von Typologien bestimmt sich die Analyse der erfassten Daten sowie ihre Rückbindung an den individuellen Körper später immer mehr über stochastische Logiken, berechnet mit Wahrscheinlichkeiten zum Zwecke der in die Zukunft gerichteten probabilistischen Aussage. Der Korrelationskoeffizient findet seinen Weg in die Statistik, um damit begründbare und reproduzierbare Ursache-Wirkungs-Mechanismen zu beschreiben.

4 Logik und Mathematisierung im 20. Jahrhundert: geschätzte Funktionen

Am Vorabend der Jahrhundertwende, am 29. Dezember 1899, schreibt der Mathematiker David Hilbert seinem Kollegen Gottlob Frege seine Sicht auf die Merkmale einer neuen Axiomatik der Mathematik, die er in seinem Brief mit Nachdruck erläutert:

> Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen. Es hat mich sehr interessirt, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz. (Hilbert im Brief an Frege 1899)

Für Frege war es wesentlich, dass Axiome an Erfahrung geknüpfte Wahrheitsbedingungen haben, für Hilbert spielt dieser Wahrheitsbegriff als Charakteristik von Axiomen keine Rolle mehr. Axiome beschreiben ihm zufolge dann eine Wahrheit, wenn sie sich selbst und anderen Axiomen nicht widersprechen. Hilbert umreißt in seinem Brief an Frege die grundlegende Annahme seines mathematischen Formalismus und grenzt sich darin gleichzeitig deutlich von Freges Logizismus ab. Die formalistische Ausrichtung Hilberts führt zu einem neuen mathematischen Wissen. Axiome müssen nicht mehr an physische Erfahrung gekoppelt sein. So lange sie in sich konsistent sind und sich nicht selbst widersprechen, gelten sie als wahr. Hier schließt sich der Streit um das erkenntnistheoretische Dilemma an, das die Mathematik zunächst nicht wahrhaben wollte: Gibt es einen Unterschied zwischen dem Wahrheitsgehalt einer Formel und ihrer Beweisbarkeit? David Hilberts neue Axiomatik und Kurt Gödels Unvollständigkeit sind die mathematischen Veränderungen des 20. Jahrhunderts, die die weiteren technischen Entwicklungen grundlegend vorantreiben (s. Kap. 2).

> Die Sprache Mathematik, so wie sie die Moderne erarbeitet hat, bedeutet sich selbst. Ihre Zeichen, die sich an den Marken auf dem Papier realisieren, weisen auf den Regelkomplex ihres eigenen Gebrauchs. [...] Die Sprache Mathematik ist diktatorisch, denn die Zeichen und die Regeln werden gesetzt, und zwar so gesetzt, daß keine Uneindeutigkeiten erlaubt sind und kein Widerspruch zwischen den Regeln zu erwarten ist. Daß Mathematik anwendbar ist, kommt geradewegs aus dieser Struktur. (Mehrtens 1990a, 12f.)

4.1 Die Politik der großen Zahl: Wahrscheinlichkeit und das Gesetz der großen Zahl

Die Wahrscheinlichkeitstheorie (auch Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Probabilistik) stellt ein Teilgebiet der Mathematik dar und befasst sich mit der mathematischen Analyse von Experimenten oder Prozessen mit unsicherem Ausgang. Während viele heute noch gebräuchliche Formeln zu einfachen Zufallsprozessen möglicherweise bereits im Altertum, spätestens jedoch im ausgehenden Mittelalter bekannt waren, hat sich das heute verwendete axiomatische Fundament der Wahrscheinlichkeitstheorie erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts herausgebildet; als Schlüsselereignisse gelten dabei zum einen ein Briefwechsel zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat im Jahr 1654, gemeinhin als Geburtsstunde der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung angesehen, und zum anderen das Erscheinen von Andrei Kolmogorows Lehrbuch *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* im Jahr 1933, das die Entwicklung der Fundamente moderner Wahrscheinlichkeitstheorie abschloss. Dazwischen war es über Jahrhunderte hinweg zur Aufspaltung der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie in separate Schulen gekommen; diese wurden in erster Linie von den damaligen wissenschaftlichen Zentren London und Paris dominiert. Dietmar Dath wies 2014 darauf hin, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung anfänglich in der Mathematik keine Anerkennung fand, da sie für die exakte Wissenschaft zu unstet erschien:

> In der Renaissance waren es [...] zunächst nicht die exakten, sondern die im Hinblick auf ihren Weltzugang sozusagen ärmeren, auf das Raten angewiesenen Wissenschaften, also nicht die Astronomie oder Mechanik, sondern Alchemie oder Medizin, die dieses Denken voranbrachten. Sie muss-

> ten sich nämlich damit herumschlagen, dass sie für viele ihrer Hypothesen keine kausalen und gar noch deterministischen Testverfahren angeben konnten. Sie waren vielmehr gezwungen, von Datenclustern und Häufigkeitsverteilungen aus quantifizierend auf nicht unmittelbar beobachtbare Sachverhalte zu schließen. Zunächst empfand man das als Mangel. Dann aber systematisierte man, was sich auf jenen Grundlagen dennoch sagen ließ [...]. (145)

Die Erfolgsgeschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie begann mit dem Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662), der heute auch als ›Vater der Informatik‹ bezeichnet wird. Ab 1653 beschäftigte sich Pascal mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und den Gewinnchancen im Glücksspiel. Angeregt durch diese Überlegungen, verfasste er 1654 die Schrift *Traité du triangle arithmétique*, in der er über Binominalkoeffizienten und deren grafische Darstellung referiert, die später nach ihm benannt wird: Pascalsches Dreieck. Mit der mathematischen Funktion des Binominalkoeffizienten lassen sich Grundaufgaben der Kombinatorik lösen und bestimmen, wie viele Kombinationsmöglichkeiten bei einer bestimmten Anzahl von Objekten/Variablen gegeben sind. Das Pascalsche Dreieck übersetzt die mathematische Funktion in eine grafische Illustration von übereinander im Dreieck so angeordneter Einträge, dass jeder Eintrag die Summe der zwei darüberstehenden Einträge ist. Die erste Monografie über Wahrscheinlichkeitsrechnung schrieb Christiaan Huygens (1629–1695), *De Rationiciis in Aleae Ludo*, im Jahre 1657. Jakob Bernoulli (1655–1705) formulierte das empirische Gesetz der großen Zahl in seinem Buch *Ars Conjectandi* (1713) und betrachtete Formen der Kombinatorik wie die Folgen von Zufallsgrößen. Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Astronom, Physiker und Mathematiker, verwendete Wahrscheinlichkeitsrechnungen für seine Himmelsmechanik, um trotz fehlender Daten zu Resultaten zu kommen. In seinem Buch *Théorie Analytique des Probabilités* (1812) gibt Laplace eine Definition der Wahrscheinlichkeit, ausgehend von abhängigen und unabhängigen Ereignissen im Glücksspiel. Darüber hinaus stellt er erste Berechnungen über den Erwartungswert, die Sterblichkeit und die Lebenserwartung an. Thomas Bayes (1702–1761) führte bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründete die Stochastik. Bayes' Interpretation der Wahrscheinlichkeitstheorie wird in Kapitel 5 weiter ausgeführt.

Die für die Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtigen Durchbrüche in der Mathematik sind die Einführung der Mengenlehre durch Cantor (1895), das in Kapitel 4 näher beschriebene hilbertsche sechste Problem sowie die Axiomatisierung von Kolmogorow (1933). Aber nicht nur die Mathematik kennt die Wahrscheinlichkeitstheorie, auch die Ökonomie und Staatstheorie greift auf Wahrscheinlichkeitsrechnungen im Planen und Verwalten von Menschen und Gesellschaft zurück. Für den Philosophen Rudolf Carnap (1891–1970), später selbst eine Koryphäe der Wahrscheinlichkeitstheorie, begründete der Ökonom John Keynes mit seiner Arbeit über *A Treatise on Probability* aus dem Jahr 1921 die moderne Theorie der Wahrscheinlichkeit erster Ordnung, da dieser Wahrscheinlichkeit als objektiven und logischen Begriff auffasste. Keynes bestimmte, so Carnap, dass »wenn bestimmte Daten gegeben sind, dann liegt dasjenige, was in bezug auf diese Daten wahrscheinlich und unwahrscheinlich ist, objektiv fest« (zit. n. Carnap 1959, 33). Wirklich ernst wurde es für die Wahrscheinlichkeitstheorie erst in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, als einige Mathematiker und Philosophen einen Wahrscheinlichkeitsbegriff ins Leben riefen, der auf Grenzwertüberlegungen beruht. Einer der bekanntesten Vertreter hierfür ist Rudolf Carnap, der sich in seinen Überlegungen zunächst der Beantwortung einer anderen, in den Naturwissenschaften existenziellen Frage nach der Möglichkeit von Wissen über die Welt näherte. Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist somit als erkenntnistheoretisches Werkzeug auch ein Interessensbereich der Logik.

Um zu ihrer vollen Anerkennung zu gelangen, benötigte die Wahrscheinlichkeitsrechnung fest verankerte Grundsätze, die Axiome, die Kolmogorow 1933 lieferte. Heute kann man sagen, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie aus der Formalisierung, der Modellierung und der Untersuchung von Zufallsgeschehen hervorgegangen ist. Gemeinsam mit der mathematischen Statistik, die anhand von Beobachtungen zufälliger Vorgänge Aussagen über das zugrunde liegende Modell trifft, bildet sie das mathematische Teilgebiet der Stochastik. Die zentralen Objekte der Wahrscheinlichkeitstheorie sind zufällige Ereignisse, Zufallsvariablen und stochastische Prozesse. Wie jedes Teilgebiet der modernen Mathematik ist auch die Wahrscheinlichkeitstheorie mengentheoretisch formuliert und auf axiomatischen Vorgaben aufgebaut. Ausgangspunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie sind Ereignisse, die als Mengen aufgefasst werden und denen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet sind; Wahrscheinlichkeiten sind reelle Zahlen zwischen 0 und 1; die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu Ereignissen muss gewissen Mindestanforderungen genügen.

Um die Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt als Ausgangspunkt für Berechnungen verwenden zu können, brauchte es eine formalisierte Verallgemeinerung, die aus unbestimmbaren Zufallsvariablen berechenbare Größen werden ließ. Hier führte das Gesetz der großen Zahl zu einem unmittelbaren Erfolg. Das Gesetz der großen Zahl und die darin enthaltene Annahme der relativen Häufigkeit stellt die Grundvoraussetzung der Wahrscheinlichkeitstheorie dar und bildet einen der mathematische Grenzwertsätze für die Stochastik. Das Gesetz der großen Zahl besagt, dass möglichst viele, bis ans Unendliche heranreichende Durchgänge eines Experiments oder einer Handlung durchgeführt werden müssen, um mit halbwegs stabilen Wahrscheinlichkeitswerten rechnen zu können: Es beschreibt also das Verhältnis zwischen der Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis eintritt, zu der Häufigkeit, wie oft ein Experiment oder eine Handlung durchgeführt wird. Das heißt: Bei einer Serie von zehn Durchgängen ist die konkrete Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, nicht konvergent vorhersagbar, die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, variiert bei einer Zehnerfolge so stark (zum Beispiel: 6, 6, 3, 6, 6, 2, 4, 4, 6, 6), dass eine absolute Aussage nicht möglich ist. Bei einer solchen Würfelfolge strebt die daraus gebildete arithmetische Mitteilung nicht gegen den Erwartungswert 1/6. Erst über die Bestimmung einer relativen Häufigkeit bei möglichst vielen, bis unendlichen Durchgängen stabilisiert sich die theoretische Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, bei 1/6.

Bereits Jakob Bernoulli hatte 1713 ein Theorem dieses Inhalts formuliert, zunächst für zwei mögliche Ausgänge, von Bernoulli Erfolg und Misserfolg benannt. Das Gesetz der großen Zahl machte das Rechnen mit Zufallsvariablen interessant und im 20. Jahrhundert wurden weitere Bedingungen von Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsverhältnissen beschrieben, sodass Zufallsvariablen auch in komplexere Zusammenhänge gesetzt werden konnten. Aus der gezielten Beschäftigung mit dem komplexen Gebiet der Wahrscheinlichkeiten entsteht die mathematische Statistik und die Stochastik, die sich mit der Systematisierung von Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit beschäftigt.

Das von Laplace ausgearbeitete Indifferenzprinzip ermöglichte es, Wahrscheinlichkeit neu zu begreifen, sodass, wenn keine Gründe bekannt sind, Unterschiede in den wahrscheinlich auftretenden Ereignissen anzunehmen, diese als gleichwahrscheinlich angenommen werden und in die Berechnung eingehen können. Ausgehend von seinen Symmetrieüberlegungen in seinem 1812 erschienenen Werk *Théorie Analytique des Probabilités*, legte er die sogenannte Laplace-Wahrscheinlichkeit fest, die besagt, dass einzelne Ereignisse, die im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie über gleiche Eigenschaften verfügen, untereinander austauschbar sind und demnach ihr Auftreten gleich wahrscheinlich ist. Das Indifferenzprinzip basiert dabei auf der Annahme von Symmetrien und (mathematischen) Regelmäßigkeiten in der Natur. Laplaces Ansatz subjektiver Wahrscheinlichkeit wurde wiederum von Bayes aufgegriffen und weiterentwickelt. Gemeinsam mit dem Gesetz der großen Zahl werden hier stark vereinfachte Vorannahmen und erwartbare, verwertbare Muster zusammengebracht, um sie mithilfe der Wahrscheinlichkeit nicht nur zu berechnen, sondern auch in die Zukunft zu projizieren.

In den Schriften des Philosophen und Logikers Carnap, der als Vertreter des logischen Empirismus die induktive Logik und die Wahrscheinlichkeitstheorie in den 1940er- und 1950er-Jahren auf theoretische Füße stellte, lässt sich nachlesen, dass darum gerungen wurde, ob es sich beim Gesetz der großen Zahl um eine Regelmäßigkeit handelt, die sich allein aus der Beobachtung herauslesen lässt (also eine empirische Regel), oder um eine mathematische Voraussetzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das heißt um ein aprioristisches Gesetz handelt. Die Probleme, die Carnap in seinem Werk anspricht, drehen sich vor allem um die Frage, welche Definition von Wahrscheinlichkeit universal genug ist, um ein möglichst komplexes Verständnis von vermuteten Erwartungen einzubeziehen, aber gleichzeitig Klarheit in die Frage, wie Wahrscheinlichkeit logisch berechnet werden kann, zu bringen. Der Begriff »Wahrscheinlichkeit« war von Beginn seiner Nutzbarmachung an zweideutig konnotiert und brachte verschiedene Verständnisweisen hervor, woraus sich nach Carnap mindestens zwei Wahrscheinlichkeitsdefinitionen ergeben: einerseits, streng im logischen Sinne, die ›induktive Wahrscheinlichkeit‹, auch als subjektive Wahrscheinlichkeit bezeichnet, und andererseits die statistische oder auch objektive Wahrscheinlichkeit. Die induktive, subjektive Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf einmalige Zufallsereignisse, deren Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens nicht berechnet, sondern nur geschätzt werden kann. Dieser – bedingte – Wahrscheinlichkeitsbegriff wurde insbesondere von Bayes geprägt und wird heute wieder verstärkt in stochastischen Berechnungen angewendet (s. hierzu Kap. 3). Der statistische, objektive Wahrscheinlichkeitsbegriff rechnet die relativen Häufigkeiten einiger weniger Durchgänge mit dem Verweis auf das Gesetz der großen Zahl hoch. In der Mathematik und der Logik selbst hat sich die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorow durchgesetzt (s. Kap. 1).

Die Frage nach der ›Natur‹ dieser beschriebenen Regelmäßigkeit zeigt, dass auch in den Anfängen der sich formalisierenden Wahrscheinlichkeitstheorie Mitte des 20. Jahrhunderts erkenntnistheoretische Prämissen verhandelt wurden, ebenso wie der in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts heiß umkämpfte Bereich des Psychologismus. Hier wird ein weiterer wichtiger Aspekt verhandelt, nämlich das Verhältnis von Mathematik/Statistik zu Erfahrung und/oder empirischen Erkenntnissen *versus* eine allem zugrunde liegende (mathematisch formalisierbare) Gesetzmäßigkeit. Die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie, wie sie heute betrieben wird, wurde im 20. Jahrhundert deutlich weiterentwickelt und beschreibt heute eher Wahrscheinlichkeitsräume als konkrete Ereignisse, die vorhergesagt werden sollen. Die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie hat aus der Statistik die Stochastik werden lassen und bahnt sich über diese ihren Weg in die Neurowissenschaft: über die als stochastisch angenommenen neuronalen Verarbeitungsprozesse, anfänglich in den parallelverarbeitenden Prozessen zu finden, heute das grundlegende Modell künstlicher Neuronaler Netzwerke (s. Kap. 2).

4.2 Statistik und Stochastik und induktive Logik – Logik der statistischen Rückschlüsse

Im vorangegangenen Teil des Kapitels habe ich beschrieben, wie sich die Formen der Beweisführung und das Verständnis von Logik hin zu einer Mathematischen Logik entwickelten und die damit verknüpften erkenntnistheoretischen Fragen entstanden. Diese Entwicklung differenzierte sich im Laufe des 20. und 21. Jahrhunderts immer weiter aus. Von der Scholastik als philosophischer Form der Beweisführung, die – wie die Mathematik auch – ausgehend von feststehenden Grundsätzen ihr Argument entwickelt, ist im 21. Jahrhundert nicht mehr viel übrig. Sie wurde sukzessive von anderen Formen der Beweisführung abgelöst. Die Statistik ist originär keine konkrete Form einer logischen Beweisführung, sondern eine Form des Daten-, im Sinne von Beweisesammelns, um Aussagen zu stützen oder zu falsifizieren. Die Statistik, so das Argument, wird aber durch die Stochastik, das statistische Schwergewicht gegenwärtiger Erkenntnisproduktion, selbst als Instrument der Beweisführung eingesetzt. Die Stochastik verbindet Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung und dient immer mehr der numerischen Bestimmung zukünftiger Ereignisse. Als Methode dient in der Stochastik die induktive Logik.

Statistik

Statistik ist eine spezifische Form der Datenanalyse, die Relationen und Korrelationen identifiziert und daraus Vorhersagen anfertigt. Aus der amtlichen Statistik und der politischen Arithmetik entwickelte sich im Laufe des 19. Jahrhunderts die deskriptive Statistik. Heute wird zwischen beschreibender (deskriptiver) und beurteilender (schließender) Statistik unterschieden. Die Statistik wurde im 18. Jahrhundert um die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergänzt, die anfänglich im Bereich des Glückspiels zur Anwendung kam. Eine Erweiterung erfuhr die Statistik im Laufe des 19. Jahrhunderts durch eine dynamische Stochastik, die Entwicklungen in der Zeit analysiert und vorherzusagen versucht.

Mathematische Schlussfolgerungen argumentieren von ihrer Struktur her eigentlich deduktiv. Erst durch die Anwendung in der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird sie zu einer induktiven Logik (vgl. Hacking 2016). Die Kunst des Vermutens, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch genannt wird, untersucht die Frage, wie und ob sich Zufälle beziehungsweise nicht genau bestimmbare Ereignisse berechnen und dadurch auch vorhersagen lassen. Die wissenschaftliche Ausrichtung der Wahrscheinlichkeitstheorie, die »Mathematik des Zufalls« (Henze 2008, 39), gab der Statistik, die im 20. Jahrhundert dank ihrer Mathematisierung zur Stochastik wurde, erst ihre Durchschlagskraft: Sie ermöglichte, die gesammelten Daten so auszuwerten, dass daraus Vorhersagen für zukünftiges Verhalten abgeleitet werden konnten. Um die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Wissenschaft nutzbringend einzusetzen, wurde sie unter dem Gesichtspunkt ihrer zuverlässigen Berechnung weiterentwickelt. Auch wenn eine befriedigende Antwort auf die »Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung« (ebd.) erst 1933 durch Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903–1987) gefunden werden konnte, nahm die Wahrscheinlichkeitsrechnung bereits erheblich früher einen wichtigen Stellenwert für mathematische Berechnungen ein. Die ebenfalls in Kapitel 1 beschriebenen statistischen Verfahrensweisen der Sozialphysik und später der Eugenik basieren noch nicht auf der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie sie heute angewendet wird, aber insbesondere die Eugenik mit ihrem Bezug auf die Vererbungslehre nahm für sich bereits in Anspruch, in die Zukunft gerichtete Aussagen über mögliche eintretende Ereignisse treffen zu können. In Quételets Sozialphysik kommen Mittelmaß und Wahrscheinlichkeit zusammen, um Aussagen über eine Norm und von der Norm abweichende Eigenschaften zu treffen. Der hier verwendete Begriff der Wahrscheinlichkeit bezieht sich allerdings auf eine andere Art der Mitteilung, nämlich die der gaußschen Normalverteilung. Anhand derer wird die Norm, also das Mittelmaß, festgelegt und die Abweichungen von diesem Mittelmaß treten spätestens in der Visualisierung der Kurven deutlich hervor. Die Wahrscheinlichkeitstheorie verweist auf andere Arten der Mittelung: Hier stellt nicht mehr der Mittelwert die Norm dar, sondern die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis, abhängig von verschiedenen Variablen, eintritt.

Stochastik

Dass sich der Begriff der Stochastik von dem deutschen Wort »stochern« herleiten lässt, ist natürlich falsch, würde aber sinngemäß passen. Stochastik umfasst die Verknüpfung von Wahrscheinlichkeitsrechnungen, mathematischer Statistik und Probabilistik. Sie geht der Frage nach, wie wahrscheinlich mögliche Ereignisse in einem Experiment sind, und bringt diese in eine statistische Ordnung. Dazu gehören die deskriptive, den Datensatz beschreibende, parametrisierende und ordnende Statistik, die explorative Statistik, also eine Analyse von Daten, zu deren Zusammenhängen nur wenige Informationen vorliegen, und die induktive Statistik, die durch Hypothesentests die Zuverlässigkeit, die Validität von Ergebnissen, die aus der Statistik hervorgehen, überprüft. Ein Beispiel hierfür ist der Wiener Prozess. Benannt nach Norbert Wiener, Vater der Kybernetik, lassen sich mit ihm die unregelmäßigen und ruckartigen Bewegungen kleinster Teilchen, die unter dem Mikroskop beobachtet werden konnten – auch brownsche Bewegungen genannt – berechnen. Es ist ein zeitstetiger stochastischer Prozess, der normalverteilte, unabhängige Zuwächse hat, für dessen wahrscheinlichkeitstheoretische Existenz Norbert Wiener den Beweis lieferte. Seit der Einführung der stochastischen Analyse durch Itō Kiyoshi in den 1940er-Jahren spielt der Wiener Prozess die zentrale Rolle im Kalkül der zeitstetigen stochastischen Prozesse und wird in zahllosen Gebieten der Natur- und Wirtschaftswissenschaften als Grundlage zur Modellierung zufälliger Entwicklungen herangezogen. Letztendlich war es auch Itō, der dem Wiener Prozess den Weg von der Physik in andere Wissenschaften ebnete: Durch die von ihm aufgestellten stochastischen Differentialgleichungen konnte man die brownsche Bewegung an weitere statistische Probleme anpassen. Heute werden in praktisch allen Natur- und vielen Sozialwissenschaften brownsche Bewegungen und verwandte Prozesse als Hilfsmittel verwendet.

Induktive Logik

Die induktive Logik bildet das methodische Fundament der Stochastik mit dem Anspruch, eine logische Beweisführung für eigentlich nicht logische Argumente zu liefern: »Inductive logic is about risky arguments. It analyses inductive arguments using probability.« (Hacking 2001, 11) Die induktive Methode beschreibt eine Art des wissenschaftlichen Forschens, in der eine Theorie aus der eigenen Beobachtung entwickelt wird. Sie schließt vom Besonderen auf das Allgemeine, erlaubt es also, auf Grundlage der Beobachtung von etwas Spezifischem eine Generalisierung vorzunehmen. In der Regel bezieht sich induktive Forschung auf die Zukunft: Ableitend aus gesammelten Daten, wird eine Verallgemeinerung vorgenommen und auf die Zukunft projiziert. Da induktives Schlussfolgern voll und ganz von der logischen Interpretation der anfallenden Daten abhängt, wird auch die Logik, auf der das Schlussfolgern beruht, wichtig. Die hier der logischen Herleitung zugrunde liegenden Annahmen gehen unvermittelt in die Interpretation der individuellen Daten ein und bestimmen den Inhalt der davon abgeleiteten Generalisierung maßgeblich mit. Das Gegenteil einer aus der induktiven Forschung hervorgegangenen Theorie zu beweisen ist schwierig. Das induktive Schlussfolgern wird durch die sukzessive Ausbreitung des Empirismus insbesondere in den Naturwissenschaften zur meist angewendeten Methode. Die deduktive Methode wird auch als beschreibende Methode übersetzt und meint das Schlussfolgern von einer allgemein gültigen Aussage auf einen Einzelfall.

Rudolf Carnap formulierte 1959 als einer der Ersten wichtige Grundregeln für die induktive Methode:

> 1. Jedes induktive Schließen, im weiten Sinne des nichtdeduktiven oder nichtdemonstrativen Schlussfolgerns, ist ein Schließen auf Grund von Wahrscheinlichkeit. 2. Daher ist die induktive Logik als Theorie von den Prinzipien des induktiven Schließens dasselbe wie Wahrscheinlichkeitslogik. 3. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit, der als Grundbegriff der induktiven Logik dienen soll, ist eine logische Relation zwischen zwei Aussagen oder Sätzen, nämlich der Grad der Bestätigung einer Hypothese auf der Grundlage gegebener Prämissen. 4. Der sogenannte Häufigkeitsbegriff der Wahrscheinlichkeit, wie er in statistischen Untersuchungen verwendet wird, ist zwar an und für sich ein wichtiger wissenschaftlicher Begriff, als Grundbegriff der induktiven Logik jedoch unbrauchbar. 5. Alle Prinzipien und Lehrsätze der induktiven Logik sind analytisch. 6. Daher

> hängt die Gültigkeit des induktiven Schließens nicht von irgendwelchen synthetischen Voraussetzungen ab, wie etwa dem vielumstrittenen Prinzip der Gleichförmigkeit der Welt. (1959, III)

Wahrscheinlichkeitstheorie und induktive Logik, alle Arten des logischen Schließens, die über den Gehalt der vorher festgelegten Bedingungen hinausgehen, sind eng miteinander verbunden und bringen einen neuen Umgang mit quantitativen Daten hervor: die Stochastik. Die Sammelforschung, wie die Statistik auch genannt wurde, bietet Methoden an, gesammelte Daten auszuwerten. Wahrscheinlichkeitstheorie bietet die Formalisierung und die Modellierung von Zufallsgeschehen. Die Stochastik als die Verbindung aus beidem wird auch als *Mathematik des Zufalls* bezeichnet und verbindet die quantitative Auswertung gesammelter Daten mit der Wahrscheinlichkeitstheorie, das heißt, die gesammelten Daten sollen zufällige Ereignisse und Zufallsvariablen auf ihre Wahrscheinlichkeit hin überprüfen. Diese Wahrscheinlichkeitsprüfung lässt sich nur auf in der Zukunft liegende Ereignisse übertragen. Deshalb wird Wahrscheinlichkeitsrechnung auch als Probabilistik bezeichnet, denn mit ihrer Hilfe sollen Daten, beispielsweise ausgehend von möglichst umfangreichen Wetterdaten, dahingehend ausgewertet werden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass es morgen regnet.

4.3 Zum Verhältnis apriorischer und aposteriorischer Wahrheiten

Der Mathematiker David Hilbert (1862–1943) formulierte im Jahr 1900 23 mathematische Probleme, die zu jener Zeit ungelöst waren und die Mathematiker*innen am Anfang des 20. Jahrhunderts beschäftigten. Für den hier vorgenommenen mathematikhistorischen Blick ist vor allem das sechste Problem interessant, das prinzipiell neue, mehrere und passendere Axiome in der Mathematik einforderte. Für das sechste hilbertsche Problem, das sich dezidiert mit einem axiomatischen Zugang für die Physik beschäftigt, lässt sich bis heute keine eindeutige Lösung verzeichnen. Dennoch gab die Einsicht, das die Mathematik, um für die anwendungsorientierte Physik interessant zu werden, andere, ebenso wie andersgeartete, Grundsätze bedürfe, der Mathematik eine neue Ausrichtung, hin zu einer symbolischen Logik.

Für Frege war es wichtig gewesen, dass Axiome Wahrheitsbedingungen haben, also dass Axiome grundsätzlich wahrheitswertfähig oder wahrheitsfähig sind. Hilbert hingegen sah es als gerechtfertigt an, Axiome von ihrer Bindung an Wahrheit und damit an tatsächliche Begebenheiten zu lösen, gleichzeitig wollte er die Widerspruchsfreiheit der Mathematik beweisen. Daraus folgte ein System von Axiomen, das in sich widerspruchsfrei sein musste und gleichzeitig hinreichend ausdrucksfähig genug, um konkrete mathematische Theorien abzudecken. Durch die hilbertsche Reformierung axiomatischer Formalisierung im Bereich der Geometrie entstanden die nicht euklidischen Geometrien, die unter anderem wichtig für Einsteins Relativitätstheorie zur Beschreibung der Raumzeit waren.

Fasst man die Frage nach der Möglichkeit mathematischen Wissens ins Auge, muss der Übergang einer vor allem auf der Geometrie begründeten Mathematik zur modernen/gegenwärtigen Mathematik und ihrem Anspruch auf Wahrhaftigkeit deutlich aufgezeigt werden. Das mathematische, logische Wissen gilt deswegen als abgesichert, da es eben scheinbar nicht mehr auf Erfahrung beruht, sondern auf logischem Denken und einer akkuraten Beweisführung:

> Wissen ist begründetes Wissen, und die Begründung läuft in der Mathematik über den Beweis. Eine mathematische Aussage gilt dann als begründet, wenn es gelingt, sie anhand einer Reihe von Ableitungsregeln Schritt für Schritt aus einer Menge von als wahr erkannten Ausgangssätzen abzuleiten, das heißt zu beweisen. Oder in der formalistischen Variante: Ein formaler Beweis ist eine endliche Folge von Formeln, von denen die erste ein Axiom ist und die letzte das zu beweisende Theorem darstellt. Jede Formel ist mit anderen Worten entweder ein Axiom oder aus den Axiomen bzw. den vorangehenden Formeln Schritt für Schritt nach den geltenden Regeln abgeleitet. (Hilbert 1923, 34, zit. n. Heintz 2000, 53)

Diese konstatierte Besonderheit der Mathematik, *a priori* zu existieren und gleichzeitig aus dem logischen Denken heraus zu entstehen beziehungsweise diesem zu gleichen, führt zu einem tief eingeschriebenen Begründungssystem der Mathematik. Bei den vormodernen Mathematiker*innen, auf Aristoteles rekurrierend, erklärt sich dieses Apriori noch mit dem »unbewegten Beweger«, und auch für Leibniz war Denken kein Produkt von Materie, sondern allein Gott konnte Geist erschaffen. Später werden Naturphänomene als Ausdruck präexistierender, mathematischer Grundgesetze aufgefasst. Durch den Wegfall dieses unbewegten Letztbegründers allen Lebens kommt es zu einigen Verrenkungen, um die Wahrhaftigkeit des mathematischen Beweises zu begründen. Letztendlich basiert dies auf dem Kalkül, einige Sätze als wahr auszuzeichnen:

> Das ist der Weg, den die inhaltliche Axiomatik gewählt hat, exemplifiziert durch Euklids Geometrie […]. Mit der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien stiess der von der inhaltlichen Axiomatik eingeschlagene ›way out‹ allerdings auf Schwierigkeiten. Je nachdem, welche Ausgangssätze man an den Anfang stellt – konkret: ob man Euklids Parallelenaxiom annimmt oder nicht –, ergeben sich andere (in sich widerspruchsfreie) Geometrien. Die Entscheidung, welche dieser Geometrien die ›wahrere‹ ist, muss entweder zu einer empirischen Frage gemacht werden (dann aber verlässt man genau genommen den Bereich der Mathematik) oder man verzichtet auf einen inhaltlichen Wahrheitsbegriff. Genau dies hat Hilbert mit seiner formalen Axiomatik getan […]. Wahr sind die Axiome dann, wenn aus ihnen kein Widerspruch resultiert – und nicht umgekehrt, wie es Frege behauptete […]. (Heintz 2000, 53f.)

Ein weiteres Puzzleteil in der Geschichte der Logik findet sich in der an disziplinären Grenzen entlanglaufenden Aushandlung dessen, was als *a priori*, also als Gegebenes anerkannt wird beziehungsweise was nicht und wie sich generell Naturerkenntnisse generieren lassen. Von der Verunsicherung innerhalb der Mathematik und damit verknüpft auch in der empirischen Physik sowie über die produktive Öffnung des erkenntnistheoretischen Paradigmenwechsels zeugen die Arbeiten des Philosophen und Logikers Clarence Irving Lewis (1883–1964). Lewis, der im deutschsprachigen Raum kaum Beachtung findet, versucht in seinem Werk Kant gegen Einstein zu verteidigen, die Philosophie und die Mathematische Logik miteinander zu vereinen und das Apriorische/Axiomatische neu zu definieren. In seinem Buch *Mind and the world order* (1929) will Lewis eine formale Sprache finden, die nicht mathematisch ist, sich aber einer alles strukturierenden Logik unterwirft, die das zu Erkennende formt: Erkenntnistheorie kommt ohne Logik nicht aus. Aber Lewis konstatierte für die Logik, was Hilbert für die Mathematik zeigen wollte: dass es viele alternative Systeme gibt, die von verschiedenen Prämissen ausgehen. Bei Hilbert sind es die unterschiedlichen Axiome, die ein mathematisches System begründen. Lewis zeigte, dass es viele alternative Systeme der Logik gibt, die alle auf ihre eigene Weise evident sind – eine Tatsache, die die traditionelle rationalistische Sichtweise von metaphysischen Prinzipien als logisch unbestreitbar untergräbt. Der von ihm eingeführte Begriff des konzeptuellen Pragmatismus zeugt davon, ebenso wie seine Neuformulierung der Modallogik.[4] Konzeptueller Pragmatismus besagt, dass empirisches Wissen von einem sinnlich Gegebenen und der konstruktiven Tätigkeit eines Verstandes und einer Reihe von apriorischen Begriffen abhängt, die der Handelnde in das Gegebene einbringt und es dadurch interpretiert. Diese Konzepte sind das Produkt des sozialen Erbes und der kognitiven Interessen des Agenten, sie sind also nicht *a priori* in dem Sinne, dass sie absolut gegeben sind: Sie sind pragmatisch *a priori*. Sie lassen Alternativen zu, und die Wahl zwischen ihnen beruht auf pragmatischen Überlegungen, die über den kognitiven Erfolg entscheiden. Lewis leistete einen einzigartigen Beitrag, indem er die ›modale‹ Logik modifizierte.

Der bereits oben erwähnte Philosoph und Mathematiker Edmund Husserl suchte ebenfalls eine Antwort auf die Frage nach der Möglichkeit von Wissen im Spannungsfeld von Objektivismus/Empirismus (bei Husserl zeigt sich das in seiner Kritik am Psychologismus) und Historismus. Husserls Beitrag zum Streit um den Wahrheitsanspruch apriorisch-mathematischen Wissens (das Husserl am Gegenstand der Geometrie entwickelt) wird später von Jacques Derrida als Verwerfung beider Seiten – des Historismus wie des Objektivismus beschrieben:

> But never had the two denunciations of historicism and objectivism been so organically united as in The Origin of Geometry, where they proceed from the same impulse and are mutually involved throughout an itinerary whose bearing is sometimes disconcerting. Now the singularity of our text rests on the fact that the conjunction of these two standing and tested refusals creates a new scheme: on the one hand, it brings to light a new type or profundity of historicity; on the other hand, and correlatively, it determines the new tools and original direction of historic reflection. The historicity of ideal objectivities, i.e., their origin and tradition (in the ambiguous sense of this word which includes both the movement of transmission and the perdurance of heritage), obeys different rules, which are neither the factual interconnections of empirical history, nor an ideal and ahistoric adding on. (Derrida 1989, 26)

4 Modallogik befasst sich mit der Frage, wie mit Begriffen wie »möglich« und »notwendig« in der formalen Sprache der Logik umgegangen werden kann. Mit den Begriffen »möglich« und »notwendig« bietet die Sprache neben »wahr« und »falsch« eine zusätzliche Möglichkeit, Aussagen zu charakterisieren.

Ausgangspunkt für Husserls Untersuchung ist die Frage nach der Existenz einer spezifischen mathematischen Ontologie in den *Ursprüngen der Geometrie* (Husserl 1887). In dieser Untersuchung verneint Husserl eine universal geltende mathematische Ordnung und hebt die statische Gegenüberstellung einer externen, empirischen Geschichte und einer internen, apriorischen Geschichtlichkeit von Objekten auf. »To unpack this further, Husserl grounds mathematics in perception and experience, that is, in humanity's sensible engagement with its corporeal situation. Geometrical abstraction, he surmises, is derived from the sense perceptions of individual, concrete subjectivity.« (Kirby 2011, 28) Im Weiteren verwirft Husserl die Generalisierung des Historischen und faktisch Objektiven, um sie danach in ein Abhängigkeitsverhältnis zu bringen, denn erst in einem Verständnis ihrer dialektischen Verwobenheit wird die Untersuchung von Phänomenen möglich. Ausgehend von dieser Kritik, entwickelt Husserl später die Phänomenologie.

Ungefähr zur selben Zeit, in den 1920er-Jahren des letzten Jahrhunderts, wird der junge Mathematiker Kurt Gödel (1906–1978) in die damals berühmte intellektuelle Bewegung des Wiener Kreises eingeführt. Im Wiener Kreis versammelten sich Vertreter des empirischen Logizismus und man hing dem Logizismus Freges an, um die Theorien der empirischen Wissenschaften mithilfe der Logik rational zu rekonstruieren. Gödel aber wollte das Gegenteil: Er wollte beweisen, dass sich die Mathematik nicht auf Logik reduzieren lässt. Für Lewis war Logik nicht der einzig definitive Weg, um Wirklichkeit zu erkennen. Gödel wollte nun zeigen, dass die Beweisbarkeit einer mathematischen Formel und ihre Aussagekraft über wahr oder falsch nicht deckungsgleich sind. Die Schlussfolgerungen, die er daraus zieht, beschreiben die Unvollständigkeit formaler Systeme: Der 1. Unvollständigkeitssatz besagt, dass logische Systeme immer unvollständig sind, da kein logisches System die gesamte Wahrheit der Mathematik erfassen kann. Der 2. Unvollständigkeitssatz drückt aus, dass kein logisches System der Mathematik die eigene Widerspruchsfreiheit mit seinen eigenen Mitteln beweisen kann und dass die Fähigkeit formaler Systeme zur Selbsterkenntnis beschränkt ist. Das heißt, entweder gibt es formal-logische Fragen, die weder vom Menschen noch von Maschinen gelöst werden können, oder das menschliche Gehirn kann einige formale Fragen beantworten, die von Maschinen nicht lösbar sind (vgl. Weizenbaum 1990, 293).

Auf die Frage, wie wir etwas über Objekte erfahren können, die unseren Sinnen nicht zugänglich sind, verweist Gödel auf die Intuition, so Heintz. »Aus Gödels Sicht gibt es so etwas wie eine mathematische ›Wahrnehmung‹

– eine Art funktionales Äquivalent zur sinnlichen Wahrnehmung in den empirischen Wissenschaften. Gödel bezeichnet diese Wahrnehmungsfähigkeit als Intuition.« (2000, 57) Mit dem Begriff der mathematischen Intuition als Äquivalent zur sinnlichen Wahrnehmung leitet Gödel die Erkenntnis ab, dass der Mensch fähig ist zu erkennen, dass die Formel ›Ich bin nicht beweisbar‹ wahr sein muss, selbst wenn sie innerhalb des Systems, in dem sie existiert, nicht bewiesen werden kann. Der Mathematiker und theoretische Physiker Roger Penrose (*1931) hat Gödels Unvollständigkeitssätze später auch auf das Mensch-Maschine-Verhältnis übertragen, da diese Sätze tiefgreifende Implikationen für das Wesen des menschlichen Geistes hätten. Nach Penrose müssen die menschlichen geistigen Prozesse die eines Computers übertreffen, denn ein Computer ist lediglich ein logisches System, das auf einer Hardware läuft, während unser Geist Wahrheiten erkennen kann, die jenseits des Verständnisses eines logischen Systems liegen (Penrose 1989). Gödels Verweis auf die Intuition als erkenntnisleitende Dimension in der Mathematik weist ihn als Vertreter des Intuitionismus aus, der sich gegen die Vorstellung einer gänzlich formalisierbaren Mathematik ebenso wie gegen die Mathematik als rein auf Logik aufgebaute Wissenschaft ausspricht.

4.4 Wahrscheinlichkeit: *a priori* oder erfahrungsbasiert?

Empirische Daten sind gemeinhin aposteriorisch, sie müssen in dem Moment abgeleitet werden, in dem sie wirklich passieren. Damit stehen sie konträr zu den apriorischen mathematischen Axiomen, deren Status dem Sein in der Welt vorausgeht. Wenn Carnap schreibt, dass »[b]isweilen zwischen Wahrscheinlichkeit a priori und Wahrscheinlichkeit a posteriori unterschieden« (Carnap 1959, 29) wird, dann verweist er auf die beiden oben beschriebenen Wahrscheinlichkeitsfälle: *A priori* meint die sogenannte statistische, objektive Wahrscheinlichkeit und *a posteriori* beschreibt die subjektive erfahrungsbasierte, induktive Wahrscheinlichkeit. Hier wird erneut die Auseinandersetzung zwischen der formal-logischen, aus den Gesetzen der Natur mathematische Regeln ableitenden Fraktion und der empirischen, datengenerierenden und verarbeitenden Fraktion von Wissenschaftler*innen deutlich. Grundsätzlich geht es bei dieser Debatte immer auch um erkenntnistheoretische Fragen, wer mit welcher Methode Erkenntnis, wer wahres Wissen, wahre Einsichten der Natur entlocken kann. Die induktive Logik und die Entwicklung stochastischer Herangehensweisen, so viel sei hier vorweggenommen, verbinden diese beiden Wahrscheinlichkeiten miteinander, das heißt, in den Computermodellen und Simulationen werden mathematische Gesetze als aprioristisch angenommen und einberechnet, um die Wahrscheinlichkeiten empirischer Daten zu analysieren. Deutlich wird hier auch nach der Art des Wissens gefragt, nach dem Grad an Objektivität oder Subjektivität, das in das mithilfe induktiver, wahrscheinlichkeitsbasierter Methoden generierte Wissen eingelagert ist. Die Wahrscheinlichkeitstheorie bietet nun die Möglichkeit, diesen fast ein Jahrhundert lang geführten Streit zumindest formallogisch zu schlichten. So schreibt Carnap weiter, dass auch eine *a priori* argumentierende, statistische Wahrscheinlichkeitsaussage, die beiden »gegebenen Argumenten einen numerischen Wert zuordnet, […] auf alle Fälle logisch determiniert und nicht synthetisch« (ebd., 26) ist. Das heißt, dass auch eine *a priori* existierende Auslegung von Wahrscheinlichkeit, den Rekurs auf eine Beziehungs- und Bedeutungsebene benötigt, um eine Aussage über ihren Wahrheitsgehalt zu treffen. Mit Bedeutungsebene ist hier allerdings nicht die Abhängigkeit von subjektivem Erfahrungswissen gemeint, sondern die Relativität des Ereignisses und die Abhängigkeit der Bedingungen der generierten Daten sind dabei von Belang. Damit wird die Gegenüberstellung, dass eine Aussage entweder von »unserem Wissen abhänge und daher entweder rein subjektiver Natur sei oder sich in ihrer Gültigkeit auf äußere Naturtatsachen stütze« (ebd.), über eine numerische Definition aufgelöst. Für Carnap steht fest, dass beide Ansätze (objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit) notwendige Formalisierungen sind, die sich ergänzen und einander bedingen, und er fasst zusammen:

> Die beiden Begriffe der Wahrscheinlichkeit1 [Objektiv] und Wahrscheinlichkeit2 [Subjektiv] sind einander darin gleich, daß sie beide Funktionen mit zwei Argumenten darstellen, deren Werte reelle Zahlen aus dem Intervall 0 bis 1 sind. Dagegen sind sie in zwei anderen Hinsichten verschieden. Die beiden Argumente der Wahrscheinlichkeit1 sind Sätze (Hypothese und Datum); die beiden Argumente der Wahrscheinlichkeit2 sind Eigenschaften oder Klassen. Ein elementarer Wahrscheinlichkeit1-Satz ist stets logisch wahr oder logisch falsch und hat daher keinen Tatsachengehalt; ein elementarer Wahrscheinlichkeit2-Satz hat dagegen einen Tatsachengehalt und ist somit empirisch. (1956, 29)

Mit diesem Verweis auf ihre jeweils gegebene kohärente formal-logische Eindeutigkeit wird Wahrscheinlichkeit in die Mathematik, die Statistik und die Stochastik eingebunden. Dies bringt gleichzeitig einen neuen Wahrheitsbegriff und überdies eine neue Kausalität mit sich. Induktive, statistische Argumente sind nie wahr oder falsch, sondern können nur eine Angabe über gültige oder ungültige Zusammenhänge machen. Auf den Zusammenhang von Komplexität, Kausalität und Wahrscheinlichkeit gehe ich in Kapitel 3 näher ein.

Zusammenfassung

Der Erfolg der Mathematik ab dem 17. Jahrhundert liegt in ihren spezifischen, auf Logik basierenden Formalisierungsweisen und auf der Herausbildung einer eigenen, ebenfalls formalen Sprache. Die formale Sprache »beruht auf der Trennung von Syntax und Semantik. Im Gegensatz zu einem alltäglichen Gespräch, bei dem wir nicht davon abstrahieren können, was ein Wort bedeutet, vollzieht sich in der Mathematik die Manipulation der Zeichen losgelöst von deren Interpretation.« (Heintz 2000, 12) Nicht weniger als die Trennung von Zahl und Zeichen also, Erstere wird als objektiv empfunden, Letzteres bleibt subjektiv. Die Bedeutungsebene muss in einem nächsten Schritt ergänzt werden. Die Entkoppelung von Inhalt und Bedeutung in der Sprache digitaler, auf mathematischer Logik beruhender Technologien stellt die Grundlage heutiger medial vermittelter Kommunikation dar. Diese Entwicklung wurde in der Nachrichtentechnik der 1940er-/50er-Jahre in der Kybernetik durchgesetzt. Wird in einem reduktionistischen Formalismus das Semiotisch-Formale absolut gesetzt, bedeutet dies, dass die semantische Reinterpretation einer Nachricht von seinem Wirklichkeitsbezug entkoppelt wurde und eine logische Aussage in einem Kalkül letztendlich willkürlich beziehungsweise nicht gegeben ist. Es sei darauf hingewiesen, dass die cartesianische Trennung sich nicht nur in neurowissenschaftlicher Auseinandersetzung niedergeschlagen hat, sondern sich auch im Sprachverständnis und in der Satzstruktur der Mathematischen Logik wiederfindet, ebenso wie in der symbolischen Sprache der Mathematik, die zwischen Syntax und Semantik unterscheidet. Die Trennung von Gehirn und Geist, Mind and Brain, Hirnmaterie und Denkprozess, sind Dualismen, die kaum überwindbar scheinen. Die Schwierigkeit, diese deutlich miteinander verwobenen, aber nicht gänzlich ineinander aufgehenden Untersuchungsgegenstände zu (er-)fassen und zu (be-)greifen, ist nach wie vor ein Hauptstreitpunkt in der Disziplin.

Im nächsten Kapitel möchte ich aufzeigen, wie sich die in diesem Kapitel beschriebene Mathematische Logik durch den im 19. Jahrhundert verbreiteten empirischen Materialismus Newtons über die Physik in die Physiologie und später in die Mechanik des Geistes einschreibt. Die Physik öffnet sich im 18. Jahrhundert der Mathematik, um sich mit ihrer Hilfe die Welt zu erschließen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Implementierung der Mathematischen Logik zu einer Art *mathematischen Erfahrung* führte, da die physikalischen Gesetze zwar aus der Erfahrung herrühren; um sie aber auszudrücken, braucht es eine spezielle Sprache, die Sprache der Mathematik. »Ohne diese Sprache wäre uns der größte Teil des tieferen Zusammenhanges der Dinge für alle Zeiten unbekannt geblieben und wir wären uns niemals der innersten Harmonie der Welt bewußt geworden, die, wie wir sehen werden, die einzige wahrhafte Wirklichkeit ist.« (Poincaré 1906, 10)