes des geregelten Systems, was ebenfalls in der rechten Darstellung angedeutet ist. Aufgrund der Störungen  $\Delta$  verschieben sich die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises – möglicherweise in Richtung der rechten  $s$ -Halbebene. Der Regelkreis wird somit instabil. Durch die Konditionszahl lässt sich eine obere Schranke für die Norm von  $\Delta$  angeben, so dass der gestörte Regelkreis weiterhin stabil ist, wie der nachfolgende Satz zeigt.

**Satz 3.7** ([37]). *Wenn die Ausgangsrückführmatrix  $K$  die Menge der stabilen Eigenwerte  $\Lambda_K$  zuweist, dann ist die gestörte Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises  $A + BKC + \Delta$  für alle  $\Delta$  stabil, die*

$$\|\Delta\| < \min_{s=j\omega} \underline{\sigma}\{sI - (A + BKC)\} =: \delta(K) \quad (3.27)$$

erfüllen, wobei eine untere Schranke für  $\delta(K)$  durch

$$\delta(K) \geq \min_i \operatorname{Re}\{-\lambda_{Ki}\} \cdot \kappa(V_K)^{-1} \quad (3.28)$$

gegeben ist.

*Beweis.* Die Matrix  $sI - (A + BKC + \Delta)$  ist regulär, wenn mit der Abkürzung  $A_K = A + BKC$  und  $sI - (A_K + \Delta) = (sI - A_K)(I + (sI - A_K)^{-1}(-\Delta))$  die Ungleichung

$$\|(sI - A_K)^{-1}(-\Delta)\| < 1$$

erfüllt ist (vgl. [35, Corollary 5.6.16]). Aufgrund der Submultiplikativität der Matrixnorm  $\|\cdot\|$  ist daher auch  $\|(sI - A_K)^{-1}(-\Delta)\| \leq \|(sI - A_K)^{-1}\| \|\Delta\| < 1$  zu fordern, und dadurch ist mit  $\|(sI - A_K)^{-1}\| = (\underline{\sigma}\{sI - A_K\})^{-1}$  ebenfalls

$$\|\Delta\| < (\|(sI - A_K)^{-1}\|)^{-1} = \underline{\sigma}\{sI - A_K\}.$$

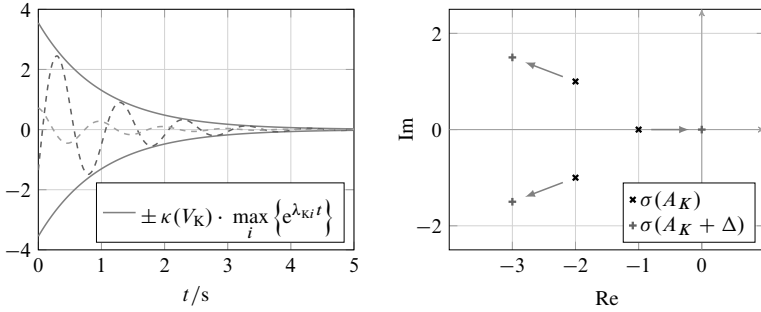
Somit ist notwendig dafür, dass die Matrix  $sI - (A_K + \Delta)$  singulär auf der imaginären Achse mit  $s = j\omega$  wird, dass  $\|\Delta\| \geq \delta(K)$  ist. Da die Eigenwerte einer Matrix allerdings stetige Funktionen der Einträge der Matrix sind, ist die Matrix  $A_K + \Delta$  stabil, wenn (3.27) erfüllt ist.

Zur Bestimmung der unteren Schranke für  $\delta(K)$  folgt mit  $A_K V_K = V_K \Lambda_K$

$$\begin{aligned} \delta(K) &= \min_{s=j\omega} \underline{\sigma}\{sI - (A + BKC)\} \\ &= \min_{s=j\omega} \underline{\sigma}\{V_K(sI - \Lambda_K)V_K^{-1}\} \\ &\geq \underline{\sigma}(V_K) \cdot \underline{\sigma}(V_K^{-1}) \cdot \min_{s=j\omega} \underline{\sigma}\{sI - \Lambda_K\} \\ &\geq \|V_K\|^{-1} \|V_K^{-1}\|^{-1} \cdot \min_i \operatorname{Re}\{-\lambda_{Ki}\}, \end{aligned}$$

woraus (3.28) folgt. □





**Bild 3.1:** Eigenschaften des geregelten Systems bei robuster Eigenstrukturvorgabe - Minimierung einer oberen Schranke der Impulsantwort (links) und Maximierung des Stabilitätsrandes (rechts)

Mit den Sätzen 3.6 und 3.7 lässt sich begründen, dass die Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix des geregelten Systems  $\kappa(V_K)$  ein geeignetes Maß darstellt, um die Robustheit des geschlossenen Regelkreises im Sinne der Eigenwertvorgabe zu bewerten. Darüber hinaus stellt die Konditionszahl (3.26) ebenfalls eine obere Schranke für die Konditionszahlen der Eigenwerte dar [127], die gemäß

$$c_i = \frac{\|w_{Ki}\| \|v_{Ki}\|}{\|w_{Ki}^T v_{Ki}\|} \geq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.29)$$

definiert sind. Daraus ergibt sich [37]

$$\max_i c_i \leq \kappa(V_K)$$

und das robust mit einer Ausgangsrückführung geregelte System ist somit optimal im Sinne des Gütekriteriums (3.26) bzw. (3.29) konditioniert, wenn  $\kappa(V_K) = 1$  bzw.  $\max_i c_i = 1$  ist. Dies hat zur Folge, dass die Rechtseigenvektoren des geschlossenen Regelkreises so skaliert werden können, dass sie zueinander orthonormal sind, was ebenfalls darin resultiert, dass die Rechtseigenvektormatrix eine orthogonale Matrix darstellt. Damit ist  $V_K^{-1} = V_K^T = W_K$ , und es ergibt sich

$$\kappa(V_K) = \|V_K\| \|V_K^{-1}\| = \|V_K\| \|V_K^T\| = 1.$$

Zur Berechnung von  $\kappa(V_K)$  ist aufgrund der Definition der Spektralnorm gemäß  $\|\cdot\| = \bar{\sigma}(\cdot)$  stets eine Singulärwertzerlegung von  $V_K$  und  $V_K^{-1}$  vorzunehmen. Soll dieser numerische Aufwand vermieden werden, bietet es sich an, eine obere Schranke der Spektralnorm zu minimieren. Hierzu kann beispielsweise die Frobeniusnorm einer Matrix  $\|\cdot\|_F$  genutzt werden. Diese ist zwar keine induzierte Matrix Norm, wie im Bauer-Fike Theorem vorausgesetzt. Allerdings ist aufgrund der Definition gemäß (vgl. [35])

$$\|V_K\|_F = \sqrt{\text{spur}(V_K^T V_K)} = \sqrt{\sigma_1^2(V_K) + \dots + \sigma_n^2(V_K)},$$

wobei  $\sigma_i(V_K)$  die Singulärwerte von  $V_K$  bezeichnet, mit

$$\kappa_F(V_K) = \|V_K\|_F \|V_K^{-1}\|_F = \sqrt{\text{spur}(V_K^T V_K)} \sqrt{\text{spur}(V_K^{-T} V_K^{-1})} \quad (3.30)$$

stets

$$\begin{aligned} \kappa(V_K) &= \bar{\sigma}(V_K) \underline{\sigma}(V_K)^{-1} \\ &\leq \sqrt{\sigma_1^2(V_K) + \dots + \sigma_n^2(V_K)} \sqrt{1/\sigma_1^2(V_K) + \dots + 1/\sigma_n^2(V_K)} \\ &= \kappa_F(V_K), \end{aligned}$$

so dass durch Minimierung von (3.30) ebenfalls eine obere Schranke von (3.26) minimiert wird.

Mit Hilfe der Frobeniusnorm lässt sich noch ein weiteres Maß definieren, welches in der quadrierten Summe der in (3.29) definierten Sensitivität der Eigenwerte besteht. Hierzu wird angenommen, dass die Rechtseigenvektoren so skaliert sind, dass  $\|v_{Ki}\| = 1$  ist. Daraus ergibt sich die Linkseigenvektormatrix mit  $W_K V_K = I_n$  zu

$$W_K^T = [w_{K1} \quad \dots \quad w_{Kn}]^T$$

bzw. aufgrund der Normierung der Rechtseigenvektoren ergibt sich (3.29) zu  $c_i = \|w_{Ki}\| \geq 1$ . Darüber hinaus ist aufgrund der Annahmen  $\|V_K\|_F = \sqrt{n}$  und damit

$$\|V_K^{-1}\|_F = \|W_K\|_F = \sqrt{c_1^2 + \dots + c_n^2}.$$

Wird daher in (3.30) mit  $1/n$  multipliziert und die Länge der Rechtseigenvektoren auf die Länge eins normiert, dann folgt aus

$$\kappa_F(V_K)/n = \frac{1}{n} \|V_K\|_F \|V_K^{-1}\|_F = \frac{1}{\sqrt{n}} \|V_K^{-1}\|_F = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{c_1^2 + \dots + c_n^2} \quad (3.31)$$

ein weiteres Maß, welches zur Bewertung der Konditionierung des geschlossenen Regelkreises heran gezogen werden kann.

Neben der robusten Eigenwertvorgabe spielt unter praktischen Gesichtspunkten oftmals eine Vermeidung von großen Stellbeträgen eine Rolle, um die Strecke und vor allem die eingesetzten Aktoren nicht zu stark zu belasten. Ausgehend von (3.2) ist aufgrund von  $\|u\| \leq \|K\| \|y\|$  die Norm der Rückführmatrix offensichtlich die entscheidende Einflussgröße. Im Sinne der Vermeidung großer Stellbeträge ist daher die Norm der Rückführmatrix zu minimieren, was mit Hilfe der Frobeniusnorm auf die Gütefunktion

$$\|K\|_F = \sqrt{\text{spur}(K^T K)} \quad (3.32)$$

führt.

Mit den Gleichungen (3.30), (3.31) und (3.32) sind Gütemaße gegeben, die es im Sinne der Optimierung gezielt zu minimieren gilt, um die Dynamik des geschlossenen Regelkreises zu verbessern. Dabei zielen (3.30) und (3.31) auf die robuste Eigenwertvorgabe ab, während (3.32) zur

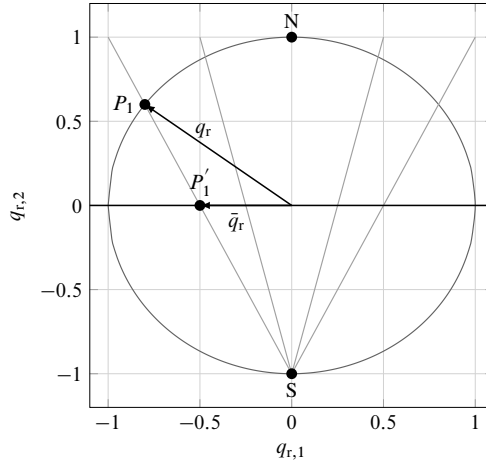


Bild 3.2: Veranschaulichung der stereographischen Projektion

Minimierung der benötigten Stellbeträge genutzt werden kann. Zusammenfassend lassen sich daher die Gütefunktionen

$$J_{K_F} = \|V_K\|_F \|V_K^{-1}\|_F \quad (3.33a)$$

$$J_{\|c\|} = \frac{1}{\sqrt{n}} \|V_K^{-1}\|_F = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{c_1^2 + \dots + c_n^2} \quad (3.33b)$$

$$J_{\|K\|} = \|K\|_F^2 = \text{spur}(K^T K) \quad (3.33c)$$

formulieren, die mit Hilfe eines geeigneten Optimierungsverfahrens zu minimieren sind.

Im Hinblick auf die Verwendung eines Verfahrens zur Lösung unbeschränkter Optimierungsprobleme ist dabei allerdings noch hinderlich, dass die Länge der Parametervektoren  $q_{vi}$  zur Berechnung von  $K$  in (3.18) keinen Einfluss hat und damit auch keinen weiteren Freiheitsgrad darstellt. Daher ist eine Normierung der Parametervektoren einzuführen, beispielsweise durch  $q_{vi}^T q_{vi} = 1$  für alle  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ . Dies hat allerdings zur Folge, dass nunmehr ein Optimierungsproblem mit nichtlinearer Nebenbedingung gelöst werden muss. Zweckmäßiger ist es daher, eine neue Parametrierung einzuführen, die implizit die Normierung der Parametervektoren vornimmt. Dies leistet die *Stereographische Projektion* [51].

Wird daher die Normierung der Parametervektoren  $q_{vi}^T q_{vi} = 1$  gefordert, lässt sich jeder Parametervektor als ein Punkt auf der  $m$ -dimensionalen Einheitskugel  $\mathbb{S}_m$  auffassen. Für den Einheitskreis ist die stereographische Projektion in Abbildung 3.2 beispielhaft dargestellt. Die Idee besteht darin, für jeden Punkt auf dem Einheitskreis (in der Abbildung bspw.  $P_1$ ) eine Gerade durch den Südpol  $S = (0,-1)$  zu legen und dann den Schnittpunkt mit der  $q_{v,2}$ -Achse zu bestimmen (in der Abbildung  $P'_1$ ). Es existiert daher die stereographische Projektion  $f : \mathbb{S}_m \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ , die

durch

$$f(q_{vi}) = \bar{q}_{vi} = \frac{1}{1 + e_m^T q_{vi}} [I_{m-1} \quad 0] q_{vi}$$

gegeben ist. Damit lässt sich aus der Kenntnis des auf die Länge eins normierten Parametervektors  $q_{vi}$  eine um eine Dimension reduzierte Parametrierung  $\bar{q}_{vi} \in \mathbb{R}^{m-1}$  finden. Der reduzierte Parametervektor  $\bar{q}_{vi}$  ist nunmehr unbeschränkt und legt zusammen mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(\bar{q}_{vi}) = q_{vi} = \frac{1}{1 + \bar{q}_{vi}^T \bar{q}_{vi}} \begin{bmatrix} 2\bar{q}_{vi} \\ 1 - \bar{q}_{vi}^T \bar{q}_{vi} \end{bmatrix}$$

den Parametervektor  $q_{vi}$  wieder eindeutig fest. Die Parametervektoren  $q_{vi}$  lassen sich dann, wie in Satz 3.4 formuliert, zur Parametrierung der Rechtseigenvektoren  $V_i$  bzw. der Steuermoden  $Q_r$  nutzen. Die  $m$  Freiheitsgrade der Eigenwert-/Rechtseigenvektorpaare  $(\lambda_{Ki}, v_{Ki})$  sind daher für  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  eindeutig durch den Regelungseigenwert  $\lambda_{Ki}$  und den reduzierten Parametervektor  $\bar{q}_{vi} \in \mathbb{R}^{m-1}$  festgelegt.

Ausgehend von der Parametrierung der Ausgangsrückführung (3.2) in Satz 3.4 und der Diskussion hinsichtlich der robusten Eigenwertvorgabe bzw. der Eigenwertvorgabe mit minimaler Verstärkung in diesem Abschnitt, kann daher das unbeschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{\xi} J_k, \quad k \in \{\kappa_F, \|c\|, \|K\|\} \quad (3.34)$$

mit den Optimierungsvariablen

$$\xi = \begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{q}_{v1}^T & \dots & \bar{q}_{v_{p-1}}^T \end{bmatrix}^T, & s = m, \\ \begin{bmatrix} \bar{q}_{v1}^T & \dots & \bar{q}_{v_{p-1}}^T & \text{vec}(K_2)^T \end{bmatrix}^T, & s > m \end{cases}$$

zusammen mit dem Vektorisierungsoperator  $\text{vec}(\cdot)$  formuliert werden, um die vorgenannten Regelziele mit einer Ausgangsrückführung zu erreichen.

Zur Lösung des Optimierungsproblems (3.34) lassen sich etablierte numerische Verfahren für unbeschränkte Optimierungsprobleme anwenden. Alle Verfahren benötigen dabei Informationen über die Zielfunktion  $J_k(\xi)$  durch den Gradienten der Zielfunktion  $\nabla J_k(\xi)$  und teilweise auch der Hesse-Matrix  $\nabla^2 J_k(\xi)$ , um festzustellen, ob ein Punkt  $\bar{\xi}$  ein lokales Minimum der Zielfunktion darstellt. Unter der Voraussetzung, dass die Zielfunktion  $J_k(\xi)$  differenzierbar ist, ergibt sich als notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für ein lokales Minimum am Punkt  $\bar{\xi}$ , dass der Gradient der Zielfunktion  $\nabla J_k(\bar{\xi})$  in diesem Punkt verschwindet, d.h. es ist  $\nabla J_k(\bar{\xi}) = 0$  [121].

Steht neben der Information über den Gradienten der Zielfunktion  $\nabla J_k(\bar{\xi})$  zusätzlich Information über die Hesse-Matrix  $\nabla^2 J_k(\bar{\xi})$  der Zielfunktion zur Verfügung, ergibt sich als notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung für ein lokales Minimum am Punkt  $\bar{\xi}$ , dass der Gradient der Zielfunktion  $\nabla J_k(\bar{\xi})$  in diesem Punkt verschwindet und die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist, d.h. es ist  $d^T \nabla^2 J_k(\bar{\xi}) d \geq 0$  für alle  $d \in \mathbb{R}^n$  [121]. Ist die Hesse-Matrix darüber hinaus positiv definit in einem Punkt  $\bar{\xi}$ , dann ist eine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum der Zielfunktion erfüllt.

Algorithmen zur Lösung unrestringierter Optimierungsprobleme beruhen dabei auf dem nachfolgenden Prinzip: Ausgehend von einem Startwert  $\xi_0$  wird eine Folge von Punkten  $\xi_i$  bestimmt, die typischerweise die Eigenschaft aufweist, dass der Funktionswert im darauf folgenden Schritt geringer als der Funktionswert im aktuellen Schritt ist, d.h. es ist  $J_k(\xi_{i+1}) < J_k(\xi_i)$ . Kann keine wesentliche Verbesserung mehr erzielt werden oder liegt ein stationärer Punkt vor, d.h. die eben diskutierten Optimalitätsbedingungen sind erfüllt, dann bricht die Iteration ab. Für den Übergang von einem Punkt  $\xi_i$  zum nächsten Punkt  $\xi_{i+1}$  haben sich in der Praxis im wesentlichen zwei Strategien etabliert: *Linienverfahren* und *Trust-Region-Verfahren* [74].

Bei Linienverfahren erfolgt in jedem Iterationsschritt die Bestimmung einer Abstiegsrichtung  $s_i$  gemäß der Bedingung  $\nabla J_k(\xi)^T s_i < 0$  zusammen mit einer geeigneten Schrittweite  $\sigma_i > 0$ , so dass  $J_k(\xi_i + \sigma_i s_i) < J_k(\xi_i)$  erfüllt ist. Aufgrund ihrer guten Konvergenzeigenschaften haben sich in diesem Bereich Quasi-Newton-Verfahren etabliert, die die Hesse-Matrix durch geeignete Approximationen ersetzen und damit lediglich Informationen über den Gradienten benötigen. Trust-Region-Verfahren bestimmen ausgehend von einer Taylorentwicklung der Zielfunktion eine quadratische Ansatzfunktion  $m_i$ , die in der Nähe des Punktes  $\xi_i$  und innerhalb des sogenannten Vertrauensbereichs eine hinreichend genaue Approximation der Zielfunktion  $J_k(\xi_i)$  darstellt. Durch Minimieren der quadratischen Ansatzfunktion  $m_i$  erfolgt die Schrittberechnung  $s_i$ . Der Schritt wird akzeptiert, wenn die Abnahme der Zielfunktion  $J_k(\xi_i + s_i) < J_k(\xi_i)$  hinreichend groß ist. Im anderen Fall muss der Vertrauensbereich angepasst und eine erneute Schrittberechnung durch Minimierung von  $m_i$  durchgeführt werden. Beide Strategien sind beispielsweise in der Funktion `fminunc` der Optimization Toolbox in MATLAB umgesetzt, wobei alle nachfolgenden Optimierungsergebnisse zur robusten Eingestrukturvorgabe mittels der Quasi-Newton Implementierung der Funktion `fminunc` bestimmt wurden.

Ausgehend von der vorstehenden Diskussion zu notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen unbeschränkter Optimierungsprobleme muss daher vorausgesetzt werden, dass die Parametrierung der Rückführmatrix  $K$  in Satz 3.4 differenzierbar ist und damit der Gradient der Gütefunktion  $\nabla J_k(\xi)$  existiert sowie die Algorithmen zur Lösung unbeschränkter Optimierungsprobleme anwendbar sind. Hierzu wird zunächst ein Resultat hergeleitet, welches für die Aussagen hinsichtlich der Differenzierbarkeit der Rückführmatrix von Wichtigkeit ist. Dieses besteht in der Bedingung, wann die Basis des Kerns einer parameterabhängigen Matrix  $A(p)$  differenzierbar ist.

**Lemma 3.8.** Sei  $A_0 \in \mathbb{R}^{n-1 \times n}$  sowie  $\text{rang}(A) = n - 1$  und sei  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  ein normierter Vektor, der  $\text{bild}(u_0) = \text{kern}(A_0)$  erfüllt. Eine vektorwertige Funktion  $u(A)$  ist für alle  $A$  in einer Umgebung  $N(A_0) \subset \mathbb{R}^{n-1 \times n}$  von  $A_0$  definiert, so dass  $u(A_0) = u_0$  und

$$Au = 0, \quad u^T u = 1, \quad A \in N(A_0)$$

gilt. Darüber hinaus ist die Funktion  $u$  unendlich oft differenzierbar in  $N(A_0)$ , und das Differential in  $A_0$  ist durch

$$du = (-A_0^T A_0)^+ A_0^T (dA) u_0$$

gegeben.

*Beweis.* Mit [9, Proposition 6.1.6] ist  $\ker(A_0) = \ker(A_0^T A_0)$ , und daher ist mit  $A_0^T A_0 u_0 = \lambda_0 u_0$  ein symmetrisches Eigenwertproblem zum Eigenwert  $\lambda_0 = 0$  gegeben, weshalb Satz B.10 angewendet werden kann. Es existiert deshalb eine vektorwertige Funktion  $u$ , die unendlich oft differenzierbar in  $N(A_0)$  ist, und das Differential ist aufgrund  $d(A^T A) = (dA)^T A + A^T dA$  und  $Au = 0$  durch

$$\begin{aligned} du &= (\lambda_0 I_n - A_0^T A_0)^+ (d(A^T A))u_0 \\ &= (-A_0^T A_0)^+ A^T (dA)u_0 \end{aligned}$$

gegeben, woraus die Aussage folgt.  $\square$

Mit Lemma 3.8 lässt sich somit schließen, dass die Basis des Nullraums einer parameterabhängigen Matrix stets differenzierbar ist, wenn die Dimension des Nullraums eins beträgt. Hinsichtlich der Parametrierung der Rückführmatrix  $K$  in (3.18) bleibt daher festzuhalten, dass durch die Wahl  $r = p - 1$  für die Matrix  $U_1 \in \mathbb{R}^{1 \times p}$  ist und aufgrund von Lemma 3.8 somit differenzierbar ist. Infolgedessen ist die Matrix  $K$  in (3.18) für  $s = m$  stets differenzierbar, wenn vorausgesetzt wird, dass die Matrizen  $C V_r$  und  $W_s B$  auf offenen Umgebungen konstanten Rang haben, weil dann die Moore-Penrose-Pseudoinverse differenzierbar ist (vgl. Satz B.13). Ist allerdings  $m > s$ , dann ist  $U_2 \in \mathbb{R}^{m \times m-s}$  und hinsichtlich Lemma 3.8 ist  $U_2$  differenzierbar, wenn  $m - s = 1$  ist. Demgegenüber ist für  $m - s > 1$  und folglich  $m + p > n + 2$  mit der Parametrierung aus Satz 3.4 die Matrix  $K$  nicht differenzierbar. Dieser Umstand lässt sich umgehen, indem ein teilparametrischer Ansatz formuliert wird. Hierzu wird auf den Abschnitt 3.3 verwiesen.

Da die ersten beiden Gütefunktionen in (3.33) Funktionen der Rechtseigenvektormatrix des geschlossenen Regelkreises sind, wird daher ebenfalls das Differential  $dV_K$  benötigt, um die Gradienten der Gütefunktionen zu berechnen. Laut Satz B.12 ist die Annahme einfacher Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises eine Bedingung dafür, dass die Rechtseigenvektoren differenzierbar sind. Dies wird nachfolgend somit stets vorausgesetzt. Mit  $d(A + BKC) = B(dK)C$  lässt sich aber zusammen mit (B.11)  $dV_K$  aus  $dK$  berechnen. Die Überlegungen zur Differenzierbarkeit der Matrizen  $K$  und  $V_K$  fasst der folgende Satz zusammen. Da die Berechnung der Differentiale  $dK$  und  $dV_K$  sich als aufwendig gestaltet, wird für den Beweis des Satzes und für  $dK$  sowie  $dV_K$  auf den Anhang verwiesen.

**Satz 3.9.** *Betrachtet wird die Parametrierung der Ausgangsrückführmatrix  $K$  in Satz 3.4, wobei darin für  $s = m$  oder  $s = m - 1$  angenommen wird. Darüber hinaus wird angenommen, dass die Menge der Regelungseigenwerte  $\Lambda_K$  nur aus paarweise verschiedenen Eigenwerten besteht. Sind darüber hinaus die Annahmen  $\text{rang}(C V_r) = r = p - 1$  und  $\text{rang}(W_s B) = s$  auf offenen Umgebungen erfüllt, dann ist die Rückführmatrix differenzierbar und die Differentiale  $dK$  bzw.  $\text{vec}(dK)$  sowie  $\text{vec}(dV_K)$  sind durch (A.1) bzw. (A.2) sowie (A.3) gegeben.*

*Beweis.* Siehe Abschnitt A.1.  $\square$

Mit Satz 3.9 lässt sich begründen, dass mit der Parametrierung der Rückführung in Satz 3.4 und der Voraussetzung  $s = m$  oder  $s = m - 1$  die Differenzierbarkeit der Rückführung gewährleistet ist.

Die Gütekriterien (3.33) können daher mit einem gradientenbasierten Verfahren gezielt minimiert werden. Die Gradienten ergeben sich dabei mit den Differentialen von (3.33)

$$dJ_{K_F} = \frac{\|V_K^{-1}\|_F}{\|V_K\|_F} \cdot \text{spur}(V_K^T dV_K) - \frac{\|V_K\|_F}{\|V_K^{-1}\|_F} \cdot \text{spur}(V_K^{-1} V_K^{-T} V_K^{-1} dV_K), \quad (3.35a)$$

$$dJ_{\|c\|} = \frac{-1}{\sqrt{n}J_{\|c\|}} \text{spur}(V_K^{-1} V_K^{-T} V_K^{-1} dV_K), \quad (3.35b)$$

$$dJ_{\|K\|} = 2 \cdot \text{spur}(K^T dK) \quad (3.35c)$$

sowie mit  $\nabla K$  aus (A.2) und  $\nabla V_K$  aus (A.3) schließlich zu

$$\nabla J_{K_F} = \frac{\|V_K^{-1}\|_F}{\|V_K\|_F} \cdot \text{vec}(V_K)^T \nabla V_K - \frac{\|V_K\|_F}{\|V_K^{-1}\|_F} \cdot \text{vec}(V_K^{-T} V_K^{-1} V_K^{-T})^T \nabla V_K, \quad (3.36a)$$

$$\nabla J_{\|c\|} = \frac{-1}{\sqrt{n}J_{\|c\|}} \text{vec}(V_K^{-T} V_K^{-1} V_K^{-T})^T \nabla V_K, \quad (3.36b)$$

$$\nabla J_{\|K\|} = 2 \cdot \text{vec}(K)^T \nabla K. \quad (3.36c)$$

Die Verwendung eines gradientenbasierten Verfahrens zur Minimierung einer nichtlinearen Funktion ermöglicht damit eine gezielte Nutzung der verbleibenden Freiheitsgrade der Ausgangsrückführung, um eine robuste Eigenwertvorgabe beziehungsweise eine minimale Verstärkung der Rückführmatrix zu erzielen. Zur Bewertung der Leistungsfähigkeit des Verfahrens liegt es daher nahe, einen Vergleich mit bereits etablierten Algorithmen zur Berechnung von Reglern zur Eigenwertvorgabe zu ziehen. Dies erfolgt in Abschnitt 3.4, wobei die neue Methodik der MATLAB Funktion `place` gegenüber gestellt wird.

### 3.2.2 Entwurf einer Entkopplungsregelung

Im Gegensatz zum Entwurf der Regelung auf das Störverhalten im vorhergehenden Abschnitt, zielen die Entwurfsverfahren in diesem und im nächsten Abschnitt auf die gezielte Beeinflussung des Führungsverhaltens ab. Von der Entkopplungsregelung wird in diesem Sinne gefordert, dass im geregelten System jede Regelgröße  $y_i$  nur durch die zugehörige Führungsgröße  $w_i$  beeinflusst wird. In [57] gibt Lohmann hierzu notwendige und hinreichende Bedingungen an, wann ein lineares und quadratisches Zustandssystem mit einer Zustandsrückführung und regulärer Vorfilterung vollständig stabil entkoppelbar ist. Ein System wird dabei als quadratisch bezeichnet, wenn es dieselbe Anzahl an Ein- und Ausgangsgrößen besitzt. Damit ist  $p = m$ . Hierzu sind zunächst die skalaren Größen  $\delta_i$  einzuführen, die als die kleinsten positiven ganzen Zahlen definiert sind, so dass für  $e_i^T C A^{\delta_i-1} B \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, p\}$  gilt, wobei  $e_i$  den  $p$ -dimensionalen Koordinateneinheitsvektor bezeichnet. Die Summe der  $\delta$  ergibt sich durch

$$\delta = \sum_{i=1}^p \delta_i$$

und die *Entkoppelbarkeitsbedingung* lautet (vgl. [57, S. 15]):

*Die Streckenordnung  $n$  vermindert um  $\delta$  muss gleich der Zahl der invarianten Nullstellen des Systems sein.*

Ist diese Bedingung erfüllt, dann wird  $\delta$  als die *Differenzordnung* des Systems bezeichnet. Die entkoppelnde Zustandsregelung  $u = Rx + Fw$  berechnet sich mit der Vollständigen Modalen Synthese aus den Gleichungen  $R = PV_R^{-1}$  und  $v_{Ri} = -(A - \lambda_{Ri}I)^{-1}Bp_i$ , wobei die Rechtseigenvektoren und Parametervektoren die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda_{Rij}I) & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Rij} \\ p_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_i \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, \delta_i\} \quad (3.37)$$

und, falls  $n - \delta > 0$ ,

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda_{Rk}I) & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Rk} \\ p_k \end{bmatrix} = 0, \quad k \in \{\delta + 1, \dots, n\} \quad (3.38)$$

erfüllen müssen. Im Falle  $n - \delta > 0$  lassen sich somit nicht mehr alle Eigenwerte beliebig vorgeben. Vielmehr sind die  $\lambda_{Rk}$  gleich den invarianten Nullstellen des Systems (vgl. Abschnitt C) zu wählen, die nachfolgend in der Menge

$$\Lambda_0 = \{\lambda_{R\delta+1}, \dots, \lambda_{Rn}\}$$

zusammengefasst werden. Dies schränkt daher auch die Klasse der entkoppelbaren Systeme ein, wenn neben der Entkopplung zusätzlich die Stabilität der entkoppelt geregelten Strecke gefordert wird. Im Hinblick auf die Entkoppelbarkeitsbedingung und die Restriktionen an die Eigen- und Parametervektoren (3.38) sind folglich nur Systeme mit stabiler Nulldynamik, also solche Systeme, deren invariante Nullstellen sämtlich in der linken  $s$ -Halbebene liegen, mit konstanter Zustandsrückführung stabil entkoppelbar.

Um die konstruktiven Entwurfsbedingungen (3.37) und (3.38) auf die in Abschnitt 3.1.3 vorgestellte Methodik zu übertragen, ist zunächst noch eine äquivalente Formulierung der Bedingung (3.37) anzugeben. Darin ist im Hinblick auf die Methodik aus Abschnitt 3.1.3 und im speziellen auf (3.3) hinderlich, dass sich die Rechtseigenvektoren und Steuermode aus der Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems ergeben. Diese müssten beispielsweise über die Inverse der Matrix auf der linken Seite der Gleichung (3.37) berechnet werden. Auf diesen Zugang kann jedoch verzichtet werden, indem die zu (3.37) äquivalente Entwurfsbedingung

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda_{Rij}I) & B \\ (I_p - e_i e_i^T)C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Rij} \\ p_{ij} \end{bmatrix} = 0, \quad i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, \delta_i\} \quad (3.39)$$

verwendet wird, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 3.10.** *Betrachtet wird das steuer- und beobachtbare sowie als entkoppelbar vorausgesetzte Zustandssystem (3.1). Die Entwurfsbedingungen (3.37) und (3.39) erzeugen identische Richtungen der Rechtseigenvektoren  $v_{Rij}$  und Steuervektoren  $p_{ij}$  und sind somit äquivalent, wenn vorausgesetzt wird, dass die Regelungseigenwerte  $\lambda_{Rij}$  verschieden von den Eigenwerten von  $A$  und von den invarianten Nullstellen gewählt werden.*



*Beweis.* Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird gezeigt, dass Rechtseigenvektoren und Steuervektoren, die sich aus der Lösung von (3.37) ergeben, ebenfalls (3.39) erfüllen. Im Anschluss wird die Umkehrung der Aussage gezeigt.

Mit Hilfe der Formel zur Berechnung der Inversen einer partitionierten Matrix (vgl. [35, S. 18]) ist aufgrund der Voraussetzung  $\lambda_{Rij} \notin \sigma(A)$

$$\begin{bmatrix} A_{\lambda_{Rij}} & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{\lambda_{Rij}}^{-1} (I_n + BS^{-1}CA_{\lambda_{Rij}}^{-1}) & -A_{\lambda_{Rij}}^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA_{\lambda_{Rij}}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix},$$

wobei  $A_{\lambda_{Rij}} = A - \lambda_{Rij}I_n$  und  $S = -C(A - \lambda_{Rij}I)B$  abgekürzt wurde. Mit (3.39) ist

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{\lambda_{Rij}} & B \\ (I_p - e_i e_i^T)C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\lambda_{Rij}}^{-1} (I_n + BS^{-1}CA_{\lambda_{Rij}}^{-1}) & -A_{\lambda_{Rij}}^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA_{\lambda_{Rij}}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{\lambda_{Rij}} & B \\ (I_p - e_i e_i^T)C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{\lambda_{Rij}}^{-1}BS^{-1}e_i \\ S^{-1}e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -BS^{-1}e_i + BS^{-1}e_i \\ (I_p - e_i e_i^T)e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Lösung von (3.37) ebenfalls (3.39) erfüllt.

Wird nun angenommen, dass  $v_{Rij}$  und  $p_{ij}$  (3.39) erfüllen, dann erfüllen  $v_{Rij}$  und  $p_{ij}$  ebenfalls die ersten  $n$  Zeilen von (3.37). Da die Regelungseigenwerte  $\lambda_{Rij}$  als verschieden von den invarianten Nullstellen des Systems vorausgesetzt wurden, ist  $Cv_{Rij} \neq 0$ . Es ist aber aufgrund von (3.39)  $(I_p - e_i e_i^T)Cv_{Rij} = 0$  und damit  $\text{bild}(Cv_{Rij}) \in \text{kern}(I_p - e_i e_i^T)$ . Aufgrund der Definition ist  $\text{kern}(I_p - e_i e_i^T) = \text{bild}(e_i)$  und damit  $Cv_{Rij} = ce_i$  mit beliebigen  $c$ , woraus die Aussage folgt, da  $v_{Rij}$  und  $p_{ij}$  somit ebenfalls (3.37) erfüllen.  $\square$

Im Hinblick auf die Übertragung des Verfahrens zur Entkopplung auf den Entwurf der Ausgangsrückführung aus Abschnitt 3.1.3 bleibt somit festzuhalten, dass (3.37) bzw. (3.39) und (3.38)  $n$  Restriktionen an die Rechtseigenvektoren des geschlossenen Regelkreises formulieren. Damit muss es durch den Entwurf der Ausgangsrückführung möglich sein, ebenfalls  $n$  Eigenwert-/ Rechtseigenvektorpaaere  $(\lambda_{Ki}, v_{Ki})$  im geschlossenen Regelkreis zu erzeugen. Dies ist allerdings unter der Voraussetzung  $p < n$  nur möglich, wenn eine dynamische Rückführung gemäß Abschnitt 3.1.4 verwendet wird. Daher wird im Folgenden der Entwurf der statischen Ausgangsrückführung

$$u_e = K_e y_e + F_e w \quad (3.40)$$

für das erweiterte System (3.20) betrachtet und darin die Rückführmatrix  $K_e$  und das Vorfilter  $F_e$  für das System (3.20) so bestimmt, dass sich für die Führungsübertragungsmatrix des geschlossenen Regelkreises entsprechend der Forderung nach Entkopplung die Diagonalgestalt

$$\begin{aligned} G_w(s) &= C_w(sI_{n+n_d} - A_{ci} - B_{ci}K_eC_{ci})^{-1}B_{ci}F_e \\ &= \begin{bmatrix} g_{w1}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & g_{wp}(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

ergibt. Darin wird nach [57] für jedes Diagonalelement

$$g_{wi}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{\delta_i} (-\lambda_{Kij})}{(s - \lambda_{Kil}) \cdots (s - \lambda_{Ki\delta_i})}, \quad i \in \{1, \dots, p\}$$

gefordert, und die Matrix  $C_w$  ergibt sich entsprechend der Definition der erweiterten Ausgangsmatrix in (3.21) aus

$$C_w = [C \quad 0] \quad (3.42)$$

mit  $C_w \in \mathbb{R}^{p \times n + n_d}$ . Darüber hinaus ist die Ordnung des dynamischen Reglers  $n_d$  so zu wählen, dass sich wenigstens  $n$  Eigenwert-/Rechtseigenvektorkpaare  $(\lambda_{Ki}, v_{Ki})$  vorgeben lassen, um so die Restriktionen an die Rechtseigenvektoren aus (3.39) und (3.38) zu erfüllen. Zusammen mit Satz 3.4 und der sich daraus ergebenden Möglichkeit zur Vorgabe von  $p-1$  Rechtseigenvektoren ergibt sich zusammen mit der Dimension des erweiterten Ausgangs  $p + n_d$ , dass

$$p + n_d - 1 \geq n \quad \Leftrightarrow \quad n_d \geq n - p + 1 \quad (3.43)$$

gewählt werden muss. Damit ist aber auch stets die Bedingung nach Kimura (3.16) für das erweiterte System erfüllt, da  $p + n_d + m + n_d \geq n + n_d + 1$  bzw.  $n_d \geq n + 1 - p - m$  durch (3.43) impliziert wird.

Zur Bestimmung der Eigenwert-/Rechtseigenvektorkpaare  $(\lambda_{Ki}, v_{Ki})$  werden daher die Bedingungen (3.39) und (3.38) modifiziert, woraus sich

$$\begin{bmatrix} (A_e - \lambda_{Kij} I) & B_e \\ (I_p - e_i e_i^T) C_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Kij} \\ p_{vij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_e - \lambda_{Kij} I) & B_e \\ (I_p - e_i e_i^T) C_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{vij} \\ M_{vij} \end{bmatrix} \cdot q_{vij} = 0, \quad (3.44a)$$

$$i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, \delta_i\},$$

$$\begin{bmatrix} (A_e - \lambda_{Kk} I) & B_e \\ C_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Kk} \\ p_{vk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_e - \lambda_{Kk} I) & B_e \\ C_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{vk} \\ M_{vk} \end{bmatrix} \cdot q_{vk} = 0, \quad (3.44b)$$

$$k \in \{\delta + 1, \dots, n\}$$

ergibt. Für  $k \in \{n + 1, \dots, n + n_d\}$  ergeben sich entsprechend zum Vorgehen aus Abschnitt 3.1.3 die Eigenwert-/Linkseigenvektorkpaare  $(\lambda_{Kk}, w_{Kk})$  ausgehend von (3.15) aus

$$\begin{bmatrix} (A_{e1}^T - \lambda_{Kk} I) & C_{e1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{Kk} \\ p_{wk} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.45)$$

wobei darin die Abkürzungen

$$A_{e1} := A_e + B_e Q_r (C_e V_r)^+ C_e, \quad (3.46a)$$

$$C_{e1} := U_1 C_e \quad (3.46b)$$

in entsprechender Weise für das erweiterte System eingeführt werden. Dies legt die Rückführmatrix  $K_e$  des erweiterten Systems (3.20) und damit die Systemmatrix des entkoppelt geregelten Systems

$$\dot{x}_e = (A_{e1} + B_e K_{e1} C_{e1}) x_e + B_e F_e w, \quad (3.47a)$$

$$y_1 = C_{e1} x_{ei} \quad (3.47b)$$

fest. In (3.47a) ist zur Bestimmung des Vorfilters  $F_e$  im Gegensatz zum Entkopplungsentwurf mittels Zustandsrückführung anzumerken, dass die Eigenwert-/Linkseigenvektorkpaare  $(\lambda_{kk}, w_{kk})$  mit  $k \in \{n+1, \dots, n+n_d\}$ , die durch  $K_e$  erzeugt werden, nicht konsistent mit der Forderung nach Entkopplung der Führungsgrößen sind, was nachfolgend diskutiert wird. Hierzu wird in Anlehnung an das Vorgehen in Abschnitt 3.1.3 auf eine neue Koordinatendarstellung übergegangen und eine Matrix  $T_\perp$  mit orthogonalen Spaltenvektoren bestimmt, die  $\text{bild}(T_\perp) = \text{kern}(V_r^T)$  sowie  $T_\perp^T T_\perp = I_{n_d}$  erfüllt. Daraus folgt die neue Koordinatendarstellung aus

$$\tilde{x} = [V_r \ T_\perp]^{-1} x$$

sowie mit

$$[V_r \ T_\perp]^{-1} = [W_r^T \ T_\perp^T]^T,$$

und es folgt

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \Lambda_n & W_r A_{e1} T_\perp \\ 0 & T_\perp^T A_{e1} T_\perp \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_r B_e \\ T_\perp^T B_e \end{bmatrix} K_{e1} \begin{bmatrix} 0 & C_{e1} T_\perp \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_r \\ T_\perp^T \end{bmatrix} B_e F_e w$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_{e1} T_\perp \end{bmatrix} \tilde{x},$$

was eine Kalman-Zerlegung von (3.47) darstellt. Auch darin ist wie in Abschnitt 3.1.3 aufgrund der Blockdreiecksstruktur der resultierenden Systemmatrix der Teilzustand  $\tilde{x}_1$  bezüglich des Ausgangs  $y_1$  nicht beobachtbar, weshalb die Eigenwerte  $\{\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn}\}$  über die Ausgangsrückführung  $K_{e1}$  auch nicht mehr verändert werden.

Im entkoppelt geregelten Übertragungsverhalten können die Eigenwert-/Linkseigenvektorkpaare  $(\lambda_{kk}, w_{kk})$  für  $k \in \{n+1, \dots, n+n_d\}$  über die Führungsgrößen  $w$  allerdings noch gesteuert werden, was somit nicht konsistent mit der Forderung nach Entkopplung ist. Um dies zu vermeiden, muss daher in (3.47a) der Ausdruck  $T_\perp^T B_e F_e = 0$  werden beziehungsweise  $\text{bild}(F_e) \subset \text{kern}(T_\perp^T B_e)$  erfüllt sein. Dies ist allerdings stets möglich, da  $T_\perp^T B_e \in \mathbb{R}^{n_d \times (m+n_d)}$  ist, und damit hat die Matrix  $T_\perp^T B_e$  unter der Annahme  $\text{rang}(T_\perp^T B_e) = n_d$  immer einen genau  $m$ -dimensionalen Rechtskern. Der Höchstrang der Matrix  $T_\perp^T B_e$  ist im Hinblick auf die Annahmen in Satz 3.4 äquivalent zu der Forderung  $\text{rang}(W_s B_e) = s = n_d$ , da aufgrund der obigen Koordinatentransformation  $W_s = P T_\perp^T$  mit einer regulären Matrix  $P$  erfüllt sein muss. Damit ist der Höchstrang der Matrix  $T_\perp^T B_e$  durch das parametrische Entwurfsverfahren stets sichergestellt.

Zur Sicherstellung der stationären Genauigkeit aller Einzelübertragungsfunktionen in (3.41) ist abschließend das Vorfilter ausgehend von der stationären Betrachtung von (3.47) gemäß

$$F_e = \tilde{F}_e \left( C_w V_r (\Lambda_n)^{-1} W_r B_e \tilde{F}_e \right)^{-1} \quad (3.48)$$

zu modifizieren, wobei  $\tilde{F}_e$  eine Basis des Rechtskerns von  $T_\perp^T B_e$  ist und damit  $T_\perp^T B_e \tilde{F}_e = 0$  erfüllt. Damit ist die dynamische Ausgangsrückführung und das Vorfilter zur Entkopplung des geschlossenen Regelkreises bestimmt. Die Ergebnisse dieses Abschnitts fasst der nachfolgende Satz ausgehend von den vorstehenden Diskussionen ohne Beweis zusammen.

**Satz 3.11.** *Betrachtet wird das als entkoppelbar vorausgesetzte, quadratische Zustandssystem (3.1) mit  $m = p$  und  $p \geq 2$ , das mit einer dynamischen Ausgangsrückführung (3.19) der Ordnung  $n_d = n - p + 1$  geregelt wird, woraus das erweiterte System (3.20) entsteht. Die Menge der Regelungseigenwerte  $\Lambda_K \in \mathcal{D}_{n+n_d}$  wird in zwei selbst-konjugierte Mengen  $\Lambda_{K1}$  und  $\Lambda_{K2} = \{\lambda_{Kn+1}, \dots, \lambda_{Kn+n_d}\}$  aufgeteilt, wobei für  $\Lambda_{K1}$  die Unterscheidung*

$$\Lambda_{K1} = \begin{cases} \{\Lambda_{\delta_1}, \dots, \Lambda_{\delta_p}\}, & \delta = n, \\ \{\Lambda_{\delta_1}, \dots, \Lambda_{\delta_p}, \Lambda_0\}, & \delta < n \end{cases}$$

mit  $\Lambda_{\delta_i} = \{\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{i\delta_i}\} \in \mathcal{D}_{\delta_i}$  für  $i \in \{1, \dots, p\}$  vorgenommen werden muss, und worin  $\Lambda_0$  die Menge der invarianten Nullstellen von (3.1) bezeichnet. Sind in (3.44a) für  $i \in \{1, \dots, p\}$  und  $j \in \{1, \dots, \delta_i\}$  die Parametervektoren  $q_{vij} \neq 0$ , in (3.44b) für  $k \in \{\delta + 1, \dots, n\}$  die Parametervektoren  $q_{vk} \neq 0$  sowie zu komplexen Regelungseigenwerten selbst-konjugiert, dann existiert für  $s = n_d$  ein reelles  $K_e$  gemäß

$$K_e = Q_r(C_e V_r)^+ + (W_s B_e)^+ Q_s U_1 + U_2 K_2 U_1, \quad K_2 \in \mathbb{R}^{m \times 1} \text{ beliebig}, \quad (3.49)$$

und Vorfilter  $F_e$ , welche die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises (3.41) entkoppeln und die Regelungseigenwerte  $\Lambda_K$  zuweisen, so dass  $\sigma(A_e + B_e K_e C_e) = \Lambda_K = \{\Lambda_{K1}, \Lambda_{K2}\}$ , wenn mit (3.5) und (3.10)

$$(A1) \text{ rang}(C_e V_r) = r = n, \quad V_r \in \mathbb{R}^{n+n_d \times n}$$

$$(A2) \text{ rang}(W_s B_e) = s = n_d, \quad W_s \in \mathbb{R}^{n_d \times n+n_d}$$

erfüllt ist, und das Vorfilter gemäß (3.48) gewählt wird.

### 3.2.3 Entwurf einer Verkopplungsregelung

Im Vergleich zum Entwurf auf Entkopplung im vorangegangenen Abschnitt, wobei der geschlossene Regelkreis bezüglich des Führungsverhaltens in  $p$  Eingrößensysteme zerfällt, kommt beim Entwurf auf Verkopplung der Regelung die Aufgabe zuteil, gezielt zwischen einzelnen Zustandsbeziehungswise Ausgangsgrößen des betrachteten dynamischen Systems (3.1) algebraische Beziehungen herzustellen und diese bezüglich des Führungsverhaltens des geschlossenen Regelkreises stets einzuhalten.

Unter praktischen Gesichtspunkten werden Verkopplungsregelungen vor allem bei sicherheitskritischen Anwendungen eingesetzt, wenn eine sensor- oder aktorseitige Redundanz gefordert ist. Hierbei muss in den meisten Fällen Synchronität zwischen den einzelnen Teilsystemen hergestellt werden. Ein Beispiel ist in diesem Zusammenhang der Entwurf einer Steer-by-Wire Lenkung. Hierbei besteht das Ziel der Regelung darin, möglichst das Lenkgefühl einer klassischen Servolenkung nachzubilden, was über die geeignete Verkopplung des Lenkwinkels mit der Auslenkung

der Spurstange sowie über die Verkopplung der an der Lenk- und Spurstange wirkenden Kräfte und Momente möglich ist [81]. Darüber hinaus werden aus Sicherheitsgründen die Antriebe in der Regel redundant ausgelegt, was sich ebenfalls als Verkopplungsproblem interpretieren lässt.

Neben den praktischen Anwendungen einer Verkopplungsregelung leistet die Verkopplungsregelung ebenfalls einen theoretischen Beitrag bei der Behandlung differential-algebraischer Systeme, die intuitiv bei der modularen Modellbildung dynamischer Systeme entstehen. In der Literatur wird hierzu oftmals der Begriff Deskriptorsystem verwendet. Die Interpretation eines Deskriptorsystems als spezielles Verkopplungsproblem leistet hierdurch einen wertvollen Beitrag bei der Analyse und beim Regelungs- und Beobachterentwurf linearer als auch nichtlinearer Deskriptorsysteme [50, 64].

In diesem Abschnitt soll nun der Entwurf einer Verkopplungsregelung basierend auf der in Abschnitt 3.1.3 eingeführten Methodik erfolgen. Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden bereits ansatzweise in [111] vorgestellt. Darüber hinaus werden die Ergebnisse aus [44] genutzt, worin Konigorski die Existenzbedingungen und die Berechnungsvorschriften einer Verkopplungsregelung basierend auf der Vollständigen Modalen Synthese herleitet. Hierzu wird zunächst durch eine reguläre Ausgangsgrößentransformation (3.1b) in die Form

$$\begin{bmatrix} y_w \\ y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{v1} \\ T_{v2} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} T_{v1} \\ T_{v2} \end{bmatrix} Cx \quad (3.50)$$

überführt. Darin bezeichnet  $y_w$  die Ausgänge, die über die Führungsgrößen  $w$  im verkoppelten, geschlossenen Regelkreis vorgebar sein sollen und  $y_v$  die Ausgänge, die durch die Verkopplungsregelung asymptotisch zu null werden sollen. Gilt beispielsweise für den Verkopplungsausgang, dass  $y_v(t) = (C_1 - C_2)x(t) = 0$  bezüglich der Ausgangsgrößen  $y_1 = C_1x$  und  $y_2 = C_2x$  für  $t > t_0$  ist, dann ist dies äquivalent dazu, dass die Ausgänge  $y_1$  und  $y_2$  synchron und damit verkoppelt sind. Die Bedingung  $y_v(t) = 0$  für  $t > t_0$  ist damit gleichbedeutend mit der Verkopplung des geregelten Systems. Ausgehend von der Regelungsstruktur einer Zustandsrückführung mit Vorfilter gemäß  $u = Rx + Fw$  lässt sich die Idee des Verkopplungsentwurfs anschaulich im Bildbereich der Laplace Transformation darstellen. Für den geschlossenen Regelkreis im Laplace Bereich gilt zusammen mit der Partitionierung des Vorfilters gemäß  $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$  für die transformierten Ausgangsgrößen

$$\begin{bmatrix} y_w(s) \\ y_v(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{v1}C(sI - A - BR)^{-1}BF_1 & T_{v1}C(sI - A - BR)^{-1}BF_2 \\ T_{v2}C(sI - A - BR)^{-1}BF_1 & T_{v2}C(sI - A - BR)^{-1}BF_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(s) \\ w_2(s) \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Im Zeitbereich entspricht der Forderung nach Verkopplung der Zusammenhang

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = 0,$$

was sich im Laplace Bereich nach Konigorski [44] durch eine obere Blockdreiecksstruktur in (3.51) erreichen lässt, wenn

$$T_{v2}C(sI - A - BR)^{-1}BF_1 = 0,$$

und  $w_2(s) = 0$  erfüllt ist. Im Hinblick auf den Reglerentwurf mittels Vollständiger Modaler Synthese sind diese Forderungen genau dann erfüllt, wenn

$$T_{v2}C v_{Ri} = 0, \quad i \in \{1, \dots, \delta_v\}, \quad (3.52a)$$

$$w_{Ri}^T B F_1 = 0, \quad i \in \{\delta_v + 1, \dots, n\} \quad (3.52b)$$

für den Index  $\delta_v$  gilt. Der Index  $\delta_v$  ist eine Systemeigenschaft und lässt sich vorab allein durch Kenntnis der Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $T_{v2}C$  bestimmen. Im Sprachgebrauch der geometrischen Methode [8, 128] bilden die Rechtseigenvektoren  $V_{\delta_v} = [v_{R1} \dots v_{R\delta_v}]$ , die (3.52a) erfüllen, eine Basis des maximalen steuerbaren Unterraums von  $(A, B)$  im Kern von  $T_{v2}C$ , der sich mittels des *Invariant Subspace Algorithm* (vgl. Abschnitt C) bestimmen lässt und damit auch die Dimension  $\delta_v$  berechnet. In analoger Weise zum Entkopplungsentwurf im voran gegangenen Abschnitt stellt (3.52a) Restriktionen an die Rechtseigenvektoren  $V_{\delta_v}$  dar, die sich aus der Lösung von

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda_{Ri}I) & B \\ T_{v2}C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ri} \\ p_i \end{bmatrix} = 0, \quad i \in \{1, \dots, \delta_v\} \quad (3.53)$$

ergeben. Die verbleibenden Eigenwert-/Rechtseigenvektorkpaare  $(\lambda_{Ri}, v_{Ri})$  mit  $i > \delta_v$  sind nunmehr beliebig wählbar und treten lediglich bei Störانregung, beispielsweise durch impulsartige Anfangsstörungen  $x(t_0)$  für die  $T_{v2}Cx(t_0) \neq 0$  gilt oder Störانregung durch  $w_2(t)$  mit  $w_2(t) \neq 0$ , in Erscheinung.

Im Hinblick auf die Übertragung des Verfahrens zur Verkopplung auf den Entwurf der Ausgangsrückführung aus Abschnitt 3.1.3 bleibt somit festzuhalten, dass (3.52a)  $\delta_v$  Restriktionen an die Rechtseigenvektoren des geschlossenen Regelkreises darstellen. Damit muss es durch den Entwurf der Ausgangsrückführung möglich sein, ebenfalls  $\delta_v$  Eigenwert-/Rechtseigenvektorkpaare  $(\lambda_{Ki}, v_{Ki})$  im geschlossenen Regelkreis zu erzeugen. Davon ausgehend ist daher zu unterscheiden, ob im Hinblick auf das Verfahren zum Entwurf von Ausgangsrückführungen in Abschnitt 3.1.3  $\delta_v \leq p - 1$  bzw.  $\delta_v > p - 1$  gilt. Im letztgenannten Fall gelingt der Entwurf der Verkopplungsregelung basierend auf Abschnitt 3.1.3 nur, wenn eine dynamische Rückführung gemäß Abschnitt 3.1.4 verwendet wird. Mit der Bedingung nach Kimura für das erweiterte System  $n + 1 \leq m + p + n_d$  und zusammen mit der eben diskutierten Forderung, dass wenigstens  $\delta_v$  Rechtseigenvektoren vorgeben werden können, folgt daher aus

$$n_d \geq \max(0, n - m - p + 1, \delta_v - p + 1)$$

eine notwendige untere Schranke für die zur Verkopplung mittels Ausgangsrückführung benötigten Reglerordnung  $n_d$ .

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wird im Folgenden in Anlehnung an das Vorgehen zum Entwurf der Entkopplungsregelung im vorangegangenen Abschnitt der Entwurf der statischen Ausgangsrückführung (3.40) für das erweiterte System (3.20) betrachtet und darin die Rückführmatrix  $K_e$  und das Vorfilter  $F_e$  für das System (3.20) so bestimmt, dass sich zusammen mit der Partitionierung des Vorfilters  $F_e = [F_{e1} \quad F_{e2}]$  für die Führungsübertragungsmatrix des geschlossenen

Regelkreises entsprechend der Forderung nach Verkopplung die obere Blockdreiecksmatrix

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_w(s) \\ y_v(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_w(sI_{n+n_d} - A_{K_e})^{-1} B_e F_{e1} & C_w(sI_{n+n_d} - A_{K_e})^{-1} B_e F_{e2} \\ C_v(sI_{n+n_d} - A_{K_e})^{-1} B_e F_{e1} & C_v(sI_{n+n_d} - A_{K_e})^{-1} B_e F_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(s) \\ w_2(s) \end{bmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} C_w(sI_{n+n_d} - A_{K_e})^{-1} B_e F_{e1} & C_w(sI_{n+n_d} - A_{K_e})^{-1} B_e F_{e2} \\ 0 & C_v(sI_{n+n_d} - A_{K_e})^{-1} B_e F_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.54)$$

zusammen mit der Abkürzung  $A_{K_e} = A_e + B_e K_e C_e$  ergibt. Die Matrizen  $C_w$  und  $C_v$  ergeben sich entsprechend der Definition der erweiterten Ausgangsmatrix in (3.21) aus

$$C_w = [T_{v1} C \quad 0] \quad (3.55)$$

$$C_v = [T_{v2} C \quad 0] \quad (3.56)$$

mit  $C_w \in \mathbb{R}^{(p-l) \times n+n_d}$  bzw.  $C_v \in \mathbb{R}^{l \times n+n_d}$ . Zur Bestimmung der Eigenwert-/Rechtseigenvektorpaaire  $(\lambda_{Ki}, v_{Ki})$  wird die Bedingung (3.53) modifiziert, woraus sich

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (A_e - \lambda_{Ki} I) & B_e \\ C_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ki} \\ p_{vi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A_e - \lambda_{Kij} I) & B_e \\ C_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{vi} \\ M_{vi} \end{bmatrix} \cdot q_{vi} = 0, \\ i &\in \{1, \dots, \delta_v\}, \end{aligned} \quad (3.57a)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (A_e - \lambda_{Ki} I) & B_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ki} \\ p_{vi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A_e - \lambda_{Ki} I) & B_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{vi} \\ M_{vi} \end{bmatrix} \cdot q_{vi} = 0, \\ i &\in \{\delta_v + 1, \dots, p + n_d - 1\} \end{aligned} \quad (3.57b)$$

ergibt. Für  $i \in \{p + n_d, \dots, n + n_d\}$  ergeben sich entsprechend zum Vorgehen aus Abschnitt 3.1.3 die Eigenwert-/Linkseigenvektorpaaire  $(\lambda_{Ki}, w_{Ki})$  ausgehend von (3.15) aus

$$\begin{bmatrix} (A_{e1}^T - \lambda_{Ki} I) & C_{e1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{Ki} \\ p_{wi} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.58)$$

wobei darin die in Abschnitt 3.2.2 eingeführten Abkürzungen (3.46) genutzt werden. Dies legt die Rückführmatrix  $K_e$  des erweiterten Systems (3.20) und damit die Systemmatrix des verkoppelt geregelten Systems

$$\dot{x}_e = (A_e + B_e K_e C_e) x_e + B_e F_e w \quad (3.59a)$$

$$y_v = C_v x_{ei}, \quad (3.59b)$$

fest. Zur Bestimmung des Vorfilters  $F_e$  bietet es sich ausgehend von (3.52b) an, ebenfalls wie in den Abschnitten 3.1.3 und 3.2.2 auf eine neue Koordinatendarstellung überzugehen. Da die Eigenbewegungen, die nicht konsistent mit der Verkopplung sind, unsteuerbar gemacht werden müssen, wird eine Matrix  $T_\perp$  mit orthogonalen Spaltenvektoren bestimmt, die  $\text{bild}(T_\perp) = \text{kern}(V_{\delta_v}^T)$  sowie  $T_\perp^T T_\perp = I_{n+n_d-\delta_v}$  erfüllt, wobei  $V_{\delta_v} = [v_{K1} \quad \dots \quad v_{K\delta_v}]$  gilt. Die neue Koordinatendarstellung folgt damit aus

$$\tilde{x} = [V_{\delta_v} \quad T_\perp]^{-1} x$$

sowie mit

$$[V_{\delta_v} \quad T_{\perp}]^{-1} = [W_{\delta_v}^T \quad T_{\perp}]^T,$$

und es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{\delta_v} & W_{\delta_v} A_{K_e} T_{\perp} \\ 0 & T_{\perp}^T A_{K_e} T_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{\delta_v} B_e F_{e1} & W_{\delta_v} B_e F_{e2} \\ T_{\perp}^T B_e F_{e1} & T_{\perp}^T B_e F_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$y_v = [0 \quad C_v T_{\perp}] \tilde{x}, \quad (3.61)$$

was eine Kalman Zerlegung von (3.59) darstellt. Mit dieser Systemdarstellung wird deutlich, dass die Eigenwert-/Rechteigenvektorkpaare  $(\lambda_{Ki}, v_{Ki})$  für  $i \in \{1, \dots, \delta_v\}$  bezüglich des Verkopplungsausgangs  $y_v$  unbeobachtbar sind, was genau der Forderung nach Verkopplung entspricht. Für inkonsistente Anfangswerte, die die Verkopplung verletzen, verschwindet der Verkopplungsfehler genau dann asymptotisch, wenn die Eigenwerte der Matrix  $T_{\perp}^T A_{K_e} T_{\perp}$  in der linken, komplexen Halbebene liegen, was durch den parametrischen Ansatz stets gewährleistet werden kann.

Im verkoppelt geregelten Übertragungsverhalten kann der Verkopplungsausgang  $y_v$  über die Führungsgrößen  $w$  allerdings noch gesteuert werden, was somit nicht konsistent mit der Forderung nach asymptotischer Verkopplung ist. Um dies zu verhindern, muss daher in (3.60) neben  $w_2 = 0$  der Ausdruck  $T_{\perp}^T B_e F_{e1} = 0$  werden beziehungsweise  $\text{bild}(F_{e1}) \subset \text{kern}(T_{\perp}^T B_e)$  erfüllt sein. Dies ist allerdings stets möglich, da aus

$$\begin{bmatrix} W_{\delta_v} \\ T_{\perp}^T \end{bmatrix} B_e F_{e1} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit beliebiger Matrix  $P$  durch Linksmultiplikation mit  $[V_{\delta_v} \quad T_{\perp}]$ , woraus  $B_e F_{e1} = V_{\delta_v} P$  folgt, das Vorfilter  $F_{e1}$  aus der Lösung von

$$\begin{bmatrix} B_e & V_{\delta_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{e1} \\ -P \end{bmatrix} = 0 \quad (3.62)$$

entnommen werden kann. Aufgrund der Definition eines steuerbaren Unterraums (vgl. Abschnitt C) ist dies ebenfalls stets möglich, da die Bildräume von  $B_e$  und  $V_{\delta_v}$  immer eine nichtleere Schnittmenge aufweisen (s. hierzu auch die Diskussion in [44]). Damit ist die dynamische Ausgangsrückführung und das Vorfilter zur Verkopplung des geschlossenen Regelkreises bestimmt. Die Ergebnisse dieses Abschnitts fasst der nachfolgende Satz ohne Beweis zusammen.

**Satz 3.12.** *Betrachtet wird das Zustandssystem (3.1) mit  $m \geq 2$  und  $p \geq 2$  zusammen mit einer geeignet gewählten Ausgangsgrößentransformation (3.50), das mit einer dynamischen Ausgangsrückführung (3.19) der Ordnung  $n_d = \max(0, n - m - p + 1, \delta_v - p + 1)$  geregelt wird, woraus das erweiterte System (3.20) entsteht. Die Menge der Regelungseigenwerte  $\Lambda_K \in \mathcal{D}_{n+n_d}$  wird in zwei selbst-konjugierte Mengen  $\Lambda_{K1}$  und  $\Lambda_{K2} = \{\lambda_{Kp+n_d}, \dots, \lambda_{Kn+n_d}\}$  aufgeteilt, wobei für  $\Lambda_{K1}$  die Unterscheidung*

$$\Lambda_{K1} = \begin{cases} \Lambda_{\delta_v}, & \delta_v = p + n_d - 1, \\ \Lambda_{\delta_v} \cup \{\lambda_{K\delta_v+1}, \dots, \lambda_{Kp+n_d-1}\}, & \delta_v < p + n_d - 1, \end{cases}$$



mit  $\Lambda_{K\delta_v} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{K\delta_v}\} \in \mathcal{D}_{\delta_v}$  und  $\{\lambda_{K\delta_v+1}, \dots, \lambda_{Kp+n_d-1}\} \in \mathcal{D}_{p+n_d-\delta_v-1}$  vorgenommen werden muss. Sind in (3.57) für  $i \in \{1, \dots, p+n_d-1\}$  die Parametervektoren  $q_{vi} \neq 0$  sowie zu komplexen Regelungseigenwerten selbst-konjugiert, dann existiert für  $r = p+n_d-1$  und  $s = n-p+1$  ein reelles  $K_e$  gemäß

$$K_e = \begin{cases} Q_r(C_e V_r)^+ + (W_s B_e)^+ Q_s U_1, & m = s, \\ Q_r(C_e V_r)^+ + (W_s B_e)^+ Q_s U_1 + U_2 K_2 U_1, & m > s, \end{cases} \quad K_2 \in \mathbb{R}^{(m-s) \times 1} \text{ beliebig,} \quad (3.63)$$

und Vorfilter  $F_e$ , welche die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises in die obere Blockdreiecksstruktur (3.54) überführen und die Regelungseigenwerte  $\Lambda_K$  zuweisen, so dass  $\sigma(A_e + B_e K_e C_e) = \Lambda_K = \{\Lambda_{K1}, \Lambda_{K2}\}$  gilt, wenn mit (3.5) und (3.10)

$$(A1) \quad \text{rang}(C_e V_r) = r, \quad V_r \in \mathbb{R}^{n+n_d \times r},$$

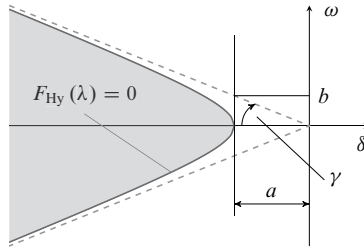
$$(A2) \quad \text{rang}(W_s B_e) = s, \quad W_s \in \mathbb{R}^{s \times n+n_d}$$

erfüllt ist, und das Vorfilter  $F_{e1}$  in  $F_e = \begin{bmatrix} F_{e1} & F_{e2} \end{bmatrix}$  aus der Lösung von (3.62) gewählt wird.

### 3.3 Teilparametrisches Entwurfsverfahren

Die in Abschnitt 3.1 eingeführte Methodik zum Entwurf von Ausgangsrückführungen als auch die in Abschnitt 3.2 diskutierten Erweiterungen gehen davon aus, dass die Menge der Regelungseigenwerte  $\Lambda_K$  fest gewählt wird. Bei vielen praktischen regelungstechnischen Aufgabenstellungen ist daher Erfahrung vonnöten, um die Regelungseigenwerte im Einklang mit den konkreten Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis zu bringen. Insbesondere bei Systemen mit vergleichsweise hoher Gesamtsystemordnung, die aus der Summe von Strecken- und Reglerordnung resultiert, wird es schwierig, die Menge der Regelungseigenwerte derart zu wählen, dass das Ergebnis weiterhin interpretierbar und im Sinne der Anforderungen ausfällt. In diesen Fällen ist es daher einleuchtend, nicht mehr das komplette Spektrum des geschlossenen Regelkreises fest vorzugeben, sondern dazu überzugehen, einen Teil beziehungsweise das komplette Spektrum in vorab vorgegebene Bereiche der komplexen Ebene, wie in Bild 3.3 dargestellt, zu verschieben.

Im Hinblick auf die robuste Eigenwertvorgabe mittels Ausgangsrückführung, die in Abschnitt 3.2.1 diskutiert wurde, können durch Übergang auf diesen Ansatz neben den Parametervektoren nun auch die Regelungseigenwerte als Optimierungsvariablen genutzt werden, woraus sich mehr Freiheitsgrade für den Entwurf ergeben. Darüber hinaus ist mit Satz 3.9 ein hinreichendes Kriterium für die Differenzierbarkeit der Rückführmatrix  $K$  gegeben, welches davon ausgeht, dass die zur Berechnung der Rückführung benötigten Nullräume lediglich die Dimension eins besitzen, was in vielen Fällen restriktiv sein kann. Durch den Übergang auf einen teilparametrischen Ansatz kann diese Problematik umgangen werden, was in den nachfolgenden Abschnitten dargestellt



**Bild 3.3:** Begrenzung des Eigenwertbereichs durch eine Hyperbel

wird. Daraus ergibt sich aber auch, dass ein Verfahren benötigt wird, um mittels einer Ausgangsrückführung  $u = Ky$  sämtliche Eigenwerte der Matrix  $A + BKC$  in vorab festgelegte Bereiche der komplexen Ebene zu verschieben. Dies führt auf die Vorgabe von Eigenwertbereichen, die im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt wird. Die Kombination dieser Methodik mit der parametrischen Ausgangsrückführung wird im Anschluss in Abschnitt 3.3.3 diskutiert, wobei die Methodik anhand der robusten Entkopplungsregelung motiviert und dargestellt wird.

### 3.3.1 Vorgabe von Eigenwertbereichen

Ausgangspunkt der Betrachtungen in diesem Abschnitt ist die steuer- und beobachtbare Strecke (3.1). Ziel ist die Bestimmung der Rückführmatrix  $K$ , so dass alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises und damit die Eigenwerte der Matrix  $A + BKC$  in vorab festgelegte Bereiche der komplexen Ebene zum Liegen kommen. Das Vorgehen orientiert sich hierbei an Standverfahren aus der Literatur, wie beispielsweise dem Robustheitsentwurf mittels Straffunktionen in [28, S. 392 ff.]. Anhand der Darstellung in Bild 3.3 wird das Vorgehen verdeutlicht.

Die Parametrierung der Eigenwertbereiche erfolgt durch Definition geeigneter impliziter Funktionen  $F(\lambda) = 0$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , deren Lösung den Rand der Gebiete begrenzen. Am Beispiel der Hyperbel, die in Bild 3.3 einen solchen Eigenwertbereich begrenzt, soll das weitere Vorgehen veranschaulicht werden. Die Funktion  $F_{Hy}(\lambda)$  ist hierbei so gewählt, dass links der begrenzenden Kurve  $F_{Hy}(\lambda) < 0$  bzw. rechts der begrenzenden Kurve  $F_{Hy}(\lambda) > 0$  wird. Damit definiert

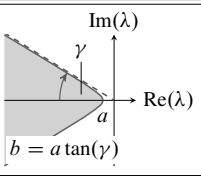
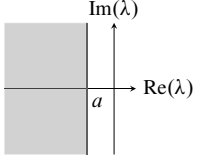
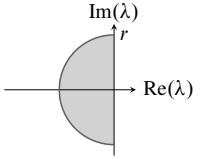
$$\mathcal{Z}_{Hy} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid F_{Hy}(\lambda) \leq 0\} \quad \text{mit} \quad F_{Hy}(\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda) + \frac{a}{b} \sqrt{\operatorname{Im}(\lambda)^2 + b^2} \quad (3.64)$$

den grau schraffierten Bereich der komplexen Ebene, in dem die Eigenwerte  $\lambda_{Kk} \in \sigma(A + BKC)$  des geschlossenen Regelkreises zum Liegen kommen sollen. Darüber hinaus ist durch die Wahl der Parameter  $a > 0$  und  $b > 0$  eine weitere Möglichkeit gegeben, um die Dynamik des geschlossenen Regelkreises zu beeinflussen. Durch die Vergrößerung von  $a$  wird die Hyperbel in der komplexen Ebene weiter nach links geschoben, wodurch die Minstdynamik bzw. Abklingrate des Regelkreises eingestellt wird, wenn alle Regelungseigenwerte in  $\mathcal{Z}_{Hy}$  zum Liegen kommen. Über den Zusammenhang  $b = a \tan(\gamma)$  ist ebenfalls eine Beeinflussung der Minstdämpfung

der Eigenwerte möglich, was somit weitreichende Möglichkeiten zur Einstellung der Dynamik des geschlossenen Regelkreises bietet.

Das Vorgehen ist nicht nur auf eine begrenzende Kurve beschränkt. Vielmehr ist eine Kombination verschiedener Bereiche möglich, wobei vorausgesetzt werden muss, dass die Schnittmenge aller Bereiche nicht die leere Menge ist. Eine Übersicht über die typischen Bereiche, die in der Literatur angegeben sind, ist in Tabelle 3.1 aufgeführt.

**Tabelle 3.1:** Übersicht über verschiedene Bereiche samt deren Parametrierung

Kurventyp	Parameter	Parametrierung	Skizze
Hyperbel	$a, b$	$F_{Hy}(\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda) + \frac{a}{b} \sqrt{\operatorname{Im}(\lambda)^2 + b^2}$	
Gerade	$a$	$F_{Ge}(\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda) + a$	
Kreis	$r$	$F_{Kr}(\lambda) = \sqrt{\operatorname{Re}(\lambda)^2 + \operatorname{Im}(\lambda)^2} - r$	

Zur Berechnung einer Rückführmatrix  $K$ , welche die Eigenwerte von  $A + BKC$  in die in Tabelle 3.1 aufgeführten Bereiche verschiebt, wird ein Min-Max-Optimierungsproblem formuliert, welches mit der Methodik aus Abschnitt 3.3.2 gelöst werden kann. Da der Zusammenhang bezüglich der Eigenwerte des geregelten Systems  $\{\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{Kn}\} = \sigma(A + BKC)$  gilt und die  $\lambda_{Ki}$  implizite Funktionen der Rückführmatrix  $K$  sind, kann für jeden Eigenwert  $\lambda_{Ki}$  eine äußere quadratische Straffunktion definiert werden, woraus

$$p_i(\xi) = \begin{cases} F_k(\lambda_{Ki}(\xi))^2, & \text{wenn } F_k(\lambda_{Ki}(\xi)) > 0, \\ 0, & F_k(\lambda_{Ki}(\xi)) \leq 0, \end{cases} \quad \text{mit } i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{\text{Hy, Ge, Kr}\} \quad (3.65)$$

und den Optimierungsvariablen  $\xi = \operatorname{vec}(K)$  folgt. Zur Verschiebung aller Eigenwerte in den festzulegenden Bereich müssen folglich alle Straffunktionen  $p_i(\xi) = 0 \forall i$  werden, was auf das Min-Max Optimierungsproblem

$$\min_{\xi} \max_{i \in \{1, \dots, n\}} p_i(\xi) \quad (3.66)$$

führt. Ein kritischer Aspekt bei dieser Problemklasse ist ausgehend von den Ergebnissen zur Differenzierbarkeit des Eigenwertproblems in Satz B.12 offensichtlich das Verhalten der Regelungseigenwerte. Im Folgenden wird nun vorausgesetzt, dass die Eigenwerte der Matrix  $A + BKC$  einfach sind, was die Differenzierbarkeit der Eigenwerte garantiert. Dies hat zur Folge, dass die Funktionen  $F_k(\lambda_{Ki}(\xi)) \forall i$  ebenfalls differenzierbar sind, weshalb der Gradient der Straffunktion  $\nabla p_i(\xi)$  angegeben werden kann. Dies wird im nachfolgenden Satz zusammengefasst.

**Satz 3.13.** *Betrachtet wird die steuer- und beobachtbare Strecke (3.1), welche mit der Ausgangsrückführung  $u = Ky$  geregelt wird, woraus die Matrix des geschlossenen Regelkreises  $A + BKC$  entsteht. Unter der Voraussetzung, dass die Eigenwerte der Matrix  $A + BKC$  einfach sind, ist die Straffunktion  $p_i(\xi)$  differenzierbar, und die Differentiale sind für  $k \in \{\text{Hy, Ge, Kr}\}$  durch*

$$dp_i(\xi) = \begin{cases} 2\sqrt{p_i(\xi)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a\text{Im}(\lambda_{Ki})}{b\sqrt{\text{Im}(\lambda_{Ki})^2 + b^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta_{Ki} \\ d\omega_{Ki} \end{bmatrix}, & k = \text{Hy} \\ 2\sqrt{p_i(\xi)} d\delta_{Ki}, & k = \text{Ge} \\ 2\sqrt{p_i(\xi)} \begin{bmatrix} \frac{\text{Re}(\lambda_{Ki})}{\sqrt{\text{Re}(\lambda_{Ki})^2 + \text{Im}(\lambda_{Ki})^2}} & \frac{\text{Im}(\lambda_{Ki})}{\sqrt{\text{Re}(\lambda_{Ki})^2 + \text{Im}(\lambda_{Ki})^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta_{Ki} \\ d\omega_{Ki} \end{bmatrix}, & k = \text{Kr} \end{cases}$$

mit  $d\delta_{Ki} = \text{Re}(d\lambda_{Ki})$ ,  $d\omega_{Ki} = \text{Im}(d\lambda_{Ki})$  und

$$d\lambda_{Ki} = \frac{w_{Ki}^T (dA) v_{Ki}}{w_{Ki}^T v_{Ki}} = (w_{Ki}^T v_{Ki})^{-1} (v_{Ki}^T C^T \otimes w_{Ki}^T B^T) d\xi$$

gegeben.

*Beweis.* Unter der Voraussetzung, dass die Eigenwerte der Matrix  $A + BKC$  einfach sind, existiert nach Satz B.12 eine komplexwertige, unendlich oft differenzierbare Funktion  $\lambda_{Ki}$ , die  $(A + BKC)v_{Ki} = \lambda_{Ki}v_{Ki}$  erfüllt, womit das Differential (B.10) folgt. Durch Anwendung der Rechenregeln aus Abschnitt B.4 auf die Parametrierungen der Kurven in Tabelle 3.1 zusammen mit der Straffunktion (3.65) folgt die gesuchte Aussage, wie sich einfach nachrechnen lässt.  $\square$

### 3.3.2 Lösung unbeschränkter Min-Max Optimierungsprobleme

Im Hinblick auf das in (3.66) formulierte Min-Max Optimierungsproblem zur Eigenwertbereichsvorgabe lässt sich aufgrund des Maximumoperators nicht auf die in Abschnitt 3.2.1 erwähnten Algorithmen zur Lösung unbeschränkter Optimierungsprobleme zurückgreifen. Dies ist darin begründet, dass die Zielfunktion nicht überall stetig differenzierbar ist. Infolgedessen soll nachfolgend dargestellt werden, wie sich für das unbeschränkte Min-Max Optimierungsproblem

$$\min_{\xi} \max_{k \in \underline{q}} f_k(\xi) \quad (3.67)$$

mit  $\xi \in \mathbb{R}$  und  $\underline{q} = \{1, \dots, q\}$  konstruktiv feststellen lässt, ob ein lokales Minimum von (3.67) vorliegt. Vorausgesetzt wird hierzu, dass die Funktionen  $f_k(\xi)$  stetig differenzierbar sind. Ohne

weitere Annahmen an die Funktionen  $f_k(\xi)$  ist (3.67) zunächst ein nicht-konvexes Optimierungsproblem, welches schwer zu lösen ist. Das nachfolgend dargestellte algorithmische Vorgehen ist daher lediglich ein lokales Optimierungsverfahren, so dass keine Aussagen über das globale Minimum möglich sind. Dennoch belegen die im Rahmen der Arbeit hinsichtlich des Optimierungsproblems (3.67) erzielten Ergebnisse die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens.

Eine notwendige Bedingung für einen stationären Punkt  $\bar{\xi}$  des Optimierungsproblems (3.67) ist, dass die Richtungsableitung der Funktion  $\Phi(\xi) := \max_{k \in \underline{q}} f_k(\xi)$  nicht-negativ ist [84, Theorem 2.1.1]. D.h. es ist  $d\Phi(\xi, h) \geq 0$  für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $d\Phi(\xi, h)$  die Richtungsableitung der Funktion  $\Phi(\xi)$  in Richtung von  $h$  bezeichnet. Eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass  $d\Phi(\xi, h) \geq 0$  für alle  $h \in \mathbb{R}^n$  erfüllt ist, folgt aus der Existenz eines Vektors  $\hat{\mu}$  aus dem Einheitssimplex  $\Sigma_q := \{\mu \in \mathbb{R}^q \mid \mu_j \geq 0, j \in \underline{q}, \sum_{j=1}^q \mu_j = 1\}$  mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{j=1}^q \hat{\mu}_j \nabla f_j(\xi) = 0$$

und

$$\sum_{j=1}^q \hat{\mu}_j (\Phi(\xi) - f_j(\xi)) = 0$$

erfüllt ist. Ein konstruktiver Weg zur Feststellung, ob ein Punkt  $\xi$  ein lokales Minimum von (3.67) ist und damit die oben genannte Bedingung erfüllt, folgt mittels einer sogenannten Optimalitätsfunktion  $\Theta(\xi)$ . Im Hinblick auf den *Pshenichnyi-Pironneau-Polak Algorithmus* [84, PPP algorithm 2.4.1] ist durch das quadratische Optimierungsproblem

$$\Theta_k = - \min_{\mu \in \Sigma_q} \left\{ \sum_{j=1}^q \mu_j (\Phi(\xi_k) - f_j(\xi_k)) + \frac{1}{2\epsilon} \left\| \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla f_j(\xi_k) \right\|^2 \right\} \quad (3.68)$$

mit  $\epsilon > 0$  eine solche Optimalitätsfunktion gegeben. Darin bezeichnet  $\nabla f_j(\xi_k)$  den Gradienten der Zielfunktion  $f_j(\xi_k)$  bezüglich  $\xi$ . Durch das iterative Lösen von (3.68) mit  $k = 0, 1, 2, \dots$  lässt sich der Wert der Optimalitätsfunktion  $\Theta_k = \Theta(\xi_k)$  bestimmen. Darüber hinaus folgt aus

$$h_k(\xi) = -\frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1}^q \mu_{\xi j} \nabla f_j(\xi_k), \quad (3.69)$$

wobei  $\mu_{\xi}$  die Lösung von (3.68) ist, eine Abstiegsrichtung für das Optimierungsproblem (3.67). Aufgrund der Eigenschaften der Optimalitätsfunktion  $\Theta_k$  ist diese eine stetige, nicht-positive Funktion, die nur  $\Theta_k = 0$  erfüllt, falls der Punkt  $\xi_k$  die notwendige Optimalitätsbedingung  $d\Phi(\xi, h) \geq 0$  erfüllt.

Ist daher  $\Theta_k = 0$ , dann kann die Iteration zur Minimierung von (3.67) abgebrochen werden. Gilt  $\Theta_k < 0$ , dann lässt sich mittels der Suchrichtung (3.69) und mit den Parametern  $\alpha \in (0, 1]$  und  $\beta \in (0, 1)$  die über

$$\sigma_k = \sigma_k(\xi_k) = \arg \max_{l \in \mathbb{N}} \left\{ \beta^l \mid \Phi(\xi_k + \beta^l h_k) - \Phi(\xi_k) - \beta^l \alpha \Theta_k \leq 0 \right\}$$

zu bestimmende Schrittweite berechnen. Damit erfolgt der Übergang auf den neuen Punkt  $\xi_{k+1} = \xi_k + \sigma_k h_k$ , und die Auswertung der Optimalitätsfunktion gemäß (3.68) beginnt durch das Ersetzen von  $k + 1$  durch  $k$  erneut.

Das Vorgehen zur Lösung unbeschränkter Min-Max Optimierungsprobleme erfordert daher lediglich einen Algorithmus zur Lösung quadratischer Optimierungsprobleme. Hierfür stehen zahlreiche Implementierungen zur Verfügung, wobei die im Rahmen der Arbeit erzielten Ergebnisse auf Grundlage des Algorithmus `quadprog` für quadratische Probleme der *Optimization Toolbox* aus MATLAB entstanden sind.

### 3.3.3 Robuste Entkopplungsregelung

Mit der im voran gegangenen Abschnitt vorgestellten Methodik ist es möglich, die Eigenwerte eines über Ausgangsrückführung geregelten Zustandssystems in vorab festzulegende Bereiche der komplexen Ebene zu verschieben, was durch Formulierung als Min-Max Optimierungsproblem erfolgt. Die Kombination der Eigenwertbereichsvorgabe mit dem Verfahren zur Entkopplung mittels dynamischer Ausgangsrückführung aus Abschnitt 3.2.2 soll in diesem Abschnitt behandelt werden, was auf die *robuste* Entkopplungsregelung führt.

Zur Motivation dieses Abschnitts soll kurz an die Ergebnisse in Satz 3.14 erinnert werden. Beim Entwurf auf Entkopplung muss ausgehend von der parametrischen Formulierung der Ausgangsrückführung aus Abschnitt 3.1.3 eine dynamische Rückführung verwendet und das Spektrum der Regelungseigenwerte in zwei Teilmengen aufgeteilt werden. Dabei korrespondiert die erste Teilmenge  $\Lambda_{K1}$ , die aus  $n$  Regelungseigenwerten besteht, mit denjenigen Eigenbewegungen, die das entkoppelt geregelte Übertragungsverhalten in (3.41) festlegen. Die verbleibenden  $n_d$  Regelungseigenwerte treten nur bei Anfangsstörungen in Erscheinung, da diese Eigenbewegungen durch das Vorfilter unsteuerbar gemacht werden. Darüber hinaus existieren weitere Freiheitsgrade durch die Parametervektoren  $q_{vij}$  für  $i \in \{1, \dots, p\}$  und  $j \in \{1, \dots, \delta_i\}$  sowie für die Parametervektoren  $q_{vk}$  mit  $k \in \{\delta + 1, \dots, n\}$ , da die Matrizen in (3.44) zur Bestimmung der Nullräume mehr Spalten als Zeilen besitzen.

Dies zeigt, dass im Vergleich zum Entkopplungsentwurf mittels Zustandsrückführung noch weitere Freiheitsgrade durch die Parametervektoren zur Verfügung stehen, aber auch die Regelungseigenwerte der unsteuerbaren Eigenmoden noch genutzt werden können, um das dynamische Verhalten des entkoppelt geregelten Systems weiter zu verbessern, was die Anwendung der in Abschnitt 3.2.1 diskutierten Methodik auf die Entkopplungsregelung nahe legt und damit auf die Minimierung der in (3.33) angegebenen Gütefunktionen führt.

Zur Minimierung der Gütefunktionen (3.33) ist allerdings vorauszusetzen, dass die entkoppelnde Rückführmatrix  $K_e$  differenzierbar ist. Dies motiviert den nachfolgenden Übergang auf eine teilparametrische Formulierung der Entkopplungsregelung, da dadurch die Differenzierbarkeit von  $K_e$  durch Kombination der Methoden aus den Abschnitten 3.1.3 und 3.3.1 sicher gestellt werden kann. Zusätzlich lassen sich die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises, die durch das

Vorfilter unsteuerbar gemacht werden, als zusätzliche freie Entwurfsparameter in das Optimierungsproblem integrieren, welches für die robuste Entkopplungsregelung formuliert wird. Hierzu wird die Eigenwertbereichsvorgabe aus dem voran gegangenen Abschnitt genutzt. Die Ergebnisse zur Differenzierbarkeit der Matrix  $K_e$  im Hinblick auf die Entkopplungsregelung fasst der folgende Satz zusammen. Da darin die Berechnung des Differentials  $dK_e$  aufwendig ist, findet sich der Beweis im Anhang.

**Satz 3.14.** *Betrachtet wird das als entkoppelbar vorausgesetzte, quadratische Zustandssystem (3.1) mit  $m = p$  und  $p \geq 2$ , das mit einer dynamischen Ausgangsrückführung (3.19) der Ordnung  $n_d = n - p + 1$  geregelt wird, woraus das erweiterte System (3.20) entsteht. Für die Teilmenge der Regelungseigenwerte  $\Lambda_{K1} \in \mathcal{D}_n$ , die das entkoppelt geregelte Übertragungsverhalten bestimmt, muss die Unterscheidung*

$$\Lambda_{K1} = \begin{cases} \{\Lambda_{\delta_1}, \dots, \Lambda_{\delta_p}\}, & \delta = n \\ \{\Lambda_{\delta_1}, \dots, \Lambda_{\delta_p}, \Lambda_0\}, & \delta < n \end{cases}$$

mit  $\Lambda_{\delta_i} = \{\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{i\delta_i}\} \in \mathcal{D}_{\delta_i}$  für  $i \in \{1, \dots, p\}$  vorgenommen werden, wobei darin  $\Lambda_0$  die Menge der invarianten Nullstellen von (3.1) bezeichnet. Sind in (3.44a) für  $i \in \{1, \dots, p\}$  und  $j \in \{1, \dots, \delta_i\}$  die Parametervektoren  $q_{vij} \neq 0$ , in (3.44b) für  $k \in \{\delta + 1, \dots, n\}$  die Parametervektoren  $q_{vk} \neq 0$  sowie die Parametervektoren zu komplexen Regelungseigenwerten selbstkonjugiert, dann existiert ein reelles und differenzierbares  $K_e$  gemäß

$$K_e = Q_r(C_e V_r)^+ + K_{e1} U_1 \quad (3.70)$$

und Vorfilter  $F_e$ , welche die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises (3.41) entkoppeln und die Regelungseigenwerte  $\Lambda_{K1}$  zuweisen, so dass  $\Lambda_{K1} \subset \sigma(A_e + B_e K_e C_e)$ , wenn mit (3.5) die Bedingung  $\text{rang}(C_e V_r) = r = n$  mit  $V_r \in \mathbb{R}^{n+n_d \times n}$  erfüllt ist, und das Vorfilter gemäß (3.48) gewählt wird. Darüber hinaus gilt für das Differential

$$dK_e = \begin{bmatrix} \nabla K_{\xi_1} & \nabla K_{\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

wobei  $\xi_1 = [q_{v1}^T \dots q_{vn}^T]^T$  und  $\xi_2 = \text{vec}(K_{e1})$  gilt sowie  $\nabla K_{\xi_1}$  und  $\nabla K_{\xi_2}$  durch (A.6) gegeben sind.

*Beweis.* Siehe Abschnitt A.2. □

Mit Satz 3.14 ist nun eine Möglichkeit gegeben, einen integrierten Entwurf eines Entkopplungsreglers für ein entkoppelbares quadratisches Zustandssystem (3.1) zu bestimmen. Im Gegensatz zum Entkopplungsentwurf mittels Zustandsrückführung, der unter praktischen Gesichtspunkten in den meisten Fällen um einen geeigneten Beobachterentwurf ergänzt werden muss, wird eine praktisch implementierbare Ausgangsregelung bestimmt, die ebenfalls nicht auf die Gültigkeit des Separationstheorems angewiesen ist. Darüber hinaus ist das entkoppelte Führungsverhalten parametrisch vorgebar, was die verbleibenden Freiheitsgrade in übersichtlicher Weise darstellt.

Aufgrund der Differenzierbarkeit der Matrix  $K_e$  kann ebenfalls über die verbleibenden Freiheitsgrade optimiert werden, was nachfolgend diskutiert wird. Dabei ist die Matrix  $K_{e1}$  so zu wählen, dass die bezüglich des entkoppelten Führungsverhaltens unsteuerbaren Eigenwerte in einen beliebig wählbaren Bereich der komplexen Ebene zum Liegen kommen. Dies ist allerdings mit Satz 3.11 stets möglich, so dass sich hiermit für eine Optimierung in einfacher Weise Startwerte für  $K_{e1}$  generieren lassen. Als Nachteil dieses Ansatzes ist die gegenüber einer Zustandsrückführung samt reduziertem Beobachter stets um die Ordnung eins größere Reglerordnung zu nennen. Allerdings ist dabei wieder die Gültigkeit des Separationstheorems vorauszusetzen.

Zur Bestimmung einer robusten Entkopplungsregelung wird nachfolgend die Minimierung der Gütefunktion  $J_{K_F}$  in (3.33a) verfolgt, wobei sich als Nebenbedingung ergibt, dass die Eigenwerte  $\lambda_{Ki}$ , die  $(A_e + B_e K_e C_e)v_{Ki} = \lambda_{Ki} v_{Ki}$  und  $\lambda_{Ki} \notin \Lambda_{K1}$  mit  $i \in \{n+1, \dots, n+n_d\}$  erfüllen, in den durch  $\mathcal{Z}_{Hy}$  in (3.64) definierten Bereich der komplexen Ebene zum Liegen kommen. Dies führt auf das nichtlineare Optimierungsproblem mit Nebenbedingung

$$\min_{\xi} J_{K_F}(\xi) \quad (3.72a)$$

$$\text{u.B.v. } p_i(\xi) \leq 0, \quad i \in \{n+1, \dots, n+n_d\}, \quad (3.72b)$$

wobei die Straffunktionen  $p_i(\xi)$  durch (3.65) mit  $k = Hy$  gegeben sind. Das Optimierungsproblem (3.72) kann jedoch in einfacher Weise in ein unbeschränktes Min-Max Optimierungsproblem überführt werden, wenn vorausgesetzt wird, dass ein zulässiger Punkt  $\xi$  bestimmt wurde, und somit die Nebenbedingung (3.72b) erfüllt ist. Wie bereits diskutiert, ist dies stets möglich, da zur Bestimmung eines zulässigen Punktes die Rückführmatrix  $K_{e1}$  aus Satz 3.11 mit geeignet gewählten Regelungseigenwerten bestimmt werden kann. Die Definition der Funktionen

$$f_i(\xi) = \begin{cases} J_{K_F}(\xi)/c_{K_F}, & i = 1, \\ p_j(\xi)/c_{\lambda}, & i \in \{2, \dots, n_d + 1\}, j = i + n - 1 \end{cases}$$

mit  $c_{K_F} > 0$ ,  $c_{\lambda} > 0$  zusammen mit der Indexmenge  $\underline{q}_{n_d+1} = \{1, \dots, n_d + 1\}$  ermöglicht das Optimierungsproblem (3.72) in das Min-Max Optimierungsproblem

$$\min_{\xi} \max_{i \in \underline{q}_{n_d+1}} f_i(\xi) \quad (3.73)$$

zu überführen. Durch diese Formulierung des Optimierungsproblems ergibt sich eine Ähnlichkeit mit der Gütevektroptimierung nach Kreisslemeier und Steinhauser [47] mit dem Unterschied, dass zur Minimierung der Maximumsfunktion die Methodik aus Abschnitt 3.3.2 genutzt wird und somit auf eine Annäherung dieser durch eine Exponentialfunktion, wie in [47] vorgeschlagen, verzichtet werden kann. Die Konstanten bzw. nach [47] als Vorgabewerte bezeichneten  $c_{K_F}$  und  $c_{\lambda}$  müssen entsprechend zu Beginn der Minimierung von (3.73) geeignet gewählt werden. Bezeichnet  $\xi_0$  den zulässigen Startwert der Optimierungsaufgabe (3.73), dann ist eine mögliche Wahl von  $c_{K_F}$  und  $c_{\lambda}$  durch

$$c_{K_F} > J_{K_F}(\xi_0)$$

$$c_{\lambda} \ll 1$$



gegeben. Dies hat zur Folge, dass das Maximum der  $f_i(\xi_k)$  für jede Iteration der Optimierung  $k > 0$  stets kleiner als eins ist. Darüber hinaus ist  $\max_i f_i(\xi_k)$  eine streng monoton fallende Folge bezüglich  $k$ , wenn ein Abstiegsverfahren wie in Abschnitt 3.3.2 zur Minimierung von (3.73) genutzt wird. Entsprechend lässt sich der Vorgabewert  $c_\lambda$  als Toleranzparameter interpretieren, inwieweit die nicht steuerbaren Regelungseigenwerte den durch  $\mathcal{Z}_{Hy}$  in (3.64) definierten Bereich verlassen dürfen, was die Wahl  $c_\lambda \ll 1$  begründet. Zur Verdeutlichung der Anwendbarkeit der in diesem Abschnitt vorgestellten robusten Entkopplungsregelung wird auf das Entwurfsbeispiel in Abschnitt 6.1 verwiesen, worin die Entwurfsmethodik anhand numerischer Simulationen sowie anhand von Messungen an einem Laboraufbau einer xy-Positioniereinheit verdeutlicht wird.

## 3.4 Entwurfsbeispiel

Zur Bewertung der Leistungsfähigkeit der in diesem Kapitel vorgestellten parametrischen Entwurfsmethodik soll dieser Abschnitt dienen. Hierzu wird die robuste Eigenstrukturvorgabe aus Abschnitt 3.2.1 betrachtet und anhand von Beispielen aus der Literatur ein Vergleich zur Entwurfsmethodik `place` aus dem Programmpaket MATLAB, welches eine der bekanntesten Methoden zum Entwurf einer Zustandsrückführung darstellt, gezogen. Ähnliche Betrachtungen finden sich beispielsweise auch in [100, 101]. Dies hat zur Folge, dass mit Hilfe der Methodik aus Abschnitt 3.1.3 bzw. 3.2.1 eine Zustandsrückführung mittels Eigenwertvorgabe entworfen werden soll, die die Eigenvektormatrix des geschlossenen Regelkreises  $V_K$  optimal konditioniert.

Zur Bewertung der Ergebnisse werden die Beispielsysteme nach Byers und Nash aus [13] genutzt. Die elf Beispielsysteme bilden verschiedene praktische aber auch akademische Beispiele ab. Darunter finden sich unter anderem chemische Reaktoren, Flugzeug- und Raketenantriebe aber auch zufällig gewählte Systeme sowie schlecht konditionierte Beispiele mitsamt der Menge der Regelungseigenwerte, die die Zustandsrückführung zuweisen muss.

Zur Erzielung der nachfolgenden Ergebnisse wird zunächst für jedes Beispielsystem eine Zustandsrückführung mittels `place` entworfen und die dabei erzielte Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix  $\|V_R\|_F$  des geregelten Systems sowie die Norm der Rückführmatrix  $\|R\|_F$  berechnet. Anschließend wird ein gradientenbasiertes Verfahren für unbeschränkte Optimierungsprobleme zur Minimierung der Gütefunktion  $J_{KF}$  in (3.33a) genutzt, um damit gezielt die verbleibenden Freiheitsgrade der Zustandsrückführung zu nutzen. Die Laufzeit der Optimierung wird dabei durch maximal 2000 erlaubte Aufrufe der Gütefunktion begrenzt. Darüber hinaus werden für jedes Beispielsystem zehn zufällig gewählte Startwerte genutzt und für den besten Punkt bzw. das kleinste  $J_{KF}$  die erzielte Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix  $\|V_K\|_F$  des geregelten Systems sowie die Norm der Rückführmatrix  $\|K\|_F$  berechnet. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Tabelle 3.2 aufgeführt.

Anhand der Konditionszahlen  $\|V_R\|_F$  bzw.  $\|V_K\|_F$  lässt sich festhalten, dass die in dieser Arbeit in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Methodik stets in der Lage ist, das Ergebnis der Methode `place` zu verbessern (vgl. Beispielsysteme  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ ). Lediglich bei Beispielsystem 10

**Tabelle 3.2:** Robuste Eigenstrukturvorgabe der Beispielsysteme von Byers und Nash [13]

Beispielsystem	place [37]		Methodik aus Abschnitt 3.2.1	
	$\ V_R\ _F$	$\ R\ _F$	$\ V_K\ _F$	$\ K\ _F$
1	6,57	1,48	6,44	1,43
2	52,87	413,82	50,02	319,51
3	53,43	59,41	45,70	71,65
4	13,43	9,84	13,42	9,45
5	20901,40	2776820,21	16524,62	2725262,42
6	6,00	21,50	5,92	22,01
7	12,38	22,42	11,33	24,61
8	36,99	64,52	6,18	69,74
9	23,96	847,01	23,89	896,87
10	4,00	1,49	4,00	1,52
11	14618,32	6692,15	14066,90	6620,33

erzielen beide Algorithmen ein gleiches Ergebnis. Im Hinblick auf die Norm der Rückführmatrizen  $\|R\|_F$  bzw.  $\|K\|_F$  lässt sich feststellen, dass die Methode place für die Beispielsysteme  $\{3, 6, 7, 8, 9, 10\}$  bessere Ergebnisse erzielt. In den anderen Fällen erzielt die Methodik aus dieser Arbeit eine geringere Norm der Rückführmatrix.

Zur Verdeutlichung, dass auch in den vorgenannten Fällen eine Verbesserung in der Reglernorm gegenüber place erzielt werden kann, wird auf ein kombiniertes Gütemaß gemäß  $J = \alpha J_{\|K\|} + (1 - \alpha)J_{\kappa_F}$  übergegangen. Dabei entspricht die Wahl  $\alpha = 0$  dem bereits diskutierten Optimierungsproblem. Entsprechend ist der Gewichtungssparameter  $\alpha$  derart zu wählen, dass auch die Norm der Rückführmatrix einen niedrigeren Wert als der mit place berechnete Wert annimmt. Hierzu wurde eine Bisektion mit 10 Iterationen über  $\alpha$  durchgeführt, was auf die Ergebnisse in Tabelle 3.3 führt und die Leistungsfähigkeit der in diesem Kapitel entwickelten Methodik verdeutlicht.

**Tabelle 3.3:** Robuste Eigenstrukturvorgabe der Beispielsysteme von Byers und Nash [13] mit dem kombinierten Gütekriterium  $J = \alpha J_{\|K\|} + (1 - \alpha)J_{\kappa_F}$ 

Beispielsystem	place [37]		Methodik aus Abschnitt 3.2.1		
	$\ V_R\ _F$	$\ R\ _F$	$\ V_K\ _F$	$\ K\ _F$	$\alpha$
3	53,43	59,41	48,25	55,28	0,1260
6	6,00	21,50	5,93	19,83	0,0146
7	12,38	22,42	12,96	14,15	0,1240
8	36,99	64,52	16,24	57,79	0,6260
9	23,96	847,01	24,72	812,41	0,2500
10	4,00	1,49	4,10	1,48	0,9990

## 3.5 Kurzzusammenfassung

Kapitel 3 stellt den methodischen Rahmen vor, der den Ausgangspunkt für die Parametrierung der lokalen Regler aller Agenten in den nachfolgenden Kapiteln bildet. Das parametrische Entwurfsverfahren ermöglicht unter der Voraussetzung der Bedingung nach Kimura (3.16) die Vorgabe aller Eigenwerte des über eine Ausgangsrückführung geregelten Systems (3.1). Die Erweiterung des Verfahrens ermöglicht durch die gezielte Nutzung der Parametervektoren den Entwurf einer Entkopplungs- als auch Verkopplungsregelung sowie die robuste Eigenwertvorgabe, um so die Dynamik des geschlossenen Regelkreises weiter zu beeinflussen. Der Übergang auf ein teilparametrisches Verfahren erlaubt darüber hinaus eine Teilmenge der Regelungseigenwerte als freie Parameter zu nutzen, was durch die Eigenwertbereichsvorgabe gelingt. Daraus resultiert die robuste Entkopplungsregelung aus Abschnitt 3.3.3. Die Anwendung der vorgestellten Methoden auf das Synchronisierungsproblem für Multi-Agenten Systeme erfolgt in den nachfolgenden Kapiteln.

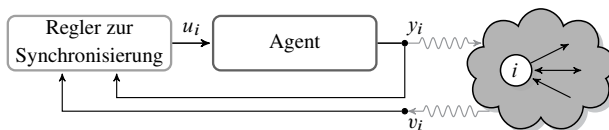
## 4 Synchronisierung basierend auf Absolut- und Relativinformation

Die Methoden aus Kapitel 3 bilden zusammen mit den Systembeschreibungen eines homogenen Multi-Agenten Systems (2.6) bzw. heterogenen Multi-Agenten Systems (2.12) den Ausgangspunkt für die Betrachtungen in den nachfolgenden Abschnitten. In Abgrenzung zu Kapitel 5 besteht hierbei, wie in Bild 4.1 angedeutet, die Möglichkeit, Absolutinformation für den Regelungsentwurf zu verwenden. Dies bietet weitreichende Möglichkeiten zur Beeinflussung jedes Agenten, da hierzu auf die Entwurfsverfahren aus Kapitel 3 zurückgegriffen werden kann.

Hinsichtlich der Systembeschreibungen sowie der Steuer- und Beobachtbarkeit homogener und heterogener Multi-Agenten Systeme, die in Abschnitt 2.3 untersucht wurden, ist zunächst in Abschnitt 4.1 das Synchronisierungsproblem für homogene Agenten Gegenstand der Untersuchungen. Ausgehend von einer Methodik aus der Literatur [119], die den Entwurf einer synchronisierenden Zustandsrückführung für homogene Multi-Agenten Systeme auf einen LQR-Entwurf zurückführt, lassen sich Bedingungen für die Synchronisierung identischer Agenten in einfacher Weise herleiten. Unter der Voraussetzung, dass alle Agenten das gleiche Regelgesetz implementieren, sind die Bedingungen für Synchronisierung in ein simultanes Stabilisierungsproblem überführbar. Dies bildet anschließend den Ausgangspunkt für die Synchronisierung identischer Agenten mittels Eigenwertbereichsvorgabe.

Abschnitt 4.2 diskutiert anknüpfend an den zuvor dargestellten und erzielten Ergebnissen das Synchronisierungsproblem für heterogene Agenten. Aufgrund der Verfügbarkeit von Absolutinformation lassen sich ausgehend von der Entkopplungsregelung aus Abschnitt 3.2.2 und der Verkopplungsregelung aus Abschnitt 3.2.3 für jeden Agenten unterlagerte Regelkreise entwerfen, so dass jeder Agent asymptotisch ein identisches dynamisches Verhalten aufweist. Diese Vorgehensweise ermöglicht, die Synchronisierung heterogener Agenten mittels Absolutinformation auf die Synchronisierung der durch die unterlagerten Regelungen herbeigeführten homogenen Teilsysteme zurückzuführen.

Die Erweiterung dieses Vorgehens auf eine spezielle Systemklasse nichtlinearer Agenten erfolgt abschließend in Abschnitt 4.3. Für nichtlineare Agenten mit Vektorrelativgrad eins und stabiler Nulldynamik, die zusätzlich parametrische Unsicherheiten aufweisen, lässt sich ein aus der Literatur entnommener passivitätsbasierter Entwurf zur Synchronisierung identischer Agenten nutzen



**Bild 4.1:** Strukturbild zur Synchronisierung mittels Relativ- und Absolutinformation

und durch eine adaptive Regelung zur Kompensation der Unsicherheiten ergänzen, was die Synchronisierung dieser Systemklasse ermöglicht.

## 4.1 Synchronisierung homogener Agenten

### 4.1.1 Vorüberlegungen und Synchronisierungsbedingungen

Betrachtet werden homogene Multi-Agenten Systeme nach (2.6) und damit  $N$  lineare steuer- und beobachtbare identische Agenten

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad (4.1a)$$

$$y_i = Cx_i \quad (4.1b)$$

mit  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^p$  und dem Anfangswert  $x_i(t_0) = x_{i,t_0}$ . Durch die Kommunikation der Agenten untereinander erfasst jeder Agent (4.1) die relativen Messgrößen

$$v_i = \sum_{j=1}^N a_{gij}(y_i - y_j) = \sum_{j=1}^N l_{gij}y_j, \quad (4.2)$$

worin die Koeffizienten  $a_{gij}$  bzw.  $l_{gij}$  der Adjazenzmatrix  $A_g$  (2.1) und der Laplacematrix  $L_g$  (2.2) durch das Kommunikationsnetzwerk festgelegt werden. In Abschnitt 4.1 wird nun die Annahme getroffen, dass alle Agenten das identische Regelgesetz zur Synchronisierung implementieren.

**Anmerkung 4.1.** Die Annahme identischer Regelgesetze ist zur Synchronisierung homogener Agenten nicht notwendig, wie sich durch das einfache Beispiel zweier skalarer Agenten  $\dot{x}_i = u_i$ , die über einen stark verbundenen Graphen verkoppelt sind und die Regelgesetze  $u_1 = r_1(x_1 - x_2)$  sowie  $u_2 = r_2(x_2 - x_1)$  implementieren, widerlegen lässt. Die Überführung des geregelten Systems in die nachfolgenden modalen Koordinaten ergibt nämlich, dass

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & -r_2 \\ -r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_1 + r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

gilt. Damit ist asymptotische Synchronisierung immer möglich, wenn  $r_1 + r_2 < 0$  ist, und die Forderung identischer Regelgesetze  $r_1 = r_2 < 0$  nicht notwendig.

Nichtsdestotrotz ergibt sich unter der Annahme identischer Regelgesetze eine einfache konstruktive Bedingung, die auf die Synchronisierung identischer Agenten führt, wie nachfolgend diskutiert wird.

Wird zunächst angenommen, dass jeder Agent seinen vollständigen Zustand an das Netzwerk kommuniziert, d.h. in (4.1b) ist  $C = I_n$ , dann besteht die Regelungsaufgabe darin, in

$$u_i = R \sum_{j=1}^N a_{gij}(x_i - x_j) \quad (4.3)$$

die Zustandsrückführmatrix  $R$  derart zu bestimmen, dass Zustandssynchronisierung im Sinne von Definition 2.12 erreicht wird. Mit der Rückführung (4.3) resultiert daher das geregelte homogene Multi-Agenten System aus

$$\dot{x} = ((I_N \otimes A) + (L_G \otimes BR))x, \quad (4.4)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^{nN}$  gilt. Mit Lemma 2.8 ist gezeigt, dass das homogene Multi-Agenten System (2.6a) bezüglich der relativen Ausgänge (2.7) bzw. in diesem Fall der Gesamtheit aller Ausgänge in (4.2) stets unbeobachtbar ist. Wird daher der Unterraum

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^{nN} \mid x \in \text{bild}(1_N \otimes I_n)\} \quad (4.5)$$

betrachtet, so folgt aus  $((I_N \otimes A) + (L_G \otimes BR))(1_N \otimes I_n) = (1_N \otimes I_n)A$  zunächst die Invarianz von  $\mathcal{S}$ . Mit  $v = (L_G \otimes I_n)(1_N \otimes I_n) = (L_G 1_N \otimes I_n) = 0$  folgt darüber hinaus die Ausgangsnulldung, weshalb mit  $(1_N \otimes I_n)$  eine Basis des  $n$ -dimensionalen unbeobachtbaren Unterraums des geregelten homogenen Multi-Agenten Systems (4.4) gefunden ist.

Der Einsvektor  $1_N$  ist, wie in Abschnitt 2.2 diskutiert, der Rechtseigenvektor zum Eigenwert  $\lambda = 0$  der Laplacematrix  $L_G$ . Ist darüber hinaus der Graph, der der Laplacematrix zugrunde liegt, verbunden, dann hat der Eigenwert  $\lambda = 0$  die algebraische Vielfachheit eins. Bezeichnet daher  $V_{L_G}$  die Hauptvektormatrix von  $L_G$  mit der Einschränkung, dass  $V_{L_G} e_1 = 1_N$  gilt, dann ist mit  $L_G V_{L_G} = V_{L_G} J_{L_G}$  durch  $J_{L_G}$  die Jordan'sche Normalform der Laplacematrix gegeben. Zusätzlich ist

$$J_{L_G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_{\Delta L_G} \end{bmatrix}$$

mit  $J_{\Delta L_G} \in \mathbb{C}^{(N-1) \times (N-1)}$  sowie  $\text{diag}(J_{\Delta L_G}) = \{\lambda_{L_G 2}, \dots, \lambda_{L_G N}\}$ , und die Eigenwerte  $\lambda_{L_G k}$  für  $k \geq 2$  haben stets positiven Realteil.

Zur Bestimmung der Bedingungen, die zur Synchronisierung homogener Agenten durch die Rückführung (4.3) führen, wird auf eine neue Koordinatendarstellung von (4.4) übergegangen. Mittels der neuen Koordinatendarstellung  $\tilde{x} = T^{-1}x$  und der Transformationsmatrix  $T = (V_{L_G} \otimes I_n)$  bzw. der inversen Transformationsmatrix  $T^{-1} = (V_{L_G}^{-1} \otimes I_n)$  folgt mit (4.4)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (V_{L_G}^{-1} \otimes I_n)((I_N \otimes A) + (L_G \otimes BR))(V_{L_G} \otimes I_n)\tilde{x}, \\ &= ((I_N \otimes A) + (J_{L_G} \otimes BR))\tilde{x} \end{aligned} \quad (4.6)$$

bzw. ebenfalls zusammen mit den relativen Ausgängen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (I_{N-1} \otimes A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (J_{\Delta L_G} \otimes BR) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \\ v &= \begin{bmatrix} 0 & (L_G V_{L_G 2} \otimes I_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit  $V_{L_G 2}$  aus  $V_{L_G} = [1_N \quad V_{L_G 2}]$ . Anhand der vorher stehenden Darstellung des geregelten Systems wird nochmals deutlich, dass die Dynamik in  $\mathcal{S}$  bezüglich des Ausgangs  $v$  unbeobachtbar ist. Gleichermaßen ist ausgehend von Definition 2.12 für asymptotische Synchronisierung

$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$  zu fordern, was mit Lemma 2.8 äquivalent zu  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_2(t) = 0$  ist, da das Paar  $((L_G V_{L_G} \otimes I_n), (I_{N-1} \otimes A))$  für ein verbundenes Kommunikationsnetzwerk stets beobachtbar ist. Folglich müssen die Eigenwerte der Matrix  $(I_{N-1} \otimes A) + (J_{\Delta L_G} \otimes BR)$  sämtlich in der linken komplexen Halbebene durch den Entwurf von  $R$  zum Liegen kommen. Aufgrund der oberen Dreiecksstruktur von  $J_{\Delta L_G}$  ergibt sich somit als notwendige und hinreichende Bedingung für die Synchronisierung homogener Agenten (4.1) mittels der Rückführung (4.3), dass alle Matrizen  $A + \lambda_{L_G k} BR$  mit  $k \in \{2, \dots, N\}$  Hurwitz-Matrizen sind. Dieses Ergebnis geht auf die Dissertation von Fax [25] zurück und ergibt sich als Spezialfall von [25, Theorem 5.1]. Zusammenfassend lässt sich daher aufgrund der Betrachtungen in diesem Abschnitt der nachfolgende Satz festhalten.

**Satz 4.2.** *Betrachtet werden  $N$  lineare steuer- und beobachtbare identische Agenten (4.1), wobei in der Ausgangsgleichung  $C = I_n$  ist, zusammen mit der Rückführung (4.3). Ist das Kommunikationsnetzwerk, das dem geregelten homogenen Multi-Agenten System zugrunde liegt, verbunden, dann wird Synchronisierung genau dann erreicht, wenn sämtliche Matrizen  $A + \lambda_{L_G k} BR$  mit  $k \in \{2, \dots, N\}$  Hurwitz-Matrizen sind.*

Mit Satz 4.2 ist die Synchronisierung homogener Multi-Agenten Systeme, die über die Rückführung (4.3) gekoppelt sind, auf ein simultanes Stabilisierungsproblem zurückgeführt. An diesem Ergebnis anknüpfend, finden sich in der Literatur zahlreiche Methoden zur Bestimmung der Rückführmatrix  $R$  bzw. einer identischen Rückführung aller Agenten, die die Synchronisierung homogener Agenten ermöglichen [53, 56, 60, 62, 96, 97, 102, 132]. Im folgenden Abschnitt wird das Verfahren aus [119] vorgestellt, da es in einfacher Weise durch die Lösung einer algebraischen Riccati Gleichung die Berechnung der Rückführmatrix  $R$  ermöglicht.

## 4.1.2 Synchronisierung durch LQR-Entwurf

Zur Bestimmung der Matrix  $R$  wird ein bekanntes Resultat aus der optimalen Regelung genutzt (vgl. [2, 133]). Ist das Paar  $(A, B)$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  stabilisierbar, dann hat die algebraische Riccati Gleichung

$$A^T P + PA + I_n - PBB^T P = 0 \quad (4.7)$$

eine positiv definite, reelle Lösung  $P = P^T$ . Durch die Nulladdition von  $PBB^T P - PBB^T P$  lässt sich (4.7) auch als

$$(A - BB^T P)^T P + P(A - BB^T P) + I_n + PBB^T P = 0$$

schreiben, woraus folgt, dass die Matrix  $A - BB^T P$  eine Hurwitz-Matrix ist. Im Hinblick auf das simultane Stabilisierungsproblem in Satz 4.2 ist nun die Stabilität von  $A + \lambda_{L_G} BR$  mit  $R = -B^T P$  zu untersuchen. Hierzu gibt Tuna das folgende Lemma an.

**Lemma 4.3** ([119]). *Betrachtet werden die Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , die (4.7) mit positiv definiten, reellen Lösungen  $P = P^T$  erfüllen. Dann ist für alle  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 1$  und  $\omega \in \mathbb{R}$  die Matrix  $A - (\sigma + j\omega)BB^T P$  eine Hurwitz-Matrix.*

Mit Lemma 4.3 lässt sich daher schließen, dass auch bei Skalierung der Eingangsmatrix  $B$  mit einer komplexen Zahl mit Realteil  $\sigma \geq 1$  der geschlossene Regelkreis bestehend aus der Dynamik (4.1a) mit der Rückführung  $u_i = -B^T P x$  weiterhin stabil ist. Im Hinblick auf die simultane Stabilisierung zur Synchronisierung homogener Agenten werden die Eigenwerte der Laplacematrix gemäß ihrer Realteile aufsteigend angeordnet, d.h.  $\lambda_{L_G 1} < \operatorname{Re}(\lambda_{L_G 2}) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{L_G N})$  mit  $\lambda_{L_G 1} = 0$ . Ist  $\operatorname{Re}(\lambda_{L_G 2}) < 1$ , dann lässt sich mit Lemma 4.3 nicht auf Stabilität von  $A - (\sigma + j\omega)BB^T P$  schließen. Wird allerdings die Rückführung gemäß  $u_i = -\max(1, \delta^{-1})B^T P x$  mit  $\delta \leq \operatorname{Re}(\lambda_{L_G 2})$  gewählt, dann impliziert Lemma 4.3 die Stabilität von  $A - (\sigma + j\omega)\max(1, \delta^{-1})BB^T P$ , da  $\operatorname{Re}(\lambda_{L_G 2})/\delta \geq 1$  ist. Dies stellt das Hauptresultat von Tuna in [119] hinsichtlich der Synchronisierung homogener Agenten dar und wird in folgendem Satz zusammengefasst.

**Satz 4.4** ([119]). *Betrachtet werden  $N$  homogene Agenten wie in (4.1a). Sei  $P = P^T$  die Lösung von (4.7) und  $\delta > 0$ . Ist der Graph, der der Laplacematrix  $L_G \in \mathbb{R}^{N \times N}$  zugrunde liegt, verbunden und ist  $\delta \leq \operatorname{Re}(\lambda_{L_G 2})$ , dann synchronisieren sich die Zeitlösungen  $x_i(t)$  mit  $i = 1, \dots, N$  und*

$$u_i = -\max(1, \delta^{-1})B^T P v_i = R v_i,$$

wobei  $v_i$  durch (4.2) gegeben ist, auf

$$x_s(t) := \left( w_{L_G}^T \otimes e^{At} \right) \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_N(t_0) \end{bmatrix}$$

mit dem Linkseigenvektor  $w_{L_G} \in \mathbb{R}^N$ , der  $w_{L_G}^T L_G = 0$  und  $w_{L_G}^T 1_N = 1$  erfüllt.

Das Resultat lässt sich in einfacher Weise auf die duale Betrachtung erweitern, wenn statt einer Zustandsrückführung eine Ausgangsaufschaltung entworfen wird. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die Verfahren aus Abschnitt 4.2 eine einfache Möglichkeit, um einen synchronisierenden Regler für voll aktuierte Systeme zu bestimmen.

**Satz 4.5** ([119]). *Betrachtet werden  $N$  homogene Agenten wie in (4.1), wobei  $B = I_n$  gilt. Sei  $P = P^T$  die Lösung von  $AP + PA^T + I_n - PC^T C P = 0$  und  $\delta > 0$ . Ist der Graph, der der Laplacematrix  $L_G \in \mathbb{R}^{N \times N}$  zugrunde liegt, verbunden, und ist  $\delta \leq \operatorname{Re}(\lambda_{L_G 2})$ , dann synchronisieren sich die Zeitlösungen  $x_i(t)$  mit  $i = 1, \dots, N$  und*

$$u_i = -\max(1, \delta^{-1})P C^T v_i = L v_i,$$

wobei  $v_i$  durch (4.2) gegeben ist, auf

$$x_s(t) := \left( w_{L_G}^T \otimes e^{At} \right) \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_N(t_0) \end{bmatrix}$$

mit dem Linkseigenvektor  $w_{L_G} \in \mathbb{R}^N$ , der  $w_{L_G}^T L_G = 0$  und  $w_{L_G}^T 1_N = 1$  erfüllt.



Die vorstehenden Resultate von Tuna nutzen offensichtlich die günstigen Eigenschaften des Riccati-Reglers aus. Diese Eigenschaften lassen sich hinsichtlich Robustheit gegenüber (komplexwertiger) Skalierung der Eingangsmatrix  $B$  interpretieren, was zur Synchronisierung homogener Agenten führt. Nachteilig ist dabei, dass der Entwurf nicht in geradliniger Weise auf den Ausgangsrückführungsfall mit  $m < n$  und  $p < n$  in (4.1) erweitert werden kann. Dies geschieht im folgenden Abschnitt, da die Methodik aus Abschnitt 3.3.1 hierzu in der Lage ist.

### 4.1.3 Synchronisierung durch Vorgabe von Eigenwertbereichen

Im Hinblick auf die Bedingungen zur Synchronisierung homogener Multi-Agenten Systeme in Satz 4.2 ist durch die Forderung der Stabilität der Matrizen  $A + \lambda_{L_{Gk}} BR$  mit  $k \in \{2, \dots, N\}$  ebenfalls eine Modellfamilie gegeben, die durch die fest eingestellte Rückführmatrix  $R$  stabilisiert werden muss. Diese Entwurfsaufgabe wurde von Konigorski in [45] durch numerische Minimierung geeignet gewählter Straffunktionen, die Eigenwerte der geregelten Systeme als Argumente haben, gelöst. Diese Methodik lässt sich in geradliniger Weise auf die Synchronisierung homogener Agenten übertragen und soll nachfolgend diskutiert werden.

Hierzu werden die Ergebnisse aus [45] mit der Methodik zur Vorgabe von Eigenwertbereichen aus Abschnitt 3.3.1 verknüpft. Ausgangspunkt ist daher der homogene Agent (4.1) zusammen mit der dynamischen Rückführung

$$\dot{x}_d = A_d x_d + B_d v_i \quad (4.8a)$$

$$u_i = C_d x_d + D_d v_i \quad (4.8b)$$

mit  $x_d \in \mathbb{R}^{n_d}$ . Dies stellt den allgemeinen Fall der Synchronisierung homogener Agenten mittels dynamischer Ausgangsrückführung dar. Jedoch ergeben sich die Spezialfälle einer konstanten Rückführung durch  $n_d = 0$  bzw. die vollständige Kopplung am Eingang durch die Wahl  $B = I_n$  sowie die vollständige Kopplung am Ausgang durch  $C = I_n$ .

Durch Zusammenfassen von (4.1) und (4.8) folgt der erweiterte Zustandsvektor  $x_{ei} = \begin{bmatrix} x_i^T & x_{di}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+n_d}$ , und es entsteht der *erweiterte Agent*

$$\dot{x}_{ei} = A_e x_{ei} + B_e v_i, \quad (4.9a)$$

$$y_i = C_e x_{ei}, \quad (4.9b)$$

mit

$$A_e = \begin{bmatrix} A & BC_d \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad (4.10a)$$

$$B_e = \begin{bmatrix} BD_d \\ B_d \end{bmatrix}, \quad (4.10b)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.10c)$$

Der geregelte erweiterte Agent folgt mit (4.9) und (4.2) aus

$$\dot{x}_{ei} = A_e x_{ei} + B_e \sum_{j=1}^N a_{gij} (y_i - y_j) = A_e x_{ei} + B_e C_e \sum_{j=1}^N a_{gij} (x_{ei} - x_{ej}),$$

was mit dem Zustandsvektor  $x_e = [x_{e1}^T \ \dots \ x_{eN}^T]^T \in \mathbb{R}^{N(n+n_d)}$  auf das geregelte Gesamtsystem

$$\dot{x}_e = ((I_N \otimes A_e) + (L_G \otimes B_e C_e)) x_e \quad (4.11)$$

führt. Aufgrund der resultierenden Systemstruktur, die identisch zu (4.4) ist, lässt sich schließen, dass Satz 4.2 in gleicher Weise für den an dieser Stelle diskutierten Fall gilt. Dies hat zur Folge, dass die Synchronisierung homogener Multi-Agenten Systeme, die über die allgemeine dynamische Ausgangsrückführung (4.8) gekoppelt sind, auf die simultane Stabilisierung von  $A_e + \lambda_{L_G k} B_e C_e$  mit  $k \in \{2, \dots, N\}$  zurückgeführt werden kann. Hinsichtlich der Ergebnisse aus [45] ergibt sich hieraus die an die Problemstellung angepasste *Modellfamilie*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_{di} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{di} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \dot{x}_{di} \end{bmatrix}, \quad (4.12a)$$

$$\begin{bmatrix} y_i \\ \dot{x}_{di} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_k C & 0 \\ 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{di} \end{bmatrix}, \quad (4.12b)$$

$$k \in \{1, \dots, N\},$$

die über das Regelgesetz

$$\begin{bmatrix} u_i \\ \dot{x}_{di} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_d & C_d \\ B_d & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ x_{di} \end{bmatrix}$$

für alle  $N$  Werte der Parameter  $\zeta = \{1, \lambda_{L_G 2}, \dots, \lambda_{L_G N}\}$  stabilisiert werden muss. Mit Satz 3.5 und (3.21) sind daher die Eigenwerte der Matrix  $A_e + B_e K_e C_e(\zeta)$  in Anlehnung an die Vorgabe von Eigenwertbereichen aus Abschnitt 3.3.1 in geeignet zu wählende Bereiche der linken komplexen Halbebene zu verschieben. Hierzu wird wie in [45] für jedes Modell in (4.12) ein eigener Bereich definiert. Zur einfacheren Darstellung wird auch in diesem Fall eine Hyperbel, wie in Bild 3.3 dargestellt bzw. durch die Parametrierung von  $\mathcal{Z}_{Hy}$  in (3.64) gegeben, gewählt, da sich dadurch in einfacher Weise Mindestanforderungen an Dämpfung und Schnelligkeit formulieren lassen. Der nachfolgend beschriebene Ansatz lässt sich algorithmisch ohne größere Anpassungen durch weitere Begrenzungen aus Tabelle 3.1 erweitern.

Da für das Spektrum  $\sigma(A_e + B_e K_e C_e(\zeta_k)) = \{\lambda_{kk,1}, \dots, \lambda_{kk,n+n_d}\}$  gilt und die Eigenwerte  $\lambda_{kkj}$  implizite Funktionen der Rückführmatrix  $K_e$  sind, kann für jeden Eigenwert  $\lambda_{kkj}$  und für jedes Modell in (4.12) in Anlehnung an Abschnitt 3.3.1 und [45] eine äußere quadratische Straffunktion definiert werden, woraus

$$p_{kj}(\xi) = \begin{cases} F_{Hy}(\lambda_{kkj}(\xi))^2, & \text{wenn } F_{Hy}(\lambda_{kkj}(\xi)) > 0, \\ 0, & F_{Hy}(\lambda_{kkj}(\xi)) \leq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

mit

$$F_{\text{Hy}}(\lambda_{kkj}) = \text{Re}(\lambda_{kkj}) + \frac{a_k}{b_k} \sqrt{\text{Im}(\lambda_{kkj})^2 + b_k^2} \quad (4.14)$$

sowie den Indexmengen  $q_k = \{1, \dots, N\}$ ,  $q_j = \{1, \dots, n + n_d\}$  und den Optimierungsvariablen  $\xi = \text{vec}(K_c)$  folgt. Zur Verschiebung aller Eigenwerte in die gewünschten Bereiche der komplexen Ebene müssen folglich alle Straffunktionen  $p_{kj}(\xi) = 0 \ \forall k, j$  werden, was auf das Min-Max Optimierungsproblem

$$\min_{\xi} \max_{k \in q_k, j \in q_j} p_{kj}(\xi) \quad (4.15)$$

führt, welches mit der Methodik aus Abschnitt 3.3.2 durch numerische Optimierung lösbar ist. Mit der individuellen Festlegung von (4.14) ergibt sich zusätzlich eine flexible Anpassung der Eigenwertbereiche für jedes  $k$  in (4.15). Neben der Festlegung eines gemeinsamen Bereichs für die vollständige Modellfamilie in (4.12) besteht zudem die Möglichkeit, die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises der nominellen Strecke mit  $\zeta_1 = 1$  gemäß den Anforderungen an Schnelligkeit und Dämpfung in den entsprechenden Bereich zu verschieben. Die Eigenwerte der Systeme in (4.12) mit  $\zeta_k$  und  $k > 1$  müssen für die Synchronisierung lediglich in der linken komplexen Halbebene zum Liegen kommen, so dass hierbei der Bereich auch durch eine Gerade, wie in Tabelle 3.1 aufgeführt, begrenzt werden kann.

Die Bestimmung geeigneter Startwerte  $\xi_0$  für die Optimierungsaufgabe (4.15) wird vereinfacht, wenn angenommen wird, dass für die Modellfamilie (4.12) die Bedingung nach Kimura (3.16) erfüllt ist. Dies lässt sich stets durch Berücksichtigung der Gleichung (3.22) und damit durch eine dynamische Ausgangsrückführung geeigneter Ordnung erzielen. Dann lässt sich mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.1.3 zunächst eine Ausgangsrückführung entwerfen, die durch die Wahl stabiler Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises stets die Stabilität der nominellen Strecke in (4.12) gewährleistet. Im Anschluss liegt es nahe, mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.2.1 in Ergänzung die Robustheit gegenüber Störungen  $\Delta$  in  $A_c + B_c K_c C_c + \Delta$  zu optimieren, was durch die Minimierung der Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix des geschlossenen Regelkreises bzw. des Gütekriteriums  $J_{K_F}$  in (3.33a) erfolgen kann. Dies führt auf die folgenden Entwurfsschritte zur Bestimmung einer synchronisierenden Ausgangsrückführung für homogene Multi-Agenten Systeme.

### Übersicht der Entwurfsschritte

1. Analyse des Kommunikationsnetzwerks durch Bestimmung der Eigenwerte mit positivem Realteil  $\lambda_{L_G i}$  der Laplacematrix  $L_G$  mit  $i \in \{2, \dots, N\}$ .
2. Festlegung der Modellfamilie (4.12) durch  $\zeta = \{1, \lambda_{L_G 2}, \dots, \lambda_{L_G N}\}$ .
3. Festlegung der Eigenwertbereiche durch Wahl der Parameter  $a_k$  und  $b_k$  in (4.14) bzw. durch Auswahl geeigneter Bereiche aus Tabelle 3.1.

4. Wenn die Bedingung nach Kimura erfüllt ist – Bestimmung der Startwerte  $\xi_0$  für die Optimierungsaufgabe (4.15) durch den parametrischen Entwurf einer Ausgangsrückführung für die nominelle Strecke (4.12) mit  $k = 1$  mittels der Verfahren aus den Abschnitten 3.1.3 und 3.2.1 mit dem Ziel, die Robustheit gegenüber Störungen  $\Delta$  in  $A_e + B_e K_e C_e + \Delta$  zu verbessern.
5. Lösung des Min-Max Optimierungsproblems (4.15) mittels der Methodik aus Abschnitt 3.3.2.
6. Falls keine zulässige Lösung  $\xi^*$  für (4.15) bestimmt wurde, zurück zu Schritt 4 zusammen mit der Wahl neuer Startwerte  $\xi_0$ .

## 4.2 Synchronisierung heterogener Agenten

### 4.2.1 Vorüberlegungen zur Synchronisierung heterogener Agenten

Betrachtet werden heterogene Multi-Agenten Systeme nach (2.12) und damit  $N$  lineare steuer- und beobachtbare Agenten

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad (4.16a)$$

$$y_i = C_i x_i \quad (4.16b)$$

mit  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  und  $y_i \in \mathbb{R}^p$  sowie mit dem Anfangswert  $x_i(t_0) = x_{i0}$ . Die Matrizen  $A_i$ ,  $B_i$  und  $C_i$  seien von passender Dimension. Durch die Kommunikation der Agenten untereinander erfasst jeder Agent (4.16) die relativen Messgrößen

$$v_i = \sum_{j=1}^N a_{gij} (y_i - y_j) = \sum_{j=1}^N l_{gij} y_j, \quad (4.17)$$

worin die Koeffizienten  $a_{gij}$  bzw.  $l_{gij}$  der Adjazenzmatrix  $A_G$  (2.1) und der Laplacematrix  $L_G$  (2.2) durch das Kommunikationsnetzwerk festgelegt werden.

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 4.1 diskutierten homogenen Multi-Agenten Systemen, die sich stets auf Lösungen des offenen Regelkreises synchronisieren, ist die synchrone Zeitlösung von  $N$  Agenten nach (4.16a) zunächst nicht offensichtlich bzw. je nach Beschaffenheit aller Agenten in (4.16a) lediglich die triviale Trajektorie  $y_S(t) = 0$ , was der Stabilisierung aller Agenten entspricht. Im Hinblick auf die Ergebnisse in Lemma 2.11 lässt sich daher schließen, dass ohne geeignete Maßnahmen triviale Synchronisierung stets eintritt, wenn ein heterogenes Multi-Agenten System bezüglich der relativen Ausgänge beobachtbar ist. Dies ist dadurch begründet, dass in diesem Fall ein dezentrales Regelgesetz mit den  $N$  Ein-/Ausgangsgruppen  $(u_i, v_i)$  bestimmt werden kann, welches in der Lage ist, das Gesamtsystem zu stabilisieren, was den strukturellen Unterschied zwischen homogenen und heterogenen Multi-Agenten Systemen zum Ausdruck bringt.

Zur Vermeidung der Synchronisierung auf die triviale Trajektorie  $y_s(t) = 0$  soll eine notwendige Bedingung aus der Literatur angegeben und diskutiert werden. Ausgangspunkt ist daher der Agent (4.16) zusammen mit der dynamischen Rückführung

$$\dot{x}_{di} = A_{di}^s x_{di} + B_{di}^s \tilde{v}_i \quad (4.18a)$$

$$u_i = C_{di}^s x_{di} + D_{di}^s \tilde{v}_i \quad (4.18b)$$

mit  $x_{di} \in \mathbb{R}^{n_{di}}$ , wobei das Zeichen  $(\cdot)^s$  andeuten soll, dass in der Regel die Matrizen des Reglers nicht voll besetzt sind, sondern eine beliebige Strukturbeschränkung aufweisen können. Darüber hinaus wird an dieser Stelle nicht vorausgesetzt, dass die Reglerordnung  $n_{di}$  der Agenten identisch ist. Durch Zusammenfassen von (4.16) und (4.18) lässt sich auch hier der erweiterte Zustandsvektor  $x_{ei} = [x_i^T \ x_{di}^T]^T \in \mathbb{R}^{n+n_{di}}$  definieren, woraus der geregelte Agent

$$\dot{x}_{ei} = A_{ei} x_{ei} + B_{ei} v_i, \quad (4.19a)$$

$$y_i = C_{ei} x_{ei}, \quad (4.19b)$$

mit den Systemmatrizen

$$A_{ei} = \begin{bmatrix} A_i & B_i C_{di}^s \\ 0 & A_{di}^s \end{bmatrix}, \quad B_{ei} = \begin{bmatrix} B_i D_{di}^s \\ B_{di}^s \end{bmatrix}, \quad C_{ei} = [C_i \ 0]$$

entsteht. Eine notwendige Bedingung, die jeder Agent nach (4.19) zur Synchronisierung erfüllen muss, ist nach Wieland und Allgöwer die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz 4.6** ([124]). *Betrachtet werden  $N$  heterogene Agenten wie in (4.16) zusammen mit einem Kommunikationsnetzwerk, was durch den verbundenen Graphen  $\mathcal{G}$  beschrieben wird. Angenommen, es wurde eine Lösung für (4.18) bestimmt, so dass sich alle Ausgänge im Sinne von Definition 2.12 synchronisieren. Es wird darüber hinaus angenommen, dass das Paar  $(C_{ei}, A_{ei})$  detektierbar ist. Es existieren dann Matrizen  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  mit vollem Spaltenrang und Matrizen  $S$  und  $Q$ , so dass*

$$A_{ei} \Pi_i = \Pi_i S \quad (4.20a)$$

$$C_{ei} \Pi_i = Q \quad (4.20b)$$

für alle  $i = 1, \dots, N$  gilt.

Der Beweis des Satzes findet sich in [124] und gibt eine notwendige Bedingung an die strukturellen Voraussetzungen einer synchronisierenden Regelung für heterogene Agenten (4.16) an. Ausgehend von der Lösung der Sylvester Gleichung mit Nebenbedingung (4.20) ergibt sich eine Interpretation der notwendigen Voraussetzungen zur Synchronisierung im Hinblick auf das bekannte *Interne Modellprinzip* nach Francis und Wonham in [29]. Angenommen es existieren Lösungen  $\Pi_i$  von (4.20) für alle  $i = 1, \dots, N$ , und die Anfangswerte  $x_{ei}(t_0)$  des erweiterten Agenten (4.19) werden gemäß  $x_{ei}(t_0) \in \text{bild}(\Pi_i)$  gewählt, dann lassen sich diese stets derart wählen, dass die Zeitlösung des Ausgangs (4.19b) aller Agenten identisch und damit synchron ist,

was aus

$$\begin{aligned} y_i(t) &= C_{ei} e^{A_{ei} t} x_{ei}(t_0) \\ &= C_{ei} [\Pi_i \quad T_\perp] e^{\text{diag}(S, *) t} [\Pi_i \quad T_\perp]^{-1} x_{ei}(t_0) \\ &= Q e^{S t} \tilde{x}_{ci}(t_0) \end{aligned}$$

folgt, wobei  $T_\perp$  so gewählt ist, dass

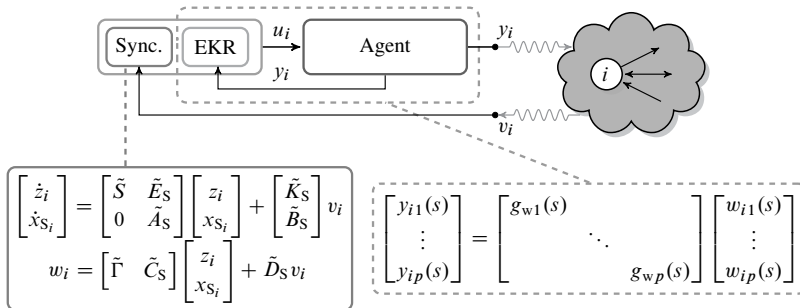
$$[\Pi_i \quad T_\perp]^{-1} A_{ei} [\Pi_i \quad T_\perp] = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

gilt. Damit enthält der offene Regelkreis jedes erweiterten Agenten ein identisches internes Modell, welches durch Wahl geeigneter Anfangswerte dazu führt, dass alle Ausgänge der erweiterten Agenten identische Zeitlösungen erzeugen und somit synchron verlaufen.

Aufgrund der Notwendigkeit von Satz 4.6 ist hiermit allerdings noch keine Aussage zu treffen, wie sich stets asymptotische Synchronisierung im Sinne von Definition 2.12 realisieren lässt. Hierzu ist eine geeignete Strukturbeschränkung der Matrizen  $A_{di}^s$ ,  $B_{di}^s$ ,  $C_{di}^s$  und  $D_{di}^s$  in (4.18) vorzusehen und die Parameter der Regelung geeignet zu bestimmen, was in den folgenden beiden Abschnitten auf Grundlage einer unterlagerten Ent- bzw. Verkopplungsregelung mit Rückgriff auf die Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 erfolgen soll.

#### 4.2.2 Synchronisierung durch Entkopplung

Mit dem Entwurfsverfahren aus Abschnitt 3.2.2 lässt sich unter der Voraussetzung, dass der heterogene Agent mit dem Zustandssystem (4.16) quadratisch und stabil entkoppelbar ist, ausgehend von der Messung des absoluten Ausgangs (4.16b) eine Entkopplungsregelung entwerfen, so dass sich der entkoppelt geregelte Agent bezüglich der Führungsgrößen  $w_i$  wie  $p$  Eingrößensysteme



**Bild 4.2:** Synchronisierung mittels Relativ- und Absolutinformation basierend auf einer unterlagerten Entkopplungsregelung

verhält. Die Übertragungsmatrix bezüglich Ausgangs- und Führungsgrößen ist entsprechend gemäß  $G_w(s) = \text{diag}(g_{w1}(s), \dots, g_{wp}(s))$  diagonalförmig, und in jedem Übertragungskanal lässt sich die Dynamik durch die Übertragungsfunktion

$$g_{wi}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{\delta_i} (-\lambda_{Kij})}{(s - \lambda_{Ki1}) \cdots (s - \lambda_{Ki\delta_i})}, \quad i \in \{1, \dots, p\}$$

beschreiben. Die Regelungseigenwerte, die die verbleibenden Freiheitsgrade in jedem Übertragungskanal darstellen, bilden den Zugang zur Synchronisierung heterogener Agenten mittels Entkopplungsregelung, was ebenfalls in Bild 4.2 im Strukturbild dargestellt ist. Die Idee besteht darin, in jedem der  $p$  Übertragungskanäle aller  $N$  Agenten ein identisches, stabiles Verhalten zu erzeugen. Damit ist das Führungsverhalten aller Agenten bezüglich der Ein-/Ausgangskanäle  $(v_{ij}, w_{ij})$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  und  $j \in \{1, \dots, p\}$  identisch. Bezüglich dieser Ein-/Ausgangskanäle lässt sich daher für alle Agenten, die durch die unterlagerte Regelung entkoppelt und homogenisiert bezüglich des Führungsverhaltens sind, eine gemeinsame synchronisierende Regelung – basierend auf den Methoden aus Abschnitt 4.1 – entwerfen. Dabei zerfällt der Entwurf der synchronisierenden Regelung in die Aufgabe,  $p$  homogene Agenten zu synchronisieren, die sich als Eingrößensysteme darstellen lassen. Um den beschriebenen Ansatz basierend auf einer Entkopplungsregelung hinsichtlich der Synchronisierung heterogener Agenten zu verwenden, sind im Hinblick auf das eben diskutierte Vorgehen die folgenden Annahmen zu treffen, was der Vereinfachung der nachfolgenden Argumentation dient.

**Annahme 4.7.** *Synchronisierung durch Entkopplung*

- (A1) *Das Zustandssystem aller heterogenen Agenten (4.16) ist quadratisch und stabil entkoppelbar.*
- (A2) *Die Differenzordnungen aller Agenten bezüglich der Ausgangsgrößen (4.16b) sind identisch. Damit gilt  $\delta_j^i = \delta_j^k$  für alle  $i, k \in \{1, \dots, N\}$  und  $j \in \{1, \dots, p\}$ .*
- (A3) *Die Regelungseigenwerte, die in den  $p$  Übertragungskanälen aller  $N$  Agenten zugewiesen werden können, sind stabil gewählt und identisch. Damit gilt  $\Lambda_{Kj}^i = \Lambda_{Kj}^k$  für alle  $i, k \in \{1, \dots, N\}$  und  $j \in \{1, \dots, p\}$ .*

In Annahme 4.7 bezeichnet  $\delta_j^i$  die Differenzordnung des  $j$ -ten Ausgangs des  $i$ -ten Agenten während durch  $\Lambda_{Kj}^i$  die Menge der Regelungseigenwerte im  $j$ -ten Ausgangskanal des  $i$ -ten Agenten gekennzeichnet ist. Damit besitzt  $\Lambda_{Kj}^i$  die Mächtigkeit  $\delta_j^i$ .

Die Annahme (A1) wird häufig im Rahmen der Entkopplung linearer Systeme getroffen, da dadurch sicher gestellt ist, dass eine statische Zustandsrückführung mit regulärer Vorfilterung existiert, die jeden Agenten stabil entkoppelt. Darüber hinaus lässt sich damit Satz 3.11 anwenden und somit eine Entkopplungsregelung basierend auf einer dynamischen Ausgangsrückführung entwerfen, was den Ausgangspunkt in diesem Abschnitt darstellt. Mit Annahme (A2) ist sicher gestellt, dass in jedem Übertragungskanal eine identische Dynamik erzeugt werden kann. Dies scheint restriktiv im Hinblick auf die anwendbare Systemklasse in (4.16) zu sein, lässt sich aber stets durch

geeignete Maßnahmen erzielen. Zum einen lässt sich unter praktischen Gesichtspunkten ein heterogenes Multi-Agenten System in vielen Anwendungsfällen als eine Abweichung von einem nominellen System interpretieren, d.h. die Agenten sind strukturell identisch – unterscheiden sich allerdings im Rahmen ihrer physikalischen Parameter, was auf identische Differenzordnungen führt. Zum anderen ist es möglich, durch Vorschaltung geeigneter Verzögerungsglieder die Differenzordnung bezüglich eines Ausgangs zu erhöhen, so dass sich diese für alle Agenten angleichen lässt und (A2) erfüllt ist. Damit ist es möglich ebenfalls (A3) zu erfüllen, indem in jedem Übertragungskanal aller Agenten eine identische, stabile und stationär genaue Dynamik vorgegeben wird.

Ausgehend von Annahme 4.7 und der Darstellung in Bild 4.2 beruht die folgende Idee zur Synchronisierung darauf, jedem Agenten pro Übertragungskanal ein identisches dynamisches Modell vorzuschalten, welches eine gewünschte Trajektorie im geschlossenen, synchronen Regelkreis erzeugt. Im Hinblick auf Satz 4.6 und der damit zusammenhängenden Theorie zur Ausgangsregelung (engl. *output regulation theory*, vgl. [95]) lässt sich dies durch Aufschaltung eines geeigneten Eingangssignals  $u(t)$  und die Wahl geeigneter Anfangswerte erreichen, wie mit folgendem Lemma allgemein gezeigt werden soll.

**Lemma 4.8.** *Betrachtet wird das steuer- und beobachtbare Zustandssystem  $\dot{x} = Ax + Bu$  mit der Ausgangsgleichung  $y = Cx$ , wobei  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  und  $m \geq p$  ist. Es ist möglich eine Vorsteuerung der Form*

$$\dot{w} = Sw, \quad w(t_0) = w_0, \quad (4.21a)$$

$$u = \Gamma w, \quad (4.21b)$$

mit  $w \in \mathbb{R}^{n_s}$  zu entwerfen, wobei  $\sigma(S) \in \mathbb{C}_0^+$  und die Matrizen  $\Pi$  und  $\Gamma$  die sogenannten regulator equations

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma \quad (4.22a)$$

$$C\Pi = Q \quad (4.22b)$$

lösen, wenn das Zustandssystem rechts-invertierbar ist, die Nullstellen des Zustandssystems nicht mit den Eigenwerten von  $S$  zusammenfallen sowie das Paar  $(Q, S)$  beobachtbar ist. Darüber hinaus existieren Anfangswerte  $w(t_0)$  und  $x(t_0)$ , so dass  $y(t) = Qw(t)$  für  $t \geq t_0$  gilt.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die Matrix  $S$  in Jordan'scher Normalform vorliegt, da sich jede Matrix durch reguläre Transformation in diese Form überführen lässt. Darüber hinaus ist es aufgrund der Linearität von (4.22) ausreichend, die folgende Argumentation für einen  $\tilde{n}_S$ -dimensionalen Jordan Kasten mit  $\tilde{n}_S \leq n_S$  zu betrachten, da sich die fehlenden Gleichungen in gleicher Weise berechnen lassen. Bezeichnet daher  $\lambda_S$  den Eigenwert zu einem  $\tilde{n}_S$ -dimensionalen Jordan Kasten der Matrix  $S$ , dann folgt mit (4.22),  $\Pi = [\Pi_{\tilde{n}_S} \quad \Pi_2]$  und  $\dim(\text{bild}(\Pi_{\tilde{n}_S})) = \tilde{n}_S$  für alle  $k \in \{1, \dots, \tilde{n}_S\}$  aus  $(A\Pi_{\tilde{n}_S} - \Pi_{\tilde{n}_S}S + B\Gamma)e_k = 0$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_S I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{\tilde{n}_S} \\ \Gamma \end{bmatrix} e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} e_k, \quad k = 1,$$



bzw.

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_S I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{\tilde{n}_S} \\ \Gamma \end{bmatrix} e_k = \begin{bmatrix} \Pi_{\tilde{n}_S} e_{k-1} \\ Q e_k \end{bmatrix}, \quad k > 1,$$

wobei hierbei ausgenutzt wurde, dass die Spaltenvektoren von  $\Pi_{\tilde{n}_S}$  Eigen- und Hauptvektoren der Matrix  $S$  zum Eigenwert  $\lambda_S$  darstellen.

Da das Zustandssystem als rechts-invertierbar angenommen wurde und dessen Nullstellen nicht mit den Eigenwerten von  $S$  zusammenfallen, hat die Matrix auf der linken Seite der Gleichung für das Argument  $\lambda_S$  stets vollen Zeilenrang. Damit kann die Gleichung für jedes  $k$  und für jede rechte Seite, die ungleich null ist, nach  $(e_k^T [\Pi_{\tilde{n}_S}^T \quad \Gamma^T])^T$  aufgelöst werden, da für alle  $k$  aufgrund der vollständigen Beobachtbarkeit des Paares  $(Q, S)$   $Q e_1 \neq 0$  ist, woraus die Vorsteuerung (4.21) folgt.

Um zu zeigen, dass Anfangswerte  $w(t_0)$  und  $x(t_0)$  existieren, so dass  $y(t) = Qw(t)$  für  $t \geq t_0$  gilt, wird das Zustandssystem  $\dot{x} = Ax + Bu$  mit der Ausgangsgleichung  $y = Cx$  um (4.21) erweitert, woraus das erweiterte System

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ w(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

folgt. Wird bezüglich des erweiterten Systems der Unterraum  $\text{bild}([\Pi^T \quad I_{n_S}]^T)$  betrachtet, so folgt zusammen mit (4.22a) aus

$$\begin{bmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ I_{n_S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi \\ I_{n_S} \end{bmatrix} S,$$

dass der Unterraum invariant unter der Dynamik des erweiterten Gesamtsystems ist. Darüber hinaus lässt sich zusammen mit (4.22b) aus

$$\begin{bmatrix} C & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ I_{n_S} \end{bmatrix} = 0$$

schließen, dass der Unterraum auch unbeobachtbar am Ausgang  $e = Cx - Qw$  ist, was  $y(t) = Qw(t)$  für  $t \geq t_0$  impliziert, wenn  $[x_0^T \quad w_0^T]^T \in \text{span}([\Pi^T \quad I_{n_S}]^T)$  ist.  $\square$

Mit Lemma 4.8 ist gezeigt, dass durch Verwendung einer Vorsteuerung nach (4.21) Ausgangstrajektorien  $y(t)$  erzeugt werden können, die sich als Lösung der Differentialgleichung (4.21a) mit der Ausgangsgleichung  $y(t) = Qw(t)$  ergeben, wenn die Anfangswerte des Zustandssystems und des Trajektoriengenerators gemäß  $[x_0^T \quad w_0^T]^T \in \text{span}([\Pi^T \quad I_{n_S}]^T)$  gewählt werden. Um dieses Ergebnis für die Synchronisierung heterogener Agenten nutzbar zu machen, muss das Vorgehen noch weiter angepasst werden. Es wird daher angenommen, dass jeder Agent (4.16) Annahme 4.7 erfüllt und durch eine entkoppelnde dynamische Ausgangsrückführung

$$\dot{x}_{eki} = A_{ek_i} x_{eki} + B_{ek_i} y_i + F_{ek_i, c_i} w_i, \quad (4.23a)$$

$$u_i = C_{ek_i} x_{eki} + D_{ek_i} y_i + F_{ek_i, p_i} w_i, \quad (4.23b)$$

die nach Satz 3.11 entworfen wurde, geregelt wird. Dies führt dazu, dass bezüglich des Führungsverhaltens von  $w_i$  nach  $y_i$  eine Minimalrealisierung angegeben werden kann. Das heißt, die in Satz 3.11 mit  $\Lambda_{K2}$  bezeichneten Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises sind für alle Agenten bezüglich  $w_i$  unsteuerbar. Werden diese sämtlich stabil gewählt, treten diese Eigenbewegungen asymptotisch nicht mehr in Erscheinung, und es ist ausreichend, bezüglich des Führungsverhaltens die Minimalrealisierung

$$\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{A}\tilde{x}_i + \tilde{B}w_i, \quad (4.24a)$$

$$y_i = \tilde{C}\tilde{x}_i \quad (4.24b)$$

mit dem Zustandsvektor  $\tilde{x}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i1}^T & \dots & \tilde{x}_{ip}^T \end{bmatrix}^T$  und

$$\tilde{A} = \text{diag} (A_{\text{SNF}_1}, \dots, A_{\text{SNF}_p}), \quad (4.25a)$$

$$\tilde{B} = \text{diag} (b_{\text{SNF}_1}, \dots, b_{\text{SNF}_p}), \quad (4.25b)$$

$$\tilde{C} = \text{diag} (c_{\text{SNF}_1}^T, \dots, c_{\text{SNF}_p}^T) \quad (4.25c)$$

zu betrachten. Für die Indizes ist  $i, k \in \{1, \dots, N\}$  sowie  $j \in \{1, \dots, p\}$  und aufgrund Annahme 4.7 (A2) gilt der Zusammenhang  $\dim(\tilde{x}_{ij}) = \dim(\tilde{x}_{kj})$ . Vereinfachend werden darüber hinaus die  $p$  entkoppelten Teilsysteme in Steuerungsnormalform (vgl. z.B. [28]) angesetzt, da sich die charakteristischen Polynome jedes Teilsystems sehr einfach aus den Eigenwerten des geschlossenen Regelkreises über den Zusammenhang  $\prod_{j=1}^{\delta_i} (s - \lambda_{kij}) = s^{\delta_i} + a_{\delta_i-1}s^{\delta_i-1} + \dots + a_1s + a_0$  berechnen lassen. Zusätzlich ist aufgrund der geforderten stationären Genauigkeit  $a_0 = \prod_{j=1}^{\delta_i} (-\lambda_{kij})$  und damit  $c_{\text{SNF}_i}^T \in \mathbb{R}^{1 \times \delta_i}$  durch  $c_{\text{SNF}_i}^T = [a_0 \ 0 \ \dots \ 0]$  gegeben.

Wird dann für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  und  $j \in \{1, \dots, p\}$  bezüglich jeder der  $p$  Führungsgrößen eine Vorsteuerung der Form

$$\dot{z}_{ij} = S_j z_{ij}, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij0}, \quad (4.26a)$$

$$w_{ij} = \Gamma_j z_{ij} \quad (4.26b)$$

mit  $z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_{s_j}}$  vorgeschaltet, wobei  $\Gamma_j$  aus der Lösung von

$$\Pi_j S_j = A_{\text{SNF}_j} \Pi_j + b_{\text{SNF}_j} \Gamma_j, \quad (4.27a)$$

$$c_{\text{SNF}_j}^T \Pi_j = q^T \quad (4.27b)$$

bestimmt werden muss, dann lassen sich gemäß Lemma 4.8 Anfangswerte für alle Agenten und (4.27) finden, so dass sich alle Ausgänge synchron verhalten. Zur Sicherstellung, dass mit dem Entkopplungsansatz stets auch asymptotische Synchronisierung erreicht wird, muss eine zusätzliche Regelung eingeführt werden. Die Kombination von (4.27) mit einem dynamischen Regler in Anlehnung an das Vorgehen in Abschnitt 4.1.3 führt auf die allgemeine Darstellung eines synchronisierenden Reglers in jedem Übertragungskanal der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{ij} \\ \dot{x}_{s_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_j & E_{S_j} \\ 0 & A_{S_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{ij} \\ x_{s_{ij}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{S_j} \\ B_{S_j} \end{bmatrix} v_i, \quad (4.28a)$$

$$w_i = [\Gamma_j \ C_{S_j}] \begin{bmatrix} z_{ij} \\ x_{s_{ij}} \end{bmatrix} + D_{S_j} v_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad (4.28b)$$

woraus durch die abkürzende Schreibweise einer Blockdiagonalmatrix, beispielhaft durch  $\tilde{S} = \text{diag}(S_1, \dots, S_p)$  dargestellt, der synchronisierende Regler für alle entkoppelt geregelten Agenten durch

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_i \\ \dot{x}_{S_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{E}_S \\ 0 & \tilde{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ x_{S_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{K}_S \\ \tilde{B}_S \end{bmatrix} v_i, \quad (4.29a)$$

$$w_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma} & \tilde{C}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ x_{S_i} \end{bmatrix} + \tilde{D}_S v_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.29b)$$

folgt. Zur Bestimmung notwendiger und hinreichender Bedingungen, die Synchronisierung heterogener Agenten mittels Entkopplung garantieren, wird auf die Ergebnisse aus Satz 4.2 und die darauf basierende Diskussion in Abschnitt 4.1.3 zurückgegriffen und auf die vorliegende Problemstellung angepasst. Dass auch bei der Synchronisierung heterogener Agenten durch Entkopplung ein simultanes Stabilisierungsproblem entsteht, zeigt der nachfolgende Satz.

**Satz 4.9.** *Betrachtet werden  $N$  heterogene Agenten wie in (4.16), die Annahme 4.7 erfüllen, zusammen mit einem Kommunikationsnetzwerk, was durch den verbundenen Graphen  $\mathcal{G}$  beschrieben wird. Es seien darüber hinaus die Rangannahmen in Satz 3.11 für alle Agenten erfüllt, so dass für alle Agenten eine Entkopplungsregelung (4.23) existiert. Werden die bezüglich der Führungsgröße  $w_i$  unsteuerbaren Eigenwerte  $\Lambda_{K2}$  stabil gewählt und ist die synchronisierende Regelung (4.29) für alle Agenten identisch, dann wird Synchronisierung für alle Agenten im Sinne von Definition 2.12 genau dann erreicht, wenn die Matrizen*

$$\begin{bmatrix} A_{\text{SNF}_j} & b_{\text{SNF}_j} \Gamma_j & b_{\text{SNF}_j} C_{S_j} \\ 0 & S_j & E_{S_j} \\ 0 & 0 & A_{S_j} \end{bmatrix} + \lambda_{L_{\mathcal{G}}k} \begin{bmatrix} b_{\text{SNF}_j} D_{S_j} \\ k_{S_j} \\ B_{S_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\text{SNF}_j}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$\forall j \in \{1, \dots, p\}, k \in \{2, \dots, N\}$

stabil sind, wobei  $\lambda_{L_{\mathcal{G}}k}$  mit  $k \in \{2, \dots, N\}$  die Eigenwerte mit positivem Realteil der Laplacematrix des Graphen  $\mathcal{G}$  bezeichnet.

*Beweis.* Aufgrund der Voraussetzung, dass die Rangannahmen in Satz 3.11 für alle Agenten erfüllt sind, existiert für alle Agenten eine Entkopplungsregelung (4.23). Da die bezüglich der Führungsgröße  $w_i$  unsteuerbaren Eigenwerte  $\Lambda_{K2}$  stabil zu wählen sind und diese somit asymptotisch nicht mehr in Erscheinung treten, kann für alle entkoppelt geregelten Agenten eine Minimalrealisierung (4.24) bestimmt werden, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit aus  $p$  entkoppelten Teilsystemen in Steuerungsnormalform besteht, woraus die Darstellung (4.25) folgt. Da aufgrund von Annahme 4.7 die Differenzordnungen und Regelungseigenwerte aller Agenten identisch sind, kann bezüglich des Führungsverhaltens der *erweiterte Agent*

$$\dot{x}_{ei} = A_e x_{ei} + B_e v_i,$$

$$y_i = C_e x_{ei},$$

mit dem Zustandsvektor  $x_{ei} = [\bar{x}_i^T \ z_i^T \ x_{Si}^T]^T$  und den Systemmatrizen

$$A_e = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}\tilde{\Gamma} & \tilde{B}\tilde{C}_S \\ 0 & \tilde{S} & \tilde{E}_S \\ 0 & 0 & \tilde{A}_S \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} \tilde{B}\tilde{D}_S \\ \tilde{K}_S \\ \tilde{B}_S \end{bmatrix}, \quad C_e = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

definiert werden, woraus das Gesamtsystem

$$\dot{x}_e = ((I_N \otimes A_e) + (I_N \otimes B_e)(L_G \otimes C_e)) x_e$$

mit dem Zustandsvektor  $x_e = [x_{e1}^T \ \dots \ x_{eN}^T]^T$  entsteht. Dabei ist

$$\dim(x_{ei}) = \sum_{j=1}^p (\delta_{ij} + n_{S_j} + \dim(x_{S_{ij}})) = \dim(x_{ek}) := n_e \quad \forall i, k \in \{1, \dots, N\}$$

und damit  $\dim(x_e) = Nn_e$ . Aufgrund der Struktur des geregelten Gesamtsystems, die sich bezüglich des Führungsverhaltens als ein homogenes Multi-Agenten System darstellt, lässt sich wie in Abschnitt 4.1.1 mittels der neuen Koordinatendarstellung  $\bar{x}_e = T^{-1}x_e$  und der Transformationsmatrix  $T = (V_{L_G} \otimes I_{n_e})$  bzw. der inversen Transformationsmatrix  $T^{-1} = (V_{L_G}^{-1} \otimes I_{n_e})$ , wobei  $V_{L_G}$  die Hauptvektormatrix von  $L_G$  darstellt, auf die neue Koordinatendarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_e &= (V_{L_G}^{-1} \otimes I_{n_e}) ((I_N \otimes A_e) + (I_N \otimes B_e)(L_G \otimes C_e)) (V_{L_G} \otimes I_{n_e}) \bar{x}_e, \\ &= ((I_N \otimes A_e) + (J_{L_G} \otimes B_e C_e)) \bar{x}_e \end{aligned}$$

übergehen, woraus wieder ein simultanes Stabilisierungsproblem folgt, da die Matrix  $J_{L_G}$  im Allgemeinen eine obere Dreiecksmatrix ist. Damit folgt ebenfalls die Aussage des Satzes, da die Stabilisierung von  $A_e + \lambda_{L_{Gk}} B_e C_e$  für  $k \in \{2, \dots, N\}$  aufgrund der Blockdiagonalstruktur aller Submatrizen in  $A_e$ ,  $B_e$  und  $C_e$  auf die simultane Stabilisierung der  $p$  Eingrößensysteme in (4.30) führt.  $\square$

Durch Satz 4.9 wird deutlich, dass mit einer unterlagerten Entkopplungsregelung, wobei die Agenten (4.16) hierbei Annahme 4.7 erfüllen müssen, sich bezüglich des Führungsverhaltens eine identische Dynamik ergibt. Durch Vorschaltung des synchronisierenden Reglers (4.29) erhält jeder Agent ein identisches internes Modell, d.h. die notwendigen Bedingungen aus Satz 4.6 sind für alle  $p$  entkoppelten Übertragungspfade erfüllt. Mit den notwendigen und hinreichenden Bedingungen aus Satz 4.9 kann somit konstruktiv die Regelung (4.29) entworfen werden, wobei sich dabei als Vorteil ergibt, dass die Synchronisierung für jeden Übertragungspfad ebenfalls entkoppelt entworfen werden kann. Darüber hinaus lässt sich über die Wahl der Matrizen  $S_j$  bzw.  $q_j^T$  gezielt die synchrone Trajektorie in jedem Ausgang der Agenten einstellen.

Allerdings ergibt sich der Entwurf der synchronisierenden Regelung auch an dieser Stelle wieder als ein strukturbeschränktes Regelungsproblem, so dass im Allgemeinen ein Entwurfsverfahren wie in Abschnitt 4.1.3 für jede Ausgangsgröße anzuwenden ist. Dies ist allerdings leicht möglich, da sich die Differentiale von (4.30) sehr einfach bestimmen lassen, was die Anwendung der

Methodik zur Vorgabe von Eigenwertbereichen auf das vorliegende Problem ermöglicht. Darüber hinaus ergeben sich, obwohl das Vorgehen in diesem Abschnitt auf der Homogenisierung der Agenten basiert, für die Agenten im Allgemeinen nicht-identische Regelgesetze, was durch Kombination von (4.23) und (4.29) auf die Matrizen eines strukturbeschränkten dynamischen Reglers

$$\begin{aligned} A_{di}^s &= \begin{bmatrix} A_{ek_i} & F_{ek,c_i} \tilde{\Gamma} & F_{ek,c_i} \tilde{C}_S \\ 0 & \tilde{S} & \tilde{E}_S \\ 0 & 0 & \tilde{A}_S \end{bmatrix}, & B_{di}^s &= \begin{bmatrix} B_{ek_i} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_S \\ 0 & \tilde{B}_S \end{bmatrix}, \\ C_{di}^s &= \begin{bmatrix} C_{ek_i} & F_{ek,p_i} \tilde{\Gamma} & F_{ek,p_i} \tilde{C}_S \end{bmatrix}, & D_{di}^s &= \begin{bmatrix} D_{ek_i} & F_{ek,p_i} \tilde{D}_S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

führt. Das Signal  $\tilde{v}_i(t)$  ergibt sich aufgrund (4.18) aus  $\tilde{v}_i(t) = [y_i(t)^T \quad v_i(t)^T]^T$ . Damit zeigt sich ebenfalls die Strukturbeschränkung dieses Ansatzes, die durch die Methodik aus diesem Abschnitt gezielt durch eine unterlagerte Entkopplungsregelung und einer Regelung zur Synchronisierung homogener Agenten aufgelöst werden kann.

**Anmerkung 4.10.** *Durch Annahme 4.7 wird gefordert, dass die unterlagerte Entkopplungsregelung allen Agenten eine identische, stabile und stationär genaue Dynamik zuweist. Eine Alternative besteht darin, direkt in jedem Übertragungspfad die Dynamik der Matrizen  $S_j$  vorzugeben, wie zum Beispiel in [40] dargestellt. Für die nominelle, entkoppelt geregelte Strecke ist dabei das interne Modellprinzip erfüllt. Allerdings führen Abweichungen in den Daten von (4.16), die unter praktischen Gesichtspunkten stets auftreten, dazu, dass das interne Modellprinzip nicht mehr erfüllt ist. Dies ist in diesem Ansatz nicht der Fall, da das interne Modell Bestandteil des Reglers ist.*

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass mit den Ergebnissen aus diesem Abschnitt die Entkopplung dynamischer Systeme auf die Synchronisierung heterogener agentenbasierter dynamischer Systeme übertragen wurde. Neben der Möglichkeit den synchronisierenden Regler für alle  $p$  Ausgangsgrößen getrennt zu entwerfen, was vorteilhaft für die Komplexität des resultierenden Entwurfes ist, resultiert damit auch die Möglichkeit, die Dynamik des Synchronisierungsfehlers in den entsprechenden Ausgangskanälen weitestgehend unabhängig voneinander einstellen zu können. Durch das Verzichten auf diese Forderung lassen sich weitere Entwurfsverfahren zur Synchronisierung heterogener Agenten anwenden, was im folgenden Abschnitt am Beispiel der Verkopplungsregelung diskutiert wird.

### 4.2.3 Synchronisierung durch Verkopplung

Im vorangegangenen Abschnitt hat sich durch den Synchronisierungsansatz basierend auf einer unterlagerten Entkopplungsregelung die Möglichkeit ergeben, die synchrone Trajektorie in jedem Ausgang getrennt vorzugeben. Darüber hinaus hat sich durch Satz 4.9 gezeigt, dass damit der Entwurf der synchronisierenden Regelung individuell für jede Ausgangsgröße durchführbar ist. Im Hinblick auf die geringere Anforderung, dass lediglich asymptotische Synchronisierung erzielt

werden muss, ist dieser Ansatz vergleichsweise restriktiv und hinsichtlich der benötigten Reglerordnung meist zu komplex. Dies motiviert daher den Verzicht auf die unterlagerte Entkopplungsregelung und die Verwendung einer unterlagerten Verkopplungsregelung in diesem Abschnitt.

In Bild 4.3 ist die Idee der Synchronisierung durch Verkopplung veranschaulicht. Auch bei diesem Ansatz wird jedem Agenten eine identische Vorsteuerung wie in (4.21) vorgeschaltet, die im synchronen Zustand eine vorab festgelegte Trajektorie generiert und die um eine synchronisierende Regelung ergänzt wird. Dies hat zur Folge, dass jeder Agent im offenen Regelkreis ein identisches Modell aufweist, so dass die notwendigen Bedingungen zur Synchronisierung nach Satz 4.6 erfüllt sind. Der Verkopplungsregelung kommt die Aufgabe zuteil, asymptotisch die Differenz zwischen dem Ausgang des Agenten  $y_i$  in (4.16) und dem Ausgang  $y_{s_i} = Qz_i$  des Zustandssystems  $\dot{z}_i = Sz_i + \tilde{v}_i$  mit  $z_i \in \mathbb{R}^n$  und  $z_i(t_0) = z_{i0}$ , welches gleichzeitig als dynamische Erweiterung des Agenten (4.16) dient, zu null zu regeln. Daraus folgt die Forderung nach Verkopplung zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) - y_{s_i}(t) =: y_{v_i}(t) = 0. \quad (4.31)$$

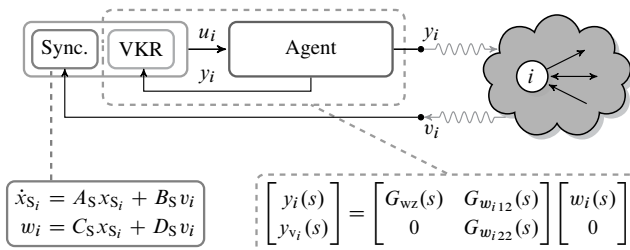
Darüber hinaus soll bezüglich des Führungsverhaltens des verkoppelt geregelten Systems nur noch eine Dynamik in Erscheinung treten, die die Form

$$\dot{z}_i = Sz_i + R_S w_i, \quad z_i(t_0) = z_{i0}, \quad (4.32a)$$

$$y_{s_i} = Qz_i, \quad (4.32b)$$

hat. Dies impliziert, dass durch die Verkopplungsregelung ebenfalls eine Homogenisierung aller Agenten durchgeführt wird, so dass sich jeder Agent bezüglich des Netzwerks identisch verhält. Dabei ist zu diesem Zeitpunkt die Dimension der Eingangsmatrix  $R_S$  noch nicht festgelegt. Unter der Voraussetzung, dass das Zustandssystem (4.32) über den Eingang  $w_i$  vollständig steuerbar ist, lässt sich eine synchronisierende Regelung in einfacher Weise durch die in Abschnitt 4.1.3 eingeführte Methodik berechnen.

Um Weitläufigkeiten im Hinblick auf den Entwurf der Verkopplungsregelung basierend auf der Methodik aus Abschnitt 3.2.3 zu vermeiden, wird im Folgenden angenommen, dass jeder Agent (4.16) die Bedingung nach Kimura (3.16) erfüllt. D.h. es lässt sich mittels der parametrischen Methodik aus Abschnitt 3.1.3 für jeden Agenten eine statische Rückführung  $u_i = K_i y_i$  finden,



**Bild 4.3:** Synchronisierung mittels Relativ- und Absolutinformation basierend auf einer unterlagerten Verkopplungsregelung

so dass  $\sigma(A_i + B_i K_i C_i) = \Lambda_{K_i}$  mit nahezu beliebig vorgebbaren Regelungseigenwerten  $\Lambda_{K_i}$  gilt. Auch an dieser Stelle stellt dies keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da mit einem zusätzlichen dynamischen Ausgangsregler stets die Bedingung nach Kimura erfüllt werden kann. Aus Gründen der Lesbarkeit der Ergebnisse in diesem Abschnitt wird auf die explizite Darstellung dieses Ansatzes jedoch verzichtet.

Durch Zusammenfassen von (4.16) mit der dynamischen Erweiterung durch das Zustandssystem  $\dot{z}_i = S z_i + \tilde{v}_i$  und im Hinblick auf Lemma 4.8 lässt sich der erweiterte Zustandsvektor  $x_{ei} = [x_i^T \ z_i^T]^T \in \mathbb{R}^{n_i + n_s}$  definieren, woraus der erweiterte Agent

$$\dot{x}_{ei} = A_{ei} x_{ei} + B_{ei} u_{ei}, \quad (4.33a)$$

$$y_i = C_{ei} x_{ei}, \quad (4.33b)$$

mit den Systemmatrizen

$$A_{ei} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \Gamma_i \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad B_{ei} = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & I_{n_s} \end{bmatrix}, \quad C_{ei} = \begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & I_{n_s} \end{bmatrix}$$

entsteht. Darin resultiert die Matrix  $\Gamma_i$  aus der Lösung der Sylvester Gleichung

$$\Pi_i S = A_i \Pi_i + B_i \Gamma_i, \quad (4.34a)$$

$$C_i \Pi_i = Q. \quad (4.34b)$$

Die dynamische Erweiterung des Agenten hat auch an dieser Stelle zur Folge, dass im offenen Regelkreis der invariante Unterraum  $\text{bild}\left(\begin{bmatrix} \Pi_i^T & I_{n_s} \end{bmatrix}^T\right)$  existiert, der unbeobachtbar am Verkopplungsausgang  $y_{vi} = [C_i \ -Q] x_{ei}$  ist, und es somit nach Lemma 4.8 möglich ist, Anfangswerte zu bestimmen, so dass  $y_i(t) = y_j(t)$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  gilt. Damit sind die notwendigen Voraussetzungen zur Synchronisierung heterogener Agenten aus Satz 4.6 erfüllt. Mittels der Methodik zum Entwurf einer Verkopplungsregelung aus Abschnitt 3.2.3 ist daher die Ausgangsregelung mit Vorfilter

$$u_{ei} = \begin{bmatrix} K_{1y_i} & K_{1z_i} \\ K_{2y_i} & K_{2z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{v_i} \\ F_{z_i} \end{bmatrix} w_i = K_{ei} y_{ei} + F_{ei} w_i \quad (4.35)$$

derart auszulegen, dass neben der Einhaltung der Verkopplungsbedingung (4.31) und der Beibehaltung des invarianten Unterraums  $\text{bild}\left(\begin{bmatrix} \Pi_i^T & I_{n_s} \end{bmatrix}^T\right)$  sich zudem für alle Agenten bezüglich des Eingangs  $w_i$  und des Ausgangs  $y_i$  ein dynamisches Verhalten nach (4.32) ergibt, was die Homogenisierung der Agenten durch die Verkopplungsregelung zur Folge hat.

Zur Verdeutlichung der hierzu notwendigen Anpassungen der Methodik aus Abschnitt 3.2.3 ist zunächst festzuhalten, dass die Rechtseigenvektoren des geschlossenen Regelkreises den Unterraum  $\text{bild}\left(\begin{bmatrix} \Pi_i^T & I_{n_s} \end{bmatrix}^T\right)$  erzeugen müssen. Damit ergibt sich, dass  $\delta_v = n_s$ , und es resultiert ausgehend von den Entwurfsgleichungen (3.57) zur Bestimmung der Rechtseigenvektoren des geschlossenen Regelkreises die Bestimmungsgleichung

$$\begin{bmatrix} (A_i - \lambda_{K_k} I) & B_i \Gamma_i & B_i & 0 \\ 0 & (S - \lambda_{K_k} I) & 0 & I_{n_s} \\ C_i & -Q & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{K_1 k} \\ v_{K_2 k} \\ p_{v_1 k} \\ p_{v_2 k} \end{bmatrix} = 0, \quad k \in \{1, \dots, \delta_v\}, \quad (4.36)$$

wobei  $\{\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{K\delta_v}\} = \sigma(S)$ . Auf die Bestimmung der Rechtseigenvektoren durch Lösung von (4.36) kann jedoch verzichtet werden, indem auf die Lösung  $\Pi_i$  und  $\Gamma_i$  der Gleichung (4.34) zurückgegriffen wird. Unter der vereinfachenden Annahme, dass die Eigenwerte der Matrix  $S$  einfach sind, lassen sich aus dem Zusammenhang  $SV_S = V_S \text{diag}(\lambda_{K1}, \dots, \lambda_{K\delta_v}) = V_S \Lambda_S$ , wobei in  $V_S$  spaltenweise die Rechtseigenvektoren  $v_{sk}$  der Matrix  $S$  enthalten sind, unter Hinzunahme von (4.34) die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\Pi_i V_S \Lambda_S &= A_i \Pi_i V_S + B_i \Gamma_i V_S, \\ C_i \Pi_i V_S &= Q V_S\end{aligned}$$

berechnen. Spaltenweise ergibt sich damit

$$\begin{aligned}(A_i - \lambda_{Kk} I) \Pi_i v_{sk} + B_i \Gamma_i v_{sk} &= 0, \\ C_i \Pi_i v_{sk} - Q v_{sk} &= 0.\end{aligned}$$

Um sämtliche Freiheitsgrade der parametrischen Entwurfsmethodik sichtbar zu machen, lässt sich die obige Darstellung durch Nullergänzung gemäß

$$\begin{aligned}(A_i - \lambda_{Kk} I) \Pi_i v_{sk} + B_i \Gamma_i v_{sk} + (B_i \Gamma_i Q_{\perp} - B_i \Gamma_i Q_{\perp}) \tilde{q}_{vk} &= 0, \\ (S - \lambda_{Kk} I) v_{sk} + ((S - \lambda_{Kk} I) Q_{\perp} - (S - \lambda_{Kk} I) Q_{\perp}) \tilde{q}_{vk} &= 0, \\ C_i \Pi_i v_{sk} - Q v_{sk} - Q Q_{\perp} \tilde{q}_{vk} &= 0.\end{aligned}$$

zusammen mit kern  $(Q) = \text{bild}(Q_{\perp})$  modifizieren, was ebenfalls in die Darstellung

$$\begin{bmatrix} (A_i - \lambda_{Kk} I) & B_i \Gamma_i & B_i & 0 \\ 0 & (S - \lambda_{Kk} I) & 0 & I_{n_s} \\ C_i & -Q & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_i v_{sk} & 0 \\ v_{sk} & Q_{\perp} \\ 0 & -\Gamma_i Q_{\perp} \\ 0 & -(S - \lambda_{Kk} I) Q_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{q}_{vk} \end{bmatrix} = 0,$$

$k \in \{1, \dots, \delta_v\}, \quad \lambda_{Kk} \in \sigma(S)$

überführbar ist. Somit sind die ersten  $\delta_v$  Spalten der Matrizen  $V_r$  und  $Q_r$  bereits durch die Lösung der Matrizengleichung (4.34) zusammen mit der Matrix  $Q_{\perp}$  parametrierbar und auf den Zugang über (4.36) kann verzichtet werden. Um den Unterraum  $\text{bild}([\Pi_i^T \ I_{n_s}]^T)$  zu erzeugen, ergibt sich aus den vorstehenden Umformungen zudem, dass die Parametervektoren  $q_{vk}$  für  $k \in \{1, \dots, \delta_v\}$  nicht beliebig wählbar, sondern gemäß  $q_{vk}^T = [1 \ \tilde{q}_{vk}^T]$  zu wählen sind. In dieser Darstellung ist der Parametervektor  $\tilde{q}_{vk}$  beliebig wählbar und charakterisiert die verbleibenden Freiheitsgrade der parametrischen Entwurfsmethodik, sofern  $\dim \text{kern}(Q) \neq 0$  gilt.

Für die verbleibenden Rechtseigenvektoren ist anschließend die Bestimmungsgleichung

$$\begin{bmatrix} (A_i - \lambda_{Kk} I) & B_i \Gamma_i & B_i & 0 \\ 0 & (S - \lambda_{Kk} I) & 0 & I_{n_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{K1k} \\ v_{K2k} \\ p_{v1k} \\ p_{v2k} \end{bmatrix} = 0, \quad k \in \{\delta_v + 1, \dots, \delta_v + p - 1\},$$

(4.37)



beziehungsweise in analoger Weise die Bestimmungsgleichung für die verbleibenden Linkseigenvektoren (3.58) auszuwerten, wobei die Regelungseigenwerte stabil und derart zu wählen sind, dass die Rangannahmen in Satz 3.12 zur Bestimmung der Verkopplungsregelung erfüllt sind. Die Koordinatentransformation

$$\tilde{x}_i = [V_{\delta,i} V_S^{-1} \quad T_{\perp i}]^{-1} x_{ei} = [W_{\delta,i}^T V_S^T \quad T_{\perp i}^T]^T x_{ei}$$

mit  $\text{bild}(T_{\perp i}) = \text{kern}(V_{\delta,i}^T)$  sowie  $T_{\perp i}^T T_{\perp i} = I_{n_i + n_S - \delta_v}$  überführt damit in Anlehnung an die Diskussion in Abschnitt 3.2.3 jeden geregelten Agenten in die Darstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{i1} \\ \dot{\tilde{x}}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & V_S W_{\delta,i} A_{K_{ei}} T_{\perp i} \\ 0 & T_{\perp i}^T A_{K_{ei}} T_{\perp i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i1} \\ \tilde{x}_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_S W_{\delta,i} B_{ei} F_{ei} \\ T_{\perp i}^T B_{ei} F_{ei} \end{bmatrix} \tilde{w}_i, \quad (4.38a)$$

$$\begin{bmatrix} y_i \\ v_{vi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & C_i T_{\perp i} \\ 0 & C_{vi} T_{\perp i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i1} \\ \tilde{x}_{i2} \end{bmatrix}, \quad (4.38b)$$

wobei  $A_{K_{ei}} = A_{ei} + B_{ei} K_{ei} C_{ei}$  und  $C_{vi} = [C_i \quad -Q]$  abgekürzt ist. Diese Darstellung des verkopplert geregelten Systems verdeutlicht, dass die durch den parametrischen Ansatz stets zu garantierende Stabilität der Matrix  $T_{\perp i}^T A_{K_{ei}} T_{\perp i}$  unter der Voraussetzung  $\tilde{w}_i = 0$  dafür sorgt, dass der Verkopplungsausgang gemäß (4.31) verschwindet.

Für den Vorfilterentwurf ist daher im Sinne der Verkopplungsregelung aus Abschnitt 3.2.3 neben der Unsteuerbarkeit der Eigenwerte  $\lambda_{Kk}$  für  $k > \delta_v$  darüber hinaus zu fordern, dass sich bezüglich des Ausgangs  $y_i$  und des Eingangs  $w_i$  eine Dynamik ergibt, die die Form (4.32) hat. Um dieses Resultat zu erzielen, muss daher nicht nur der Ausdruck  $T_{\perp i}^T B_{ei} F_{ei} = 0$  werden, sondern auch für alle Agenten aus der Bestimmungsgleichung des Vorfilters

$$\begin{bmatrix} V_S W_{\delta,i} \\ T_{\perp i}^T \end{bmatrix} B_{ei} F_{ei} = \begin{bmatrix} P_i \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_{ei} & V_{\delta,i} V_S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ei} \\ -P_i \end{bmatrix} = 0 \quad (4.39)$$

eine Matrix  $T_{F_i}$  existieren, so dass  $P_i T_{F_i} = R_S$  und damit  $\tilde{w}_i = T_{F_i} w_i$  gilt. D.h. die Bildräume der Matrizen  $P_i$  haben eine gemeinsame, nicht-leere Schnittmenge, was die Homogenisierung der Agenten zur Folge hat, und dies führt zur Lösung des Synchronisierungsproblems heterogener Agenten basierend auf einer unterlagerten Verkopplungsregelung auf die nachfolgende Annahme.

**Annahme 4.11.** *Es gilt  $\text{bild}(R_S) := \cap_{i=1}^N \text{bild}(P_i) \neq \emptyset$  und das Paar  $(S, R_S)$  ist steuerbar.*

Unter dieser Annahme ist es möglich, eine identische synchronisierende Regelung gemäß

$$\dot{x}_{S_i} = A_S x_{S_i} + B_S v_i \quad (4.40a)$$

$$w_i = C_S x_{S_i} + D_S v_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.40b)$$

für alle Agenten, die sich aufgrund von Annahme 4.11 in die Minimalrealisierung (4.32) überführen lassen, zu verwenden. Das Resultat der vorstehenden Diskussionen ist in dem nachfolgenden Satz zusammengefasst.

**Satz 4.12.** *Betrachtet werden  $N$  heterogene Agenten wie in (4.16), die Annahme 4.11 erfüllen, zusammen mit einem Kommunikationsnetzwerk, was durch den verbundenen Graphen  $\mathcal{G}$  beschrieben wird. Es seien darüber hinaus die Rangannahmen in Satz 3.12 für alle Agenten erfüllt, so dass für alle Agenten eine Verkopplungsregelung (4.35) mit der Verkopplungsbedingung (4.31) existiert. Werden die bezüglich der Führungsgröße  $w_i$  unsteuerbaren Eigenwerte  $\lambda_{kk}$  für  $k > \delta_v$  stabil gewählt und ist die synchronisierende Regelung (4.29) für alle Agenten identisch, dann wird Synchronisierung für alle Agenten im Sinne von Definition 2.12 genau dann erreicht, wenn die Matrizen*

$$\begin{bmatrix} S & R_S C_S \\ 0 & A_S \end{bmatrix} + \lambda_{L_{\mathcal{G}}k} \begin{bmatrix} R_S D_S \\ B_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

$$\forall k \in \{2, \dots, N\}$$

*stabil sind, wobei  $\lambda_{L_{\mathcal{G}}k}$  mit  $k \in \{2, \dots, N\}$  die Eigenwerte mit positivem Realteil der Laplacematrix des Graphen  $\mathcal{G}$  bezeichnet.*

*Beweis.* Aufgrund der Voraussetzung, dass die Rangannahmen in Satz 3.12 für alle Agenten erfüllt sind, existiert für alle Agenten eine Verkopplungsregelung (4.35) mit der Verkopplungsbedingung (4.31). Da die bezüglich der Führungsgröße  $w_i$  unsteuerbaren Eigenwerte  $\lambda_{kk}$  für  $k > \delta_v$  stabil zu wählen sind und diese somit asymptotisch nicht mehr in Erscheinung treten, kann für alle verkoppelt geregelten Agenten gemäß (4.38) eine Minimalrealisierung bestimmt werden. Da aufgrund von Annahme 4.11 das steuerbare Paar  $(S, R_S)$  in (4.32) existiert, folgt zusammen mit (4.40) der steuer- und beobachtbare, *geregelte Agent*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ci} &= A_c x_{ci} + B_c v_i, \\ y_i &= C_c x_{ci}, \end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor  $x_{ci} = \begin{bmatrix} z_i^T & x_{Si}^T \end{bmatrix}^T$  und den Systemmatrizen

$$A_c = \begin{bmatrix} S & R_S C_S \\ 0 & A_S \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} R_S D_S \\ B_S \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} Q & 0 \end{bmatrix},$$

woraus das homogene Multi-Agenten System

$$\dot{x}_c = ((I_N \otimes A_c) + (I_N \otimes B_c)(L_{\mathcal{G}} \otimes C_c)) x_c$$

mit dem Zustandsvektor  $x_c = \begin{bmatrix} x_{c1}^T & \dots & x_{cN}^T \end{bmatrix}^T$  entsteht. Die verbleibende Argumentation des Beweises ist daher äquivalent zu der in Satz 4.9, woraus die Aussage des Satzes folgt.  $\square$

#### 4.2.4 Abschließende Bemerkungen zur synchronen Zeitlösung

Dieser Abschnitt dient der abschließenden Betrachtung der in den vorstehenden Abschnitten erzielten Ergebnisse zur Synchronisierung heterogener agentenbasierter dynamischer Systeme. Ausgehend von den notwendigen Bedingungen zur Synchronisierung, die in Satz 4.6 zusammengefasst sind, zeigt sich die folgende Eigenschaft der betrachteten Systemklasse. Unter der Annahme,

dass eine synchronisierende Regelung – beispielsweise auf Grundlage einer unterlagerten Ent- beziehungsweise Verkopplungsregelung bestimmt – vorliegt, synchronisieren sich alle Agenten auf einen identischen Ausgangsverlauf  $y_S(t)$ , der sich damit als Zeitlösung des *Exosystems*

$$\dot{z} = Sz, \quad z(t_0) = z_0, \quad (4.42a)$$

$$y_S = Qz, \quad (4.42b)$$

mit geeignet gewähltem Anfangswert  $z_0$  darstellen lässt. Zur Erfüllung des internen Modellprinzips zur Synchronisierung nach Satz 4.6 besteht die zugrunde liegende Idee der vorgestellten Entwurfsverfahren darin, ein Modell des Exosystems (4.42) in die Regelungsstruktur zu integrieren. Dabei ist allerdings anzunehmen, dass jede Agentendynamik nicht bereits Teildynamiken von (4.42) aufweist, da dies eine unnötige Redundanz nach sich zieht. Es ist daher konstruktiv festzustellen, ob dieser Fall eintritt. Hierzu lässt sich auf die Lösung der Sylvester Gleichung mit Nebenbedingung

$$\Pi_i S = A_i \Pi_i + B_i \Gamma_i \quad (4.43a)$$

$$C_i \Pi_i = Q \quad (4.43b)$$

zurückgreifen, die zur Berechnung der synchronisierenden Regelungen basierend auf den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 zu bestimmen ist. Dies führt auf das nachfolgende Lemma.

**Lemma 4.13.** *Wenn das Paar  $(\Gamma_i, S)$  aus der Lösung von (4.43) nicht vollständig beobachtbar ist, dann existiert mindestens ein Eigenwert  $\lambda_*$  mit  $S v_S = \lambda_* v_S$ , so dass ebenfalls  $A_i v = \lambda_* v$  mit  $C_i v = Q v_S$  erfüllt ist.*

*Beweis.* Da das Paar  $(\Gamma_i, S)$  nicht vollständig beobachtbar ist, existiert mindestens ein  $\lambda_* \in \sigma(S)$  mit  $S v_S = \lambda_* v_S$ , und es gilt

$$\begin{bmatrix} S - \lambda_* I_{n_S} \\ \Gamma_i \end{bmatrix} v_S = 0.$$

Da  $\Pi_i$  und  $\Gamma_i$  aus der Lösung von (4.43) zu bestimmen sind, ist nach Lemma 4.8 der Unterraum  $\text{bild} \left( \begin{bmatrix} \Pi^T & I_{n_S}^T \end{bmatrix} \right)^T$  invariant unter der Dynamik von

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \Gamma_i \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ z \end{bmatrix}$$

und unbeobachtbar am Ausgang  $e = C x_i - Q z$ . Damit gilt

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} A_i - \lambda I_{n_i} & B_i \Gamma_i \\ 0 & S - \lambda I_{n_S} \\ C_i & -Q \end{bmatrix} \right) < n_i + n_S, \quad \forall \lambda \in \sigma(S)$$

und somit auch für  $\lambda = \lambda_*$ . Da  $(C_i, A_i)$  und  $(Q, S)$  beobachtbare Paare sind, impliziert dies, dass ein  $v$  mit  $A_i v = \lambda_* v$  existiert, so dass  $C_i v = Q v_S$  erfüllt ist.  $\square$

Mit Lemma 4.13 beziehungsweise ausgehend von der Überprüfung der Beobachtbarkeit des Paares  $(\Gamma_i, S)$  lässt sich daher konstruktiv überprüfen, ob der Agent bereits Teildynamiken enthält, die hinsichtlich der synchronen Trajektorie (4.42) gefordert sind. Tritt dieser Fall ein, lässt sich somit eine Minimalrealisierung bezüglich des „Ausganges“  $\Gamma_i$  bestimmen, woraus eine um die unbeobachtbaren Eigenwerte reduzierte Zustandsraumdarstellung mit der Dynamikmatrix  $\tilde{S}$  und der Ausgangsmatrix  $\tilde{Q}$  sowie einem reduzierten  $\tilde{\Gamma}_i$  resultiert, die für die Entwürfe gemäß Satz 4.9 bzw. 4.12 zu berücksichtigen sind. Dies umfasst ebenfalls den Fall  $\Gamma_i = 0$ , was bedeutet, dass der Agent bereits die synchrone Trajektorie vollständig enthält und somit nicht mehr gemäß Lemma 4.8 dynamisch erweitert werden muss.

### 4.3 Synchronisierung nichtlinearer Agenten mit Vektorrelativgrad eins

Ausgehend von der Darstellung in Bild 4.1 wird in diesem Abschnitt eine spezielle Klasse von Multi-Agenten Systemen betrachtet. In Abgrenzung zu den vorstehenden Abschnitten wird die Dynamik nicht mehr als linear angenommen, sondern nichtlineare Agenten mit Vektorrelativgrad eins betrachtet. Die Betrachtung dieser speziellen Systemklasse ist darin begründet, dass nicht-lineare Systeme mit Vektorrelativgrad eins und Lyapunov stabiler Nulldynamik rückgekoppelt äquivalent zu einem passiven System sind [15]. Darüber hinaus zeigt sich, dass Synchronisierung passiver Systeme mit vergleichsweise einfachen Regelgesetzen durchführbar ist [6, 19, 54].

Das grundsätzliche Vorgehen ist hingegen identisch zu Abschnitt 4.2 – durch eine unterlagerte Rückführung wird jeder Agent bezüglich des Netzwerks homogenisiert und eine überlagerte synchronisierende Regelung führt die Ausgangstrajektorien der Agenten auf einen identischen Verlauf. Darüber hinaus wird angenommen, dass die Agenten parametrische Unsicherheiten aufweisen, die in diesem Falle durch eine adaptive Regelung kompensiert werden, was der unterlagerten Regelung entspricht. Der synchronisierende Regler nutzt ein Verfahren, das auf der Passivität basiert und welches auch die Erweiterung des Verfahrens auf spezielle Kommunikationsstrukturen, die Zeitverzögerungen ausgesetzt sind, ermöglicht. Die in diesem Abschnitt erzielten Ergebnisse sind ebenfalls in [112] in englischer Sprache zu finden.

#### 4.3.1 Vorüberlegungen zur betrachteten Systemklasse

Betrachtet werden zunächst nichtlineare, eingangs-affine Zustandssysteme gemäß

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4.44a)$$

$$y = h(x), \quad (4.44b)$$

wobei mit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  und  $y \in \mathbb{R}^m$  der Zustand, der Eingang und der Ausgang des Zustandsystems bezeichnet wird. Zudem werden die Vektorfelder  $f(x)$  und  $g_i(x)$  mit  $i \in \{1, \dots, m\}$  sowie die Ausgangsabbildung  $h(x)$  als hinreichend glatt angenommen. Zur Vereinfachung der nachfolgenden Diskussionen werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Annahmen  $f(0) = 0$

und  $h(0) = 0$  getroffen. Im Hinblick auf die Passivitätseigenschaft eines Zustandssystems (4.44) wird die folgende Definition benötigt.

**Definition 4.14** ([38]). *Das Zustandssystem (4.44) ist passiv, wenn eine stetig differenzierbare positiv semi-definite Funktion  $V(x)$  existiert, so dass*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \leq u^T y, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

*gilt. Darüber hinaus ist das Zustandssystem (4.44) strikt passiv, wenn  $\dot{V} \leq u^T y - S(x)$  für eine positiv-definite Funktion  $S(x)$  ist, bzw. verlustlos, wenn  $\dot{V} = u^T y$  gilt.*

Hinsichtlich der Möglichkeit, durch eine Zustandsrückführung wesentliche Eigenschaften von (4.44) zu verändern, stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen ein System (4.44) durch eine statische Zustandsrückführung äquivalent zu einem passiven System mit positiv definierter Speicherfunktion ist. Hierbei spielt sowohl der relative Grad (vgl. z.B. [36]) eines Systems als auch eine Normalform, die für die weiteren Betrachtungen benötigt wird, eine Rolle. D.h. es wird eine neue Koordinatendarstellung für (4.44) gesucht, so dass sowohl die Passivitätseigenschaften als auch die interne Dynamik eines eingangs-affinen Zustandssystems sichtbar werden. Sind daher nach [14] die Bedingungen

(A1) Die Matrix  $L_g h(x) := [L_{g_1} h(x) \ \dots \ L_{g_m} h(x)]$  ist regulär für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $L_{g_i} h(x)$  die Lie-Ableitung der Ausgangsfunktion (4.44b) in Richtung des Vektorfeldes  $g_i(x)$  bezeichnet.

(A2) Die Vektorfelder  $\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_m(x)$  sind vollständig (engl. *complete*), wobei

$$[\tilde{g}_1(x) \ \dots \ \tilde{g}_m(x)] = g(x)[L_g h(x)]^{-1}$$

ist.

(A3) Die Vektorfelder  $\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_m(x)$  kommutieren.

erfüllt, dann existiert ein global definierter Diffeomorphismus, welcher (4.44) in die Normalform

$$\dot{z} = q(z, y) \tag{4.45a}$$

$$\dot{y} = b(z, y) + a(z, y)u \tag{4.45b}$$

überführt. Darin ist aufgrund des relativen Grades, was (A1) zum Ausdruck bringt,  $a(z, y)$  regulär und mit  $z_1(x), \dots, z_{n-p}(x)$  und den  $p$  Ausgängen  $y = h(x)$  sind die neuen Koordinaten festgelegt. Annahme (A2) lässt sich gemäß den Betrachtungen in [1, Abschnitt 3.9] dahingehend interpretieren, dass der durch das Vektorfeld  $\tilde{g}_i(x)$  induzierte Fluss  $\Phi_t(x) = x(t)$  mit  $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x) \big|_{t=0} = \tilde{g}_i(x)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert und damit die Zeitlösung  $x(t)$  existiert und eindeutig ist. Aufgrund der Annahme, dass die Vektorfelder  $\tilde{g}_i(x)$  vollständig sind, folgt aus (A3), dass die Flüsse der Vektorfelder  $\tilde{g}_i(x)$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  vertauschbar sind [1, Satz 36].

Darüber hinaus lässt sich aufgrund der Annahme, dass die Vektorfelder  $f(x)$  und  $g_i(x)$  mit  $i \in \{1, \dots, m\}$  glatt sind, durch eine Taylor Entwicklung (4.45a) auch als

$$\dot{z} = q(z, 0) + p(z, y)y \quad (4.46)$$

schreiben, wobei  $p(z, y)$  damit ebenfalls eine glatte Funktion ist. Wird für (4.45) die nichtlineare Zustandsrückführung  $u = a^{-1}(z, y)(v - b(z, y))$  eingesetzt, dann ergibt sich die Nulldynamik des Systems aus  $\dot{z} = q(z, 0)$  und  $y(t_0) = 0$ . Zur Synchronisierung nichtlinearer Agenten, die sich in die Normalform (4.45) überführen lassen, wird noch eine weitere Einschränkung der betrachteten Systemklasse benötigt. Dies umfasst nichtlineare Systeme, die schwach minimalphasig sind, was die folgende Definition präzisiert.

**Definition 4.15** ([15]). *Angenommen,  $L_g h(0)$  ist regulär. Das Zustandssystem (4.45) wird als global schwach minimalphasig bezeichnet, wenn eine  $C^r$ -Funktion  $W(z)$  mit  $r \geq 2$  existiert, die für alle  $z$  mit  $W(0) = 0$  definiert, positiv definit und proper ist, so dass*

$$\frac{\partial W}{\partial z} q(z, 0) \leq 0$$

für alle  $z$  gilt.

Mit der vorstehenden Definition ist die Minimalphasigkeit eines Systems an die Stabilitätseigenschaften der Nulldynamik geknüpft. Ist daher eine Lyapunovfunktion  $W(z)$  für die Nulldynamik bestimmt, lässt sich auf Minimalphasigkeit des Zustandssystem (4.45) schließen.

### 4.3.2 Passivitätsbasierte Synchronisierung

Zur Herleitung einer adaptiven, synchronisierenden Regelung für nichtlineare Agenten mit Vektorrelativgrad eins wird zunächst ein Verfahren aus der Literatur vorgestellt, welches die Synchronisierung identischer nichtlinearer passiver Agenten ermöglicht. Hierzu wird auf die Ergebnisse aus [17, 18] zurückgegriffen, worin Chopra und Spong bzw. Chopra eine auf der Passivität basierende kooperative Regelung vorstellen. Die vorstehenden Resultate werden auf eine modifizierte Systemklasse nichtlinearer Agenten erweitert, was sich in parametrischen Unsicherheiten der nichtlinearen Dynamik der Agenten ausdrückt. Die unterlagerte Regelung der Agenten ist in diesem Sinne so auszulegen, dass die Unsicherheiten kompensiert werden, was auf den adaptiven Anteil der Regelung führt.

Für die weiteren Betrachtungen wird daher ein Multi-Agenten System, bestehend aus  $N$  nichtlinearen Agenten mit unsicherer Dynamik, die sich gemäß

$$\dot{z}_i = q_i(z_i, 0) + p_i(z_i, y_i)y_i + p_{\theta_i}(z_i, y_i)\theta_{i1}, \quad (4.47a)$$

$$\dot{y}_i = b_i(z_i, y_i) + b_{\theta_i}(z_i, y_i)\theta_{i2} + a_i(z_i, y_i)u_i, \quad (4.47b)$$

mit  $i \in \{1, \dots, N\}$  darstellen lassen, betrachtet, wobei  $z_i \in \mathbb{R}^{n_i-q}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^q$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^q$  sowie  $\theta_{i1} \in \mathbb{R}^{p_{i1}}$  und  $\theta_{i2} \in \mathbb{R}^{p_{i2}}$ . Die Parameter  $\theta_{i1}$  und  $\theta_{i2}$  sind in dieser Darstellung unbekannte, konstante Vektoren, womit die parametrischen Unsicherheiten jedes Agenten zum Ausdruck kommen.

Es wird weiterhin angenommen, dass alle Vektorfelder hinreichend glatt sind, und dass die Bedingungen  $b_{\theta_i}(0,0) = 0$  und  $p_{\theta_i}(0,0) = 0$  erfüllt sind. Dies hat zur Folge, dass die Unsicherheiten keine Änderung der Ruhelage von (4.47) zur Folge haben.

Gilt hingegen  $\theta_{i_1} = 0$  und  $\theta_{i_2} = 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}$ , was der nominalen Dynamik der Agenten in (4.47) entspricht, resultiert daraus die in [17, 18] angenommene Systemstruktur der Agenten. Diese bildet somit den Ausgangspunkt für die Ergebnisse des Abschnitts, weshalb kurz die benötigten Definitionen und Ergebnisse aus [17, 18] dargestellt werden. Die in Kapitel 2 eingeführte Definition hinsichtlich Ausgangssynchronisierung ist ebenfalls im nichtlinearen Fall gültig.

**Definition 4.16** (Ausgangssynchronisierung, vgl. [17]). *Betrachtet werden Multi-Agenten Systeme mit  $N$  Agenten gemäß (4.47). Die Agenten erzielen Ausgangssynchronisierung, wenn*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y_j(t)\| = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (4.48)$$

*erfüllt ist.*

Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich in einfacher Weise auf spezielle Kommunikationsnetzwerke erweitern, bei denen die Kommunikation der Ausgänge mit Verzögerung erfasst wird, was für praktische Problemstellungen von Wichtigkeit ist. Hierzu ist die vorstehende Definition an die Problemstellung anzupassen, woraus die folgende modifizierte Definition folgt.

**Definition 4.17** ([17, 18]). *Betrachtet werden Multi-Agenten Systeme mit  $N$  Agenten gemäß (4.47). Die Agenten erzielen verzögerte Ausgangssynchronisierung, wenn*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t - T_{ij}^k) - y_j(t)\| = 0 \quad \forall i, j \quad \forall k. \quad (4.49)$$

*erfüllt ist.*

Auch hinsichtlich der vorstehenden Definition werden die Annahmen aus [17] bezüglich der Verzögerungen übernommen, d.h. die Verzögerungen werden als konstant und beschränkt angenommen. Da in Abhängigkeit der Kommunikationsstruktur mehrere Pfade zwischen zwei Knoten existieren können, wird mit  $T_{ij}^k$  die Verzögerung entlang des  $k$ -ten Pfades vom  $i$ -ten Agenten zum  $j$ -ten Agenten bezeichnet. Vorausgesetzt wird lediglich, dass die Verzögerung entlang einer einzelnen Kante im Kommunikationsgraphen eindeutig ist. D.h. Zeitverzögerungen  $T_{ij}$  zwischen benachbarten Agenten, was einem Pfad der Länge eins entspricht, sind eindeutig. In englischer Sprache wird dies als *one-hop transmission delay* bezeichnet.

Im Hinblick auf die Definitionen bezüglich der Ausgangssynchronisierung nichtlinearer Agenten lässt sich die Problemstellung, die in diesem Abschnitt gelöst wird, wie folgt zusammenfassen: Ausgehend von der Systemdarstellung nichtlinearer, unsicherer Agenten in (4.47) wird ein Multi-Agenten System aus  $N$  Agenten betrachtet. Für jeden Agenten ist ein synchronisierendes Regelgesetz zu bestimmen, welches dazu führt, dass sich alle Ausgänge der Agenten im Sinne von (4.48) im Fall ohne Verzögerung bzw. im Sinne von (4.49) im Fall mit Verzögerungen synchronisieren. Hierzu wird das nachstehende Resultat benötigt, was die Synchronisierung von  $N$  Agenten in (4.47) zur Folge hat, wenn lediglich die nominale Dynamik der Agenten berücksichtigt wird.

**Satz 4.18** ([17]). *Betrachtet werden Multi-Agenten Systeme mit  $N$  Agenten gemäß (4.47), wobei  $\theta_{i_1} = 0$  und  $\theta_{i_2} = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  angenommen wird. Nutzt jeder Agent die Zustandsrückführung  $u_i = a_i^{-1}(z_i, y_i)(v_i - b_i(z_i, y_i))$  zusammen mit der kooperativen Regelung*

$$v_i = \sum_{j=1}^N a_{gij} (y_j(t - T_{ji}) - y_i) - (L_{p_i(z_i, y_i)} W_i)^T \quad (4.50)$$

*und sind alle Agenten global schwach minimalphasig sowie der Kommunikationsgraph stark verbunden, dann synchronisieren sich alle Ausgänge der Agenten im Sinne von (4.49).*

### 4.3.3 Struktur des adaptiven Reglers

Zur Motivation der nachfolgend genutzten Regelungsstruktur sollen zunächst einige Vorüberlegungen hinsichtlich der adaptiven Stabilisierung von Systemen der Form (4.47) angestellt werden. Ein in der Literatur etabliertes Vorgehen zum Entwurf beruht dabei häufig auf der *certainty equivalence* Eigenschaft [49, 106]. Dies bedeutet, dass zunächst die Kenntnis der Parameter  $\theta_{i_1}$  und  $\theta_{i_2}$  angenommen wird, und auf Grundlage dieser Annahme eine stabilisierende Regelung zu bestimmen ist. Im Anschluss werden die Parameter  $\theta_{i_1}$  sowie  $\theta_{i_2}$  durch Schätzwerte  $\hat{\theta}_{i_1}$  sowie  $\hat{\theta}_{i_2}$  ersetzt und die Dynamik der Schätzwerte so gewählt, dass durch eine Lyapunov Funktion die Stabilität des Gesamtsystems folgt. Hierbei ist die Ableitung der Lyapunov Funktion typischerweise derart zu wählen, dass diese notwendigerweise negativ semi-definit und unabhängig von den unbekannten Parametern ist. Mit diesem Vorgehen ist die Stabilität der Ruhelage gesichert und zusätzlich existiert eine obere Schranke  $c$  für den Schätzfehler, so dass  $\|\theta - \hat{\theta}\| < c$  gilt.

Dieses Vorgehen zur adaptiven Stabilisierung wird nun vor dem Hintergrund der Synchronisierung unsicherer nichtlinearer Agenten diskutiert. Hierzu wird angenommen, dass die Agenten sich lediglich durch (4.47b) beschreiben lassen, d.h. keine interne Dynamik besitzen. Mit der Zustandsrückführung  $u_i = a_i^{-1}(z_i, y_i)(v_i - b_i(z_i, y_i) - b_{\theta_i}(z_i, y_i)\hat{\theta}_{i_2})$  ergibt sich für die Differentialgleichung des Ausganges (4.47b) für jeden Agenten der Zusammenhang  $\dot{y}_i = b_{\theta_i}(z_i, y_i)(\theta_{i_2} - \hat{\theta}_{i_2}) + v_i$ . Angenommen für den neuen Eingang der Agenten gilt  $v_i = 0$ , was der Synchronisierung der Ausgänge entspricht. Darüber hinaus ist aufgrund der adaptiven Regelung der Schätzfehler  $\theta_{i_2} - \hat{\theta}_{i_2}$  beschränkt. Im Hinblick auf die notwendigen Bedingungen zur Synchronisierung nichtlinearer Agenten in [125] und auf den angenommenen synchronen Verlauf der Ausgänge muss daher ebenfalls  $\dot{y}_i = \dot{y}_j = 0$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  erfüllt sein. Wird im Allgemeinen von  $\theta_{i_2} - \hat{\theta}_{i_2} \neq 0$  für den Schätzfehler ausgegangen, ist die notwendige Bedingung zur Synchronisierung nur zu erfüllen, wenn  $b_{\theta_i}(z_i, y_i) = 0$  gilt, was  $y_i = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  und damit triviale Synchronisierung bzw. Stabilisierung impliziert. Zur Vermeidung des eben beschriebenen Sachverhalts ist es daher notwendig, einen exakten Schätzwert für den unbekannten Vektor  $\theta_{i_2}$  durch geeignete Maßnahmen zu erhalten.

Die adaptive Regelung in diesem Abschnitt nutzt daher das Immersions- und Invarianzprinzip nach Astolfi, Karagiannis und Ortega [7] (engl. *Immersion & Invariance*, kurz *I&I approach*), da



mit diesem Ansatz weitreichende Möglichkeiten zur Verfügung stehen, um einen exakten Schätzwert für  $\theta_{i_2}$  zu bestimmen. Zur kurzen Einführung der dahinter stehenden Idee, wird die Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M}_i = \left\{ (z_i, y_i, \hat{\theta}_{i_1}, \hat{\theta}_{i_2}) \in \mathbb{R}^{n_i + p_{i_1} + p_{i_2}} \mid \hat{\theta}_{i_j} - \theta_{i_j} + \beta_{i_j}(z_i, y_i) = 0, j \in \{1, 2\} \right\}$$

definiert, worin die Funktionen  $\beta_{i_1}(z_i, y_i)$  und  $\beta_{i_2}(z_i, y_i)$  zusätzliche Freiheitsgrade darstellen, um die vorgenannte Problemstellung der Bestimmung eines exakten Schätzwerts zu lösen. Darüber hinaus folgt für alle Agenten zusammen mit der Zustandsrückführung

$$u_i = a_i^{-1}(z_i, y_i) (-b_i(z_i, y_i) + w_i) \quad (4.51)$$

auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_i$  die Darstellung

$$\dot{z}_i = q_i(z_i, 0) + p_i(z_i, y_i)y_i + p_{\theta_i}(z_i, y_i)(\hat{\theta}_{i_1} + \beta_{i_1}), \quad (4.52a)$$

$$\dot{y}_i = b_{\theta_i}(z_i, y_i)(\hat{\theta}_{i_2} + \beta_{i_2}) + w_i, \quad (4.52b)$$

$$\forall i = 1, \dots, N.$$

Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_i$  die Dynamik der Agenten vollständig bekannt ist und daher keine parametrischen Unsicherheiten mehr aufweist. Daraus lässt sich schließen, dass durch den adaptiven Reglerentwurf die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_i$  die Invarianzeigenschaft als auch die Eigenschaft der Attraktivität aufweisen muss, um einen exakten Schätzwert für  $\theta_{i_2}$  zu bestimmen. Gelingt dies, dann führt das Regelgesetz

$$w_i = -b_{\theta_i}(z_i, y_i)(\hat{\theta}_{i_2} + \beta_{i_2}) - \left( \frac{\partial W_i}{\partial z_i} p_i(z_i, y_i) \right)^T - \psi_i \frac{\partial W_i}{\partial z_i} p_{\theta_i}(z_i, y_i)(\hat{\theta}_{i_1} + \beta_{i_1}) + v_i, \quad (4.53)$$

worin  $\psi_i$  so gewählt ist, dass  $\psi_i^T y_i = 1$  für  $|y_i| > 0$  erfüllt ist, zur Stabilisierung der Ruhelage  $(z_i, y_i) = (0, 0)$  der Agenten, wie das nachfolgende Lemma zeigt.

**Lemma 4.19.** *Betrachtet wird das dynamische System (4.52) auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_i$  zusammen mit dem Regelgesetz (4.53), wobei darin  $v_i = 0$  angenommen wird. Ist das Zustandssystem global schwach minimalphasig, dann ist die Ruhelage  $(z_i, y_i) = (0, 0)$  stabil im Sinne von Lyapunov.*

*Beweis.* Da das System (4.52) als global schwach minimalphasig angenommen wurde, existiert aufgrund von Definition 4.15 eine positiv definite, radial unbeschränkte  $C^2$ -Funktion  $W_i(z_i)$ , so dass  $\frac{\partial W_i}{\partial z_i} q_i(z_i, 0) \leq 0$  gilt. Wird die Lyapunov Funktion  $V_i(z_i, y_i) = W_i(z_i) + \frac{1}{2} y_i^T y_i$  angesetzt, so folgt aus der zeitlichen Ableitung der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \frac{\partial W_i}{\partial z_i} \left( q_i(z_i, 0) + p_i(z_i, y_i)y_i + p_{\theta_i}(z_i, y_i)(\hat{\theta}_{i_1} + \beta_{i_1}) \right) \\ &\quad + y_i^T \left( b_{\theta_i}(z_i, y_i)(\hat{\theta}_{i_2} + \beta_{i_2}) + w_i \right). \end{aligned}$$

Wird darin  $w_i$  gemäß (4.53) gewählt und in die vorstehende Gleichung eingesetzt, folgt daraus  $\dot{V}_i = \frac{\partial W_i}{\partial z_i} q_i(z_i, 0) \leq 0$ , woraus die Aussage des Lemmas folgt.  $\square$

An dieser Stelle ist zu betonen, dass die Aussage von Lemma 4.19 nur Gültigkeit auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_i$  besitzt. Dies verdeutlicht, dass  $\mathcal{M}_i$  die Eigenschaften der Invarianz und Attraktivität aufweisen muss, um das Regelgesetz (4.53) anwenden zu können. Um diese Eigenschaften zu erzeugen, lassen sich zunächst Fehlerkoordinaten bezüglich  $\mathcal{M}_i$  gemäß

$$\epsilon_{i_1} = \hat{\theta}_{i_1} - \theta_{i_1} + \beta_{i_1}, \quad (4.54a)$$

$$\epsilon_{i_2} = \hat{\theta}_{i_2} - \theta_{i_2} + \beta_{i_2} \quad (4.54b)$$

definieren. Durch zeitliche Ableitung von (4.54) entstehen die Differentialgleichungen für die Fehlerkoordinaten aus

$$\dot{\epsilon}_{i_1} = \dot{\hat{\theta}}_{i_1} + \frac{\partial \beta_{i_1}}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial \beta_{i_1}}{\partial y_i} \dot{y}_i,$$

$$\dot{\epsilon}_{i_2} = \dot{\hat{\theta}}_{i_2} + \frac{\partial \beta_{i_2}}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial \beta_{i_2}}{\partial y_i} \dot{y}_i,$$

worin die Ableitungen der Vektoren  $\hat{\theta}_{i_1}$  und  $\hat{\theta}_{i_2}$  erscheinen. Zur Festlegung der Dynamik von  $\dot{\hat{\theta}}_{i_1}$  und  $\dot{\hat{\theta}}_{i_2}$  ergibt sich im Hinblick auf die Dynamik jedes Agenten (4.47) die intuitive Wahl gemäß

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{i_1} = & -\frac{\partial \beta_{i_1}}{\partial z_i} \left[ q_i(z_i, 0) + p_i(z_i, y_i) y_i + p_{\theta_i}(z_i, y_i) (\hat{\theta}_{i_1} + \beta_{i_1}) \right] \\ & - \frac{\partial \beta_{i_1}}{\partial y_i} \left[ b_{\theta_i}(z_i, y_i) (\hat{\theta}_{i_2} + \beta_{i_2}) + w_i \right], \end{aligned} \quad (4.55a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{i_2} = & -\frac{\partial \beta_{i_2}}{\partial z_i} \left[ q_i(z_i, 0) + p_i(z_i, y_i) y_i + p_{\theta_i}(z_i, y_i) (\hat{\theta}_{i_1} + \beta_{i_1}) \right] \\ & - \frac{\partial \beta_{i_2}}{\partial y_i} \left[ b_{\theta_i}(z_i, y_i) (\hat{\theta}_{i_2} + \beta_{i_2}) + w_i \right], \end{aligned} \quad (4.55b)$$

woraus für die Dynamik der Fehlerkoordinaten

$$\dot{\epsilon}_{i_1} = -\frac{\partial \beta_{i_1}}{\partial z_i} p_{\theta_i}(z_i, y_i) \epsilon_{i_1} - \frac{\partial \beta_{i_1}}{\partial y_i} b_{\theta_i}(z_i, y_i) \epsilon_{i_2}, \quad (4.56a)$$

$$\dot{\epsilon}_{i_2} = -\frac{\partial \beta_{i_2}}{\partial z_i} p_{\theta_i}(z_i, y_i) \epsilon_{i_1} - \frac{\partial \beta_{i_2}}{\partial y_i} b_{\theta_i}(z_i, y_i) \epsilon_{i_2} \quad (4.56b)$$

folgt. Anhand dieser Darstellung ist verdeutlicht, dass die Stabilität der Fehlerkoordinaten (4.54) entscheidend von der Wahl der Funktionen  $\beta_{i_1}$  und  $\beta_{i_2}$  abhängt, was die Freiheitsgrade des Verfahrens darstellt. Mit Ausnahme von Spezialfällen entsteht hiermit die Schwierigkeit, dass die geeignete Wahl der Funktionen  $\beta_{i_1}$  und  $\beta_{i_2}$  auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung führt, was im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht wird. Nichtsdestotrotz ergibt sich im Hinblick auf den Begriff der *I&I Stabilisierbarkeit* (vgl. Theorem 3.1 und Theorem 3.2 in [7]) das nachfolgende, nützliche Lemma für den Fall, dass geeignete Funktionen  $\beta_{i_1}$  und  $\beta_{i_2}$  bestimmt wurden.

**Lemma 4.20.** *Betrachtet wird das dynamische System (4.47) zusammen mit den Regelgesetzen (4.51) und (4.53) sowie der Dynamik der Fehlerkoordinaten gemäß (4.55). Zudem wird  $v_i = 0$  gewählt. Die Stabilisierung der Ruhelage  $(z_i, y_i) = (0, 0)$  ist möglich, wenn die folgende Annahme erfüllt ist:*

(B1) Es existieren Funktionen  $\beta_{i_1} : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{p_{i_1}}$  und  $\beta_{i_2} : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{p_{i_2}}$ , so dass alle Trajektorien des Systems (4.56) und

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= q_i(z_i, 0) + p_i(z_i, y_i)y_i + p_{\theta_i}(z_i, y_i)\theta_{i_1}, \\ \dot{y}_i &= b_{\theta_i}(z_i, y_i) + w_i(z_i, y_i, \theta_{i_1} + \epsilon_{i_1}, \theta_{i_2} + \epsilon_{i_2})\end{aligned}\quad (4.57)$$

beschränkt sind und die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [w_i(z_i, y_i, \theta_{i_1} + \epsilon_{i_1}, \theta_{i_2} + \epsilon_{i_2}) - w_i(z_i, y_i, \theta_{i_1}, \theta_{i_2})] = 0 \quad (4.58)$$

erfüllen.

*Beweis.* Nulladdition des Regelgesetzes  $w_i(z_i, y_i, \theta_{i_1}, \theta_{i_2})$  in Gleichung (4.57) zusammen mit (4.58) ermöglicht Lemma 4.19 anzuwenden. Mit Annahme (B1) lässt sich daher schließen, dass alle Trajektorien des geschlossenen Regelkreises (4.47), (4.51), (4.53) und (4.55) beschränkt sind.  $\square$

Lemma 4.20 lässt sich dahingehend interpretieren, dass sich der geschlossene Regelkreis stabilisieren lässt, falls es gelingt, asymptotisch das Regelgesetz  $w_i(z_i, y_i, \theta_{i_1}, \theta_{i_2})$  zu verwenden, was (4.58) und damit einer exakten Schätzung der unsicheren Parameter entspricht. Damit ergibt sich eine Art Separationsprinzip im Hinblick auf den adaptiven Reglerentwurf, da sich der Entwurf der Funktionen  $\beta_{i_1}$  und  $\beta_{i_2}$  getrennt von der eigentlichen stabilisierenden Rückführung  $w_i(z_i, y_i, \theta_{i_1}, \theta_{i_2})$  durchführen lässt. Es ist lediglich zu fordern, dass die unbekannten Parameter asymptotisch bekannt sind. Mit den vorstehenden Betrachtungen gelingt es im Folgenden, die synchronisierende Regelung zu bestimmen, wobei zunächst der Fall der Kommunikation ohne Verzögerungen diskutiert wird.

### 4.3.4 Ausgangssynchronisierung

#### Ausgangssynchronisierung ohne Verzögerungen

Der auf dem Immersions- und Invarianzprinzip basierende Ansatz ermöglicht, eine adaptive Regelung zur Kompensation parametrischer Unsicherheiten zu entwerfen, sofern geeignete Funktionen  $\beta_{i_1}$  und  $\beta_{i_2}$  ermittelbar sind. Dieser Ansatz wird im Folgenden mit der synchronisierenden Regelung in Satz 4.18 kombiniert. Wie der folgende Satz zeigt, gelingt durch diese Kombination die Ausgangssynchronisierung der Agenten für den Fall, dass das Kommunikationsnetzwerk nicht mit Verzögerungen behaftet ist.

**Satz 4.21.** *Betrachtet werden  $N$  Agenten gemäß (4.47) zusammen mit den Regelgesetzen (4.51) und (4.53) sowie der Dynamik der Fehlerkoordinaten gemäß (4.55). Darüber hinaus sind die Agenten bezüglich  $v_i$  gemäß des Regelgesetzes (4.50) gekoppelt. Es wird zudem angenommen, dass die Funktionen  $\beta_{i_1}$  und  $\beta_{i_2}$  so gewählt sind, dass die Annahme (B1) in Lemma 4.20 erfüllt ist. Sind die Agenten global schwach minimalphasig, der Kommunikationsgraph verzögerungsfrei, d.h. es ist  $T_{ij} = 0$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , sowie stark verbunden, dann ist das gesamte Multi-Agenten System stabil im Sinne von Lyapunov und alle Ausgänge synchronisieren sich im Sinne von (2.14).*

*Beweis.* Da der Kommunikationsgraph stark verbunden ist, existiert aufgrund Lemma 2.5 ein Vektor  $\gamma$  mit ausschließlich positiven Einträgen, so dass  $\gamma^T L_G = 0$  gilt. Wird für jeden Agenten der erweiterte Zustandsvektor

$$x_{ei} = \begin{bmatrix} z_i^T & y_i^T & \hat{\theta}_{i1}^T & \hat{\theta}_{i1}^T \end{bmatrix}^T$$

definiert, dann folgt der Zustandsvektor des gesamten Multi-Agenten Systems aus

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{e1}^T & \dots & x_{eN}^T \end{bmatrix}^T.$$

Da die Trajektorien der Fehlerkoordinaten (4.56) als beschränkt angenommen wurden, existiert eine Lyapunov Funktion  $W_{\epsilon_i}(\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, z_i, y_i)$  mit der Eigenschaft, dass  $\dot{W}_{\epsilon_i} \leq 0$  gilt. Als Lyapunov Funktion für das Gesamtsystem wird die gewichtete, positiv definite Funktion

$$V(x_e) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \left( W_i + W_{\epsilon_i} + \frac{1}{2} y_i^T y_i \right).$$

untersucht. Durch Berechnung der Zeitableitung entlang der Lösungstrajektorien des geschlossenen Regelkreises folgt daher

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \left( \frac{\partial W_i}{\partial z_i} q_i(z_i, 0) + \dot{W}_{\epsilon_i} + y_i^T v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \left( \frac{\partial W_i}{\partial z_i} q_i(z_i, 0) + \dot{W}_{\epsilon_i} + \sum_{j=1}^N a_{gij} y_i^T (y_j - y_i) \right). \end{aligned}$$

An dieser Stelle lässt sich die Argumentation des Beweises in [17, Theorem 2.1] nutzen. Es ist

$$y_i^T (y_j - y_i) = \frac{1}{2} \left( -(y_j - y_i)^T (y_j - y_i) - (y_i^T y_i - y_j^T y_j) \right),$$

was den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \left( \frac{\partial W_i}{\partial z_i} q_i(z_i, 0) + \dot{W}_{\epsilon_i}(\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}) + \sum_{j=1}^N l_{gij} y_i^T (y_j - y_i) \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma_i \sum_{j=1}^N a_{gij} (y_j - y_i)^T (y_j - y_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma_i \sum_{j=1}^N a_{gij} (y_i^T y_i - y_j^T y_j) \\ &\leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma_i \sum_{j=1}^N a_{gij} (y_j - y_i)^T (y_j - y_i) - \frac{1}{2} \gamma^T L_G (Y^T Y) \\ &\leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma_i \sum_{j=1}^N a_{gij} (y_j - y_i)^T (y_j - y_i) \leq 0 \end{aligned}$$

zur Folge hat. Darin ist der Vektor  $Y^T Y$  durch

$$Y^T Y = \begin{bmatrix} y_1^T y_1 & \dots & y_N^T y_N \end{bmatrix}^T$$

gegeben, und es ist  $\gamma^T L_G(Y^T Y) = 0$  aufgrund von Lemma 2.5. Damit ist die Zeitlösung von (4.47) und (4.55) zusammen mit den Regelgesetzen (4.51), (4.53) und (4.50) stabil im Sinne von Lyapunov, und alle Signale sind beschränkt. Werden nun die Lösungstrajektorien aus der Menge

$$\mathcal{V} = \left\{ (z_i, y_i, \hat{\theta}_{i1}, \hat{\theta}_{i2}) \in \mathbb{R}^{n_i + p_{i1} + p_{i2}} \mid \dot{V} = 0 \right\}$$

betrachtet, sind diese durch

$$\frac{\partial W_i}{\partial z_i} q_i(z_i, 0) = 0, \quad \dot{W}_{\epsilon_i} = 0, \quad (y_j - y_i)^T (y_j - y_i) = 0$$

charakterisiert. Mittels des Invarianzprinzips von Lasalle [38] lässt sich daraus schließen, dass alle beschränkten Lösungen des geschlossenen Regelkreises in die größte positiv invariante Teilmenge der Menge  $\mathcal{V}$  streben. Aufgrund der Eigenschaft, dass der zugrunde liegende Graph stark verbunden ist, wird die Ausgangssynchronisierung der Agenten impliziert.  $\square$

### Ausgangssynchronisierung bei Verzögerungen

Die Erweiterung von Satz 4.21 auf den Fall, dass die Kommunikation der Agenten unter Verzögerungen erfolgt, lässt sich durch eine Modifikation der Lyapunov Funktion ebenfalls erreichen, wie der nachfolgende Satz zeigt.

**Satz 4.22.** *Betrachtet werden  $N$  Agenten gemäß (4.47) zusammen mit den Regelgesetzen (4.51) und (4.53) sowie der Dynamik der Fehlerkoordinaten gemäß (4.55). Darüber hinaus sind die Agenten bezüglich  $v_i$  gemäß des Regelgesetzes (4.50) gekoppelt. Es wird zudem angenommen, dass die Funktionen  $\beta_{i1}$  und  $\beta_{i2}$  so gewählt sind, dass die Annahme (B1) in Lemma 4.20 erfüllt ist. Sind die Agenten global schwach minimalphasig und der Kommunikationsgraph stark verbunden, dann ist das gesamte Multi-Agenten System stabil im Sinne von Lyapunov und alle Ausgänge synchronisieren sich im Sinne von (4.49).*

*Beweis.* Der Beweis wird an dieser Stelle nur knapp skizziert, da sich die Argumentation in Anlehnung an den Beweis von Satz 4.21 mit dem Unterschied in der Wahl der Lyapunov Funktion ergibt. Aufgrund von Lemma 4.21 lässt sich ebenfalls der positive Vektor  $\gamma$  zur Gewichtung der einzelnen Lyapunov Funktionen der Agenten nutzen, was auf die gewichtete, positiv definite Funktion

$$V(x_e) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \left( W_i + W_{\epsilon_i} + \frac{1}{2} y_i^T y_i \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{2} \sum_{j=1}^N a_{gij} \int_{t-T_{ji}}^t y_j^T(s) y_j(s) ds$$

führt, die ein Kandidat für eine Lyapunov Funktion des gesamten Multi-Agenten Systems ist. Die Berechnung der zeitlichen Ableitung entlang der Lösungstrajektorien des geregelten Systems

führt dann auf

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \left( \frac{\partial W_i}{\partial z_i} q_i(z_i, 0) + \dot{W}_{\epsilon_i}(\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_i a_{Gij} y_i^T (y_j(t - T_{ji}) - y_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{2} \sum_{j=1}^N a_{Gij} (y_j^T y_j - y_j^T(t - T_{ji}) y_j(t - T_{ji})).\end{aligned}$$

Auch an dieser Stelle ist es möglich, die Argumentation aus den Beweisen in [17, Theorem 3.1, Theorem 3.2] zu übernehmen. Mit dem Zusammenhang

$$\begin{aligned}&2y_i^T(y_j(t - T_{ji}) - y_i) + (y_j^T y_j - y_j^T(t - T_{ji}) y_j(t - T_{ji})) \\ &= -(y_j(t - T_{ji}) - y_i)^T (y_j(t - T_{ji}) - y_i) - (y_i^T y_i - y_j^T y_j)\end{aligned}$$

folgt daher

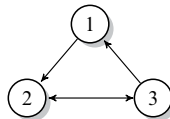
$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq - \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{2} \sum_{j=1}^N (a_{Gij} (y_j(t - T_{ji}) - y_i)^T (y_j(t - T_{ji}) - y_i) + a_{Gij} (y_i^T y_i - y_j^T y_j)) \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{2} \sum_{j=1}^N a_{Gij} \|y_j(t - T_{ji}) - y_i\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Ausgehend von [17, Theorem 3.1] lässt sich daher schließen, dass das geregelte Multi-Agenten System (4.47), (4.51), (4.53) und (4.55) stabil im Sinne von Lyapunov ist, und sich die Ausgänge aller Agenten  $y_i$  im Sinne von (4.49) synchronisieren.  $\square$

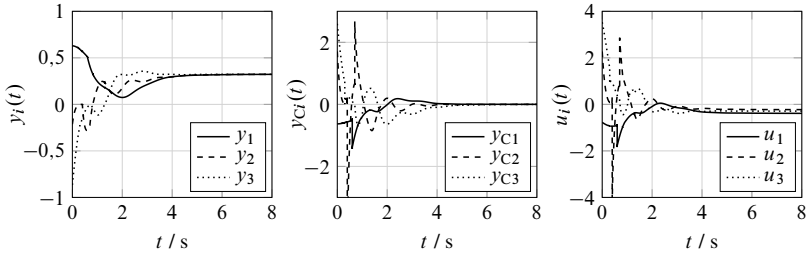
## 4.4 Entwurfsbeispiel

Zur Validierung und Veranschaulichung der theoretischen Ergebnisse aus Abschnitt 4.3 wird in diesem Abschnitt ein akademisches Beispiel betrachtet und die entsprechenden Funktionen bestimmt. Hierzu wird das Beispiel aus [17] modifiziert und um parametrische Unsicherheiten ergänzt, was auf die Darstellung der Agenten gemäß

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= -z_i + (1 + \theta_{i_1}) z_i^2 y_i, \\ \dot{y}_i &= (1 + \theta_{i_2}) y_i + u_i\end{aligned}$$



**Bild 4.4:** Kommunikationsgraph für das akademische Simulationsbeispiel



**Bild 4.5:** Simulationsergebnisse zur verzögerten Ausgangssynchronisierung von drei Agenten basierend auf der adaptiven, synchronisierenden Regelung

führt. Zu beachten ist dabei, dass die Agenten bereits in der Normalform (4.45) vorliegen, wenn  $\theta_{i_1} = \theta_{i_2} = 0$  erfüllt ist. Darüber hinaus lässt sich mittels der Lyapunov Funktion  $W_i = \frac{1}{2}z_i^2$  durch Bestimmung der zeitlichen Ableitungen in einfacher Weise zeigen, dass die interne Dynamik global asymptotisch stabil und damit der Agent global minimalphasig ist.

Für Simulationszwecke werden im Folgenden  $N = 3$  Agenten zugrunde gelegt und das in Bild 4.4 dargestellte, stark verbundene Kommunikationsnetzwerk genutzt. Die Elemente der Laplace-matrix sind dabei zufällig gewählt und ergeben sich für die numerische Simulation aus

$$L_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 8 & -5 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Der positive Vektor  $\gamma$  ergibt sich dann aus einer Eigenvektorberechnung und folgt ausgehend von der vorstehenden Laplacematrix zu

$$\gamma^T = [0,7252 \quad 0,2417 \quad 0,6447].$$

Die für die numerische Simulation angenommenen Zeitverzögerungen resultieren ebenfalls aus einer zufälligen Wahl und sind für die Simulation gemäß  $T_{31} = 0,6$  s,  $T_{12} = 0,7$  s,  $T_{32} = 0,4$  s und  $T_{23} = 0,3$  s gewählt. Die Funktionen  $\beta_{i_1}$  und  $\beta_{i_2}$  folgen aus  $\beta_{i_1} = -\lambda_{i_1}(y_i + \beta_z) + \lambda_{i_2}\beta_y$  und  $\beta_{i_2} = \lambda_{i_2}\beta_y$ , worin

$$\beta_z = \begin{cases} z_i^{-1}, & |z_i| > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\beta_y = \begin{cases} \text{sign}(y_i) \log(|y_i|), & |y_i| > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Die Parameter  $\lambda_{i_1}$  und  $\lambda_{i_2}$  stellen dabei zusätzliche Einstellparameter dar und ermöglichen Einfluss auf die Konvergenz des Schätzfehlers zu nehmen. In diesem Beispiel ist die Wahl  $\lambda_{i_1} = 0,01$  und  $\lambda_{i_2} = 1$  für alle Agenten erfolgt. Darüber hinaus lässt sich mit der Lyapunov Funktion  $W_{\epsilon_i} = \frac{1}{2}(\epsilon_{i_1} - \epsilon_{i_2})^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{i_2}^2$  die Stabilität des Fehlersystems (4.56) für alle Agenten nachweisen.

In Bild 4.5 sind die numerischen Simulationsergebnisse dargestellt. Von der linken zur rechten Abbildung ist der Verlauf der Ausgangsgrößen, der Verlauf der kommunizierten Variablen  $y_{Ci} = \sum_{j=1}^3 l_{gij} (y_j(t - T_{ji}) - y_i)$  sowie der Verlauf der Stellgrößen  $u_i$  aller Agenten dargestellt. Mit Blick auf den Zeitverlauf der Ausgänge als auch auf die kommunizierten Variablen lässt sich festhalten, dass sich alle Ausgänge synchronisieren. Als synchrone Trajektorie ergibt sich dabei ein konstanter Wert, was somit gleichbedeutend mit dem Konsens der Agenten ist und die theoretischen Ergebnisse in anschaulicher Weise darstellt.

## 4.5 Kurzzusammenfassung

Mit Kapitel 4 sind ausgehend von der Annahme, dass jeder Agent über Absolutinformation zum Entwurf einer unterlagerten Regelung verfügt, Möglichkeiten aufgezeigt, die den Entwurf heterogener Multi-Agenten Systeme erlauben. Hierbei ist die zugrunde liegende Idee, eine identische synchronisierende Regelung für die Agenten zu nutzen, die sich aufgrund der unterlagerten Regelung gegenüber dem Netzwerk als homogene Agenten darstellen. Ausgangspunkt der synchronisierenden Regelungen bilden dabei ein aus der Literatur entnommener LQR-Entwurf beziehungsweise eine Erweiterung der Methodik der Eigenwertbereichsvorgabe, da sich die Synchronisierung homogener Agenten in ein simultanes Stabilisierungsproblem überführen lässt.

Auf Grundlage der parametrischen Entwurfsmethodik aus Kapitel 3 ist es gelungen, die unterlagerten Regelungen für lineare heterogene Multi-Agenten Systeme sowohl mittels einer Entkopplungs- als auch einer Verkopplungsregelung anzugeben. Darüber hinaus ermöglicht die Übertragung der Idee dieses Ansatzes basierend auf Absolutinformation zusätzlich eine spezielle Systemklasse nichtlinearer Agenten zu entwerfen. Darin ergibt sich die Heterogenität des Multi-Agenten Systems aus den als konstant angenommenen Unsicherheiten der Agentendynamik, wobei für die nominale Dynamik der Agenten Vektorrelativgrad eins sowie eine stabile Nulldynamik angenommen wurde. Mittels einer adaptiven Regelung gelingt es, die Unsicherheiten zu kompensieren und ein auf der Passivität basierender Regler führt zum Konsens der Agenten. Damit sind in Kapitel 4 nutzbringende Entwurfsmethodiken entwickelt worden, die sowohl auf homogene als auch heterogene agentenbasierte dynamische Systeme anwendbar sind.



## 5 Synchronisierung ausschließlich basierend auf Relativinformation

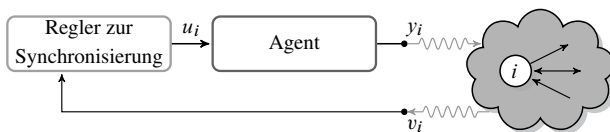
Die Methodik zur Vorgabe von Eigenwertbereichen aus Abschnitt 3.3.1 bildet zusammen mit der Systembeschreibung eines heterogenen Multi-Agenten Systems (2.12) den Ausgangspunkt für die Betrachtungen in den nachfolgenden Abschnitten. In Abgrenzung zum vorangegangenen Kapitel 4 besteht hierbei, wie in Bild 5.1 angedeutet, fortan nicht mehr die Möglichkeit, Absolutinformation für den Regelungsentwurf jedes Agenten zu verwenden. Die Ergebnisse aus diesem Kapitel können entsprechend als Erweiterung der Betrachtungen in Abschnitt 4.1 auf heterogene Agenten gesehen werden, da dort zur Synchronisierung homogener Multi-Agenten Systeme ebenfalls nicht Absolutinformation zur Bestimmung einer synchronisierenden Zustands- beziehungsweise Ausgangsrückführung genutzt wurde. Allerdings wird sich zeigen, dass im heterogenen Fall ein Entwurf der Regelgesetze der Agenten im Allgemeinen nicht mehr auf ein simultanes Stabilisierungsproblem zurückgeführt werden kann. Vielmehr ergibt sich dabei ein dezentrales Stabilisierungsproblem, welches allerdings mit der Methodik aus Abschnitt 3.3.1 lösbar ist.

Zunächst ist daher Gegenstand der Betrachtungen, welche strukturellen Maßnahmen für die Regelungen der einzelnen Agenten vorgenommen werden müssen, um Synchronisierung zu garantieren. Hierbei ergeben sich Überschneidungen zu den Betrachtungen in Abschnitt 4.2.1, da die notwendigen Bedingungen zur Synchronisierung selbstverständlich erfüllt sein müssen. Daraus lassen sich durch eine Betrachtung des Gesamtsystems notwendige und hinreichende Bedingungen zur Synchronisierung basierend auf der angegebenen Regelungsstruktur ableiten, die auf das eingangs erwähnte dezentrale Stabilisierungsproblem führen. Basierend auf der Methodik zur Vorgabe von Eigenwertbereichen wird anschließend diskutiert, wie sich konstruktiv die freien Parameter der verteilten Regler zur asymptotischen Synchronisierung bestimmen lassen und welche Erweiterungsmöglichkeiten daraus resultieren. Die folgenden Ergebnisse sind ebenfalls den Publikationen [110, 113] zu entnehmen.

Betrachtet werden infolgedessen heterogene Multi-Agenten Systeme nach (2.12) und damit  $N$  lineare steuer- und beobachtbare Agenten

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad (5.1a)$$

$$y_i = C_i x_i \quad (5.1b)$$



**Bild 5.1:** Strukturbild zur Synchronisierung lediglich mit Relativinformation

mit  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^p$  und  $m_i \geq p$  sowie mit dem Anfangswert  $x_i(t_0) = x_{i0}$ . Die Matrizen  $A_i$ ,  $B_i$  und  $C_i$  seien von passender Dimension, wobei darauf hingewiesen wird, dass lediglich die Ausgangsdimension der Agenten als identisch vorausgesetzt wird. Diese Voraussetzung resultiert aus praktischen Gesichtspunkten, da Synchronisierung physikalisch gleichartiger Größen in den meisten Anwendungen von Bedeutung ist. Durch die Kommunikation der Agenten untereinander erfasst jeder Agent (5.1) die relativen Messgrößen

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^N l_{Gij} y_j(t). \quad (5.2)$$

Zusammenfassend ergibt sich die zu lösende Problemstellung in diesem Kapitel wie folgt: Betrachtet wird ein heterogenes Multi-Agenten System bestehend aus  $N$  Agenten gemäß (5.1). Als minimale Anforderung an das Kommunikationsnetzwerk wird angenommen, dass der Graph der Laplacematrix  $L_G$  einen Spannbaum enthält. Ausgehend von den relativen Messgrößen jedes Agenten (5.2) soll ein dynamisches Regelgesetz für jeden Agenten bestimmt werden, so dass sich alle Ausgänge der Agenten  $y_i$  im Sinne der Definition (2.14) synchronisieren. Darüber hinaus ist ein konstruktives Verfahren anzugeben, welches die geeignete Bestimmung der freien Reglerparameter ermöglicht.

## 5.1 Vorüberlegungen zur Regelungsstruktur

Zur Bestimmung notwendiger und hinreichender Bedingungen hinsichtlich der eingangs eingeführten Problemstellung dieses Kapitels sollen zunächst einige Vorüberlegungen zur verwendeten Regelungsstruktur der Agenten angestellt werden. Hierzu wird in Ergänzung zu den in Satz 4.6 eingeführten notwendigen Bedingungen der Begriff der *System-Schnittmenge* (engl. *system intersection*, vgl. [58]) eingeführt. Betrachtet werden dabei autonome Zustandssysteme gemäß

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i &= A_i x_i, & x_i(t_0) = x_{i0}, \\ y_i &= C_i x_i, \end{cases}$$

wobei  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^p$  ist, und dem *virtuellen Referenzsystem*

$$\Sigma_S : \begin{cases} \dot{x}_S &= A_S x_S, & x_S(t_0) = x_{S0}, \\ y_S &= C_S x_S \end{cases} \quad (5.3)$$

mit  $x_S \in \mathbb{R}^{n_S}$  sowie  $y_S \in \mathbb{R}^p$ . Darüber hinaus gilt  $n_S \leq n_i$ , und es wird angenommen, dass die Eigenwerte der Matrix  $A_S$  zur Vermeidung trivialer Synchronisierung sämtlich nicht-negative Realteile aufweisen. D.h. es ist  $\sigma(A_S) \in \mathbb{C}_0^+$ . Dies führt zur Definition der System-Schnittmenge:

**Definition 5.1** ([58]). *Die Zustandssysteme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  haben die System-Schnittmenge  $\Sigma_S$  (symbolisch  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_S$ ), wenn für jeden Anfangswert  $x_{S0} \in \mathbb{R}^{n_S}$  ebenfalls Anfangswerte  $x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}$  und  $x_{20} \in \mathbb{R}^{n_2}$  existieren, so dass die Zeitverläufe aller drei Ausgänge identisch sind, d.h.  $y_1(t) = y_2(t) = y_S(t)$  für  $t \geq t_0$  gilt.*

Mit dem Begriff der System-Schnittmenge lässt sich nach Lunze (vgl. [58, Theorem 2]) die synchrone Zeitleösung  $y_S(t)$  aller  $N$  Agenten charakterisieren. Diese ergibt sich als gemeinsame Schnittmenge über alle Agenten. Zur Vermeidung der Synchronisierung auf die triviale Trajektorie  $y_S(t) \equiv 0$  ist daher  $\Sigma_S = \cap_{i=1}^N \Sigma_i \neq \emptyset$  zu fordern. Der Fall, dass die Agenten keine gemeinsame Schnittmenge haben, d.h. es gilt  $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ , ist ebenfalls im Hinblick auf die Untersuchungen zur Beobachtbarkeit heterogener Agenten in Lemma 2.11 interpretierbar. Sind die Agenten bezüglich der relativen Ausgänge beobachtbar, so ist die Stabilisierung des Systems möglich, was der synchronen Trajektorie  $y_S(t) = 0$  entspricht, bzw. die gemeinsame Schnittmenge der Agenten ist dann die leere Menge. Ist das Gesamtsystem allerdings bezüglich der relativen Ausgänge unbeobachtbar, dann existiert eine nicht-leere gemeinsame Schnittmenge der Agenten, die sich aus den unbeobachtbaren Eigenbewegungen des Systems ergibt und damit die nicht-triviale, synchrone Trajektorie festlegt. Die Überprüfung der Beobachtbarkeit des Gesamtsystems stellt damit eine konstruktive Möglichkeit zur Überprüfung der System-Schnittmenge dar.

Wird darüber hinaus gefordert, dass sich die Agenten asymptotisch auf eine vorab festgelegte Trajektorie synchronisieren, muss diese Trajektorie eine Zeitleösung des virtuellen Referenzsystems (5.3) sein und entsprechend in der System-Schnittmenge der Agenten enthalten sein. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist jeder Agent geeignet dynamisch zu erweitern, was die Einführung unbeobachtbarer Eigenbewegungen in das erweiterte Gesamtsystem notwendig macht. Hierzu kann auf die Ergebnisse aus Lemma 4.8 zurückgegriffen werden, was nachfolgend diskutiert wird. Es wird zur Vereinfachung der Diskussion zunächst davon ausgegangen, dass die System-Schnittmenge der Agenten (5.1) die leere Menge ist, dann ist es nach Lemma 4.8 unter den Annahmen, dass der Agent (5.1) rechts-invertierbar ist, die Nullstellen von (5.1) nicht mit den Eigenwerten von  $S$  zusammenfallen sowie das Paar  $(Q, S)$  beobachtbar ist, möglich, für jeden Agenten (5.1) eine Vorsteuerung der Form

$$\dot{w}_i = S w_i, \quad w_i(t_0) = w_{i0}, \quad (5.4a)$$

$$u_i = \Gamma_i w_i, \quad (5.4b)$$

zu entwerfen und Anfangswerte  $w_{i0}$  und  $x_{i0}$  zu bestimmen, so dass  $y_i(t) = Q w_i(t)$  für  $t \geq t_0$  ist. Wird dabei vorausgesetzt, dass  $\sigma(S) \in \mathbb{C}_0^+$  und die Matrizen  $\Pi_i$  und  $\Gamma_i$  Lösungen der *regulator equations*

$$\Pi_i S = A_i \Pi_i + B_i \Gamma_i \quad (5.5a)$$

$$C_i \Pi_i = Q \quad (5.5b)$$

sind, dann hat der Agent (5.1) aber auch einen Schnitt mit dem virtuellen Referenzsystem  $\Sigma_S$ , wenn  $A_S = S$  und  $C_S = Q$  gewählt wird. Dies folgt aus der Kombination von (5.1) mit (5.4) zusammen mit dem Unterraum  $\text{bild} \left( \begin{bmatrix} \Pi_i^T & I_{n_S} \end{bmatrix}^T \right)$ , der bezüglich des autonomen Zustandssystems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \Gamma_i \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_i(t_0) \\ w_i(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i0} \\ w_{i0} \end{bmatrix}$$

invariant ist, was mit (5.5a) aus

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \Gamma_i \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_i \\ I_{n_S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_i \\ I_{n_S} \end{bmatrix} S$$

folgt. Darüber hinaus ist der Unterraum am Ausgang  $e = y_i - Qw_i$  unbeobachtbar, da

$$0 = \begin{bmatrix} C_i & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_i \\ I_{n_s} \end{bmatrix}$$

ist, was  $y_i(t) = Qw_i(t)$  impliziert, wenn  $\begin{bmatrix} x_{i0}^T & w_{i0}^T \end{bmatrix}^T$  aus  $\text{span} \left( \begin{bmatrix} \Pi_i^T & I_{n_s} \end{bmatrix}^T \right)$  gewählt wird. Ausgehend von den vorangegangenen Diskussionen ergibt sich daraus die nachfolgende Regelungsstruktur zur Synchronisierung heterogener Agenten

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & E_{di} \\ 0 & A_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_S \\ B_{di} \end{bmatrix} v_i, \quad (5.6a)$$

$$u_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i & C_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ z_i \end{bmatrix} + D_{di} v_i, \quad (5.6b)$$

worin der Reglerzustand  $w_i$  als Vorsteuerung (5.4) im synchronen Zustand agiert, da in diesem Fall  $v_i = 0$ , und Ausgangssynchronisierung im Sinne von (2.14) äquivalent zu  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}$  ist. Darüber hinaus ist  $K_S$  eine beliebige Ausgangsaufschaltung, die das Synchronisierungsproblem homogener Agenten mit der Dynamik  $\dot{w}_i = Sw_i + u_{w_i}$  und den kommunizierten Ausgängen (5.2) löst. Zur Berechnung bietet sich beispielsweise das LQR-basierte Verfahren aus Abschnitt 4.1.2 an. Zusätzlich wurde der synchronisierende Regler um einen dynamischen Ausgangsregler mit dem Zustand  $z_i$  ergänzt. Dies hat den Hintergrund, dass im Hinblick auf das zu lösende dezentrale Stabilisierungsproblem im Allgemeinen weitere Freiheitsgrade benötigt werden, um asymptotische Synchronisierung zu erreichen. Die Strukturbeschränkung der Regelung drückt sich darin aus, dass die Dynamikmatrix des Reglers eine obere Blockdreiecksmatrix ist sowie die Matrizen  $S$ ,  $K_S$  und  $\Gamma_i$  fest eingestellt sind. Die Matrizen  $A_{di}$ ,  $B_{di}$ ,  $C_{di}$ ,  $D_{di}$  und  $E_{di}$  stellen die freien Reglerparameter dar. In den folgenden Abschnitten wird auf Grundlage der Regelungsstruktur (5.6) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die asymptotische Synchronisierung und ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung geeigneter Reglerparameter hergeleitet.

## 5.2 Synchronisierungsbedingungen

Zur Bestimmung einer Bedingung, die auf asymptotische Synchronisierung führt, ist eine Gesamtsystembetrachtung anzustellen. Um die hierfür benötigte Notation lesbarer zu gestalten, wird der *erweiterte Agent* gemäß

$$\dot{x}_{ei} = A_{ei}x_{ei} + B_{ei}u_i, \quad x_{ei}(t_0) = x_{ei0}, \quad (5.7a)$$

$$y_i = C_{ei}x_{ei} \quad (5.7b)$$

definiert, wobei für den Zustandsvektor  $x_{ei} = [x_i^T \ w_i^T \ z_i^T]^T$  gilt, und die darin enthaltenen Systemmatrizen ausgehend von (5.1) und (5.6) durch

$$A_{ei} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \Gamma_i & B_i C_{di} \\ 0 & S & E_{di} \\ 0 & 0 & A_{di} \end{bmatrix}, \quad (5.8a)$$

$$B_{ei} = \begin{bmatrix} B_i D_{di} \\ K_S \\ B_{di} \end{bmatrix}, \quad (5.8b)$$

$$C_{ei} = [C_i \ 0 \ 0] \quad (5.8c)$$

gegeben sind. Durch Zusammenfassen von  $N$  Agenten nach (5.8) entsteht der Zustandsvektor des Gesamtsystems  $x = [x_{e1}^T, \dots, x_{eN}^T]^T$ . Die Schreibweise  $\tilde{(\cdot)}$  bezeichnet nachfolgend eine Blockdiagonalmatrix, d.h. es ist exemplarisch  $\tilde{A}_e = \text{diag}(A_{e1}, \dots, A_{eN})$ . Dann ergibt sich das gesamte heterogene Multi-Agenten System zu

$$\dot{x} = (\tilde{A}_e + \tilde{B}_e(L_G \otimes I_p)\tilde{C}_e)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.9a)$$

$$v = (L_G \otimes I_p)\tilde{C}_e x, \quad (5.9b)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^n$  und für die Systemordnung  $n = \sum_{i=1}^N (n_i + n_s + n_{z_i})$  mit  $n_{z_i} = \dim(z_i)$  gilt. Um zu zeigen, dass ausgehend von der Wahl der Regelungsstruktur der Agenten in (5.6) stets eine nicht-leere System-Schnittmenge existiert, wird das folgende Lemma formuliert.

**Lemma 5.2.** *Betrachtet werden  $N$  Agenten gemäß (5.1) zusammen mit der Regelung (5.6), woraus das heterogene Multi-Agenten System (5.9) entsteht. Es wird darüber hinaus vorausgesetzt, dass jeder Agent (5.1) die Annahmen in Lemma 4.8 erfüllt, so dass die Gleichungen (5.5)  $\forall i \in \{1 \dots N\}$  lösbar sind. Ist zusätzlich der Graph, der dem Kommunikationsnetzwerk zugrunde liegt, verbunden, dann haben alle Agenten eine nicht-leere System-Schnittmenge, und es existiert ein virtuelles Referenzsystem mit  $A_S = S$  und  $C_S = Q$  sowie Anfangswerte  $x_S(t_0)$  und  $x_{ei}(t_0) \forall i \in \{1 \dots N\}$ , so dass die Zeitlösungen aller Ausgänge (5.1b) identisch sind, d.h.*

$$y_1(t) = \dots = y_N(t) = y_S(t)$$

für  $t \geq t_0$  gilt.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird gezeigt, dass eine Koordinatentransformation für jeden erweiterten Agenten existiert, die die Existenz einer nicht-leeren System-Schnittmenge impliziert. Anschließend wird ein Unterraum des Gesamtsystems angegeben, der invariant unter der Dynamik und unbeobachtbar am Ausgang von (5.9) ist, was die Existenz von Anfangswerten  $x_{ei}(t_0)$  impliziert, so dass  $y_1(t) = \dots = y_N(t)$  für  $t \geq t_0$  ist.

Aufgrund der Voraussetzung, dass jeder Agent (5.1) die Annahmen in Lemma 4.8 erfüllt, sind die Gleichungen (5.5) lösbar  $\forall i \in \{1 \dots N\}$  bezüglich  $\Pi_i$  und  $\Gamma_i$ . Mit der Aussage in [58, Theorem 1] folgt, dass alle Agenten eine nicht-leere System-Schnittmenge besitzen, wenn reguläre

Matrizen  $T_i$  existieren, so dass

$$\begin{aligned} T_i^{-1} A_{ei} T_i &= \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_{pi} \end{bmatrix}, \\ C_{ei} T_i &= [C_s \quad C_{pi}] \end{aligned}$$

$\forall i \in \{1 \dots N\}$  gilt, und worin die Matrizen  $A_{pi}$  und  $C_{pi}$  von passender Dimension sind. Um die Matrizen  $T_i$  zu bestimmen, wird zunächst die Sylvestergleichung  $S \Sigma_i + E_{di} = \Sigma_i A_{di}$  betrachtet, worin die Matrix  $\Sigma_i$  zu bestimmen ist. Ausgehend von [35, Theorem 2.4.4.1] existiert eine eindeutige Lösung  $\Sigma_i$  für beliebige  $E_{di}$  genau dann, wenn die Matrizen  $S$  und  $A_{di}$  keine gemeinsamen Eigenwerte haben. Im Hinblick auf die Regelungsstruktur der Agenten (5.6) und der Eigenschaft, dass im synchronen Zustand der Eingang der Agenten über die Zeitlösung von (5.4) generiert wird, kann daher von  $\sigma(S) \cap \sigma(A_{di}) = \emptyset$  ausgegangen werden. Ist daher  $\Sigma_i$  die eindeutige Lösung der Gleichung  $S \Sigma_i + E_{di} = \Sigma_i A_{di}$  und wird  $T_i$  beziehungsweise  $T_i^{-1}$  für jeden Agenten gemäß

$$\begin{aligned} T_i &= \begin{bmatrix} \Pi_i & I_{n_i} & \Pi_i \Sigma_i \\ I_{n_s} & 0 & \Sigma_i \\ 0 & 0 & I_{n_{zi}} \end{bmatrix}, \\ T_i^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_s} & -\Sigma_i \\ I_{n_i} & -\Pi_i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_{zi}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

definiert, folgt daraus unter der Berücksichtigung von (5.5) und (5.7) mit (5.8) der Zusammenhang

$$\begin{aligned} T_i^{-1} A_{ei} T_i &= \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & A_i & B_i C_{di} + \Pi_i E_{di} \\ 0 & 0 & A_{di} \end{bmatrix}, \\ C_{ei} T_i &= [Q \quad C_i \quad Q \Sigma_i], \end{aligned}$$

woraus durch die Wahl von  $A_s = S$  und  $C_s = Q$  der erste Teil der Argumentation folgt.

Für den zweiten Teil der Argumentation wird der Unterraum

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \text{bild}(\Pi)\} \quad (5.10)$$

betrachtet, worin die Matrix  $\Pi$  durch

$$\Pi = [\Pi_1^T \quad I_{n_s} \quad 0 \quad \dots \quad \Pi_N^T \quad I_{n_s} \quad 0]^T \quad (5.11)$$

definiert ist. Ausgehend von den relativen Messgrößen aller Agenten (5.2) ergibt sich der relative Ausgang des Gesamtsystems (5.9b). Gilt  $x \in \mathcal{S}$ , so folgt für den Ausgang in  $\mathcal{S}$ , dass

$$\begin{aligned} v &= (L_G \otimes I_p) \tilde{C}_e \Pi \\ &= (L_G \otimes I_p) (1_N \otimes [Q \quad 0 \quad 0]) \\ &= (L_G 1_N \otimes [Q \quad 0 \quad 0]) = 0 \end{aligned}$$

ist. D.h. der Unterraum  $\mathcal{S}$  ist Ausgangsnulldend bzw. bezüglich  $v$  unbeobachtbar. Wird darüber hinaus die Dynamik des Gesamtsystems (5.9a) unter Berücksichtigung von (5.8) betrachtet, so folgt der Zusammenhang

$$(\tilde{A}_e + \tilde{B}_e(L_g \otimes I_p)\tilde{C}_e)\Pi = \tilde{A}_e\Pi = \Pi S,$$

was beweist, dass der Unterraum invariant unter der Dynamik von (5.9a) und unbeobachtbar am Ausgang (5.9b) ist. Aufgrund der Annahme, dass der Graph des Kommunikationsnetzwerks verbunden ist, impliziert dies, dass die Zeitverläufe der Ausgänge  $y_i(t)$  identisch für  $t \geq t_0$  sind, wenn  $x(t_0) \in \text{span}(\Pi)$  gewählt wird.  $\square$

**Anmerkung 5.3.** In [58, Theorem 1] ist formuliert, dass die Existenz regulärer Matrizen  $T_i$ , so dass

$$T_i^{-1}A_iT_i = \begin{bmatrix} A_S & 0 \\ 0 & A_{pi} \end{bmatrix}, \quad C_iT_i = [C_S \quad C_{pi}]$$

$\forall i \in \{1 \dots, N\}$  gilt, eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine nicht-leere System-Schnittmenge ist. Wie das Beispiel der beiden Zustandssysteme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} x_1, & \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_2, \\ y_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_1, & y_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_1 \end{aligned}$$

mit beliebigem  $\lambda$  zeigt, ist die Bedingung lediglich hinreichend. Aus der Zeitlösung

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_{1,1}(t_0) + e^{\lambda t} x_{1,2}(t_0), \\ y_2(t) &= x_{2,1}(t_0) + t x_{2,2}(t_0) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten  $x_i(t_0) = [x_{i,1}(t_0) \quad x_{i,2}(t_0)]^T$  folgt, dass beide Ausgänge synchron sind, wenn  $x_{1,1}(t_0) = x_{2,1}(t_0) \neq 0$  und  $x_{2,1}(t_0) = x_{2,2}(t_0) = 0$  erfüllt ist. Damit besitzen beide Zustandssysteme eine nicht-leere System-Schnittmenge mit dem virtuellen Referenzsystem  $\dot{x}_S = 0 \cdot x_S$ ,  $y_S = x_S$  mit  $x_S(t_0) = x_{1,1}(t_0) = x_{2,1}(t_0) \neq 0$  im Sinne von Definition 5.1.

Durch die Wahl der Regelungsstruktur (5.6) ist mit Lemma 5.2 gezeigt, dass die notwendigen Bedingungen in Satz 4.6 zur Synchronisierung heterogener Multi-Agenten Systeme erfüllt sind, bzw. durch die Einführung des Begriffes der System-Schnittmenge alle Agenten einen gemeinsamen Schnitt aufweisen, der die synchrone Trajektorie der Agenten darstellt. Dieser Schnitt lässt sich gleichermaßen als invarianter Unterraum des Gesamtsystems interpretieren, der zudem unbeobachtbar an den relativen Ausgängen ist, was den Zusammenhang zur Beobachtbarkeitsanalyse heterogener Agenten in Satz 2.11 herstellt.

Allerdings lässt sich ausgehend von dieser Diskussion noch nicht auf asymptotische Synchronisierung schließen, da der Unterraum  $\mathcal{S}$  zwar die Invarianz- und Ausgangsnulldendseigenschaft besitzt, nicht aber notwendigerweise *attraktiv* beziehungsweise im Sprachgebrauch der geometrischen Methode *extern stabil* ist [8]. Daher hängt asymptotische Synchronisierung entscheidend

von der Wahl der freien Reglerparameter  $A_{di}$ ,  $B_{di}$ ,  $C_{di}$ ,  $D_{di}$  und  $E_{di}$  in (5.6) ab. Zur Bestimmung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung hinsichtlich asymptotischer Synchronisierung wird daher die Definition eines extern stabilen Unterraums benötigt. Betrachtet wird dabei eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und ein  $A$ -invarianter Unterraum  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  zusammen mit einer Koordinatentransformation  $T$ , so dass

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

gilt. Dabei ist  $\tilde{A}_{11}$  eine  $h \times h$ -Matrix mit  $h = \dim(\mathcal{V})$  [8, Theorem 3.2-1]. Der invariante Unterraum wird als intern (extern) stabil bezeichnet, wenn die Matrix  $\tilde{A}_{11}$  (die Matrix  $\tilde{A}_{22}$ ) Hurwitz ist [8, Definition 3.2-4].

Mit der Struktur der Matrix in (5.12) ist die Zeitlösung eines dynamischen Systems bezüglich eines invarianten Unterraums  $\mathcal{V}$  sehr einfach zu charakterisieren. Durch Überführung in die Blockdreiecksstruktur zerfällt die Dynamik des Unterraums in das Zeitverhalten im Unterraum, was in den entsprechenden Koordinaten der Matrix  $A_{11}$  entspricht. Die Eigenwerte der Matrix  $A_{22}$  bestimmen die Attraktivität von  $\mathcal{V}$ . Ist  $A_{22}$  stabil, dann ist  $\mathcal{V}$  attraktiv, d.h. asymptotisch streben alle Zeitlösungen in den Unterraum  $\mathcal{V}$  hinein. Dieser Sachverhalt ist daher Gegenstand des nachfolgenden Satzes, der die Attraktivität eines Unterraums mit der asymptotischen Synchronisierung in Verbindung bringt.

**Satz 5.4.** *Betrachtet werden  $N$  Agenten gemäß (5.1) zusammen mit der Regelung (5.6), woraus das heterogene Multi-Agenten System (5.9) entsteht. Es wird darüber hinaus vorausgesetzt, dass jeder Agent (5.1) die Annahmen in Lemma 4.8 erfüllt, so dass die Gleichungen (5.5)  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  lösbar sind. Ist der Graph, der dem Kommunikationsnetzwerk zugrunde liegt, verbunden, dann synchronisieren sich die Ausgänge der Agenten asymptotisch im Sinne von (2.14) genau dann, wenn der Unterraum  $\mathcal{S}$  in (5.10) extern stabil ist bzw. attraktiv ist.*

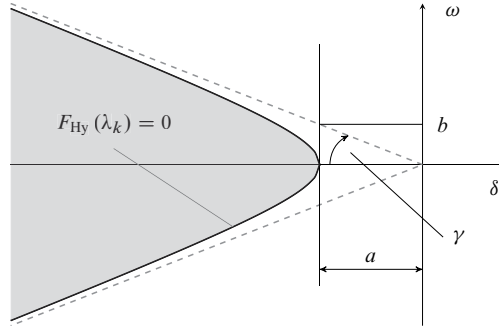
*Beweis.* Zur Bestimmung einer geeigneten Koordinatentransformation, die die Systemmatrix von (5.9a) in die Struktur (5.12) überführt, wird eine Matrix  $T_2$  mit orthogonalen Spalten bestimmt, so dass  $\Pi^T T_2 = 0$  und  $T_2^T T_2 = I_{n-n_s}$  gilt. Da die Matrix  $\Pi$  aufgrund ihrer Definition in (5.11) vollen Spaltenrang hat, ist die Matrix  $T = [\Pi \quad T_2]$  eine reguläre Matrix. Links- und Rechtsmultiplikation der Systemmatrix in (5.9a) mit  $T^{-1}$  bzw.  $T$  führt auf den transformierten Zustandsvektor  $\tilde{x} = T^{-1}x$  und auf das transformierte System

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= T^{-1} (\tilde{A}_e + \tilde{B}_e(L_G \otimes I_p) \tilde{C}_e) T \tilde{x}, \\ &= \begin{bmatrix} S & * \\ 0 & T_2^T (\tilde{A}_e + \tilde{B}_e(L_G \otimes I_p) \tilde{C}_e) T_2 \end{bmatrix} \tilde{x}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

wobei das Symbol  $*$  darauf hindeutet, dass die damit ausgeblendete Matrix keinerlei Einfluss auf die nachfolgende Argumentation mehr hat. Aufgrund der resultierenden Struktur, die identisch zu (5.12) ist, sowie aufgrund der Annahme, dass der zugrunde liegende Graph des Kommunikationsnetzwerks verbunden ist, konvergiert der Ausgang

$$v = [0 \quad (L_G \otimes I_p) \tilde{C}_e T_2] \tilde{x}$$





**Bild 5.2:** Hyperbel basierend auf der Parametrierung  $F_{Hy}(\lambda_k)$  zur Begrenzung des Bereiches der Eigenwerte von  $A_{T_2}$

genau dann zu null, wenn die Matrix

$$A_{T_2} := T_2^T (\tilde{A}_e + \tilde{B}_e(L_G \otimes I_p)\tilde{C}_e) T_2 \quad (5.14)$$

Hurwitz, bzw. der invariante Unterraum  $\mathcal{S}$  definiert durch (5.10) und (5.11) extern stabil ist.  $\square$

**Anmerkung 5.5.** Die in Abschnitt 4.2.4 diskutierten Sachverhalte gelten für die Ergebnisse in diesem Kapitel analog. Enthält daher ein Agent bereits Teildynamiken, die hinsichtlich der synchronen Zeitlösung beziehungsweise hinsichtlich des virtuellen Referenzsystems in (5.3) gefordert sind, ist eine Minimalrealisierung bezüglich des „Ausganges“  $\Gamma_i$  zu bestimmen. Dies führt auf Matrizen reduzierter Ordnung  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{\Gamma}_i$ ,  $\tilde{K}_S$  und  $\tilde{E}_{di}$ , die in (5.6) zu berücksichtigen sind. Neben einer Reduzierung der benötigten Reglerordnung ist mit den Betrachtungen aus Abschnitt 4.2.4 darüber hinaus eine einfache Möglichkeit gegeben, um die System-Schnittmenge der Agenten mit dem virtuellen Referenzsystem zu bestimmen, wenn dieses gezielt vorgegeben werden soll.

Zusammenfassend lässt sich durch die Aussagen von Lemma 5.2 und Satz 5.4 festhalten, dass die Wahl der strukturbeschränkten Regelung der Agenten (5.6) dazu führt, dass der invariante und unbeobachtbare Unterraum (5.10) existiert und die synchrone Zeitlösung der erweiterten Agenten (5.7) festlegt. Darüber hinaus ist die notwendige und hinreichende Bedingung, die asymptotische Synchronisierung der Agenten bzw. das Konvergieren der Zeitlösung in den Unterraum  $\mathcal{S}$  garantiert, durch die Stabilität der Matrix (5.14) gegeben. Mit der in Abschnitt 3.3.1 eingeführten Methodik zur Vorgabe von Eigenwertbereichen steht ein Entwurfsverfahren zur Verfügung, welches die konstruktive Bestimmung der freien Reglerparameter in (5.6) ermöglicht und zudem Einflussmöglichkeiten auf die Lage der Eigenwerte der Matrix (5.14) bereit stellt. Das Vorgehen wird im nachfolgenden Abschnitt diskutiert.

### 5.3 Konstruktive Bestimmung der Reglerparameter

Im Hinblick auf die Resultate im vorangegangenen Abschnitt hängt die asymptotische Synchronisierung heterogener Agenten (5.1), die die Regelung (5.6) verwenden, entscheidend von der Stabilität der Matrix in (5.14) und damit von der Lage der Eigenwert von  $A_{T_2}$  ab. Die Lage der Eigenwerte lässt sich über die Wahl der freien Reglerparameter in (5.6) beeinflussen, was in diesem Abschnitt genutzt wird, um diese in die bereits in Abschnitt 3.3.1 eingeführten Bereiche der komplexen Ebene zu verschieben. Die anschauliche Darstellung des Vorgehens erfolgt an der in Bild 5.2 dargestellten Hyperbel, die den Bereich der Regelungseigenwerte nach rechts begrenzt. Zur Lösung des Entwurfsproblems wird ebenfalls ein Min-Max Optimierungsproblem formuliert, was mit der Methodik aus Abschnitt 3.3.2 zu lösen ist. Hierzu wird in Anlehnung an die Definition des Eigenwertbereichs (3.64) die Parametrierung der Hyperbel

$$F_{\text{Hy}}(\lambda_k) = \text{Re}(\lambda_k) + \frac{a}{b} \sqrt{\text{Im}(\lambda_k)^2 + b^2} \quad (5.15)$$

betrachtet, wobei als Argument die Eigenwerte  $\lambda_k$  der Matrix  $A_{T_2}$  dienen und für den Zählerindex  $k \in \{1, \dots, n - n_s\}$  gilt. Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 diskutiert, lässt sich der Bereich an die Anforderungen des Synchronisierungsvorgangs anpassen, indem die Parameter  $a > 0$  und  $b > 0$  geeignet vorgegeben werden. Hinsichtlich der Darstellung in Bild 5.2 ist die Mindestdynamik über den Parameter  $a$  zu beeinflussen, während über den Zusammenhang  $b = a \tan(\gamma)$  die Mindestdämpfung der Regelungseigenwerte eingestellt wird. Darüber hinaus ist die Parametrierung in (5.15) derart gewählt, dass positive Funktionswerte von  $F_k(\lambda_k)$  auf einen außerhalb des Bereiches liegenden Eigenwert hindeuten. Negative Werte von  $F_k(\lambda_k)$  kennzeichnen entsprechend einen innerhalb des vorgegebenen Bereiches liegenden Eigenwert  $\lambda_k$ . Durch Einführung der quadratischen Straffunktion

$$p(\zeta) = \begin{cases} \zeta^2, & \text{wenn } \zeta > 0, \\ 0, & \text{wenn } \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (5.16)$$

folgen daher die mittels des Optimierungsverfahrens zu minimierenden Gütefunktionen

$$f_k(\lambda_k) = p(F_{\text{Hy}}(\lambda_k)),$$

so dass alle Eigenwerte der Matrix  $A_{T_2}$  in den durch (5.15) definierten Bereich zum Liegen kommen. Da die Eigenwerte einer Matrix implizite Funktionen der Einträge der Matrix sind, ergibt sich, dass  $\lambda_k$  entsprechend eine Funktion der freien Reglerparameter in (5.6) ist. Die freien Parameter aller  $N$  Regler werden im Vektor der Optimierungsvariablen  $\xi = [\xi_1^T \dots \xi_N^T]^T$  zusammengefasst, wobei sich für jeden Regler in (5.6) der Zusammenhang

$$\xi_i = [\text{vec}(A_{di})^T \text{vec}(C_{di})^T \text{vec}(E_{di})^T \text{vec}(B_{di})^T \text{vec}(D_{di})^T]^T$$

ergibt. Zusammen mit der Indexmenge  $q$ , die durch  $q := \{1, \dots, n - n_s\}$  gegeben ist, sowie ausgehend von den Betrachtungen in diesem Abschnitt, dass  $f_k$  eine implizite Funktion der Optimierungsvariablen  $\xi$  ist, wird das unbeschränkte Min-Max Optimierungsproblem

$$\min_{\xi} \max_{k \in q} f_k(\xi) \quad (5.17)$$

formuliert, um die Eigenwerte der Matrix (5.14) in den durch (5.15) parametrisierten Bereich der offenen linken komplexen Zahlenebene zu verschieben, was Ausgangssynchronisierung im Sinne von (2.14) zur Folge hat.

Auch an dieser Stelle haben die Betrachtungen in Abschnitt 3.3.1 beziehungsweise die Aussage von Satz 3.13 Gültigkeit bezüglich des im Allgemeinen nicht konvexen Optimierungsproblems (5.17). Daher führt die Verwendung gradientenbasierter, lokaler Optimierungsverfahren, wie die in Abschnitt 3.3.2 dargestellte Methodik, stets auf lokale Minima, so dass keine Aussage über das globale Minimum von (5.17) zu treffen ist. Zur Lösung des Optimierungsproblems sind daher typischerweise mehrere Startwerte für die Optimierungsaufgabe vorzusehen. Darüber hinaus ist im Hinblick auf Satz 3.13 das Verhalten der Eigenwerte  $\lambda_k$  der Matrix  $A_{T_2}$  entscheidend für das Optimierungsverfahren. Es wird daher angenommen, dass für alle  $\xi$  die Regelungseigenwerte einfach sind, was die Differenzierbarkeit der Eigenwertfunktion und damit ebenfalls von  $f_k(\lambda_k)$  zur Folge hat.

### Berechnung der Gradienten

Abschließend wird das Vorgehen zur Bestimmung des Gradienten  $\nabla f_k$  skizziert. Auch an dieser Stelle vereinfacht sich die Darstellung, wenn statt der Berechnung aller partieller Ableitungen das Differential  $df_k(\xi)$  betrachtet wird, da sich über den Zusammenhang  $df_k(\xi) = \nabla f_k(\xi)d\xi$  eine eindeutige Beziehung zwischen Differential und Gradient ergibt [63, Theorem 5.6]. Zusammen mit Satz 3.13 bzw. (5.15) und (5.16) lässt sich

$$df_k = 2\sqrt{p(F_k(\lambda_k))} dF_k,$$

$$dF_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a\omega_k}{b\sqrt{\omega_k^2 + b^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta_k \\ d\omega_k \end{bmatrix}$$

und

$$df_k = 2\sqrt{p(F_k(\lambda_k))} \begin{bmatrix} 1 & a\omega_k \left( b\sqrt{\omega_k^2 + b^2} \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta_k \\ d\omega_k \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

berechnen, wobei  $d\delta_k = \text{Re}(d\lambda_k)$  und  $d\omega_k = \text{Im}(d\lambda_k)$  abgekürzt wurde. Mit Satz B.12 folgt zudem

$$d\lambda_k = \frac{w_k^T(dA_{T_2})v_k}{w_k^T v_k} = (w_k^T v_k)^{-1} (v_k^T \otimes w_k^T) \text{vec}(dA_{T_2}), \quad (5.19)$$

wobei  $v_k$  und  $w_k^T$  die Rechts- und Linkseigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_k$  der Matrix  $A_{T_2}$  kennzeichnen. Aufgrund der Struktur der Matrix  $A_{T_2}$  in (5.14) ist die Berechnung der Jacobi Matrix  $DA_{T_2}$ , so dass  $\text{vec}(dA_{T_2}) = (DA_{T_2})d\xi$  gilt, einfach möglich, wenn zunächst über (5.8) die Zusammenhänge

$$dA_{ei} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_i dC_{di} \\ 0 & 0 & dE_{di} \\ 0 & 0 & dA_{di} \end{bmatrix}, \quad dB_{ei} = \begin{bmatrix} B_i dD_{di} \\ 0 \\ dB_{di} \end{bmatrix}$$

betrachtet werden, woraus mit Hilfe des Vektorisierungsoperators

$$\text{vec}(\mathbf{d}A_{ei}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_{z_i}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_{z_i}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_{z_i}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_{z_i}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_s} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{d}A_{di}) \\ \text{vec}(\mathbf{d}C_{di}) \\ \text{vec}(\mathbf{d}E_{di}) \end{bmatrix}, \quad (5.20a)$$

$$:= (\mathbf{D}A_{ei}) \xi_{i1},$$

$$\text{vec}(\mathbf{d}B_{ei}) = \begin{bmatrix} I_p \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_{z_i}} \end{bmatrix}, \quad I_p \otimes \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{d}B_{di}) \\ \text{vec}(\mathbf{d}D_{di}) \end{bmatrix}, \quad (5.20b)$$

$$:= (\mathbf{D}B_{ei}) \xi_{i2}$$

folgt. Aufgrund der Blockdiagonalstruktur der Matrizen  $\widetilde{A}_e$  und  $\widetilde{B}_e$  in (5.14) und mit Hilfe der Auswahlmatrizen  $L_{A_{ei}}$ ,  $R_{A_{ei}}$ ,  $L_{B_{ei}}$  und  $R_{B_{ei}}$ , die

$$\begin{aligned} L_{A_{ei}}^T \widetilde{A}_e R_{A_{ei}} &= A_{ei} \\ L_{B_{ei}}^T \widetilde{B}_e R_{B_{ei}} &= B_{ei} \end{aligned}$$

erfüllen, setzt sich die Jacobi Matrix  $\mathbf{D}A_{T_2}$  unter Berücksichtigung von (5.20) spaltenweise aus Matrizen der Form

$$\mathbf{D}A_{T_2}^{(i)} := \left[ (R_{A_{ei}} \otimes L_{A_{ei}}) (\mathbf{D}A_{ei}) \quad (R_{B_{ei}} \otimes \widetilde{C}_e^T (L_G^T \otimes I_p) L_{B_{ei}}) (\mathbf{D}B_{ei}) \right]$$

gemäß

$$\mathbf{D}A_{T_2} := (T_2^T \otimes T_2^T) \left[ \mathbf{D}A_{T_2}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{D}A_{T_2}^{(N)} \right] \quad (5.21)$$

zusammen. Das Einsetzen von (5.21) in (5.19) mit anschließendem Einsetzen in (5.18) ergibt dann den gesuchten Ausdruck für den Gradienten  $\nabla f_k(\xi)$ .

## 5.4 Hinzunahme weiterer Gütekriterien

Durch Formulierung des Synchronisierungsproblems heterogener Agenten als strukturbeschränkten dezentralen Reglerentwurf am Gesamtsystem, welcher im vorangegangenen Abschnitt diskutiert wurde, ist die wesentliche Aufgabe des Optimierungsproblems (5.17) die Stabilisierung der Matrix  $A_{T_2}$  bzw. die Verschiebung der ihr zugeordneten Eigenwerte  $\lambda_k$  in den durch (5.15) parametrisierten Bereich der offenen linken komplexen Zahlenebene. Aufgrund der Definition der Straffunktion (5.16) in der Optimierungsaufgabe bricht das Verfahren in jedem Fall ab, wenn alle Eigenwerte in dem vorgegebenen Bereich zum Liegen kommen. In diesem Fall besteht die Möglichkeit, weitere Anforderungen an den Synchronisierungsprozess zu formulieren, indem ausgehend von (5.13) für das System

$$\dot{\bar{x}}_2 = T_2^T (\widetilde{A}_e + \widetilde{B}_e (L_G \otimes I_p) \widetilde{C}_e) T_2 \bar{x}_2, \quad \bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_{20}, \quad (5.22a)$$

$$v = (L_G \otimes I_p) \widetilde{C}_e T_2 \bar{x}_2 \quad (5.22b)$$

gezielt weitere Kenngrößen minimiert werden. Auch für diese Entwurfsaufgabe ist eine Möglichkeit, das in Abschnitt 3.3.3 skizzierte Vorgehen zur Überführung des nichtlinearen Optimierungsproblems mit Nebenbedingung

$$\min_{\xi} J^*(\xi) \quad (5.23a)$$

$$\text{u.B.v. } f_k(\xi) \leq 0, \quad k \in \{1, \dots, n - n_S\}, \quad (5.23b)$$

durch Definition der Funktionen

$$\tilde{f}_i(\xi) = \begin{cases} J^*(\xi)/c^*, & i = 1, \\ f_k(\xi)/c_\lambda, & i \in \{2, \dots, n - n_S + 1\}, k = i - 1 \end{cases}$$

und unter der Voraussetzung, dass bereits ein zulässiger Wert  $\xi$  für das Optimierungsproblem (5.17) vorliegt, in das Min-Max-Optimierungsproblem

$$\min_{\xi} \max_{i \in \tilde{q}} \tilde{f}_i(\xi) \quad (5.24)$$

mit der modifizierten Indexmenge  $\tilde{q} = \{1, \dots, n - n_S + 1\}$  zu überführen, wobei für die Vorgabewerte  $c^* > J^*$ ,  $0 < c_\lambda \ll 1$  angenommen wird und zur Lösung von (5.24) ein Abstiegsverfahren genutzt wird. Dies ermöglicht ein zweistufiger Prozess, wobei zunächst durch Lösung von (5.17) ein zulässiger Wert für (5.23) zu bestimmen ist. Im zweiten Schritt entstehen durch die Veränderung der Eigenwerte von  $A_{T_2}$  im vorgegebenen Bereich der komplexen Ebene zusätzliche Freiheitsgrade, die gezielt für weitere Verbesserungen des dynamischen Verhaltens von (5.22) nutzbar sind.

Bei der Auswahl geeigneter Kriterien hinsichtlich  $J^*(\xi)$  sind die Möglichkeiten zahlreich, weshalb im Folgenden nur eine übersichtliche Auswahl diskutiert wird, die sich in einfacher Weise mit der im vorangegangenen vorgestellten Methodik kombinieren lässt. Auch auf die explizite Berechnung der entsprechenden Gradienten wird verzichtet. Diese lassen sich allesamt durch Anwendung der Rechenregeln in Abschnitt B.4 mit vertretbarem Aufwand berechnen.

Im Hinblick auf den Synchronisierungsvorgang ist der Zeitverlauf des Ausgangs  $v(t)$  in (5.22b) ein wesentlicher Indikator für die Wahl der freien Reglerparameter in (5.6). Daher liegt es nahe, ein quadratisches Gütekriterium für  $J^*$  anzusetzen, woraus

$$J^* = \frac{1}{2} \int_0^\infty v^T(t) \tilde{Q}_v v(t) dt$$

mit positiv definiter Matrix  $\tilde{Q}_v$  folgt. Durch Berechnung der Zeitlösung von  $v(t)$  und Einsetzen in das Gütekriterium lässt sich dieses mit dem Anfangswert von (5.22a) auch als  $J^* = \frac{1}{2} \tilde{x}_{2_0}^T P \tilde{x}_{2_0}$  schreiben (vgl. z.B. [28]), wobei  $P$  aus der Lösung der Lyapunov Gleichung

$$PA_{T_2} + A_{T_2}^T P = -T_2^T \tilde{C}_e^T (L_g^T \otimes I_p) \tilde{Q}_v (L_g \otimes I_p) \tilde{C}_e T_2 =: -Q_v$$

zu bestimmen ist. Da das System (5.22) über den Ausgang  $v$  vollständig beobachtbar ist, handelt es sich bei  $Q_v$  um eine positiv semidefinite Matrix. Darüber hinaus ist die Matrix  $A_{T_2}$  für alle

zulässigen Werte aus (5.23) Hurwitz und damit ist in diesem Falle die Lösung der Lyapunov Gleichung  $P$  symmetrisch positiv definit [38]. Die Minimierung des quadratischen Gütemaßes kann daher in einfacher Weise für beliebige Anfangswerte  $\bar{x}_{2_0}$  durch Lösung der Lyapunov Gleichung erfolgen, woraus sich ebenfalls ein Ausdruck für den Gradienten  $\nabla J^*$  ermitteln lässt.

Eine weitere Möglichkeit zur gezielten Minimierung eines Gütekriteriums entsteht, indem für das stabile Zustandssystem (5.22) geeignete Performance Ein- und Ausgänge  $z_p$  und  $w_p$  definiert werden, woraus für die Dynamik  $\dot{\bar{x}}_2 = A_{T_2}\bar{x}_2 + B_p z_p$  und den Ausgang  $w_p = C_p \bar{x}_2$  mit den zu wählenden Matrizen  $B_p$  und  $C_p$  folgt. Wird nunmehr angenommen, dass das Eingangssignal ein weißer Rauschprozess ist, dann lässt sich der Einfluss des Rauschens auf den Ausgang  $w_p$  gezielt reduzieren, indem für die Übertragungsmatrix  $G(s) = C_p(sI - A_{T_2})^{-1} B_p$  das Gütekriterium

$$J^* = \|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{spur}(G^T(-j\omega)G(j\omega)) d\omega$$

minimiert wird, was in der Literatur als  $H_2$ -Performance des Systems bezeichnet wird [116]. Auch an dieser Stelle kann auf die direkte Lösung des Integrals verzichtet werden und eine äquivalente Formulierung basierend auf der Lösung einer Riccati Gleichung gefunden werden. Mit [133, Lemma 4.6] ist nämlich  $\|G(s)\|_2^2 = \text{spur}(C_p P_B C_p^T) = \text{spur}(B_p^T P_C B_p)$ , wobei  $P_B$  und  $P_C$  aus der Lösung der Riccati Gleichungen

$$A_{T_2} P_B + P_B A_{T_2}^T = -B_p B_p^T, \quad P_C A_{T_2} + A_{T_2}^T P_C = -C_p^T C_p,$$

zu bestimmen sind. Der Gradient  $\nabla J^*$  errechnet sich dabei in einfacher Weise über die vorstehenden Riccati Gleichungen.

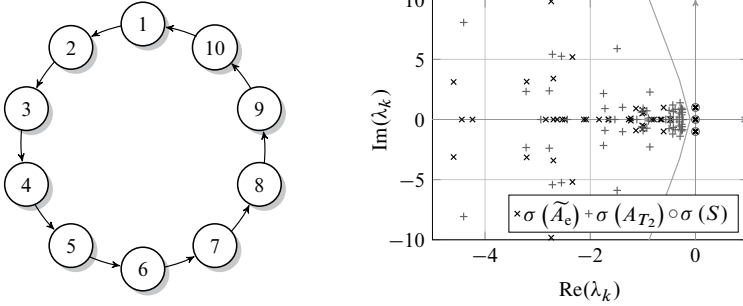
Es soll abschließend erwähnt werden, dass neben der  $H_2$ -Synthese mit der  $H_\infty$ -Synthese eine weitere Frequenzbereichsmethodik gegeben ist, um gezielt das Übertragungsverhalten zwischen den Performance Ein- und Ausgängen zu verbessern. Hierzu lässt sich der Performance-Ausgang ebenfalls um einen Durchgriff erweitern, woraus  $w_p = C_p \bar{x}_2 + D_p z_p$  und damit die Übertragungsmatrix  $G(s) = C_p(sI - A_{T_2})^{-1} B_p + D_p$  folgt. Als Gütekriterium ergibt sich dann

$$J^* = \|G(s)\|_\infty,$$

welches durch Optimierung über die freien Parameter in (5.6) minimiert werden muss. Aufgrund der Strukturbeschränkung der Regelung ist allerdings der Zugang über das sogenannte *Bounded Real Lemma* (vgl. [10]) und Semidefinite Programmierung (SDP) nicht möglich, da sich daraus keine LMI-Nebenbedingung ergibt. Zur strukturierten  $H_\infty$ -Synthese ist deshalb auf alternative Methoden der Nichtglaten Optimierung [3] zurückzugreifen, was allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet wird. Es sei lediglich erwähnt, dass sich über diesen Zugang Anknüpfungspunkte zu dieser Arbeit ergeben, insbesondere im Hinblick auf zeitvariante Kommunikationsstopologien (bspw. durch [104, 117]).

## 5.5 Entwurfsbeispiel

Zur anschaulichen Darstellung der Vorgehensweise zur Bestimmung der synchronisierenden Regelung (5.6) für die heterogenen Agenten (5.1) und zur Bewertung der Ergebnisse dieses Kapi-



**Bild 5.3:** Ringstruktur des betrachteten Kommunikationsnetzwerks (links) und Lage der Eigenwerte  $\lambda_k$  im offenen und geschlossenen Regelkreis (rechts)

tels wird nachfolgend ein akademisches Beispielsystem betrachtet. Die heterogene Dynamik der Agenten wird aus der Übertragungsfunktion

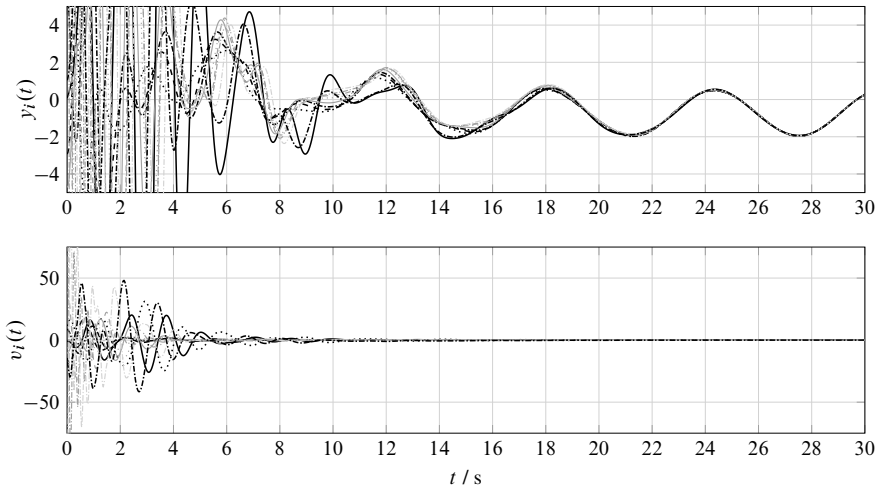
$$G_i(s) = k_i \frac{(s - p_{zi1})(s - p_{zi2})(s - p_{zi3})}{(s - p_{i1})(s - p_{i2})(s - p_{i3})(s - p_{i4})}$$

generiert, wobei für die spätere Entwurfsaufgabe  $N = 10$  Agenten betrachtet werden. Dabei ist vorauszusetzen, dass der Zählergrad der Übertragungsfunktion strikt kleiner als der Nennergrad ist, um konsistent mit der betrachteten Systemstruktur in (5.1) zu sein. Durch die geeignete Wahl der Parameter  $k_i$ ,  $p_{zij}$  und  $p_{ij}$  lassen sich daher weitreichende Systemdynamiken einstellen, da durch Pol-Nullstellenkürzungen die Agenten unterschiedliche Zustandsdimensionen aufweisen können. Darüber hinaus kann das Systemverhalten oder auch die Nulldynamik sowohl stabil als auch instabil ausgelegt werden. Die Matrizen  $S$  und  $Q$ , die die synchrone Trajektorie der Agenten festlegen, sind gemäß

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gewählt, was auf die asymptotische Synchronisierung auf ein sinusförmiges Signal mit der Frequenz 1 Hz mit einem überlagerten konstanten Anteil führt. Es lässt sich einfach nachrechnen, dass das Paar  $(Q, S)$  beobachtbar ist. Die Kommunikationsstruktur der Agenten ist in der linken Darstellung in Bild 5.3 abgebildet. Hierbei wurde bewusst eine Ringstruktur gewählt, da damit nicht allein die Stabilisierung der einzelnen Agenten bereits hinreichend für die Stabilisierung des Synchronisierungsprozesses ist.

Die Ergebnisse des Optimierungsproblems (5.17) sind der rechten Darstellung in Bild 5.3 zu entnehmen. Neben den Eigenwerten des offenen Regelkreises ist aus der Darstellung zu erkennen, dass das Optimierungsverfahren in der Lage ist, alle Eigenwerte der Matrix  $A_{T_2}$  in den durch (5.15) parametrisierten Bereich der komplexen Ebene zu verschieben. Hierbei ergibt sich für die



**Bild 5.4:** Simulationsergebnisse zur Ausgangssynchronisierung heterogener Agenten basierend auf der Regelung (5.6); Verlauf der Ausgangsgrößen (oben) und Verlauf der Messgrößen (5.2) (unten)

Eigenwerte des Synchronisierungsprozesses eine Mindestdynamik von  $a = 0,35$  und eine Mindestdämpfung von  $\gamma = 85^\circ$ . Dieses Ergebnis führt zu den Simulationsergebnissen, die in Bild 5.4 dargestellt sind. In der oberen Darstellung ist der Verlauf aller Ausgangsgrößen  $y_i(t)$  und in der unteren Darstellung der Verlauf aller Messgrößen bzw. der kommunzierten Variablen  $v_i(t)$  dargestellt. Anhand der Verläufe ist zu erkennen, dass nach ca. 20 Sekunden alle Ausgangsgrößen synchron gemäß der Zeitlösung des dynamischen Systems  $\dot{w} = Sw$  mit dem Ausgang  $Qw(t)$  verlaufen, was die Anwendbarkeit der in diesem Kapitel entwickelten Methodik verdeutlicht.

## 5.6 Kurzzusammenfassung

Kapitel 5 ist von den minimalen Anforderungen an die Synchronisierung heterogener linearer Multi-Agenten Systeme ausgegangen. Diese bestehen darin, dass hinsichtlich der Kommunikationsstruktur lediglich die Existenz eines Spannbaums vorausgesetzt wurde. Darüber hinaus ist der Kommunikationsaufwand der Agenten minimal, da nur Ausgangsinformation an das Netzwerk kommuniziert wird. Ausgehend von der Analyse der benötigten Regelungsstruktur der Agenten zeigt sich, dass die Wahl stets auf einen invarianten Unterraum  $S$  des Gesamtsystems gemäß (5.10) führt, der bezüglich der relativen Ausgänge unbeobachtbar ist. Damit ist die notwendige Bedingung für die Ausgangssynchronisierung heterogener Agenten stets erfüllt.



Die Attraktivität des Unterraums  $\mathcal{S}$ , die eine notwendige und hinreichende Bedingung für die in diesem Kapitel betrachtete Problemstellung ist, lässt sich durch die Betrachtung der dieser Eigenschaft zugeordneten Systemmatrix  $A_{T_2}$  analysieren und beeinflussen. Durch die Wahl der freien Reglerparameter ist die Beeinflussung der Eigenwerte von  $A_{T_2}$  möglich, was die Entwurfsaufgabe in ein dezentrales Stabilisierungsproblem übersetzt. Zur Lösung dieser Aufgabe ist das Vorgehen zur Vorgabe von Eigenwertbereichen aus Abschnitt 3.3.1 auf die Problemstellung modifiziert worden, was neben der eigentlichen Stabilisierungsaufgabe zusätzliche Einflussmöglichkeiten auf die Lage der Regelungseigenwerte bietet. Die Beeinflussung der Mindestdynamik als auch der Mindestdämpfung wird durch die Parametrierung der Hyperbel, die den Bereich der Eigenwerte begrenzt, ermöglicht und ist somit beim Entwurf einstellbar.

Aufgrund der Wahl der quadratischen Straffunktion (5.16) in der Optimierungsaufgabe bricht das Verfahren auf jeden Fall ab, wenn alle Eigenwerte in dem vorgegebenen Bereich zum Liegen kommen. In diesem Fall besteht die Möglichkeit, weitere Anforderungen an den Synchronisierungsprozess zu formulieren, indem für das System (5.22) gezielt weitere Gütekriterien minimiert werden. Die Verwendung eines quadratischen Gütekriteriums sowie die  $H_2$ -Synthese liefern an dieser Stelle mögliche Ansatzpunkte für weiterführende Untersuchungen. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass es in Kapitel 5 gelungen ist, die aus der Literatur bekannten Resultate zur Synchronisierung heterogener Multi-Agenten Systeme mit einem konstruktiven Verfahren zu verbinden, was ein wichtiges, neues Resultat im Hinblick auf den Entwurf und die Analyse heterogener Multi-Agenten Systeme darstellt.

## 6 Entwurfsbeispiele

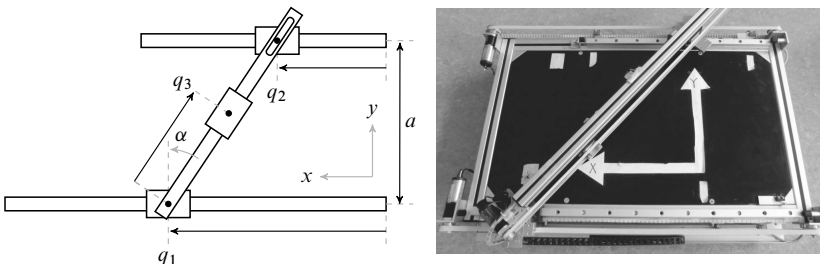
### 6.1 Entkopplungsregelung einer xy-Positioniereinheit

Zur Demonstration der parametrischen Entwurfsmethodik, die in Kapitel 3 vorgestellt wurde, dient der Laboraufbau einer xy-Positioniereinheit, deren Prinzipskizze und Aufbau in Bild 6.1 dargestellt ist. Dieser Laboraufbau veranschaulicht die am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik der TU Darmstadt in der Lehrveranstaltung „Mehrgrößenreglerentwurf im Zustandsraum“ vermittelten Lehrinhalte. Dies umfasst sowohl die Systemanalyse als auch den Entwurf von Mehrgrößenregelungen, beispielsweise durch Ent- oder Verkopplung. Der Laboraufbau wurde im Rahmen einer studentischen Arbeit [33] am Fachgebiet konstruiert und aufgebaut. In diesem Abschnitt besteht das Ziel der Regelung darin, die Position des Endeffektors durch den Entwurf einer robusten Entkopplungsregelung aus Abschnitt 3.3.3 innerhalb des Arbeitsraumes frei vorzugeben und darüber hinaus die mechanische Kopplung des Systems durch die Regelung weitestgehend zu kompensieren.

#### Beschreibung des Aufbaus

Die Hauptaufgabe des Aufbaus besteht in der Positionierung des Endeffektors in der xy-Ebene. Hierzu sind auf zwei parallelen Linearführungen, die im Abstand  $a$  zueinander angeordnet sind, jeweils ein Schlitten angebracht. Die Schlitten sind über einen Zahnriemen mit einem stromgeregelten Gleichstrommotor mit integriertem Getriebe verbunden, so dass bezüglich der Regelung von einer Kraft, beziehungsweise Momentenvorgabe ausgegangen werden kann. Die Positionen der Schlitten werden über die Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  beschrieben und lassen sich über analoge magnetostriktive Sensoren direkt im Echtzeitsystem der Firma dSpace (DS1104) erfassen.

Auf den parallelen Linearführungen ist die Portalschiene angebracht, worauf sich ein Schlitten (Koordinate  $q_3$ ) durch einen weiteren stromgeregelten Gleichstrommotor translatorisch bewegen lässt. Die Erfassung der Position des Schlittens erfolgt durch einen Seilzug und ein Potentiometer



**Bild 6.1:** Prinzipskizze (links) und Laboraufbau (rechts) der xy-Positioniereinheit nach [33]

und ist damit ebenfalls direkt im Echtzeitsystem messbar. Die Lagerung der Portalschiene durch ein Kugellager auf der  $q_1$ -Achse sowie durch eine Linearführung auf der  $q_2$ -Achse ermöglicht darüber hinaus den Winkel  $\alpha$  gezielt zu verändern. Dies stellt neben der stets bei mechatronischen Systemen auftretenden Reibung eine der wesentlichen Nichtlinearitäten des Aufbaus dar, was bei der Modellierung des Systems zu berücksichtigen ist. Über die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}x_{\text{TCP}} &= q_1 - \sin(\alpha)q_3, \\y_{\text{TCP}} &= \cos(\alpha)q_3, \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{q_1 - q_2}{a}\right)\end{aligned}$$

lassen sich aus den Messgrößen die Position des Endeffektors (engl. *tool center point*, TCP) sowie der Winkel  $\alpha$  bestimmen, was den Regelgrößen des Systems entspricht.

### Modellierung des Systems

Zur Modellierung des Systems bietet es sich aufgrund der Struktur der xy-Positioniereinheit an, diese basierend auf einer Deskriptordarstellung des Systems vorzunehmen. Als Vorteil ergibt sich dabei, dass das System in modulare Teilsysteme zerlegt werden kann, die für sich betrachtet einfacher zu modellieren sind. Im Gegensatz zur Modellierung in Minimalkoordinaten und der anschließenden Anwendung der Energiemethode nach Lagrange bleiben bei diesem Ansatz die aufzustellenden Gleichungen übersichtlich. Die Herausforderung bei der Modellierung als Deskriptorsystem, ein äquivalentes Zustandsraumsystem zu bestimmen, gestaltet sich durch die in [50, 64] diskutierten Methoden vergleichsweise einfach, indem auf Programme zur Berechnung symbolischer Ausdrücke zurückgegriffen wird.

Dieser Ansatz ist in der studentischen Arbeit [99] ausführlich diskutiert, so dass eine kurze Beschreibung des Vorgehens sowie die Darstellung der Ergebnisse für die nachfolgenden Zwecke ausreichend ist. Das zugrunde liegende Vorgehen besteht darin, die einzelnen Teilsysteme freizuschneiden und geeignete Zwangsbedingungen zwischen den Teilsystemen zu formulieren, woraus das nichtlineare Deskriptorsystem in der *semi-expliziten Form*

$$\dot{\zeta}_1 = f(\zeta_1, \zeta_2, u), \quad (6.1a)$$

$$0 = g(\zeta_1, \zeta_2, u), \quad (6.1b)$$

$$y = h(\zeta_1, \zeta_2, u) \quad (6.1c)$$

folgt. Darin bezeichnet  $\zeta_1$  die differentielle Variable und  $\zeta_2$  die algebraische Variable, die zusammen den Deskriptor  $\zeta = [\zeta_1^T \ \zeta_2^T]^T$  bilden. Bei der betrachteten xy-Positioniereinheit entspricht die algebraische Variable den freigelegten Schnittkräften. Mittels der Methode aus [50] wird die Forderung  $0 = g(\zeta_1, \zeta_2, u)$  gemäß  $z = g(\zeta_1, \zeta_2, u)$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$  abgeschwächt und eine Rückführung für  $\zeta_2$  derart bestimmt, dass die mit dem *Verkopplungsausgang*  $z$  assoziierte Untermannigfaltigkeit ausgangsnulld, geregelt invariant und attraktiv ist. Damit hat die *fiktive*

### Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\xi}_1 = f(\xi_1, \xi_2, u), \quad (6.2a)$$

$$z = g(\xi_1, \xi_2, u), \quad (6.2b)$$

$$y = h(\xi_1, \xi_2, u) \quad (6.2c)$$

auf der durch die Rückführung erzeugten Untermannigfaltigkeit dieselbe Lösung wie das Deskriptorsystem (6.1). Die Darstellung (6.2) ermöglicht damit bekannte Methoden für Zustandssysteme in entsprechender Weise anzuwenden.

Hinsichtlich der xy-Positioniereinheit und dem Ziel, eine Entkopplungsregelung für ein lineares Zustandssystem zu entwerfen, muss (6.2) um einen geeigneten Arbeitspunkt linearisiert werden. Da der Verkopplungsausgang  $z$  durch die Wahl der Rückführung für  $\xi_2$  stets asymptotisch verschwindet, lässt sich bezüglich  $z$  eine Minimalrealisierung des linearisierten Systems bestimmen, die den realen physikalischen Zuständen der xy-Positioniereinheit in der Nähe des Arbeitspunktes entspricht. Die Wahl des Arbeitspunktes

$$x_{AP} = [q_{1AP} \quad \dot{q}_{1AP} \quad q_{2AP} \quad \dot{q}_{2AP} \quad q_{3AP} \quad \dot{q}_{3AP}]^T = [0,15 \quad 0,00 \quad 0,07 \quad 0,00 \quad 0,10 \quad 0,00]^T$$

führt auf das lineare Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (6.3a)$$

$$y = Cx \quad (6.3b)$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,37 & 0 & -0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0 & -1,21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,19 & 0 & -0,01 & 0 & -2,99 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5,09 & 0,18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,18 & 4,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,72 & 0,03 & 7,86 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,80 & 0 & 0,20 & 0 & 0,17 & 0 \\ -0,04 & 0 & 0,04 & 0 & 0,98 & 0 \\ 2,06 & 0 & -2,06 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

welches für den weiteren Reglerentwurf zugrunde gelegt wird. Da das lineare Zustandssystem eine Minimalrealisierung des linearisierten fiktiven Zustandssystem darstellt, ist dieses definitionsgemäß steuer- und beobachtbar.

## Entwurf der Entkopplungsregelung

Zum Entwurf der Entkopplungsregelung ist zunächst die stabile Entkoppelbarkeit des Systems zu überprüfen. Wie sich leicht nachrechnen lässt, ergibt sich  $\delta = 6$ , und das System hat keine invarianten Nullstellen. Damit entspricht die *Differenzordnung*  $\delta$  der Systemordnung  $n = 6$ , und somit ist die xy-Positioniereinheit mittels Zustandsrückführung stabil entkoppelbar. Der Übergang zum Entwurf mittels Ausgangsrückführung erfolgt zunächst basierend auf Satz 3.11. Zur Sicherstellung der stationären Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises werden die Regelgrößen des Systems entsprechend des internen Modellprinzips um drei Integratoren erweitert, was die Ordnung des Systems um drei erhöht. Da sich durch dieses Vorgehen die Anzahl der Ausgangsgrößen um die entsprechende Anzahl der Integratoren erweitert, wird zur Entkopplung des Systems gemäß Satz 3.11 weiterhin eine Reglerordnung von  $n_d = 4$  benötigt. Zudem ist zu beachten, dass für das Integral über die Regelabweichung gemäß der Forderung nach stationärer Genauigkeit der Zusammenhang  $\dot{x}_1 = w - y$  einzuhalten ist. Dies führt daher auf das erweiterte System

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} u_e + \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \\ 0 \end{bmatrix} w = A_e x_e + B_e u_e + F_1 w, \quad (6.4a)$$

$$y_e = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_d \end{bmatrix} = C_e x_e \quad (6.4b)$$

mit dem erweiterten Zustandsvektor  $x_e = [x^T \ x_1^T \ x_d^T]^T \in \mathbb{R}^{n_e}$  mit  $n_e = 13$ , welches zum Entwurf der dynamischen Regelung zugrunde gelegt wird. Gemäß Satz 3.5 ist dies äquivalent zum Entwurf der statischen Ausgangsrückführung

$$u_e = \begin{bmatrix} D_d & D_{d1} & C_d \\ B_d & B_{d1} & A_d \end{bmatrix} y_e + \begin{bmatrix} F_u \\ F_d \end{bmatrix} w = K_e y_e + F_e w \quad (6.5)$$

für das erweiterte System (6.4). Die Bedingung nach Kimura (3.16) ist dabei immer noch erfüllt, da  $n + n_d + 4 \leq m + n_d + p + n_d + 3$  gilt. Somit lassen sich alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorgeben.

Aufgrund der Forderung nach stationärer Genauigkeit und der damit einhergehenden Erweiterung um die Integratoren ergibt sich eine Modifikation des Entwurfs der Rückführung (6.5). Ausgehend vom erweiterten System (6.4) zusammen mit dem Ausgang  $y_1 = -x_1$  lässt sich durch zeitliche Ableitung mit  $w = 0$  der Zusammenhang  $\dot{y}_1 = -\dot{x}_1 = y$  herleiten. Damit ergibt sich bezüglich des Ausgangs  $y_1$  eine Differenzordnung  $\tilde{\delta} = 9$ , und der Entwurf der Entkopplungsregelung kann formal bezüglich des Ausgangs  $y_1$  erfolgen, da durch Entkopplung bezüglich  $y_1$  ebenfalls Entkopplung bezüglich  $y$  gegeben ist.

Zur Bestimmung des Vorfilters ist gegenüber der Wahl gemäß (3.48) aufgrund der Erweiterung um den Zustand  $x_1$  eine Modifikation vorzunehmen. Durch Einsetzen von (6.5) in (6.4) ergibt sich der geschlossene Regelkreis zu  $\dot{x}_e = (A_e + B_e K_e C_e) x_e + (B_e F_e + F_1) w$ , worin sich aufgrund der

Forderung  $\dot{x}_1 = w - y$  die Struktur des Vorfilters zu

$$B_e F_e + F_1 = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \\ 0 & I_{n_d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_u \\ F_d \\ I_p \end{bmatrix} = B_{\tilde{e}} F_e$$

ergibt. Gemäß den Betrachtungen in Abschnitt 3.2.2 und der Modifikation des Entwurfes der Entkopplungsregelung sind die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises  $\lambda_{Ki}$  für  $i > \tilde{\delta} = 9$  unsteuerbar zu machen, wobei hierzu die erweiterte Eingangsmatrix  $B_e$  zugrunde zu legen ist. Nachfolgend bezeichnet daher  $\tilde{F}_e$  eine beliebige Vorfiltermatrix, die diese Forderung erfüllt. Für das erweiterte Zustandssystem der xy-Positioniereinheit errechnet sich der Zusammenhang

$$\dim \text{bild}(\tilde{F}_e) = 2p.$$

Das Vorfilter  $\tilde{F}_e$  ist daher mittels einer Matrix  $T_{F_e}$  derart zu modifizieren, dass weiterhin der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} 0_{p \times m} & 0_{p \times n_d} & I_p \end{bmatrix} \tilde{F}_e T_{F_e} = I_p$$

erfüllt ist. Darüber hinaus ergibt sich aus der stationären Betrachtung des geschlossenen Regelkreises, dass für stationäre Genauigkeit bezüglich der Regelgrößen  $y$  der Zusammenhang  $-C_{e_y}(A_e + B_e K_e C_e)^{-1} B_{\tilde{e}} \tilde{F}_e T_{F_e} = I_p$  mit  $C_{e_y} = \begin{bmatrix} C & 0_{p \times p + n_d} \end{bmatrix}$  erfüllt sein muss, woraus die Bestimmungsgleichung für  $T_{F_e}$  aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -C_{e_y}(A_e + B_e K_e C_e)^{-1} B_{\tilde{e}} \\ \begin{bmatrix} 0_{p \times m} & 0_{p \times n_d} & I_p \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tilde{F}_e T_{F_e} = \begin{bmatrix} I_p \\ I_p \end{bmatrix}$$

folgt. Für das vorliegende Beispiel der xy-Positioniereinheit ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar und somit das Vorfilter  $F_e$  festgelegt.

## Parametrierung der Entkopplungsregelung

Aufgrund der Struktur des erweiterten Systems (6.4) lassen sich durch Betrachtung der Ausgangsdimension  $2p + n_d - 1 = 9$  Rechtseigenvektoren des geregelten Systems über den parametrischen Ansatz aus Abschnitt 3.2.2 vorgeben. Da  $\tilde{\delta} = 9$  ist, legen die ersten  $\tilde{\delta}$  Eigenwerte und Rechtseigenvektoren das entkoppelte Führungsverhalten bezüglich  $y$  und  $w$  fest. Somit lässt sich die Eigenwertmenge  $\Lambda_{K1}$  gemäß  $\Lambda_{K1} = \Lambda_{K_x} \cup \Lambda_{K_y} \cup \Lambda_{K_\alpha}$  partitionieren, und die Menge  $\Lambda_{K1}$  charakterisiert diejenigen Eigenwerte, die als Pole im entkoppelt geregelten Übertragungsverhalten sichtbar sind.

Zunächst werden alle Regelungseigenwerte fest vorgegeben, was gemäß der Unterteilung von  $\Lambda_{K1}$  zusammen mit  $\Lambda_{K2}$  auf

$$\begin{aligned} \Lambda_{K_x} &= \{-12,16 \pm 10,83j, -3,13\} \\ \Lambda_{K_y} &= \{-12,08 \pm 10,90j, -3,12\} \\ \Lambda_{K_\alpha} &= \{-14,52 \pm 12,04j, -3,40\} \\ \Lambda_{K2} &= \{-1,86 \pm -20,11j, -0,51 \pm -1,38j\} \end{aligned}$$

führt. Dies hat eine Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix von  $\kappa(V_K) = 214,96$  zur Folge. Mit dem Übergang auf den teilparametrischen Ansatz aus Abschnitt 3.3.3 lässt sich die Menge der Regelungseigenwerte  $\Lambda_{K2}$  als zusätzliche Freiheitsgrade im Optimierungsverfahren nutzen. Die Wahl von 25 weiteren zufälligen Startwerten führt abschließend auf die modifizierte Menge der Eigenwerte

$$\Lambda_{K2} = \{-1,77 \pm -19,38j, -0,50, -6,07\},$$

was auf die Konditionszahl der Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises von  $\kappa(\tilde{V}_K) = 145,32$  und damit auf eine weitere Verbesserung führt. Dies hat die Matrizen der Regelung

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} -14,96 & 1,76 & -19,57 & 11,73 \\ -0,57 & -19,74 & 4,76 & -4,21 \\ 13,21 & 3,57 & -52,55 & 16,26 \\ 16,14 & -16,85 & -21,19 & -23,14 \end{bmatrix}, \\ B_d &= \begin{bmatrix} -11,09 & -69,36 & -0,96 \\ -64,43 & -35,42 & -13,59 \\ 78,74 & -108,13 & 2,15 \\ 23,88 & 1,09 & -23,55 \end{bmatrix}, & B_{d_i} &= \begin{bmatrix} -0,94 & 32,31 & 32,10 \\ 114,06 & 54,82 & 43,69 \\ -101,15 & 59,30 & 7,63 \\ -34,67 & -116,15 & 111,62 \end{bmatrix}, \\ C_d &= \begin{bmatrix} -7,22 & -11,97 & 14,53 & -11,57 \\ -69,08 & 48,12 & 40,74 & 40,74 \\ 3,22 & 6,34 & -19,12 & 13,18 \end{bmatrix}, \\ D_d &= \begin{bmatrix} -64,49 & 22,75 & -12,83 \\ -71,22 & 32,45 & 49,34 \\ 43,35 & -60,97 & 8,52 \end{bmatrix}, & D_{d_i} &= \begin{bmatrix} 90,90 & -41,95 & 55,18 \\ 17,95 & 60,78 & -153,64 \\ -61,14 & 78,62 & -30,13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

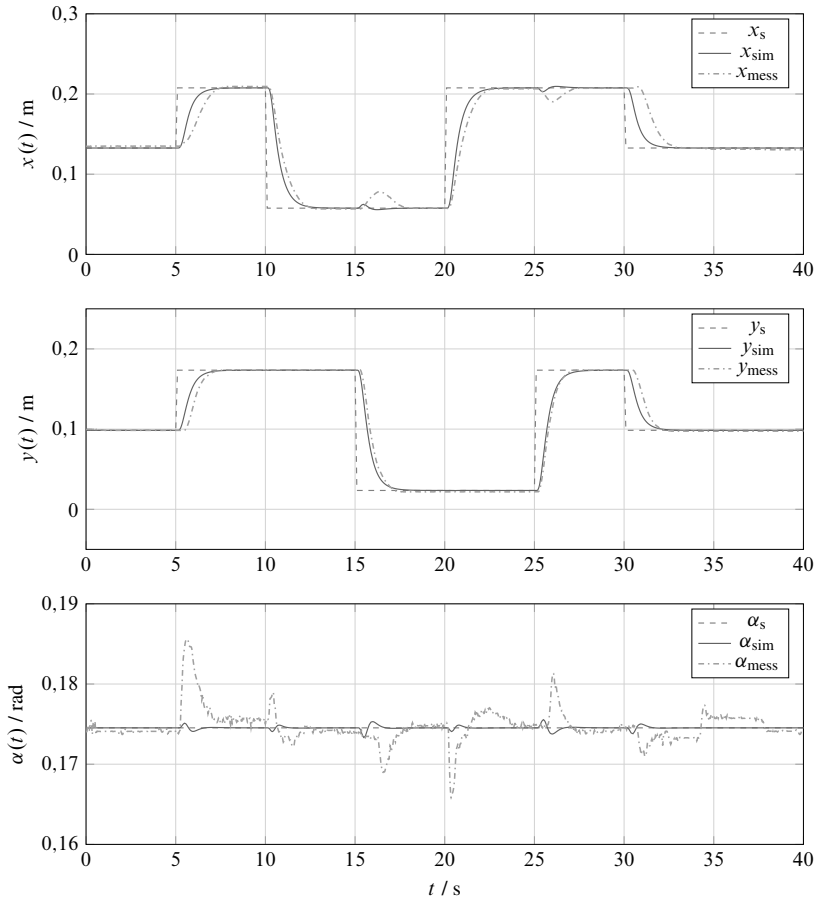
und des Vorfilters

$$\begin{aligned} F_u &= \begin{bmatrix} 110,54 & -19,37 & 13,79 \\ 151,69 & -26,58 & -59,59 \\ -5,56 & 79,48 & 0,79 \end{bmatrix}, & F_d &= \begin{bmatrix} 142,45 & -115,09 & 4,44 \\ 240,23 & 265,90 & 44,38 \\ 7,00 & -113,80 & 3,57 \\ -126,43 & -383,54 & -15,92 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in (6.5) zur Folge. Dies legt das entkoppelt geregelte Übertragungsverhalten gemäß  $G_w(s) = \text{diag}(g_{w_x}(s), g_{w_y}(s), g_{w_\alpha}(s))$  mit den skalaren Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} g_{w_x}(s) &= \frac{1172,5(s + 0,71)}{(s + 3,13)(s^2 + 24,33s + 265,2)} \\ g_{w_y}(s) &= \frac{1167,2(s + 0,71)}{(s + 3,12)(s^2 + 24,16s + 264,8)} \\ g_{w_\alpha}(s) &= \frac{1665,7(s + 0,73)}{(s + 3,40)(s^2 + 29,04s + 355,9)} \end{aligned}$$

fest. Im Unterschied zur Entkopplung mittels Zustandsrückführung ergeben sich in den Übertragungsfunktionen Zählernullstellen. Dies ist darin begründet, dass der Entwurf der entkoppelnden



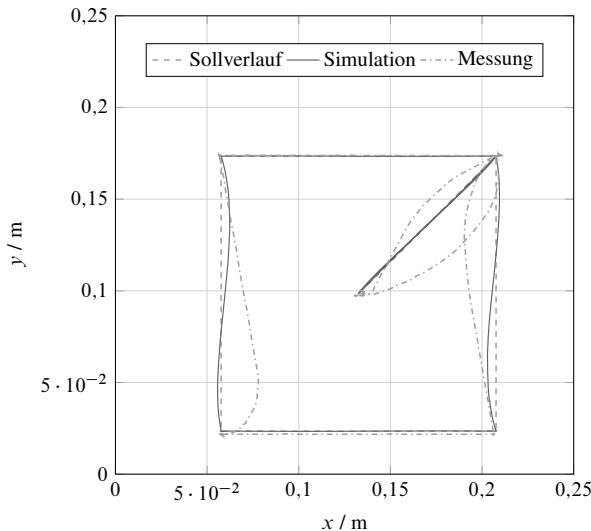
**Bild 6.2:** Zeitverlauf der Simulations- und Messergebnisse der xy-Positioniereinheit

Rückführung bezüglich des Ausgangs  $y_1$  erfolgt, während der Entwurf des Vorfilters stationär genau bezüglich  $y$  ausgelegt ist.

### Simulation und Messergebnisse des entkoppelt geregelten Systems

Die Leistungsfähigkeit des parametrischen Entwurfes zur Entkopplung soll abschließend in numerischen Simulationen sowie anhand von Messungen am Laboraufbau bewertet werden. Die Simulations- und Messergebnisse mit der zuvor entworfenen Regelung sind in Bild 6.2 dargestellt. Dabei wurde ein identischer Führungsgrößenverlauf für die Simulation als auch für die Messung zugrunde gelegt.





**Bild 6.3:** Simulation und Messergebnisse dargestellt im Arbeitsraum der xy-Positioniereinheit

Ausgehend vom Arbeitspunkt sollen mittels der Entkopplungsregelung die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge 15 cm angefahren werden. Dabei wird zunächst die rechte obere Ecke und anschließend die Ecken des Quadrates entgegen des Uhrzeigersinnes angefahren, was ebenfalls in Bild 6.3 dargestellt ist. Der Winkel  $\alpha$ , d.h. die Schrägstellung des Portals, soll während des kompletten Verfahrensvorgangs konstant bei  $\alpha = 10^\circ$  gehalten werden.

Es ist sowohl anhand der Zeitverläufe der Regelgrößen in Bild 6.2 als auch anhand der Darstellung im Arbeitsraum der xy-Positioniereinheit in Bild 6.3 zu erkennen, dass die lineare Entkopplungsregelung in der Lage ist, den gewünschten konstanten Führungsgrößen stationär genau zu folgen. Aufgrund des nichtlinearen Simulationsmodells und der nichtlinearen Effekte der Reibung am Laboraufbau ist nicht zu erwarten, dass die lineare Regelung in der Lage ist, die xy-Positioniereinheit exakt zu entkoppeln. Dennoch verdeutlichen die Ergebnisse aufgrund der vergleichsweise geringen Abweichungen im Hinblick auf den kostengünstigen Demonstrator, dass mit der parametrischen Entwicklungsmethodik ein leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung steht, um zahlreiche praktische Regelungsaufgaben zu lösen.

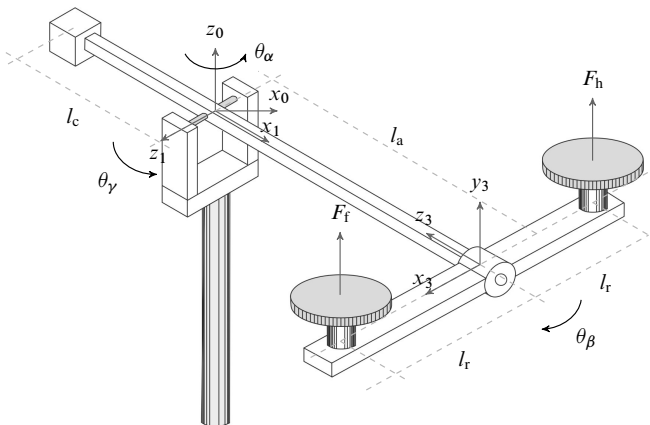
Darüber hinaus ist damit auch verdeutlicht, dass die Konditionszahl der Eigenvektormatrix des geschlossenen Regelkreises ein geeignetes Maß darstellt, um die bei Mehrgrößensystemen zur Verfügung stehenden weiteren Freiheitsgrade gezielt durch ein Optimierungsverfahren aufzulösen. Durch den in dieser Arbeit entwickelten integrierten Ansatz entfällt zudem der Einsatz eines Beobachters, und der Entwurf kann in einem Schritt direkt erfolgen.

## 6.2 Entkopplungs- und Verkopplungsbasierte Synchronisierung von Helikoptern

Zur Veranschaulichung der in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 entwickelten Methodik zur Synchronisierung heterogener agentenbasierter Systeme basierend auf dem unterlagerten Entwurf einer Entkopplungs- beziehungsweise Verkopplungsregelung soll das lineare Zustandssystem eines gefesselten Modellhelikopters dienen. Dieses Modell wird ebenfalls von der Firma *Quanser* als Labor Demonstrator unter dem Produktnamen *3 DOF Helicopter* vertrieben und soll vornehmlich in Laborpraktika zur Vermittlung von regelungstechnischen Kenntnissen im Bereich der Modellbildung des Systems und des modellbasierten Entwurfes von Zustandsregelungen dienen.

### Beschreibung des Systems

Der Aufbau, dessen Prinzipskizze in Bild 6.4 dargestellt ist, besteht dabei aus einem Sockel, worauf ein Ausleger mit zwei mechanischen Freiheitsgraden angebracht ist. Die Rotation um die  $z_0$ -Achse (Gierwinkel  $\theta_\alpha$ ) bildet die Vorwärtsbewegung des Helikopters nach, während die Rotation um die  $z_1$ -Achse (Neigungswinkel  $\theta_\gamma$ ) aufgrund der Verbindung mit dem Ausleger eine Steigbewegung nachbildet. An den Enden des Auslegers ist ein Gegengewicht auf der einen Seite und auf der anderen Seite das Modell des Helikopters angebracht. Der Helikopter ist hierbei in Tandem-Konfiguration mit identischem Front- und Heckrotor (Schub  $F_f$  und  $F_h$ ) ausgeführt, weshalb die Rotation um die  $z_3$ -Achse (Nickwinkel  $\theta_\beta$ ) durch die Schubdifferenz der beiden Rotoren erfolgt. Darüber hinaus lässt sich über den Gleichanteil des Schubs der Rotoren die Höhe des Helikopters über Grund einstellen. Ist zudem der Winkel  $\theta_\beta \neq 0$ , entsteht aufgrund des Schubs der Rotoren eine Kraftkomponente in horizontaler Richtung, was die Vorwärtsbewegung beziehungsweise das Gieren des Helikopters zur Folge hat.



**Bild 6.4:** Prinzipskizze des betrachteten Modellhelikopters nach [48]

In der Simulation soll nachfolgend untersucht werden, wie sich basierend auf den in dieser Arbeit entwickelten Methoden asymptotische Synchronisierung für  $N = 4$  der betrachteten Helikopter erzielen lässt. Da jeder Helikopter über zwei Eingangsgrößen verfügt, sind zusätzlich für den Gierwinkel  $\theta_\alpha$  und den Neigungswinkel  $\theta_\gamma$  Referenzmodelle zu bestimmen, die die synchrone Zeitlösung des synchronisierten Multi-Agenten Systems festlegen. Die Masse des Auslegers  $m_a$  und des Gegengewichts  $m_c$  sowie die als identisch angenommenen Massen der Rotoren  $m_r$  stellen zusammen mit den geometrischen Abmessungen des Aufbaus ( $l_a$ ,  $l_c$  und  $l_r$ ) die physikalischen Parameter des Helikopters dar. Da die Parameter unter praktischen Gesichtspunkten stets Schwankungen unterworfen sind, handelt es sich bei diesem Beispiel um strukturell identische Agenten, die allerdings Unterschiede in den Parametern aufweisen, weshalb ein heterogenes Multi-Agenten System vorliegt.

### Modellierung des Systems

Die Bestimmung des für den Reglerentwurf benötigten linearen Modells erfolgt durch Linearisierung des nichtlinearen Modells in einem Arbeitspunkt. Die Modellbildung des nichtlinearen Modells soll an dieser Stelle nur kurz skizziert werden, da die resultierenden Gleichungen aufgrund der darin auftretenden trigonometrischen Zusammenhänge recht unübersichtlich werden. Als Herausforderung bei der Modellbildung stellt sich die Bestimmung der Ortsvektoren der einzelnen Massen im ortsfesten Koordinatensystem dar. Eine einfache Möglichkeit dies aufzulösen besteht darin, den Aufbau mittels der Konvention nach Denavit und Hartenberg [22] (DH-Konvention) durch homogene Koordinaten zu beschreiben, wobei nachfolgend der Darstellung in [114] gefolgt wird. Die homogene Transformation überführt dabei die klassische Transformationsbeziehung  ${}^a p = {}^a r_b + {}^a R_b {}^b p$  in die Matrixdarstellung

$${}^a \hat{p} = \begin{bmatrix} {}^a p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^a R_b & {}^a r_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^b p \\ 1 \end{bmatrix} = {}^a T_b {}^b \hat{p},$$

wobei mit  ${}^a p$  und  ${}^b p$  jeweils Punkte in den Koordinatensystemen  $a$  und  $b$  bezeichnet sind. Mit  ${}^a r_b$  ist die Translation des Koordinatenursprungs von  $a$  in den Ursprung von Koordinatensystem  $b$  sowie mit  ${}^a R_b$  die Rotationsmatrix der Verdrehung der beiden Koordinatensysteme gekennzeichnet. Mittels der DH-Konvention lässt sich der Übergang von einem auf ein anderes Koordinatensystem durch vier Parameter beschreiben und durch die homogene Transformationsmatrix

$${}^{i-1} T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ausdrücken. Dabei erfolgt zunächst eine Drehung und Translation um die  $z_{i-1}$ -Achse (Parameter  $\theta_i$  und  $d_i$ ) und im Anschluss eine Translation und Rotation um die neue  $x_i$ -Achse (Parameter  $a_i$  und  $\alpha_i$ ). Die Festlegung der Koordinatensysteme für den Aufbau des Modell Helikopters ist in Bild 6.4 eingetragen. Damit ergeben sich die in Tabelle 6.1 aufgeführten DH-Parameter.

Mittels der hiermit festgelegten Koordinatenbeziehungen lassen sich in einfacher Weise die Ortsvektoren zu den einzelnen Massen berechnen. Über die zeitliche Ableitung der Ortsvektoren resultieren die Geschwindigkeiten der Punktmassen, woraus sich die entsprechenden kinetischen

**Tabelle 6.1:** DH-Parameter zur Beschreibung der Koordinaten des Helikopters

$i-1 \rightarrow i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
$0 \rightarrow 1$	$\theta_\alpha$	0	0	$\frac{\pi}{2}$
$1 \rightarrow 2$	$\theta_\gamma + \frac{\pi}{2}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$
$2 \rightarrow 3$	$\frac{\pi}{2}$	$l_a$	0	$-\pi$
$3 \rightarrow F$	$\theta_\beta$	0	$l_r$	$\frac{\pi}{2}$
$3 \rightarrow H$	$\theta_\beta$	0	$-l_r$	$\frac{\pi}{2}$

Energien berechnen lassen. Zusammen mit der potentiellen Energie erfolgt die Berechnung der Bewegungsgleichung des Helikopters aus der Anwendung der *Lagrangeschen Gleichungen* [65]. Dies hat ein nichtlineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung  $M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) = G_f(q)F_f + G_h(q)F_h$  zur Folge, worin  $q$  die generalisierten Koordinaten und  $\dot{q}$  die generalisierten Geschwindigkeiten bezeichnet, und es gilt

$$q := [\theta_\alpha \quad \theta_\gamma \quad \theta_\beta]^T,$$

$$\dot{q} := [\dot{\theta}_\alpha \quad \dot{\theta}_\gamma \quad \dot{\theta}_\beta]^T.$$

Die Wahl des Arbeitspunktes

$$q_{AP} := [0 \quad \frac{10\pi}{180} \quad 0]^T$$

mit

$$\dot{q}_{AP} := [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

sowie die Linearisierung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen führt mit dem Zustandsvektor

$$x_i := [\Delta\theta_\alpha \quad \Delta\dot{\theta}_\alpha \quad \Delta\theta_\beta \quad \Delta\dot{\theta}_\beta \quad \Delta\theta_\gamma \quad \Delta\dot{\theta}_\gamma]^T$$

auf das gesuchte lineare Modell des Helikopters gemäß

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_i^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_i^2 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \rho_i^3 & -\rho_i^3 \\ 0 & 0 \\ \rho_i^4 & \rho_i^4 \end{bmatrix} u_i, \quad (6.6a)$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_i, \quad (6.6b)$$

worin die Parameter  $\rho_i^1$ ,  $\rho_i^2$ ,  $\rho_i^3$  und  $\rho_i^4$  von den physikalischen Parametern des Demonstrators abhängen. Eine Zusammenstellung der Parameter, die für die nachfolgende Simulation der  $N = 4$  Agenten zugrunde gelegt ist, fasst Tabelle 6.2 zusammen.

**Tabelle 6.2:** Parameter des Zustandssystems der vier Agenten in Abhängigkeit der gewählten Massen und Abmessungen

$i$	$m_a$	$m_c$	$m_r$	$l_a$	$l_c$	$l_r$	$\rho_i^1$	$\rho_i^2$	$\rho_i^3$	$\rho_i^4$
1	2,05	4,50	0,33	0,52	0,78	0,25	1,86	0,56	6,00	0,75
2	2,10	3,75	0,03	0,54	0,66	0,25	1,72	0,46	5,80	0,71
3	2,25	4,05	0,33	0,57	0,70	0,25	2,33	0,72	6,10	0,65
4	1,85	4,00	0,36	0,53	0,72	0,25	2,63	0,71	5,60	0,77

### Entwurf der synchronisierenden Regler

Zunächst werden die Referenzmodelle für die beiden Ausgangsgrößen  $\theta_\alpha$  und  $\theta_\gamma$  festgelegt. Mit Blick auf die Diskussionen in Abschnitt 4.2.4 muss sich die synchrone Zeitlösung der Agenten als Lösung des homogenen Zustandssystems (4.42) darstellen lassen. Referenzsignale, die einen nicht stetig differenzierbaren Zeitverlauf aufweisen, können damit nicht exakt vorgegeben werden. Das nachfolgende Simulationsbeispiel zeigt daher anhand eines Sägezahn- und Dreieckssignals, wie sich durch eine Annäherung mittels Fourierreihen der Zeitverlauf dieser Signale approximieren lässt. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang, dass sich Sägezahn- und Dreieckssignale exakt über abschnittsweise geeignet gewählte Rampensignale und damit als Zeitlösung eines Doppelintegrators darstellen lassen. Um diese Ergebnisse zu erzielen, sind allerdings die Zustände des Doppelintegrators in periodischer Weise neu zu setzen, woraus eine hybride Dynamik folgt. Dieser Ansatz ist damit nicht mit den Methoden der vorliegenden Arbeit zu entwerfen. Ein möglicher Anknüpfungspunkt an die Ergebnisse dieser Arbeit ist damit allerdings gegeben, insbesondere hinsichtlich einer Reduktion der benötigten Ordnung der Regelgesetze zur Synchronisierung. Diese sind dann in der Regel jedoch mit nichtlinearen Methoden auszulegen.

Für die nachfolgend erzielten Simulationsergebnisse wird daher die Fourierreihendarstellung eines Sägezahn-  $y_{SZ}(t)$  und eines Dreieckssignals  $y_\Delta(t)$  betrachtet. Diese periodischen Signale lassen sich durch die Fourierreihen

$$y_{SZ}(t) = -\frac{2\hat{y}_{SZ}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin(k\omega_{SZ}t)}{k},$$

$$y_\Delta(t) = \frac{8\hat{y}_\Delta}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin((2k-1)\omega_\Delta t)}{(2k-1)^2}$$

darstellen [11], wobei  $\hat{y}_{(\cdot)}$  die entsprechenden Amplituden und  $\omega_{(\cdot)}$  die Frequenz der Signale kennzeichnen. Zur Überführung in ein lineares Zustandssystem wird die Fourierreihe nach einer endlichen Anzahl von Sinusschwingungen abgebrochen. Zudem folgt aus der zweifachen zeitlichen Ableitung der Signale, dass sich die einzelnen Sinusschwingungen jeweils durch autonome Zustandssysteme zweiter Ordnung darstellen lassen, woraus für die entsprechende Frequenz

$$\dot{x}_{SZ_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -j^2\omega_{SZ}^2 & 0 \end{bmatrix} x_{SZ_j} =: S_{SZ_j} x_{SZ_j},$$

$$y_{SZ_j} = \begin{bmatrix} -\frac{2\hat{y}_{SZ}(-1)^{j-1}}{j\pi} & 0 \end{bmatrix} x_{SZ_j} =: Q_{SZ_j} x_{SZ_j}$$

sowie

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\Delta_j} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2j-1)^2 \omega_{\Delta}^2 & 0 \end{bmatrix} x_{\Delta_j} =: S_{\Delta_j} x_{\Delta_j}, \\ y_{\Delta_j} &= \begin{bmatrix} \frac{8 \hat{y}_{\Delta} (-1)^{j-1}}{(2j-1)^2 \pi^2} & 0 \end{bmatrix} x_{\Delta_j} =: Q_{\Delta_j} x_{\Delta_j}\end{aligned}$$

folgt. Für den nachfolgenden Entwurf wird berücksichtigt, dass der Gierwinkel asymptotisch mit dem Sägezahnsignal und der Neigungswinkel asymptotisch mit dem Dreieckssignal übereinstimmt. Dabei wird für die Amplituden  $\hat{y}_{SZ} = 2\pi$  und  $\hat{y}_{\Delta} = 0,1$  sowie für die Frequenzen  $\omega_{SZ} = 2\pi/25$  und  $\omega_{\Delta} = 2\pi/15$  gewählt. Die Fourierreihen werden bis zur dritten Sinusschwingung berücksichtigt. Damit ist

$$\begin{aligned}S_{SZ} &:= \text{diag}(S_{SZ_1}, S_{SZ_2}, S_{SZ_3}), \\ S_{\Delta} &:= \text{diag}(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}, S_{\Delta_3})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}Q_{SZ} &:= \begin{bmatrix} Q_{SZ_1} & Q_{SZ_2} & Q_{SZ_3} \end{bmatrix}, \\ Q_{\Delta} &:= \begin{bmatrix} Q_{\Delta_1} & Q_{\Delta_2} & Q_{\Delta_3} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

woraus das Referenzsystem

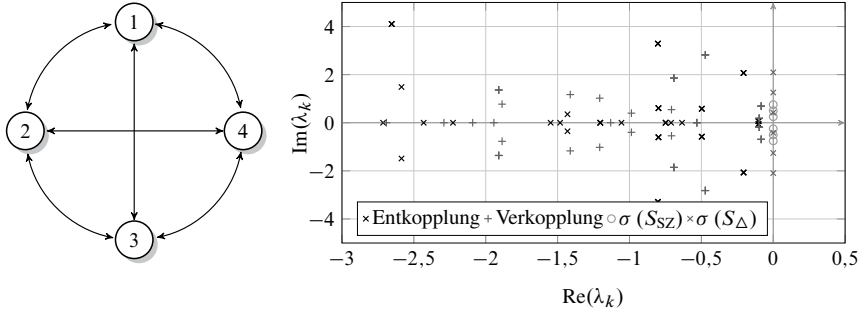
$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \begin{bmatrix} S_{SZ} & 0 \\ 0 & S_{\Delta} \end{bmatrix} z_i = S z_i \\ y_{S_i} &= \begin{bmatrix} Q_{SZ} & 0 \\ 0 & Q_{\Delta} \end{bmatrix} z_i = Q z_i\end{aligned}$$

folgt. Dabei ist  $z_i \in \mathbb{R}^{n_s}$  mit  $n_s = 12$  und  $y_{S_i} \in \mathbb{R}^2$ .

Hinsichtlich des Entwurfes der unterlagerten Regelkreise für die  $N = 4$  Agenten, soll zu Beginn das Vorgehen basierend auf einer Entkopplungsregelung beschrieben werden. Zunächst ist Annahme 4.7 zu überprüfen. Da bezüglich des Gier- und Neigungswinkels die synchrone Trajektorie  $y_{S_i}(t)$  mit  $y_{S_i} \in \mathbb{R}^2$  vorgegeben werden soll und zwei Eingangsgrößen zur Verfügung stehen, ist das System unter Berücksichtigung der ersten beiden Ausgangsgrößen in (6.6) quadratisch. Wie sich anhand von (6.6) nachrechnen lässt, ist das System bezüglich dieser Ausgänge entkoppelbar. Zudem ist  $\delta = 6$ , und das System weist keine invarianten Nullstellen auf. Damit entspricht die Differenzordnung der Systemordnung und das System ist mittels statischer Zustandsrückführung stabil entkoppelbar. Da die Agenten strukturell identisch sind, ergeben sich ebenfalls gleiche Differenzordnungen. Somit lässt sich in jedem Kanal eine identische, stabile Dynamik vorgeben. Diese wird, da  $\delta_1 = 4$  und  $\delta_2 = 2$  gilt, gemäß

$$\Lambda_{K1} = \{-4,73, -4,45, -1,06, -1,48\} \cup \{-2,71, -2,43\}$$

gewählt. Die verbleibenden, unsteuerbaren Eigenwerte des entkoppelt geregelten Agenten sind so gewählt, dass ein möglichst geringer Wert der Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix des



**Bild 6.5:** Stark verbundene Kommunikationstopologie (links) und Ausschnitt der komplexen Ebene (rechts) mit den Eigenwerten der geregelten Multi-Agenten Systeme

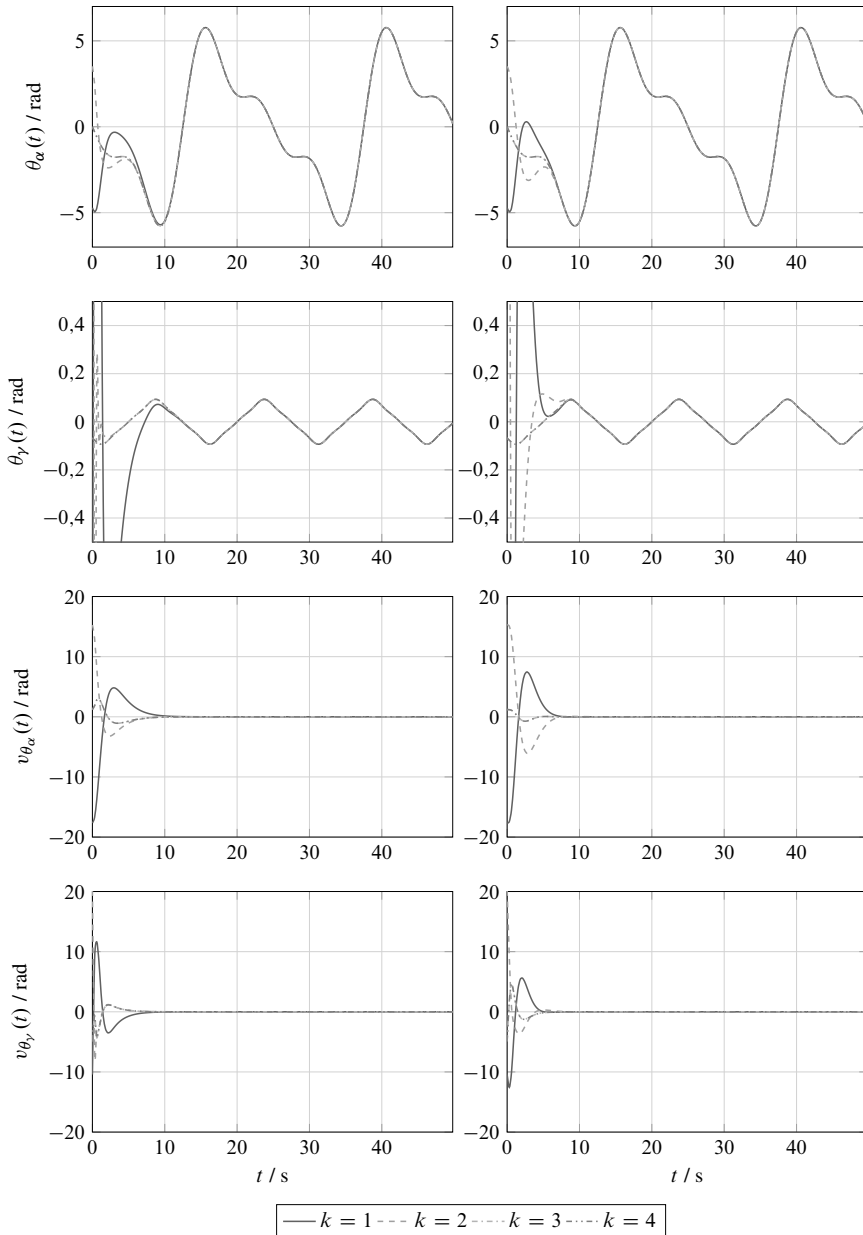
geschlossenen Regelkreises entsteht. Darüber hinaus wird durch Rückgriff auf die teilparametrische Methodik aus Abschnitt 3.3.3 die Entkopplungsregelung jedes Agenten hinsichtlich der robusten Eigenstrukturvorgabe optimiert. Die begrenzende Hyperbel ist dabei mit  $a = 0,5$  und  $b = a \tan(\pi/4)$  parametrisiert (vgl. Bild 3.3), was der Mindestdynamik und einer Mindestdämpfung der Eigenwerte von  $\gamma = 45^\circ$  entspricht.

Aufgrund der unterlagerten Entkopplungsregelung lässt sich die synchronisierende Regelung für jede Ausgangsgröße getrennt berechnen. Da das System stabil entkoppelbar ist, lässt sich für jede Ausgangsgröße die Sylvester Gleichung (4.27) lösen, woraus die Vorsteuerung (4.26) und damit der erweiterte Agent (4.30) folgt. Zur Berechnung der Matrizen der Rückführung wird die Methodik aus Abschnitt 4.1.3 genutzt. Im Hinblick auf die Bedingung nach Kimura und die für jede Ausgangsgröße zu entwerfende Regelung (4.28) ergibt sich für die Synchronisierung des Gierwinkels gemäß (3.22) eine untere Schranke für die Reglerordnung von  $n_{d\theta_\alpha} \geq 4$  beziehungsweise für den Neigungswinkel eine untere Schranke von  $n_{d\theta_\gamma} \geq 2$ . In beiden Fällen lässt sich mit der Methodik eine synchronisierende Regelung bestimmen, wobei für die Ausgangsgröße  $\theta_\alpha$  eine Mindestdynamik von  $a = 0,1$  und für die Ausgangsgröße  $\theta_\gamma$  eine Mindestdynamik von  $a = 0,5$  erzielbar ist. Damit ist es gelungen, basierend auf der Methodik aus Abschnitt 4.2.2 eine synchronisierende Regelung zu entwerfen.

Im Hinblick auf den Entwurf der synchronisierenden Regelung basierend auf einer unterlagerten Verkopplungsregelung ist die Gültigkeit von Annahme 4.11 zu überprüfen. Hierzu ist für jeden Agenten zunächst die Verkopplungsregelung zu berechnen. Gemäß Abschnitt 4.2.3 ergibt sich für das betrachtete Beispiel die Forderung nach Verkopplung zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \theta_\alpha(t) \\ \theta_\gamma(t) \end{bmatrix} - y_{Si}(t) =: y_{vi}(t) = 0.$$

Ausgehend von der Lösung der Sylvester Gleichung (4.34) entstehen die erweiterten Agenten gemäß (4.33). Auch an dieser Stelle ist die Existenz der Lösung der Sylvester Gleichung gesichert,



**Bild 6.6:** Asymptotische Synchronisierung von vier Modellhelikoptern basierend auf unterlagter Entkopplungsregelung (linke Spalte) sowie Verkopplungsregelung (rechte Spalte)



da das zugrunde liegende Modell entkoppelbar ist und keine invarianten Nullstellen aufweist. Die verbleibenden, unsteuerbaren Eigenwerte des mittels (4.35) verkopplert geregelten Agenten sind auch in diesem Fall so gewählt, dass sich ein möglichst geringer Wert der Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix des geschlossenen Regelkreises ergibt. Darüber hinaus wird ebenfalls in Anlehnung an die teilparametrische Methodik aus Abschnitt 3.3.3 die Verkopplungsregelung jedes Agenten hinsichtlich einer robusten Eigenstrukturvorgabe optimiert. Die begrenzende Hyperbel ist dabei mit  $a = 1$  und  $b = a \tan(5\pi/12)$  parametrisiert (vgl. Bild 3.3), was der Mindestdynamik und einer Mindestdämpfung der Eigenwerte von  $\gamma = 75^\circ$  entspricht.

Ausgehend von der Koordinatendarstellung (4.38) des verkopplert geregelten Agenten lässt sich anschließend Annahme 4.11 überprüfen. Wie sich numerisch bestimmen lässt, gilt  $\text{bild}(R_S) := \bigcap_{i=1}^N \text{bild}(P_i) \neq \emptyset$ , und das Paar  $(S, R_S)$  ist steuerbar. Darüber hinaus ist  $\dim(\text{bild}(R_S)) = 8$ . Somit ist es möglich, eine identische synchronisierende Regelung (4.40) für alle verkopplert geregelten Agenten zu entwerfen. Im Hinblick auf die Bedingung nach Kimura ergibt sich hierbei eine untere Schranke für die Reglerordnung aus  $n_d \geq 3$ . Mittels der Methodik aus Abschnitt 4.1.3 lässt sich eine synchronisierende Regelung bestimmen, wobei eine Mindestdynamik von  $a = 0,1$  erzielbar ist. Damit ist es ebenfalls gelungen, basierend auf der Methodik aus Abschnitt 4.2.3 eine synchronisierende Regelung zu entwerfen.

### Diskussion der Ergebnisse

Die mit den zuvor entworfenen Regelungen erzielten Ergebnisse sind in den Bildern 6.5 und 6.6 dargestellt. Bild 6.5 zeigt in der linken Darstellung die für den Entwurf zugrunde gelegte Kommunikationstopologie eines *stark* verbundenen Graphen. Zum anderen ist ein Ausschnitt der komplexen Ebene dargestellt, worin die Eigenwerte der geregelten Multi-Agenten Systeme in der Umgebung der imaginären Achse sowie die Eigenwerte des Referenzmodells auf der imaginären Achse eingezeichnet sind. Es ist zu erkennen, dass sowohl die Eigenwerte des mittels Verkopplung entworfenen Ansatzes als auch die Eigenwerte des mittels Entkopplung entworfenen Ansatzes in der Nähe der imaginären Achse zum Liegen kommen, was auf die erzielbare Mindestdynamik von  $a = 0,1$  in beiden Fällen zurückzuführen ist.

Bild 6.6 zeigt die numerischen Simulationsergebnisse. In der linken Spalte sind die Ergebnisse basierend auf Entkopplung und in der rechten Spalte basierend auf Verkopplung dargestellt. In den Zeitverläufen sind von oben nach unten die Zeitsignale des Gierwinkels  $\theta_\alpha(t)$  und des Neigungswinkels  $\theta_\gamma(t)$  sowie die über das Netzwerk kommunizierten Signale und damit der Synchronisierungsfehler  $v_{\theta_\alpha}(t)$  und  $v_{\theta_\gamma}(t)$  dargestellt. Anhand der absoluten Ausgangsverläufe  $\theta_\alpha(t)$  und  $\theta_\gamma(t)$  ist zu erkennen, dass diese dem zuvor festgelegten Referenzsystem und damit einem approximierten Sägezahn- und Dreieckssignal mit den Amplituden  $\hat{y}_S = 2\pi$  und  $\hat{y}_\Delta = 0,1$  sowie den Frequenzen  $\omega_S = 2\pi/25$  und  $\omega_\Delta = 2\pi/15$  asymptotisch folgen.

Im Hinblick auf die Zeitverläufe der Synchronisierungsfehler zeigt sich eine annähernd identische Konvergenzgeschwindigkeit der geregelten Multi-Agenten Systeme, was im Einklang mit der in Bild 6.5 in der rechten Darstellung abgebildeten Lage der Eigenwerte ist. Da sowohl die Eigenwerte des über Verkopplung geregelten Systems als auch die Eigenwerte des über Entkopplung geregelten Systems in der Nähe der imaginären Achse zum Liegen kommen, stellt sich ein

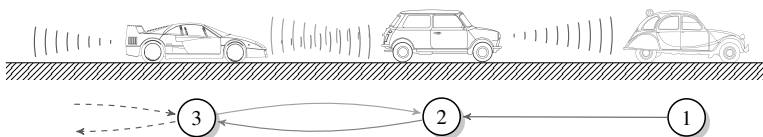
synchroner Zustand nach ungefähr 12 Sekunden ein. Stellt sich bei dem Ansatz basierend auf Verkopplung in beiden Ausgangsgrößen der synchrone Zeitverlauf in etwa gleich schnell ein, ist bei dem Ansatz basierend auf Entkopplung zu erkennen, dass der Neigungswinkel gegenüber dem Gierwinkel schneller konvergiert. Dies ist durch die höhere erzielbare Minstdynamik im Ausgangskanal des Neigungswinkels zurückzuführen und stellt damit einen Vorteil des Ansatzes basierend auf Entkopplung dar, da die Synchronisierungsvorgänge weitestgehend unabhängig voneinander einstellbar sind. Dies geht allerdings zu Lasten einer höheren benötigten Reglerordnung. Der synchronisierende Regler basierend auf Verkopplung hat eine Ordnung von  $n_{d,vk} = 17$ , während der synchronisierende Regler basierend auf Entkopplung eine Ordnung von  $n_{d,ek} = 22$  aufweist. Die Reglerordnung setzt sich dabei aus dem Referenzsystem, dem dynamischen Regler zur Entkopplung beziehungsweise Verkopplung sowie dem Regler zur Synchronisierung der unterlagert geregelten Agenten zusammen.

Abschließend lässt sich festhalten, dass mit den Methoden aus Abschnitt 4.2.2 und 4.2.3 leistungsfähige Entwurfswerkzeuge entstanden sind, um Synchronisierungsprobleme heterogener agentenbasierter dynamischer Systeme zu lösen, was das Beispiel in diesem Abschnitt belegt.

### 6.3 Dezentrale Synchronisierung einer autonomen Fahrzeugkolonne

In diesem Abschnitt erfolgt die Anwendung der in Kapitel 5 entwickelten Methodik zur Synchronisierung agentenbasierter Systeme basierend ausschließlich auf Relativinformation an einem vergleichsweise praxisnahen Beispiel. Hierzu wird das automatisierte Fahren in Kolonnen auf Landstraßen oder Autobahnen mit einem Kraftfahrzeug betrachtet. Das Regelziel der verteilt geregelten Kraftfahrzeuge besteht darin, asymptotisch einem vorausfahrenden Fahrzeug in einem definierten Abstand mit der gleichen Geschwindigkeit zu folgen. Die für diese Regelungsaufgabe benötigte Sensorik erfasst daher den Relativabstand und die Relativgeschwindigkeit zu dem voraus- und hinterherfahrenden Fahrzeug und nutzt die Geschwindigkeitsregelung des Fahrzeugs zur Anpassung der Fahrzeuggeschwindigkeit, was den Akteur für das betrachtete Beispiel darstellt.

In Bild 6.8 ist eine Skizze des Entwurfsbeispiels dargestellt, wobei im nachfolgenden Entwurf und den Simulationen von  $N = 20$  Kraftfahrzeugen ausgegangen wird. Der ebenfalls in der Skizze abgebildete Graph deutet die Kommunikationstopologie des zugrunde liegenden Netzwerks an. Somit gibt das erste Fahrzeug die Geschwindigkeit für die nachfolgenden Fahrzeuge vor. Damit



**Bild 6.7:** Prinzip der autonomen Fahrzeugkolonne basierend auf Relativsensorik

resultieren die Messgrößen der Fahrzeuge gemäß (5.2) zu

$$v_i(t) = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & i = 1, \\ \begin{bmatrix} x_i^1 - x_{i-1}^1 + x_i^1 - x_{i+1}^1 \\ x_i^2 - x_{i-1}^2 + x_i^2 - x_{i+1}^2 \end{bmatrix}, & i \in \{2, \dots, N-1\}, \\ \begin{bmatrix} x_i^1 - x_{i-1}^1 \\ x_i^2 - x_{i-1}^2 \end{bmatrix}, & i = N, \end{cases}$$

wobei  $x_i^1$  die Position und  $x_i^2$  die Geschwindigkeit des Fahrzeugs mit dem Index  $i$  bezeichnet.

Darüber hinaus ist mit Bild 6.8 angedeutet, dass es sich unter praktischen Gesichtspunkten beim betrachteten Beispiel um ein heterogenes Multi-Agenten System handelt. Dies ist mitunter auf unterschiedliche Motorisierungen der am Markt verfügbaren Kraftfahrzeuge aber auch auf verschiedene Luftwiderstandsbeiwerte beziehungsweise unterschiedliche Anströmflächen der Fahrzeuge zurückzuführen. Nach Mitschke und Wallentowitz [68] ergibt sich beim Fahren in der Ebene, bei Windstille und durch Linearisierung ein linearer Zusammenhang zwischen Gaspedalstellung und Geschwindigkeit des Fahrzeugs gemäß der Differentialgleichung

$$\dot{x}_i^2 T_{Fz_i} + x_i^2 = K_{Fz_i} \alpha_{A_i}.$$

Danach verhält sich das Fahrzeug bei einer Änderung des Gaspedals wie ein  $PT_1$ -Glied mit der Zeitkonstanten  $T_{Fz_i}$  und dem Verstärkungsfaktor  $K_{Fz_i}$ . Diese Parameter hängen im Wesentlichen von der Fahrzeugmasse, dem Motorkennfeld, dem gewählten Gang, den aerodynamischen Parametern, den Reifen und der Fahrzeuggeschwindigkeit ab [68]. Zusammen mit einem dynamischen Regler

$$\begin{aligned} \dot{x}_{di} &= A_{di} x_{di} + B_{di} (x_i^2 - v_{\text{soll}}), \\ \alpha_{A_i} &= C_{di} x_{di} + D_{di} x_i^2 + \left( \frac{1}{K_{Fz_i}} - D_{di} \right) v_{\text{soll}}, \end{aligned}$$

der der stationär genauen Geschwindigkeitsregelung bezüglich  $v_{\text{soll}}$  dient und damit an dieser Stelle den Tempomat nachbildet, folgt zusammen mit dem Zustandsvektor  $x_i = [x_i^1 \ x_i^2 \ x_{di}]^T \in \mathbb{R}^{n_i}$  die Dynamik des heterogenen Agenten beziehungsweise des autonomen Kraftfahrzeugs zu

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{K_{Fz_i}}{T_{Fz_i}} \left( D_{di} - \frac{1}{K_{Fz_i}} \right) & \frac{K_{Fz_i}}{T_{Fz_i}} C_{di} \\ 0 & B_{di} & A_{di} \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_{Fz_i}}{T_{Fz_i}} \left( D_{di} - \frac{1}{K_{Fz_i}} \right) \\ -B_{di} \end{bmatrix} v_{\text{soll}} \quad (6.7a)$$

$$= A_i x_i + B_i v_{\text{soll}},$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_i = C_i x_i, \quad (6.7b)$$

wobei die in der Simulation zugrunde gelegten Parameterwerte der  $N = 20$  Zustandssysteme in Tabelle 6.3 aufgeführt sind.

**Tabelle 6.3:** Zeitkonstanten und Verstärkungsfaktoren für die Kraftfahrzeuge gemäß (6.7)

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K_{Fzi}$	63,9	65,3	87,8	43,1	46,7	48,6	87,5	65,3	49,7	56,1
$T_{Fzi}$	0,29	0,35	0,88	0,08	0,14	0,16	0,90	0,29	0,15	0,21
$i$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$K_{Fzi}$	43,1	44,7	55,6	54,4	90,3	45,6	50,8	51,4	69,4	69,4
$T_{Fzi}$	0,15	0,18	0,18	0,20	1,02	0,12	0,14	0,15	0,64	0,57

Hinsichtlich des eingangs formulierten Regelungsziels ist im Folgenden die synchrone Trajektorie festzulegen. Ausgehend von der Forderung, dass sich die Kolonne mit einer identischen Geschwindigkeit und mit einem definierten Abstand zwischen den Fahrzeugen fortbewegen soll, ergibt sich die synchrone Trajektorie gemäß

$$y_S(t) = v_0 t + y_S(t_0),$$

was sich ebenfalls über die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_S = S x_S \quad (6.8a)$$

$$y_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_S = Q x_S \quad (6.8b)$$

mit dem Anfangswert  $x_S(t_0) = [y_S(t_0) \quad v_0]^T$  und  $x_S \in \mathbb{R}^{n_S}$  mit  $n_S = 2$  darstellen lässt. Dies legt damit das virtuelle Referenzsystem (5.3) beziehungsweise die Dynamikmatrix der zu berücksichtigenden Vorsteuerung (5.4a) beim weiteren Entwurf der Regelung fest.

Für die Lösung der Sylvester Gleichung (5.5) lässt sich an dieser Stelle ein geschlossener Ausdruck für jeden Agenten angeben. Es folgt mit (5.5), (6.7) und (6.8), dass

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{Fzi}}{T_{Fzi}} \left( D_{di} - \frac{1}{K_{Fzi}} \right) \\ 0 & B_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{Fzi}}{T_{Fzi}} C_{di} \\ A_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{Fzi}}{T_{Fzi}} \left( \frac{1}{K_{Fzi}} - D_{di} \right) \\ -B_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt. Damit ist für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Allerdings ist auch

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ \Gamma_i S \end{bmatrix} \right) = \text{rang} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) < n_S,$$

was zeigt, dass das Paar  $(\Gamma_i, S)$  nicht vollständig beobachtbar ist. Somit müssen bei diesem Beispiel die Ergebnisse aus Abschnitt 4.2.4 beachtet werden. Es lässt sich daher eine Minimalrealisierung bezüglich des Ausgangs  $\Gamma_i$  bestimmen. Da (6.8) bereits in Jordanscher Normalform vorliegt, ergibt sich eine Basis des beobachtbaren Unterraums aus den entsprechenden Eigen- und Hauptvektoren und in diesem Beispiel zu  $\text{bild} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right)$ . Damit resultiert die reduzierte Darstellung der Matrizen  $S \rightarrow \tilde{S}$ ,  $Q \rightarrow \tilde{Q}$  und  $\Gamma_i \rightarrow \tilde{\Gamma}_i$ , die für den Entwurf der Regelung (5.6) zu berücksichtigen sind, aus

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \tilde{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Damit ist, wie in Satz 4.6 gefordert, die Basis des Unterraumes

$$S_i = \left\{ x_{ei} \in \mathbb{R}^{n_{ei}} \mid x_{ei} \in \text{bild} \left( \begin{bmatrix} \Pi_{ei} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad \Pi_{ei} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n_{ei} = n_i + n_s + n_{z_i}$$

zusammen mit den erweiterten Agenten (5.7), die aus (6.7) und (5.6) entstehen, eine Lösung der Sylvester Gleichung (4.20), was aus

$$\begin{bmatrix} \Pi_{ei} \\ 0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} A_i & B_i \tilde{\Gamma}_i & B_i C_{di} \\ 0 & \tilde{S} & E_{di} \\ 0 & 0 & A_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{ei} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Pi_{ei} S = \begin{bmatrix} A_i & B_i \tilde{\Gamma}_i \\ 0 & \tilde{S} \end{bmatrix} \Pi_{ei} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix} \Pi_{ei} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

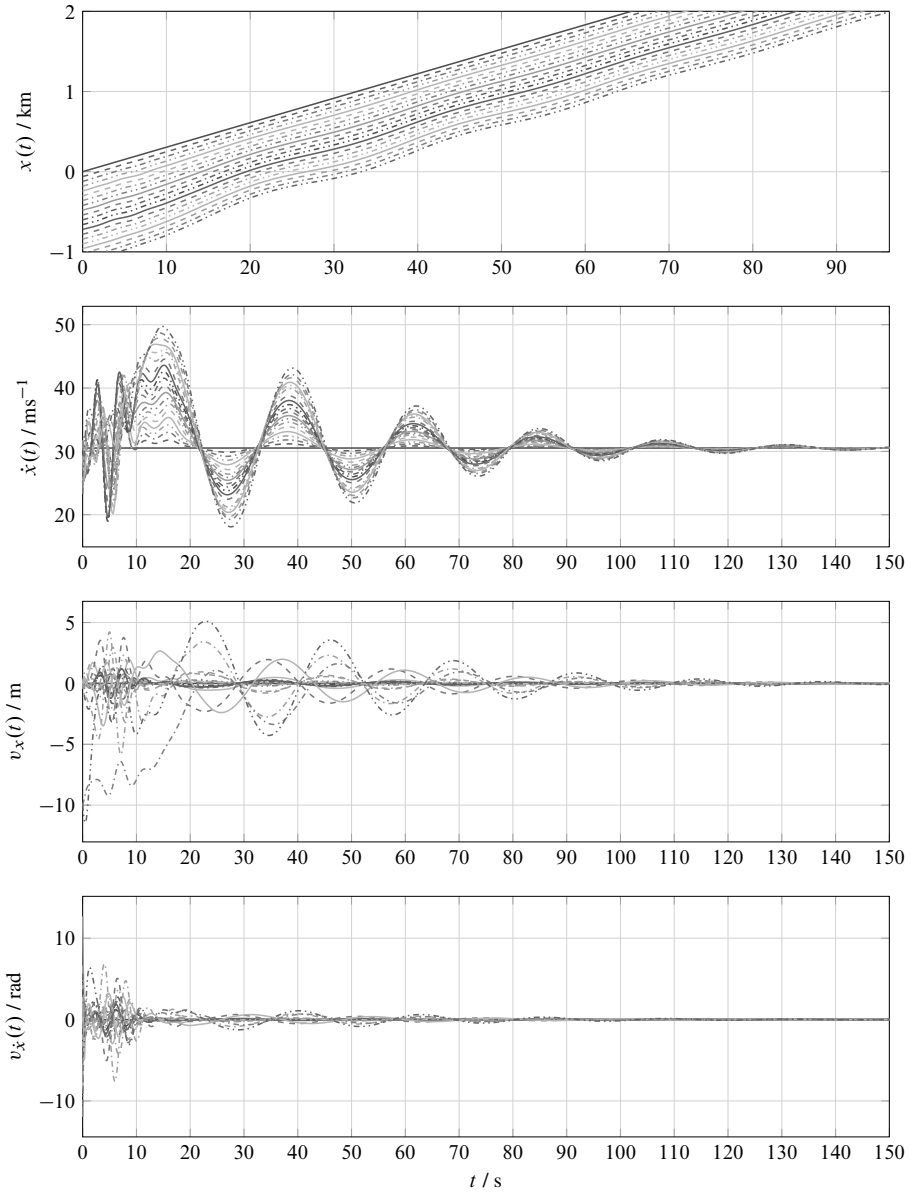
folgt. Damit sind die notwendigen Bedingungen zur Synchronisierung heterogener Agenten aus Satz 4.6 erfüllt, und damit haben alle Agenten ebenfalls eine nicht-leere System-Schnittmenge. Dies hat zur Folge, dass die Bestimmung der freien Reglerparameter in (5.6) basierend auf der Methodik aus Abschnitt 5.2 erfolgen kann.

### Diskussion der Ergebnisse

Zunächst erfolgt die Definition des Gesamtsystems gemäß (5.9), woraus

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\tilde{A}_e + \tilde{B}_e(L_G \otimes I_p)\tilde{C}_e)x, \quad x(t_0) = x_0, \\ v &= (L_G \otimes I_p)\tilde{C}_e x \end{aligned}$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$  folgt. Für die Systemordnung  $n$  ergibt sich zusammen mit der Ordnung des dynamischen Reglers  $n_{z_i} = 2$ , dass  $n = \sum_{i=1}^N (n_i + n_s + n_{z_i}) = 120$  gilt. Die Matrix  $A_{T_2}$ , die mittels der Methodik aus Abschnitt 5.2 stabilisiert werden muss, errechnet sich dabei aus (5.14).



**Bild 6.8:** Asymptotische Synchronisierung einer autonomen Fahrzeugkolonne basierend auf einem dezentralen Regelungsentwurf

Zur Bestimmung geeigneter Startwerte  $\xi_0$  für das Optimierungsproblem (5.17) hat es sich in zahlreichen numerischen Beispielen bewährt, zunächst die Reglerparameter jedes erweiterten Agenten (5.7) derart zu bestimmen, dass die Systemmatrix  $A_{ei} + B_{ei}C_{ei}$  ausgehend von (5.8) eine Hurwitz Matrix ist. Als zweckmäßig erweist es sich zudem, die stabilisierende Regelung hinsichtlich der robusten Eigenwertvorgabe weiter zu optimieren. Durch dieses Vorgehen gelingt es, in wenigen Iterationen zur Lösung von (5.17) einen Parametersatz zu bestimmen, der die Matrix  $A_{T_2}$  stabilisiert. Bei dieser Lösung ergibt sich darüber hinaus eine Mindestdynamik von  $a = 0.01$ , die über den Bereich der Eigenwerte in Bild 5.2 einstellbar ist.

Bild 6.8 zeigt die numerischen Simulationsergebnisse. Von oben nach unten ist der Zeitverlauf der Fahrzeugpositionen und der Fahrzeuggeschwindigkeiten sowie die Synchronisierungsfehler hinsichtlich der Relativposition und -geschwindigkeit dargestellt. Dabei wurde zudem berücksichtigt, dass asymptotisch alle Fahrzeuge den Mindestabstand 50 Metern einhalten, da als Referenzgeschwindigkeit  $v_0 = 100$  km/h zugrunde gelegt wurde. Anhand der Simulationsergebnisse ist zu erkennen, dass sich alle Fahrzeuge gemäß des eingangs formulierten Regelziels auf die Trajektorie  $y_s(t)$  nach ungefähr 150 Sekunden synchronisieren. Damit ist es gelungen, eine synchronisierende Regelung zu entwerfen, die im Gegensatz zu den in den Abschnitten 4.2.2, 4.2.3 und 4.3 entwickelten Methoden, nicht auf die Verwendung von absoluter Messinformation angewiesen ist. Dies wird zwar durch den erhöhten Aufwand, der sich aus dem Entwurf der dezentralen Regelung ergibt, erkauft. Das Beispiel in diesem Abschnitt belegt allerdings, dass der Entwurf komplexer Beispiele hinsichtlich der Ordnung des Gesamtsystems durch die entwickelte Methode möglich ist. Abschließend lässt sich festhalten, dass die Methode aus Kapitel 5 ein leistungsfähiges Entwurfswerkzeug darstellt, um heterogene agentenbasierte Systeme ohne Verwendung von Absolutinformation zu entwerfen.

## 7 Zusammenfassung der Arbeit

Diese Arbeit beschreibt die Weiterentwicklung bestehender und die Entwicklung neuer Ansätze, um Regelungen für agentenbasierte dynamische Systeme zu entwerfen. Alle betrachteten Methoden haben die Synchronisierung des geregelten Multi-Agenten Systems zum Ziel, wobei in dieser Arbeit stets der allgemeine Fall der *Ausgangssynchronisierung* beleuchtet wird. Der Spezialfall der Zustandssynchronisierung ist in den Ansätzen immer enthalten, führt aber in den meisten Fällen auf agentenbasierte dynamische Systeme, die sich aus identischen Teilsystemen zusammensetzen. Dies begründet damit den Schwerpunkt der Arbeit, der vornehmlich in der Betrachtung von Synchronisierungsproblemen *heterogener* Multi-Agenten Systeme besteht.

Ausgangspunkt der Methoden in dieser Arbeit stellt zunächst die Systemanalyse der betrachteten Systemklassen dar, woraus sich notwendige Bedingungen zur Synchronisierung aus der Literatur im Hinblick auf die verwendeten Methoden der Arbeit ableiten und interpretieren lassen. Während die Synchronisierung homogener Multi-Agenten Systeme in ein simultanes Stabilisierungsproblem überführbar ist [25], gestaltet sich die Synchronisierung heterogener Multi-Agenten Systeme vergleichsweise schwieriger, da die synchrone Zeitlösung der Agenten zunächst nicht offensichtlich ist. Ausgehend vom *Internen Modell Prinzip* zur Synchronisierung [125], gibt die vorliegende Arbeit eine Interpretation dieser notwendigen Bedingungen im Hinblick auf einen invarianten Unterraum des geregelten Systems, der durch die Regelung explizit die Eigenschaft der Ausgangsnulldung und der Attraktivität für asymptotische Synchronisierung aufweisen muss.

Als hilfreich erweisen sich in diesem Zusammenhang die Verwendung *parametrischer* beziehungsweise teilparametrischer Ansätze zum Regelungsentwurf, die die Berechnung der lokalen Regler aller Agenten ermöglichen. Hierzu wird konsequent von einer konstanten beziehungsweise dynamischen Ausgangsregelung der Agenten ausgegangen, was die praktische Implementierung der entwickelten Methoden begünstigt und darüber hinaus keine wesentliche Einschränkung der betrachteten Systemklasse der Agenten darstellt. Losgelöst von der eigentlichen Kernthematik der Arbeit – der Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme – entstehen Weiterentwicklungen von Methoden zur robusten Eigenstrukturvorgabe sowie Methoden zum Entwurf von Ent- und Verkopplungsregelungen, die allesamt als dynamische Ausgangsrückführung in der Praxis implementierbar sind. Das Beispiel der Entkopplungsregelung einer xy-Positioniereinheit im Rahmen der Entwurfsbeispiele der Arbeit belegt die Anwendbarkeit der Methode sowohl in der Simulation als auch im Laborversuch.

Hinsichtlich der Synchronisierung agentenbasierter Systeme erfolgt in dieser Arbeit eine Unterscheidung der Ansätze bezüglich der Messgrößen der Agenten. Zunächst wird davon ausgegangen, dass die Agenten sowohl die zur Synchronisierung benötigte Relativinformation als auch Absolutinformation messtechnisch erfassen können. Diese Annahme ermöglicht durch unterlagerte Regelkreise die Agenten hinsichtlich des Kommunikationsnetzwerks, welches die Relativinformation zur Verfügung stellt, zu homogenisieren. Die *Homogenisierung* erfolgt in dieser Arbeit durch Ent- und Verkopplungsansätze, was einen Rückgriff auf die parametrische Entwurfsme-



thodisch darstellt. Der Entwurf der überlagerten Regelung zur Synchronisierung stellt sich als ein Synchronisierungsproblem für identische Agenten und damit als ein simultanes Stabilisierungsproblem dar. Der Entwurf dieser Regelung kann mit Verfahren aus der Literatur erfolgen – die vorliegende Arbeit diskutiert allerdings auch einen einfachen Ansatz zur Synchronisierung identischer Agenten basierend auf der Vorgabe von Eigenwertbereichen, was ebenfalls einen Rückgriff auf die gewählten strukturbeschränkten Regelungsmethoden darstellt.

Darüber hinaus ermöglicht die Kenntnis von *Zustandsinformation* für die spezielle Systemklasse nichtlinearer Agenten, die rückgekoppelt äquivalent zu einem passiven System sind, ein adaptives Regelgesetz mit einem auf der Passivität basierenden Ansatz zur Synchronisierung zu kombinieren. Dadurch gelingt die Weiterentwicklung einer Methode aus der Literatur [17] zur Synchronisierung nichtlinearer Agenten auf eine erweiterte Systemklasse. Diese Systemklasse ergibt sich aus Agenten, die den Vektorrelativgrad eins als auch parametrische Unsicherheiten aufweisen. Dabei kompensiert die adaptive Regelung die unsicheren Vektorfelder, was der Homogenisierung der Agenten entspricht und durch den passivitätsbasierten Ansatz aus der Literatur wird die Synchronisierung des nichtlinearen Multi-Agenten Systems ermöglicht.

Der Verzicht auf Absolutinformation beim Regelungsentwurf ist gleichbedeutend mit dem Wegfallen der unterlagerten Regelkreise. Nichtsdestotrotz lässt sich auch für diesen Fall ein Regelgesetz zur Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird der Entwurf der synchronisierenden Regelung in ein dezentrales Stabilisierungsproblem übersetzt, wobei durch die Wahl der Regelungsstruktur der Agenten stets die notwendigen Bedingungen zur Synchronisierung erfüllt sind. Durch numerische Min-Max Optimierung lassen sich die Parameter für die lokalen Regler der Agenten bestimmen, was dem Verschieben der Eigenwerte des Synchronisierungsfehlers in einen Bereich der linken offenen komplexen Ebene entspricht. Das vorgestellte Verfahren ist lediglich in der Lage, lokale Minima des Entwurfsproblems zu bestimmen, so dass Aussagen über das globale Minimum nicht möglich sind. Die Entwurfsbeispiele in dieser Arbeit belegen allerdings, dass es durch die vorgestellte Methodik möglich ist, hinsichtlich der Gesamtsystemordnung komplexe Entwurfsaufgaben zu lösen.

Insgesamt ermöglichen die in dieser Arbeit neu- und weiterentwickelten Entwurfsmethoden das Synchronisierungsproblem für lineare agentenbasierte dynamische Systeme zu lösen, wobei die Anforderungen an die Systemklasse der Agenten nicht restriktiv sind. Die zugrunde liegenden parametrischen beziehungsweise teilparametrischen Ansätze zeigen auch in dieser Arbeit ihre weitreichenden Leistungsfähigkeiten, wozu die Ergebnisse einen neuen Beitrag leisten.

# A Beweise

## A.1 Beweis von Satz 3.9

*Beweis.* Mit Gleichung (3.18) und den Regeln zum Rechnen mit Differentialen in (B.6) folgt

$$\begin{aligned} dK = & dQ_r(CV_r)^+ + Q_r d(CV_r)^+ \\ & + d(W_s B)^+ Q_s U_1 + (W_s B)^+ dQ_s U_1 + (W_s B)^+ Q_s dU_1 \\ & + dU_2 K_2 U_1 + U_2 dK_2 U_1 + U_2 K_2 dU_1. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Mit Satz B.13 und Lemma 3.8 kann darin  $d(CV_r)^+$ ,  $d(W_s B)^+$ ,  $dU_1$  und  $dU_2$  durch

$$\begin{aligned} d(CV_r)^+ &= -(CV_r)^+ (dCV_r)(CV_r)^+ + (CV_r)^+ (CV_r)^{+T} (dCV_r)^T (I_p - (CV_r)(CV_r)^+) \\ d(W_s B)^+ &= -(W_s B)^+ (dW_s B)(W_s B)^+ + (I_m - (W_s B)^+ (W_s B)) (dW_s B)^T (W_s B)^{+T} (W_s B)^+ \\ dU_1^T &= -(CV_r)^{+T} (dCV_r)^T U_1^T \\ dU_2 &= -(W_s B)^+ (dW_s B) U_2 \end{aligned}$$

berechnet werden. Mit Gleichung (3.5) und der Festlegung der Rechtseigenvektoren und der Steuermomen gemäß  $v_{Ki} = N_{vi} q_{vi}$  bzw.  $p_{vi} = M_{vi} q_{vi}$  lässt sich aus obiger Gleichung

$$\begin{aligned} \text{vec}(dCV_r) &= \begin{bmatrix} CN_{v1} & & \\ & \ddots & \\ & & CN_{vp-1} \end{bmatrix} d\xi_1 =: \nabla(C_e V_r) d\xi_1 \\ \text{vec}(dQ_r) &= \begin{bmatrix} M_{v1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_{vp-1} \end{bmatrix} d\xi_1 =: \nabla Q_r d\xi_1 \end{aligned}$$

mit  $\xi_1 = [q_{v1}^T \ \dots \ q_{vp-1}^T]^T$  berechnen.

Zur Berechnung von  $dW_s B$  und  $dQ_s$  kann die Entwurfsungleichung (3.15) zu einem symmetrischen Eigenwertproblem zum Eigenwert null gemäß

$$\begin{bmatrix} (A_1^T - \lambda_{Ki} I) & C_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{Ki} \\ p_{wi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 - \lambda_{Ki} I)(A_1^T - \lambda_{Ki} I) & (A_1 - \lambda_{Ki} I)C_1^T \\ C_1(A_1^T - \lambda_{Ki} I) & C_1 C_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{Ki} \\ p_{wi} \end{bmatrix} = 0$$

modifiziert werden, da mit der Abkürzung  $S_{Ci} = [(A_1^T - \lambda_{Ki} I) \ C_1^T]$  folgt, dass  $\dim(\text{kern}(S_{Ci})) = 1$  ist. Mit Lemma 3.8 ist daher

$$\begin{bmatrix} dw_{Ki} \\ dp_{wi} \end{bmatrix} = (-S_{Ci}^T S_{Ci})^+ S_{Ci}^T (dS_{Ci}) \begin{bmatrix} w_{Ki} \\ p_{wi} \end{bmatrix}$$

und mit (3.13)

$$\begin{aligned} dS_{Ci} &= dS_C = \left[ C^T (dQ_r(CV_r)^+ + Q_r d(CV_r)^+)^T B^T \quad C^T dU_1^T \right] \\ &= \left[ C^T (CV_r)^{+T} (dQ_r)^T B^T + C^T (d(CV_r)^+)^T Q_r^T B^T \quad C^T dU_1^T \right] \end{aligned}$$

und daraus mit dem Vektorisierungsoperator sowie mit der Kommutierungsmatrix

$$\text{vec}(dS_C) = \begin{bmatrix} (B \otimes C^T (CV_r)^{+T}) & (BQ_r \otimes C^T) & 0 \\ 0 & 0 & (I \otimes C^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{m,p-1} \text{vec}(dQ_r) \\ \mathcal{K}_{p-1,p} \text{vec}(d(CV_r)^+) \\ \text{vec}(dU_1) \end{bmatrix}.$$

Zur Berechnung von  $dW_s B$  und  $dQ_s$  folgt daher mit  $\text{vec}(dQ_s^T) = \text{vec}(dQ_s)$  und

$$\begin{aligned} \text{vec}(dW_s B) &= \mathcal{K}_{sm} \mathcal{K}_{ms} \text{vec}((B^T dW_s^T)^T) \\ &= \mathcal{K}_{sm} \text{vec}(B^T dW_s^T) \\ &= \mathcal{K}_{sm} (I_s \otimes B^T) \text{vec}(dW_s^T) \\ &= (B^T \otimes I_s) \mathcal{K}_{ns} \text{vec}(dW_s^T) \end{aligned}$$

zur Berechnung von  $\text{vec}(dW_s^T)$  und  $\text{vec}(dQ_s)$  durch

$$\begin{aligned} \text{vec}(dW_s^T) &= \begin{bmatrix} ([w_{kp}^T \quad p_{wp}^T] \otimes [I_n \quad 0] (-S_{Cp}^T S_{Cp})^+ S_{Cp}^T) \\ \vdots \\ ([w_{kn}^T \quad p_{wn}^T] \otimes [I_n \quad 0] (-S_{Cn}^T S_{Cn})^+ S_{Cn}^T) \end{bmatrix} \text{vec}(dS_C) =: \nabla W_s^T d\xi_1, \\ \text{vec}(dQ_s^T) &= \begin{bmatrix} ([w_{kp}^T \quad p_{wp}^T] \otimes [0 \quad 1] (-S_{Cp}^T S_{Cp})^+ S_{Cp}^T) \\ \vdots \\ ([w_{kn}^T \quad p_{wn}^T] \otimes [0 \quad 1] (-S_{Cn}^T S_{Cn})^+ S_{Cn}^T) \end{bmatrix} \text{vec}(dS_C) =: \nabla Q_s d\xi_1. \end{aligned}$$

Aus der Kenntnis von  $\text{vec}(dCV_r)$  und  $\text{vec}(dQ_r)$  folgt daher die Kenntnis von  $dU_1^T$  und damit auch  $\text{vec}(dS_C)$ , woraus sich dann  $\text{vec}(dW_s^T)$  und  $\text{vec}(dQ_s^T)$  berechnen lässt. Somit folgt

$$\begin{aligned} \text{vec}(d(CV_r)^+) &= ((CV_r)^{+T} \otimes -(CV_r)^+) \text{vec}(dCV_r) \\ &\quad + ((I_p - (CV_r)(CV_r)^+)^T \otimes (CV_r)^+ (CV_r)^{+T}) \mathcal{K}_{pr} \text{vec}(dCV_r) \\ \text{vec}(d(W_s B)^+) &= ((W_s B)^{+T} \otimes -(W_s B)^+) \text{vec}(dW_s B) \\ &\quad + ((W_s B)^{+T} (W_s B)^+ \otimes (I_m - (W_s B)^+ (W_s B))) \mathcal{K}_{sm} \text{vec}(dW_s B) \\ \text{vec}(dU_1) &= (U_1 \otimes -(CV_r)^{+T}) \mathcal{K}_{pr} \text{vec}(dCV_r) \\ \text{vec}(dU_2) &= (U_2^T \otimes -(W_s B)^+) \text{vec}(dW_s B) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{vec}(dK) &= ((CV_r)^{+T} \otimes I_m) \text{vec}(dQ_r) + (I_{p-1} \otimes Q_r) \text{vec}(d(CV_r)^+) \\ &\quad + (U_1^T Q_s^T \otimes I_s) \text{vec}(d(W_s B)^+) + (U_1^T \otimes (W_s B)^+) \text{vec}(dQ_s) \\ &\quad + (I_p \otimes (W_s B)^+ Q_s + U_2 K_2) \text{vec}(dU_1) \\ &\quad + (U_1^T K_2^T \otimes I_m) \text{vec}(dU_2) + (U_1^T \otimes U_2) \text{vec}(dK_2) \\ &= [\nabla K_{\xi_1} \quad \nabla K_{\xi_2}] \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.2}$$

und daraus das geforderte Resultat für  $\text{vec}(\text{d}K)$  mit den Optimierungsvariablen  $\xi_2 = \text{vec}(K_2)$  sowie den Jacobi Matrizen  $\nabla K_{\xi_1}$  und  $\nabla K_{\xi_2}$  der Rückführmatrix  $K$ , die aus obiger Gleichung durch

$$\begin{aligned}\nabla K_{\xi_1} &= ((C V_r)^{+T} \otimes I_m) \nabla Q_r - ((C V_r)^{+T} \otimes Q_r (C V_r)^+) \nabla (C_e V_r) \\ &\quad + (I_p - (C V_r)(C V_r)^+) \otimes Q_r (C V_r)^+ (C V_r)^{+T} \mathcal{K}_{pr} \nabla (C_e V_r) \\ &\quad - (U_1 \otimes ((W_s B)^+ Q_s + U_2 K_2)(C V_r)^{+T}) \mathcal{K}_{pr} \nabla (C_e V_r) \\ &\quad - (U_1^T Q_s^T (W_s B)^{+T} B^T \otimes (W_s B)^+) \mathcal{K}_{ns} \nabla W_s^T \\ &\quad + (U_1^T Q_s^T (W_s B)^{+T} (W_s B)^+ \otimes (I_m - (W_s B)^+ (W_s B)) B^T) \nabla W_s^T \\ &\quad - (U_1^T K_2^T U_2^T B^T \otimes (W_s B)^+) \mathcal{K}_{ns} \nabla W_s^T \\ &\quad + (U_1^T \otimes (W_s B)^+) \nabla Q_s \\ \nabla K_{\xi_2} &= (U_1^T \otimes U_2)\end{aligned}$$

gegeben sind.

Zur Berechnung von  $\text{d}V_K$  wird  $V_K$  gemäß  $V_K = [V_r \ v_{Kp} \ \dots \ v_{Kn}]$  partitioniert. Mit Gleichung (3.5) und der Festlegung der Rechtseigenvektoren gemäß  $v_{Ki} = N_{vi} q_{vi}$  lässt sich aus obiger Gleichung zunächst

$$\text{vec}(\text{d}V_r) = \begin{bmatrix} N_{v1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{vp-1} \end{bmatrix} \text{d}\xi_1$$

bestimmen. Mit Gleichung (B.11) folgt für  $i \in \{p, \dots, n\}$  darüber hinaus

$$\text{d}v_{Ki} = (\lambda_{Ki} I_n - (A + BKC))^+ \left( I_n - \frac{v_{Ki} w_{Ki}^*}{w_{Ki}^* v_{Ki}} \right) B(\text{d}K) C v_{Ki}.$$

Damit ist zusammen mit  $\text{d}(A + BKC) = B(\text{d}K)C$  abschließend

$$\begin{aligned}\text{vec}(\text{d}V_K) &= \begin{bmatrix} N_{v1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{vp-1} \\ \left( v_{Kp}^T C^T \otimes (\lambda_{Kp} I_n - (A + BKC))^+ \left( I_n - \frac{v_{Kp} w_{Kp}^*}{w_{Kp}^* v_{Kp}} \right) \right) \nabla K_{\xi_1} & & \\ & \vdots & \\ \left( v_{Kn}^T C^T \otimes (\lambda_{Kn} I_n - (A + BKC))^+ \left( I_n - \frac{v_{Kn} w_{Kn}^*}{w_{Kn}^* v_{Kn}} \right) \right) \nabla K_{\xi_1} \end{bmatrix} \text{d}\xi_1 \quad (\text{A.3}) \\ &= \nabla V_K \text{d}\xi_1.\end{aligned}$$

□

## A.2 Beweis von Satz 3.14

*Beweis.* Mit Gleichung (3.70) und den Regeln zum Rechnen mit Differentialen in (B.6) folgt

$$dK_e = dQ_r(C_e V_r)^+ + Q_r d(C_e V_r)^+ + K_{e1} dU_1 + dK_{e1} U_1. \quad (A.4)$$

Mit Satz B.13 und Lemma 3.8 kann darin  $d(C_e V_r)^+$  und  $dU_1$  durch

$$\begin{aligned} d(C_e V_r)^+ &= -(C_e V_r)^+ (dC_e V_r) (C_e V_r)^+ + (C_e V_r)^+ (C_e V_r)^{+T} (dC_e V_r)^T (I_{p_e} - (C_e V_r)(C_e V_r)^+) \\ dU_1^T &= -(C_e V_r)^{+T} (dC_e V_r)^T U_1^T \end{aligned}$$

berechnet werden. Mit Gleichung (3.5) und der Festlegung der Rechtseigenvektoren und der Steuermomen gemäß  $v_{ki} = N_{vi} q_{vi}$  bzw.  $p_{vi} = M_{vi} q_{vi}$  aus (3.44) lässt sich aus obiger Gleichung

$$\begin{aligned} \text{vec}(dC_e V_r) &= \begin{bmatrix} C_e N_{v1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_e N_{vn} \end{bmatrix} d\xi_1 = \nabla(C_e V_r) d\xi_1 \\ \text{vec}(dQ_r) &= \begin{bmatrix} M_{v1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_{vn} \end{bmatrix} d\xi_1 = \nabla Q_r d\xi_1 \end{aligned}$$

mit  $\xi_1 = [q_{v1}^T \ \dots \ q_{vn}^T]^T$  berechnen. Aus der Kenntnis von  $\text{vec}(dC_e V_r)$  und  $\text{vec}(dQ_r)$  folgt daher die Kenntnis von  $dU_1^T$ . Somit folgt

$$\begin{aligned} \text{vec}(d(C_e V_r)^+) &= ((C_e V_r)^{+T} \otimes -(C_e V_r)^+) \text{vec}(dC_e V_r) \\ &\quad + ((I_{p_e} - (C_e V_r)(C_e V_r)^+)^T \otimes (C_e V_r)^+ (C_e V_r)^{+T}) \mathcal{K}_{p_e r} \text{vec}(dC_e V_r) \\ \text{vec}(dU_1) &= -(C_e V_r)^{+T} \otimes U_1 \text{vec}(dC_e V_r) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{vec}(dK_e) &= ((C_e V_r)^{+T} \otimes I_{m_e}) \text{vec}(dQ_r) + (I_{p_e} \otimes Q_r) \text{vec}(d(C_e V_r)^+) \\ &\quad + (I_{p_e} \otimes K_{e1}) \text{vec}(dU_1) \\ &\quad + (U_1^T \otimes I_{m_e}) \text{vec}(dK_{e1}) \\ &= \begin{bmatrix} \nabla K_{\xi_1} & \nabla K_{\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A.5)$$

und daraus das geforderte Resultat für  $\text{vec}(dK_e)$  mit den Optimierungsvariablen  $\xi_1$  und  $\xi_2 = \text{vec}(K_{e1})$  sowie den Jacobi Matrizen  $\nabla K_{\xi_1}$  und  $\nabla K_{\xi_2}$  der Rückführmatrix  $K_e$ , die aus obigen Gleichungen durch

$$\nabla K_{\xi_1} = ((C_e V_r)^{+T} \otimes I_{m_e}) \nabla Q_r + (-(C_e V_r)^{+T} \otimes Q_r (C_e V_r)^+ + K_{e1} U_1) \nabla(C_e V_r) \quad (A.6)$$

$$+ ((I_{p_e} - (C_e V_r)(C_e V_r)^+)^T \otimes Q_r (C_e V_r)^+ (C_e V_r)^{+T}) \mathcal{K}_{p_e r} \nabla(C_e V_r) \quad (A.7)$$

$$\nabla K_{\xi_2} = (U_1^T \otimes I_{m_e}) \quad (A.8)$$

gegeben sind. □

## B Mathematischer Anhang

### B.1 Lineare Gleichungssysteme

**Satz B.1** ([9, Proposition 6.1.7]). *Betrachtet wird die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sowie der Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- i) *Es existiert ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^m$ , der  $Ax = b$  erfüllt.*
- ii)  $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \ b])$
- iii)  $b \in \text{bild}(A)$
- iv)  $AA^+b = b$

*Angenommen, die Bedingungen i)-iv) sind erfüllt, dann sind die folgenden Aussagen gültig:*

- v) *Wenn  $x \in \mathbb{R}^m$  die Gleichung  $Ax = b$  erfüllt, dann gilt*

$$x = A^+b + (I - A^+A)x. \quad (\text{B.1})$$

- vi) *Für alle  $y \in \mathbb{R}^m$ , erfüllt  $x \in \mathbb{R}^m$  gegeben durch*

$$x = A^+b + (I - A^+A)y \quad (\text{B.2})$$

*die Gleichung  $Ax = b$ .*

- vii) *Sei  $x \in \mathbb{R}^m$  durch (B.2) gegeben, wobei  $y \in \mathbb{R}^m$ . Dann wird durch  $y = 0$  die Funktion  $x^T x$  minimiert.*

- viii) *Angenommen, es gilt  $\text{rang}(A) = m$ . Dann existiert ein eindeutiger Vektor  $x \in \mathbb{R}^m$ , der  $Ax = b$  erfüllt und durch  $x = A^+b$  gegeben ist. Ist darüber hinaus  $A^L$  eine Links-Inverse von  $A$ , dann gilt  $A^L b = A^+b$ .*

- ix) *Angenommen, es gilt  $\text{rang}(A) = n$  und es sei  $A^R$  eine Rechts-Inverse von  $A$ . Dann erfüllt  $x = A^R b$  die Gleichung  $Ax = b$ .*

### B.2 Matrix Analysis

**Definition B.2** ([35, vgl. S. 399]). *Der gerichtete Graph einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , bezeichnet mit  $\Gamma(A)$ , ist ein gerichteter Graph mit  $n$  Knoten  $v_1, v_2, \dots, v_n$  mit der Eigenschaft, dass eine gerichtete Kante in  $\Gamma(A)$  genau dann existiert, wenn  $a_{ij} \neq 0$  gilt.*

**Definition B.3** ([35, vgl. S. 402]). Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist *reduzibel*, wenn eine Permutationsmatrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert, so dass

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{bmatrix}$$

mit  $1 \leq r \leq n-1$  gilt.

**Definition B.4** ([35, vgl. S. 402]). Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist *irreduzibel*, wenn sie nicht reduzibel ist.

**Satz B.5** ([35, Theorem 6.2.24]). Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Es sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $A$  ist irreduzibel.
- (b)  $\Gamma(A)$  ist stark verbunden.

**Satz B.6** ([35, Theorem 8.4.4 (Perron-Frobenius)]). Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine irreduzible und nicht-negative Matrix. Angenommen es gilt  $n \geq 2$ , dann gilt:

- (a) Für den Spektralradius  $\rho(A)$  gilt  $\rho(A) > 0$ .
- (b)  $\rho(A)$  ist ein Eigenwert von  $A$  mit algebraischer Vielfachheit eins.
- (c) Es existiert ein eindeutiger reeller Vektor  $x = [x_i]$ , so dass  $Ax = \rho(A)x$  und  $x_1 + \dots + x_n = 1$  gilt;  $x$  ist positiv.
- (d) Es existiert ein eindeutiger reeller Vektor  $y = [y_i]$ , so dass  $y^T A = y^T \rho(A)$  und  $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 1$  gilt;  $y$  ist positiv.

**Satz B.7** ([35, Theorem 6.3.2 (Bauer and Fike)]). Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonalisierbar. Weiterhin sei angenommen, dass  $A = S \Lambda S^{-1}$ , worin  $S$  regulär und die Matrix  $\Lambda$  eine Diagonalmatrix ist. Sei  $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\|\cdot\|$  eine Matrix Norm auf  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , die von einer absoluten Norm auf  $\mathbb{C}^n$  induziert wird. Wenn  $\hat{\lambda}$  eine Eigenwert von  $A + E$  ist, dann existiert ein  $\lambda$  von  $A$ , so dass

$$|\hat{\lambda} - \lambda| \leq \|S\| \|S^{-1}\| \|E\| = \kappa(S) \|E\|,$$

worin  $\kappa(\cdot)$  die Konditionszahl bezüglich der Matrix Norm  $\|\cdot\|$  bezeichnet.

## B.3 Kronecker Produkt

**Definition B.8** ([9, S. 400]). Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{l \times k}$ . Dann ist das Kronecker Produkt  $A \otimes B \in \mathbb{R}^{nl \times mk}$  der Matrizen  $A$  und  $B$  durch die partitionierte Matrix

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

gegeben.

Für das Kronecker Produkt gelten die folgenden Rechenregeln (vgl. [9, S. 400 ff.]):

$$\begin{aligned}
 A \otimes (\alpha B) &= (\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B), \\
 (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T, \\
 (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C, \\
 C \otimes (A + B) &= C \otimes A + C \otimes B, \\
 (A \otimes B) \otimes C &= A \otimes (B \otimes C), \\
 (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC \otimes BD), \\
 (A \otimes B)^{-1} &= (A^{-1} \otimes B^{-1}).
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt (vgl. [9, Fact 7.4.23])

$$\text{rang}(A \otimes B) = \text{rang}(A) \cdot \text{rang}(B) = \text{rang}(B \otimes A) \quad (\text{B.3})$$

sowie mit dem Vektorisierungsoperator (vgl. [63, Theorem 4.2])

$$\text{vec}(B) := \text{vec}\begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^T & \dots & b_n^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.4})$$

ist

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{vec}(B). \quad (\text{B.5})$$

## B.4 Rechnen mit Differentialen

Zur Berechnung von Differentialen sind die folgenden Regeln hilfreich, wobei  $\alpha$  eine reelle Konstante,  $A$  eine reelle konstante Matrix und  $U$  und  $V$  Matrizenfunktionen sind:

$$d\alpha = 0, \quad (\text{B.6a})$$

$$dA = 0, \quad (\text{B.6b})$$

$$d(\alpha U) = \alpha dU, \quad (\text{B.6c})$$

$$d(U \pm V) = dU \pm dV, \quad (\text{B.6d})$$

$$d(UV) = (dU)V + U(dV), \quad (\text{B.6e})$$

$$dU^T = (dU)^T, \quad (\text{B.6f})$$

$$d \text{vec}(U) = \text{vec}(dU), \quad (\text{B.6g})$$

$$d \text{spur}(U) = \text{spur}(dU). \quad (\text{B.6h})$$

**Satz B.9** ([63, Theorem 5.6 (first identification theorem)]). *Sei  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine vektorwertige Funktion, die auf einer offenen Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  definiert ist und die an einem inneren Punkt  $c$  von  $S$  differenzierbar ist. Sei  $u \in \mathbb{R}^n$ . Die Elemente der  $m \times n$  Matrix in*

$$df(c, u) = (Df(c))u,$$

*also die Elemente  $D_j f_i(c)$  sind die partiellen Ableitungen der Funktion  $f$  ausgewertet an der Stelle  $c$ . Ist darüber hinaus  $A(c)$  eine Matrix, die*

$$df(c, u) = A(c)u$$

*für alle reellen  $u$  erfüllt, dann ist  $A(c) = Df(c)$ .*



### Differenzierbarkeit des symmetrischen Eigenwertproblems

**Satz B.10** ([63, Theorem 8.7]). Sei  $A_0$  eine reelle symmetrische  $n \times n$  Matrix und sei  $v_0$  ein normierter Eigenvektor zu einem einfachen Eigenwert  $\lambda_0$  von  $A_0$ . Eine reellwertige Funktion  $\lambda$  und eine vektorwertige Funktion  $v$  sind für alle  $A$  in einer Umgebung  $N(A_0) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  von  $A_0$  definiert, so dass

$$\lambda(A_0) = \lambda_0, \quad v(A_0) = v_0$$

und

$$Av = \lambda v, \quad v^T v = 1, \quad A \in N(A_0)$$

gilt. Darüber hinaus sind die Funktionen  $\lambda$  und  $v$  unendlich oft differenzierbar in  $N(A_0)$  und die Differentiale in  $A_0$  sind durch

$$d\lambda = v_0^T (dA) v_0 \tag{B.7}$$

und

$$dv = (\lambda_0 I_n - A_0)^+ (dA) v_0 \tag{B.8}$$

gegeben.

### Die Kommutierungsmatrix $\mathcal{K}_{mn}$

Sei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix. Die Vektoren  $\text{vec}(A)$  und  $\text{vec}(A^T)$  enthalten offensichtlich dieselben  $mn$  Komponenten, lediglich in verschiedener Anordnung. Daher existiert eine eindeutige  $mn \times mn$  Permutationsmatrix, welche  $\text{vec}(A)$  in  $\text{vec}(A^T)$  überführt. Diese Matrix heißt Kommutierungsmatrix und wird mit  $\mathcal{K}_{mn}$  oder  $\mathcal{K}_{m,n}$  bezeichnet. Daher ist

$$\mathcal{K}_{mn} \text{vec}(A) = \text{vec}(A^T).$$

Da  $\mathcal{K}_{mn}$  eine Permutationsmatrix ist, ist diese ebenfalls eine orthogonale Matrix. D.h.  $\mathcal{K}_{mn}^T = \mathcal{K}_{mn}^{-1}$  und darüber hinaus ist  $\mathcal{K}_{nm} \mathcal{K}_{mn} \text{vec}(A) = \text{vec}(A)$ , so dass  $\mathcal{K}_{nm} \mathcal{K}_{mn} = I_{mn}$ . Daher ist

$$\mathcal{K}_{mn}^T = \mathcal{K}_{mn}^{-1} = \mathcal{K}_{nm}$$

und  $\mathcal{K}_{n1} = \mathcal{K}_{1n} = I_n$ .

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Kommutierungsmatrix ist die Möglichkeit, die Matrizen eines Kronecker Produktes zu vertauschen („zu kommutieren“).

**Satz B.11** ([63, Theorem 3.9]). Sei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix,  $B$  eine  $p \times q$  Matrix und  $b$  ein  $p \times 1$  Vektor; dann ist

$$\mathcal{K}_{pm}(A \otimes B) = (B \otimes A) \mathcal{K}_{qn}. \tag{B.9a}$$

$$\mathcal{K}_{pm}(A \otimes B) \mathcal{K}_{nq} = (B \otimes A), \tag{B.9b}$$

$$\mathcal{K}_{pm}(A \otimes b) = (b \otimes A), \tag{B.9c}$$

$$\mathcal{K}_{mp}(b \otimes A) = (A \otimes b). \tag{B.9d}$$

### Differenzierbarkeit des (i.A. komplexen) Eigenwertproblems

**Satz B.12** ([63, Theorem 8.8]). *Sei  $\lambda_0$  ein einfacher Eigenwert einer (möglicherweise komplexen) Matrix  $A_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und sei  $v_0$  der dazu korrespondierende normierte Eigenvektor, so dass  $A_0 v_0 = \lambda_0 v_0$  gilt. Eine komplexwertige Funktion  $\lambda$  und eine vektorwertige (komplexe) Funktion  $v$  sind für alle  $A$  in einer Umgebung  $N(A_0) \subset \mathbb{C}^{n \times n}$  von  $A_0$  definiert, so dass*

$$\lambda(A_0) = \lambda_0, \quad v(A_0) = v_0$$

und

$$Av = \lambda v, \quad v_0^* v = 1, \quad A \in N(A_0)$$

*gilt. Darüber hinaus sind die Funktionen  $\lambda$  und  $v$  unendlich oft differenzierbar in  $N(A_0)$  und die Differentiale in  $A_0$  sind durch*

$$d\lambda = \frac{w_0^* (dA) v_0}{w_0^* v_0} \tag{B.10}$$

und

$$dv = (\lambda_0 I_n - A_0)^+ \left( I_n - \frac{v_0 w_0^*}{w_0^* v_0} \right) (dA) v_0 \tag{B.11}$$

*gegeben, wobei  $w_0$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\bar{\lambda}_0$  von  $A_0$  ist, so dass  $A_0^* w_0 = \bar{\lambda}_0 w_0$  gilt.*

### Differential der Moore-Penrose-Pseudoinverse

**Satz B.13** ([63, Theorem 8.5]). *Sei  $S$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n \times q}$  und sei  $A : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$  eine Matrizenfunktion, die  $k \geq 1$  mal differenzierbar auf  $S$  ist. Wenn  $\text{rang}(A(x))$  konstant auf  $S$  ist, dann ist  $A^+ : S \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$   $k$ -mal stetig differenzierbar auf  $S$  und das Differential folgt aus*

$$dA^+ = -A^+ (dA) A^+ + A^+ A^{+T} (dA^T) (I - AA^+) + (I_p - A^+ A) (dA^T) A^{+T} A^+.$$

## C Eigenschaften linearer Zustandssysteme

Betrachtet wird das lineare Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (\text{C.1a})$$

$$y = Cx, \quad (\text{C.1b})$$

wobei für den Zustandsvektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , den Anfangswert  $x(t_0) = x_{t_0}$ , den Eingang  $u \in \mathbb{R}^m$  und für den Ausgang  $y \in \mathbb{R}^p$  gilt. Die Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  seien von passender Dimension.

### Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Eine Aussage über die Steuerbarkeit des Zustandssystem (C.1) gelingt mit

**Satz C.1** (Steuerbarkeit, vgl. [133]). *Betrachtet wird das Zustandssystem (C.1). Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i)  $(A, B)$  ist steuerbar.

ii) Die Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix (engl. Controllability Gramian)

$$W_c(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^* e^{A^* \tau} d\tau$$

ist positiv definit für alle  $t > 0$ .

iii) Die Steuerbarkeitsmatrix nach Kalman

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

hat vollen Zeilenrang.

iv) Die Matrix  $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$  hat vollen Zeilenrang für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Hinsichtlich der Beobachtbarkeit des Zustandssystems (C.1) sind die Aussagen von Satz C.1 aufgrund der Dualität in gleicher Weise gültig, indem die Variablensubstitution  $A \rightarrow A^T$  und  $B \rightarrow C^T$  vorgenommen wird.

### Invariante Nullstellen

Zur Analyse der invarianten Nullstellen eines Zustandssystems wird die Rosenbrock'sche Systemmatrix

$$P_R(\lambda) := \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

und die Übertragungsmatrix

$$G(\lambda) = C (A - \lambda I)^{-1} B$$

benötigt, wobei  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt.

**Definition C.2** ([86]).  $\lambda = \lambda_0$  heißt invariante Nullstelle des Zustandssystems (C.1), wenn

$$\text{rang}(P_R(\lambda_0)) < \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rang}(P_R(\lambda))$$

für ein  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  gilt.

**Definition C.3** ([86]). Gilt  $\text{rang}([A - \lambda_0 I \quad B]) < n$ , so wird  $\lambda_0$  als Eingangsentkopplungsnullstelle des Zustandssystems (C.1) bezeichnet.

Gilt  $\text{rang}([A^T - \lambda_0 I \quad C^T]) < n$ , so wird  $\lambda_0$  als Ausgangsentkopplungsnullstelle des Zustandssystems (C.1) bezeichnet.

Aufgrund des Hautus-Kriteriums (vgl. Punkt iv) in Satz C.1) entsprechen die nicht steuerbaren Eigenwerte des Zustandssystems (C.1) den Eingangsentkopplungsnullstellen beziehungsweise die nicht beobachtbaren Eigenwerte des Zustandssystems (C.1) den Ausgangsentkopplungsnullstellen.

**Satz C.4** ([116]). Für das Zustandssystem (C.1) wird angenommen, dass  $m > p$  gilt. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) Das Zustandssystem (C.1) ist rechts-invertierbar.
- ii) Es gilt  $\text{rang}(P_R(\lambda)) = n + p$  für fast alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Für quadratische Zustandssysteme ergibt sich der nachfolgende Korollar.

**Korollar C.5** ([116]). Für das Zustandssystem (C.1) wird angenommen, dass  $m = p$  gilt. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) Das Zustandssystem (C.1) ist invertierbar.
- ii) Es gilt  $\text{rang}(P_R(\lambda)) = n + m$  für fast alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

## Geometrische Methode

Im folgenden werden einige Aspekte der geometrischen Methode, die hauptsächlich auf die Autoren der Bücher [8, 128] zurückgehen, dargestellt. Als wesentliches Konzept der geometrischen Methode stellt sich die Eigenschaft der Invarianz beziehungsweise der geregelten Invarianz eines Unterraums dar. Hinsichtlich der Systemdynamik (C.1a) ist ein Unterraum des Zustandsraum geregelt invariant, wenn für alle Anfangswerte, die aus dem Unterraum gewählt werden, eine zulässige Eingangsfunktion  $u(t)$  existiert, so dass der Zeitverlauf des Zustandsvektors im betrachteten Unterraum verbleibt.

**Satz C.6** ([116]). *Betrachtet wird die Systemdynamik (C.1a). Sei  $\mathcal{V}$  ein Unterraum, d.h. es ist  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- i)  $\mathcal{V}$  ist geregelt invariant.
- ii)  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{bild}(B)$ .
- iii) Es existiert eine lineare Abbildung  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit der Eigenschaft  $(A + BR)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ .

Hinsichtlich eines Unterraums  $\mathcal{K}$ , der nicht geregelt invariant ist, wird häufig der größte, geregelt invariante Unterraum, der in  $\mathcal{K}$  enthalten ist, benötigt. Dieser wird mit  $\mathcal{V}^*(\mathcal{K})$  bezeichnet und es gilt.

**Satz C.7** ([116]). *Sei  $\mathcal{K}$  ein Unterraum, d.h. es ist  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ . Der Unterraum  $\mathcal{V}^*(\mathcal{K})$  ist der größte geregelt invariante Unterraum, der in  $\mathcal{K}$  enthalten ist und es gilt:*

- i)  $\mathcal{V}^*(\mathcal{K})$  ist geregelt invariant.
- ii)  $\mathcal{V}^*(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ .
- iii) Wenn  $\mathcal{V} \subset \mathcal{K}$  geregelt invariant ist, dann ist  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*(\mathcal{K})$ .

Daran anknüpfend ergibt sich die Fragestellung, wie sich  $\mathcal{V}^*(\mathcal{K})$  ausgehend von (C.1a) und  $\mathcal{K}$  berechnen lässt. Dies führt auf den *invariant subspace algorithmus*, der den Unterraum  $\mathcal{V}^*(\mathcal{K})$  durch die Rekursion

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}, \quad \mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}_k + \text{bild}(B)) \quad (\text{C.3})$$

bestimmt. Darin ist die Operation  $A^{-1}(\mathcal{V}_k + \text{bild}(B))$  allgemein gemäß  $\mathcal{X} = A^{-1}\mathcal{Y} := \{x : y = Ax, y \in \mathcal{Y}\}$  definiert. Damit folgt:

**Satz C.8** ([116]). *Betrachtet wird die Systemdynamik (C.1a). Sei  $\mathcal{K}$  ein Unterraum, d.h. es ist  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ . Es wird  $\mathcal{V}_t$  mit  $t = 0, 1, 2, \dots$  durch (C.3) bestimmt. Damit gilt:*

- i)  $\mathcal{V}_0 \supset \mathcal{V}_1 \supset \mathcal{V}_2 \supset \dots$
- ii) Es existiert ein  $k \leq \dim \mathcal{K}$  mit der Eigenschaft, dass  $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_{k+1}$  gilt.
- iii) Wenn  $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_{k+1}$  gilt, dann ist  $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_t$  für alle  $t \geq k$ .
- iv) Wenn  $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_{k+1}$  gilt, dann ist  $\mathcal{V}^*(\mathcal{K}) = \mathcal{V}_k$ .

Der vorstehende Satz zeigt, dass der größte geregelt invariante Unterraum  $\mathcal{V}^*(\mathcal{K})$  in einer endlichen Anzahl von Schritten mittels der Rekursion (C.3) bestimmt werden kann. Hierfür sind maximal  $n$  Schritte notwendig. Gilt  $\mathcal{K} = \text{kern}(C)$ , dann lässt sich mit (C.3) der größte geregelt invariante Unterraum im Kern der Ausgangsmatrix  $C$  bestimmen. Hinsichtlich des Entwurfes einer Verkopplungsregelung ist damit (vgl. (3.52))  $\mathcal{V}_{\delta_v} = \mathcal{V}^*(\text{kern}(T_{v2}C))$  und  $\delta_v := \dim \mathcal{V}^*(\text{kern}(T_{v2}C))$ .

# Literatur

- [1] I. Agricola und T. Friedrich. *Vektoranalysis*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2010.
- [2] B. D. Anderson und J. B. Moore. *Optimal Control: Linear Quadratic methods*. Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, 1989.
- [3] P. Apkarian und D. Noll. „Nonsmooth  $H_\infty$  Synthesis“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 51.1 (2006), S. 71–86.
- [4] T. Arampatzis und J. Lygeros. „A Survey of Applications of Wireless Sensors and Wireless Sensor Networks“. In: *Proceedings of the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation*. 2005, S. 719–724.
- [5] M. Arcak. „Diagonal Stability on Cactus Graphs and Application to Network Stability Analysis“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56.12 (2011), S. 2766–2777.
- [6] M. Arcak. „Passivity as a Design Tool for Group Coordination“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52.8 (2007), S. 1380–1390.
- [7] A. Astolfi, D. Karagiannis und R. Ortega. *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag, London, 2008.
- [8] G. Basile und G. Marro. *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- [9] D. S. Bernstein. *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas with applications to linear systems theory*. Princeton University Press, Princeton, 2005.
- [10] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron und V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Bd. 15. Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial und Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [11] I. Bronstein und K. Semendjaew. *Springer-Taschenbuch der Mathematik*. Hrsg. von E. Zeidler. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013.
- [12] F. Bullo, J. Cortés und S. Martínez. *Distributed Control of Robotic Networks*. Erhältlich unter <http://coordinationbook.info>. Princeton University Press, Princeton, 2009.
- [13] R. Byers und S. G. Nash. „Approaches to robust pole assignment“. In: *International Journal of Control* 49.1 (1989), S. 97–117.
- [14] C. Byrnes und A. Isidori. „Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 36.10 (1991), S. 1122–1137.

- [15] C. Byrnes, A. Isidori und J. Willems. „Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 36.11 (1991), S. 1228–1240.
- [16] R. Carli, A. Chiuso, L. Schenato und S. Zampieri. „Optimal Synchronization for Networks of Noisy Double Integrators“. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 56.5 (2011), S. 1146–1152.
- [17] N. Chopra. „Output Synchronization on Strongly Connected Graphs“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.11 (2012), S. 2896–2901.
- [18] N. Chopra und M. W. Spong. „Output Synchronization of Nonlinear Systems with Relative Degree One“. English. In: *Recent Advances in Learning and Control*. Hrsg. von V. Blondel, S. Boyd und H. Kimura. Bd. 371. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, London, 2008, S. 51–64.
- [19] N. Chopra und M. W. Spong. „Passivity-Based Control of Multi-Agent Systems“. In: *Advances in Robot Control*. Hrsg. von S. Kawamura und M. Svinin. Springer Verlag, Berlin, 2006, S. 107–134.
- [20] A. Das und F. L. Lewis. „Distributed adaptive control for synchronization of unknown nonlinear networked systems“. In: *Automatica* 46.12 (2010), S. 2014–2021.
- [21] G. R. De Campos, A. Brinón-Arranz Lara und S.-I. Niculescu. „On the consensus of heterogeneous multi-agent systems: a decoupling approach“. In: *Proceedings of NecSys' 12* (2012), S. 246–251.
- [22] J. Denavit und R. Hartenberg. „A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices“. In: *Journal of Applied Mechanics* 77 (1955), S. 215–221.
- [23] G.-R. Duan. „Simple algorithm for robust pole assignment in linear output feedback“. In: *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications* 139.5 (1992), S. 465–469.
- [24] P. L. Falb und W. A. Wolovich. „Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 12.6 (1967), S. 651–659.
- [25] J. A. Fax. „Optimal and Cooperative Control of Vehicle Formations“. Diss. California Institute of Technology, 2001.
- [26] J. Fax und R. Murray. „Information flow and cooperative control of vehicle formations“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49.9 (2004), S. 1465–1476.
- [27] O. Föllinger. *Regelungstechnik*. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1994.
- [28] O. Föllinger. *Regelungstechnik*. Hrsg. von U. Konigorski, B. Lohmann, G. Roppenecker und A. Trächtler. VDE Verlag, Berlin, 2013.

- [29] B. Francis und W. Wonham. „The internal model principle of control theory“. In: *Automatica* 12.5 (1976), S. 457–465.
- [30] C. Godsil und G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer Verlag, New York, 20.2001.
- [31] H. F. Grip, T. Yang, A. Saberi und A. A. Stoorvogel. „Decentralized Control for Output Synchronization in Heterogeneous Networks of Non-Introspective Agents“. In: *Proceedings of the 2012 American Control Conference (ACC)*. 2012, S. 812–819.
- [32] H. F. Grip, T. Yang, A. Saberi und A. A. Stoorvogel. „Output synchronization for heterogeneous networks of non-introspective agents“. In: *Automatica* 48.10 (2012), S. 2444–2453.
- [33] M. Grün. „Konstruktion und Regelung einer x-y-Positioniereinheit als Mehrgrößensystem“. Diplomarbeit. TU Darmstadt, Juli 2009.
- [34] Y. Hong, X. Wang und Z.-P. Jiang. „Distributed output regulation of leader-follower multi-agent systems“. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 23.1 (2013), S. 48–66.
- [35] R. A. Horn und C. R. Johnson. *Matrix Analysis – 2nd ed.* Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [36] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1995.
- [37] J. Kautsky, N. K. Nichols und P. Van Dooren. „Robust pole assignment in linear state feedback“. In: *International Journal of Control* 41.5 (1985), S. 1129–1155.
- [38] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Third Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
- [39] S. Khodaverdian und J. Adamy. „Robust output synchronization for heterogeneous multi-agent systems based on input-output decoupling“. In: *11th IEEE International Conference on Control Automation (ICCA)*. 2014, S. 607–613.
- [40] S. Khodaverdian und J. Adamy. „Entkopplungsbasierte Synchronisierung heterogener linearer Multi-Agenten-Systeme“. In: *at - Automatisierungstechnik* 62.12 (2014), S. 865–876.
- [41] S. Khodaverdian und J. Adamy. „Synchronizing Linear Heterogeneous Networks by Output Homogenization“. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*. 2014, S. 4687–4692.
- [42] H. Kim, H. Shim und J. H. Seo. „Output Consensus of Heterogeneous Uncertain Linear Multi-Agent Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56.1 (2011), S. 200–206.



- [43] H. Kimura. „Pole assignment by gain output feedback“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 20.4 (1975), S. 509–516.
- [44] U. Konigorski. „Ausgangsgrößenverkopplung bei linearen Mehrgrößensystemen“. In: *at - Automatisierungstechnik* 47.4 (1999), S. 165–170.
- [45] U. Konigorski. „Entwurf robuster strukturbeschränkter Zustansregelungen durch Polgebietsvorgabe mittels Straffunktionen“. In: *Automatisierungstechnik* 35.4 (1987), S. 250–254.
- [46] U. Konigorski. „Pole placement by parametric output feedback“. In: *Systems & Control Letters* 61.2 (2012), S. 292–297.
- [47] G. Kreisslemeier und R. Steinhauser. „Systematische Auslegung von Reglern durch Optimierung eines vektoriellen Gütekriteriums“. In: *Regelungstechnik* 27.3 (1979), S. 76–79.
- [48] A. Kugi und T. Kiefer. „Nichtlineare Trajektorienfolgeregelung für einen Laborhelikopter“. In: *e&i elektrotechnik und informationstechnik* 122.9 (Sep. 2005), S. 300–307.
- [49] A. Kugi. „Nichtlineare Systeme I“. Vorlesungsskript, TU Wien, Sommersemester 2010.
- [50] D. Labisch. *Verkopplungsbasierte Methoden zum Regler- und Beobachterentwurf für nicht-lineare Deskriptorsysteme*. VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 8, Nr. 1227. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2013.
- [51] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer Verlag, New York, 2000.
- [52] K. Listmann und C. Woolsey. „Output synchronization of systems in chained form“. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009*. 2009, S. 3341–3346.
- [53] K. D. Listmann, J. Adamy und L. Scardovi. „Synchronisierung identischer linearer Systeme - ein Zugang über LMIs“. In: *at - Automatisierungstechnik* 59.9 (2011), S. 563–573.
- [54] K. D. Listmann, J. Adamy und C. A. Woolsey. „Backstepping zur Synchronisierung nicht-linearer dynamischer Systeme“. In: *at - Automatisierungstechnik* 58.8 (2010), S. 425–434.
- [55] K. D. Listmann, A. Wahrburg, J. Strubel, J. Adamy und U. Konigorski. „Partial-State Synchronization of Linear Heterogeneous Multi-Agent Systems“. In: *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. 2011, S. 3440–3445.
- [56] K. D. Listmann. *Synchronization of Networked Linear Systems – an LMI Approach*. VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 8, Nr. 1220. VDI Verlag Düsseldorf, 2012.

- [57] B. Lohmann. *Vollständige und teilweise Führungsentkopplung im Zustandsraum*. VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 8, Nr. 244. VDI Verlag Düsseldorf, 1991.
- [58] J. Lunze. „Synchronization of Heterogeneous Agents“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.11 (2012), S. 2885–2890.
- [59] J. Lunze. „An internal-model principle for the synchronisation of autonomous agents with individual dynamics“. In: *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. 2011, S. 2106–2111.
- [60] J. Lunze. „Synchronisierbarkeit autonomer Agenten durch vernetzte Regelungen“. In: *at - Automatisierungstechnik* 59.9 (2011), S. 531–538.
- [61] T. Lüth. *Technische Multi-Agenten-Systeme*. Carl Hanser Verlag, München, 1998.
- [62] C.-Q. Ma und J.-F. Zhang. „Necessary and Sufficient Conditions for Consensusability of Linear Multi-Agent Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 55.5 (2010), S. 1263–1268.
- [63] J. R. Magnus und H. Neudecker. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. John Wiley & Sons, Chichester, 2007.
- [64] M. Manderla. *Eine Methodik zum Regler- und Beobachterentwurf für Mehrgrößensysteme in Deskriptorform*. VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 8, Nr. 1196. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2011.
- [65] R. Markert. *Technische Mechanik, Teil B*. Skriptum, TU Darmstadt. 2002.
- [66] J. Mei, W. Ren und G. Ma. „Distributed Coordinated Tracking With a Dynamic Leader for Multiple Euler-Lagrange Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56.6 (2011), S. 1415–1421.
- [67] M. Mesbahi und M. Egerstedt. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton University Press, Princeton, 2010.
- [68] M. Mitschke und H. Wallentowitz. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [69] B. Moore. „On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 21.5 (1976), S. 689–692.
- [70] L. Moreau. „Stability of continuous-time distributed consensus algorithms“. In: *Proc. 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 4. 2004, S. 3998–4003.

- [71] L. Moreau. „Stability of multiagent systems with time-dependent communication links“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50.2 (2005), S. 169–182.
- [72] W. Müller. *Duden „Fremdwörterbuch“*. Hrsg. von W. Müller, R. Köster und M. Trunk. 4., neu bearb. u. erw. Aufl. Dudenverlag, Mannheim, 1982.
- [73] Z. Neda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek und A. .-.-L. Barabasi. „Self-organizing processes: The sound of many hands clapping“. In: *Nature* 403.6772 (24.2000), S. 849–850.
- [74] J. Nocedal und S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [75] R. Olfati-Saber, J. Fax und R. Murray. „Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems“. In: *Proceedings of the IEEE* 95.1 (2007), S. 215–233.
- [76] E. Ostertag. *Mono- and Multivariable Control and Estimation*. Springer Verlag, Heidelberg, 2011.
- [77] W. Oud, H. Nijmeijer und A. Pogromsky. „A Study of Huijgens’ Synchronization. Experimental Results“. In: *Group Coordination and Cooperative Control*. Bd. 336. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, Berlin, 2006, S. 191–203.
- [78] I. Paschalidis und M. Egerstedt. „The Inaugural Issue of the IEEE Transactions on Control of Network Systems“. In: *IEEE Transactions on Control of Network Systems* 1.1 (2014), S. 1–3.
- [79] C. D. Persis, H. Liu und M. Cao. „Robust decentralized output regulation for uncertain heterogeneous systems“. In: *Proceedings of the 2012 IEEE American Control Conference*. 2012, S. 5214–5219.
- [80] K. Pettersen, J. Gravdahl und H. Nijmeijer. *Group Coordination and Cooperative Control*. Bd. 336. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [81] L. Pfau. „Entwurf einer Steer-by-Wire-Lenkung mittels Verkopplungsregelung“. Diplomarbeit. TU Darmstadt, Juli 2014.
- [82] A. Pikovsky, M. Rosenblum und J. Kurths. *Synchronization: A universal concept in non-linear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [83] A. Pogromsky, V. Belykh und H. Nijmeijer. „A Study of Controlled Synchronization of Huijgens’ Pendula“. In: *Group Coordination and Cooperative Control*. Bd. 336. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, Berlin, 2006, S. 205–216.
- [84] E. Polak. *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. Springer-Verlag, New York, 1997.

- [85] Z. Qu. *Cooperative Control of Dynamical Systems*. Springer Verlag, London, 2009.
- [86] J. Raisch. *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1994.
- [87] W. Ren und E. Atkins. „Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange“. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 17.10-11 (2007), S. 1002–1033.
- [88] W. Ren und R. W. Beard. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*. Springer Verlag, London, 2008.
- [89] W. Ren, R. W. Beard und E. M. Atkins. „Information Consensus in Multivariable Cooperative Control“. In: *IEEE Control Systems Magazine* 27.2 (2007), S. 71–82.
- [90] W. Ren, R. W. Beard und T. W. McLain. „Coordination Variables and Consensus Building in Multiple Vehicle Systems“. In: *Proceedings of the Block Island Workshop on Cooperative Control, Springer-Verlag Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Bd. 309. 2004, S. 171–188.
- [91] C. W. Reynolds. „Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model“. In: *Computer Graphics (SIGGRAPH '87 Conference Proceedings)* 21.4 (1987), S. 25–34.
- [92] G. Roppenecker. „Minimum norm output feedback design under specified eigenvalue areas“. In: *Systems & Control Letters* 3.2 (1983), S. 101–103.
- [93] G. Roppenecker. „Vollständige Modale Synthese konstanter Ausgangsrückführungen“. In: *Automatisierungstechnik* 37.8 (1989), S. 304–310.
- [94] G. Roppenecker. *Vollständige modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen*. VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 8, Nr. 59. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1983.
- [95] A. Saberi, A. Stoorvogel und P. Sannuti. *Control of linear systems with regulation and input constraints*. Springer Verlag, London, 2000.
- [96] L. Scardovi und R. Sepulchre. „Synchronization in Networks of Identical Linear Systems“. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. 2008, S. 546–551.
- [97] L. Scardovi und R. Sepulchre. „Synchronization in Networks of Identical Linear Systems“. In: *Automatica* 45.11 (2009), S. 2557–2562.
- [98] C. Scherer, P. Gahinet und M. Chilali. „Multiobjective output-feedback control via LMI optimization“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.7 (1997), S. 896–911.

- [99] J. Schiller. „Modellierung und Regelung einer xy-Positioniereinheit als Deskriptorsystem“. Bachelorarbeit. TU Darmstadt, Okt. 2014.
- [100] R. Schmid, L. Ntogramatzidis, T. Nguyen und A. Pandey. „A unified method for optimal arbitrary pole placement“. In: *Automatica* 50 (2014), S. 2150–2154.
- [101] R. Schmid, A. Pandey und T. Nguyen. „Robust Pole Placement With Moore’s Algorithm“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 59.2 (2014), S. 500–505.
- [102] J. H. Seo, H. Shim und J. Back. „Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: Low gain approach“. In: *Automatica* 45.11 (2009), S. 2659–2664.
- [103] G. S. Seyboth, D. V. Dimarogonas, K. H. Johansson und F. Allgöwer. „Static Diffusive Couplings in Heterogeneous Linear Networks“. In: *Proceedings of the 3rd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems*. 2012, S. 258–263.
- [104] G. S. Seyboth, W. Ren und F. Allgöwer. „Cooperative Control of Linear Multi-Agent Systems via Distributed Output Regulation and Transient Synchronization“. <http://arxiv.org/abs/1406.0085>. Mai 2014.
- [105] B. Sinopoli, C. Sharp, L. Schenato, S. Schaffert und S. S. Sastry. „Distributed Control Applications Within Sensor Networks“. In: *Proceedings of the IEEE* 91.8 (2003), S. 1235–1246.
- [106] J.-J. E. Slotine und W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [107] S. H. Strogatz. *Sync: the emerging science of spontaneous order*. Hyperion, New York, 2003.
- [108] S. H. Strogatz und I. Stewart. „Coupled Oscillators and Biological Synchronization“. In: *Scientific American* 12 (1993), S. 102–109.
- [109] J. Strubel und U. Konigorski. „Robust Eigenstructure Assignment using Parametric Output Feedback“. In: *Proceedings of the 22nd Mediterranean Conference on Control & Automation*. 2014, S. 1249–1254.
- [110] J. Strubel und U. Konigorski. „Synchronisierung heterogener linearer Systeme durch dezentrale Regelung“. In: *49. Regelungstechnisches Kolloquium in Boppard*. 2015.
- [111] J. Strubel und U. Konigorski. „Verkopplung bei linearen Systemen mittels dynamischer Ausgangsrückführung“. In: *GMA Fachausschuss 1.40 Theoretische Verfahren der Regelungstechnik*. Hrsg. von J. Adamy und O. Sawodny. Salzburg, Österreich, 2011.

- [112] J. Strubel, H. T. Phan und U. Konigorski. „Output Synchronization of Uncertain Nonlinear Multi-Agent Systems with Relative Degree One“. In: *Proceedings of the 2014 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*. 2014, S. 258–263.
- [113] J. Strubel, G. L. Stein und U. Konigorski. „Synchronization of Heterogeneous Agents using Min-Max Optimization“. In: *Proceedings of the 2015 IEEE American Control Conference*. 2015, S. 50–55.
- [114] O. von Stryk. *Robotik I*. Skriptum, TU Darmstadt. 2007.
- [115] Y. Su und J. Huang. „Cooperative output regulation of linear multi-agent systems by output feedback“. In: *Systems & Control Letters* 61.12 (2012), S. 1248–1253.
- [116] H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel und M. Hautus. *Control theory for linear systems*. Springer Verlag, London, 2000.
- [117] H. L. Trentelman, K. Takaba und N. Monshizadeh. „Robust Synchronization of Uncertain Linear Multi-Agent Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 58.6 (2013), S. 1511–1523.
- [118] J. N. Tsitsiklis. „Problems in Decentralized Decision Making and Computation“. Diss. Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [119] S. E. Tuna. „LQR-based coupling gain for synchronization of linear systems“. Online. <http://arxiv.org/abs/0801.3390>. 2008.
- [120] S. E. Tuna. „Synchronizing linear systems via partial-state coupling“. In: *Automatica* 44.8 (2008), S. 2179–2184.
- [121] M. Ulbrich und S. Ulbrich. *Nichtlineare Optimierung*. Springer Verlag, Basel, 2012.
- [122] A. Wahrburg und J. Adamy. „Observer-Based Synchronization of Heterogeneous Multi-Agent Systems by Homogenization“. In: *Proceedings of the 2011 Australian Control Conference*. 2011, S. 386–391.
- [123] X. Wang, A. Saberi und T. Yang. „Synchronization in heterogeneous networks of discrete-time introspective right-invertible agents“. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 24.18 (2013), S. 3255–3281.
- [124] P. Wieland und F. Allgöwer. „An Internal Model Principle for Consensus in Heterogeneous Linear Multi-Agent Systems“. In: *Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems*. 2009, S. 7–12.
- [125] P. Wieland und F. Allgöwer. „An Internal Model Principle for Synchronization“. In: *Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Control and Automation*. 2009, S. 285–290.

- [126] P. Wieland, R. Sepulchre und F. Allgöwer. „An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization“. In: *Automatica* 47.5 (2011), S. 1068–1074.
- [127] J. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [128] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*. Springer Verlag, New York, 1979.
- [129] M. Wooldridge. „Intelligent Agents: The Key Concepts“. English. In: *Multi-Agent Systems and Applications II*. Hrsg. von M. Vladimír, O. Stepánková, H. Krautwurmová und M. Luck. Bd. 2322. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002, S. 3–43.
- [130] M. Wooldridge und N. R. Jennings. „Intelligent agents: theory and practice“. In: *The Knowledge Engineering Review* 10.2 (1995), S. 115–152.
- [131] T. Yang, A. Saberi, A. A. Stoorvogel und H. F. Grip. „Output consensus for networks of non-identical introspective agents“. In: *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*. 2011, S. 1286–1292.
- [132] H. Zhang, F. L. Lewis und A. Das. „Optimal Design for Synchronization of Cooperative Systems: State Feedback, Observer and Output Feedback“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56.8 (2011), S. 1948–1952.
- [133] K. Zhou, J. C. Doyle und K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.





# Online-Buchshop für Ingenieure

■ ■ VDI nachrichten

BUCHSHOP

Online-Shops



**Fachliteratur und mehr -  
jetzt bequem online recher-  
chieren & bestellen unter:  
[www.vdi-nachrichten.com/](http://www.vdi-nachrichten.com/)  
Der-Shop-im-Ueberblick**



**Täglich aktualisiert:  
Neuerscheinungen  
VDI-Schriftenreihen**



Im Buchshop von [vdi-nachrichten.com](http://vdi-nachrichten.com) finden Ingenieure und Techniker ein speziell auf sie zugeschnittenes, umfassendes Literaturangebot.

Mit der komfortablen Schnellsuche werden Sie in den VDI-Schriftenreihen und im Verzeichnis lieferbarer Bücher unter 1.000.000 Titeln garantiert fündig.

Im Buchshop stehen für Sie bereit:

**VDI-Berichte** und die Reihe **Kunststofftechnik**:

Berichte nationaler und internationaler technischer Fachtagungen der VDI-Fachgliederungen

**Fortschritt-Berichte VDI:**

Dissertationen, Habilitationen und Forschungsberichte aus sämtlichen ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen

**Newsletter „Neuerscheinungen“:**

Kostenfreie Infos zu aktuellen Titeln der VDI-Schriftenreihen bequem per E-Mail

**Autoren-Service:**

Umfassende Betreuung bei der Veröffentlichung Ihrer Arbeit in der Reihe Fortschritt-Berichte VDI

**Buch- und Medien-Service:**

Beschaffung aller am Markt verfügbaren Zeitschriften, Zeitungen, Fortsetzungsreihen, Handbücher, Technische Regelwerke, elektronische Medien und vieles mehr – einzeln oder im Abo und mit weltweitem Lieferservice

VDI nachrichten

BUCHSHOP

[www.vdi-nachrichten.com/Der-Shop-im-Ueberblick](http://www.vdi-nachrichten.com/Der-Shop-im-Ueberblick)

## Die Reihen der Fortschritt-Berichte VDI:

- 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
  - 2 Fertigungstechnik
  - 3 Verfahrenstechnik
  - 4 Bauingenieurwesen
- 5 Grund- und Werkstoffe/Kunststoffe
  - 6 Energietechnik
  - 7 Strömungstechnik
- 8 Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik
  - 9 Elektronik/Mikro- und Nanotechnik
  - 10 Informatik/Kommunikation
  - 11 Schwingungstechnik
- 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
  - 13 Fördertechnik/Logistik
- 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
  - 15 Umwelttechnik
  - 16 Technik und Wirtschaft
- 17 Biotechnik/Medizintechnik
- 18 Mechanik/Bruchmechanik
- 19 Wärmetechnik/Kältetechnik
- 20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE CAQ, CIM ...)
  - 21 Elektrotechnik
  - 22 Mensch-Maschine-Systeme
- 23 Technische Gebäudeausrüstung

ISBN 978-3-18-525008-8