

# Rechnen

# Mathematische Physik von Raum, Zeit und Materie

Matthias Staudacher



Von außen betrachtet mag die mathematische Physik als dasjenige Teilgebiet der physikalischen Wissenschaft gelten, das per definitionem am weitesten vom Experiment als Tätigkeit entfernt ist. Aber ist das so? Der vorliegende Beitrag soll dies widerlegen.

Da sind zunächst die Gedankenexperimente, ohne die die moderne Physik nicht hätte entwickelt werden können. Galileo Galilei legt in seinem berühmten Dialog *Über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme* seinem Alter Ego Salviati ein solches in den Mund. Man solle sich demnach eine geschlossene Schiffskabine vorstellen, in der Rauch geradlinig aufsteigt, Schmetterlinge ungestört umherfliegen und Fische ruhig in Gläsern schwimmen. Durch keine Beobachtung könne man feststellen, ob das Schiff ruht oder sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fortbewegt. Aus diesem gedanklichen Versuch abstrahiert Galilei seine Invarianzformeln für die Raum-Zeit. Einstein schloss direkt an dieses Experimentieren an und ersetzte lediglich das Schiff durch einen Zug und den Rauch, die Schmetterlinge und die Fische durch Lichtstrahlen. Er konnte damit die Lorentzschen Invarianzformeln der relativistischen Raum-Zeit mathematisch herleiten. Auch seine allgemeine Relativitätstheorie schuf er nicht etwa aus der Not unerklärter physikalischer Experimente heraus – die gab es in diesem Zusammenhang praktisch nicht –, sondern als Schlussfolgerungen aus auf einfachen Prinzipien beruhenden und konsequent durchgeführten gedanklichen Experimenten. Einsteins Vorgehensweise wurde zum Goldstandard der mathematischen Physik und inspiriert immer noch die Suche nach der oder den Weltformeln und damit der Theorie von Allem.

Die Aufdeckung der endgültigen mathematischen Struktur von Raum, Zeit und Materie gestaltet sich jedoch sehr schwierig. Die existierenden Theorien, also insbesondere die Quantenfeldtheorie und die Allgemeine Relativitätstheorie, sind einfach zu erfolgreich und erklären die durchgeführten – und leider mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch die in naher Zukunft durchführbaren – physikalischen Experimente zu gut. Und dennoch stimmt etwas nicht in diesem eindrucksvollen Theoriengebäude. So gibt es

keine besonders überzeugende Erklärung für den experimentellen Befund, dass die Natur von etwa 95 Prozent der im Universum vorhandenen Energie und Materie bisher im Dunkeln bleibt. Dies ist eine wichtige Triebfeder für die Weiterentwicklung der mathematischen Physik. Einen noch größeren Impetus liefert aber wieder das Gedankenexperiment: Führt man die Quantenfeldtheorie und die Allgemeine Relativitätstheorie zusammen, so ergeben sich bisher unbezähmbare mathematische Infinitäten und logische Widersprüche. Dies ist umso unerquicklicher, als es bisher keine Möglichkeiten gibt, zur Aufklärung die Gedankenexperimente in reelle Experimente zu verwandeln.

Aus der beschriebenen Situation bildete sich in den letzten Jahren eine neue wissenschaftliche Kultur der Modellbildung in der mathematischen Physik heraus. Um Quantenfeld- und Allgemeine Relativitätstheorie besser zu verstehen, beide für sich, aber insbesondere ihre schwierige Zusammenführung, arbeitet man mit Modelltheorien, die beabsichtigterweise signifikante Unterschiede gegenüber den für die Naturbeschreibung nötigen Versionen aufweisen: Die Modelle sind entweder stark vereinfacht oder auf nicht nachprüfbarer Weise verallgemeinert oder sogar explizite Gegenentwürfe zu den „echten“ Theorien. Mit diesen Modellen wird dann im Sinne möglicher Welten gedanklich und mathematisch frei experimentiert. Die sich ergebenden strukturellen Eigenschaften all dieser möglichen, aber vermutlich in der Natur nicht realisierten Welten werden in der Folge den zur Naturbeschreibung erwünschten dennoch gegenübergestellt, um so Rückschlüsse auf die gesuchten, eigentlichen, „richtigen“ Theorien zu erlauben. Es geht also darum, sich durch geschicktes Umherlaufen im Raum aller Theorien dem richtigen Ort zu nähern.

Auch in der Praxis der Konstruktion und Untersuchung von Modellen spielt neben mathematischer und physikalischer Konsistenz – wobei sowohl Erstere als auch Zweitere oft flexibel gehandhabt werden – das Experimentieren eine zentrale Rolle. Virtuelle physikalische Welten werden durch intuitive Veränderung der Modellparameter je nach Wunsch gestaltet. Auftretende modellinterne Paradoxa ziehen oft weitere Untersuchungen und Debatten nach sich, mittels derer sie entweder beseitigt oder verstärkt werden. Dabei ist es nur selten möglich, die Modelle exakt zu lösen, so dass die Modelleigenschaften oft in empirischer Fleißarbeit zusammengetragen werden. Und auch im glücklicheren Fall der exakten Lösbarkeit ist es meist so, dass sich diese nur schwierig beweisen lässt und die exakten Formeln durch Trial and Error erst gefunden und danach überprüft werden.

Besonders interessant sind diejenigen Modelle, die die Eigenschaft der Dualität besitzen. Typischerweise erlaubt diese zwei vollständig unterschiedliche Formulierungen des Modells, nennen wir sie A und B, die sich jedoch nach der Erstellung eines sogenannten Wörterbuches (*Dictionary*; es schlüsselt die Bestandteile der Formulierungen auf) als äquivalent erweisen. Diese Übereinstimmung kann allerdings typischerweise nicht streng bewiesen werden. Daher wird sie in aufwendiger – und der Natur nach nie ganz abgeschlossener – Arbeit „experimentell“ überprüft, indem man Berechnungen in sowohl A als auch B anstellt und die Ergebnisse vergleicht. An die Stelle des klassischen Theorie-Experiment-Paares tritt also ein Theorie-Theorie-Paar, dessen tatsächliche Existenz ironischerweise oft nur empirisch etabliert werden kann. Ein berühmtes Beispiel der jüngeren Zeit ist die *Anti-de Sitter/Conformal Field Theory* (AdS/CFT)-Dualität, die Ende 1997 durch den Argentinier Juan Maldacena per Vermutung vorgeschlagen wurde und deren „experimentelle“ Überprüfung immer noch andauert. Die Arbeit wurde bis Mitte 2018 über 13.500 Mal zitiert und ist damit die meistzitierte Forschungsarbeit der mathematischen Physik aller Zeiten – und dies, obwohl es kein einziges physikalisches Laborexperiment gibt, das man mit der Arbeit quantitativ erklären könnte. Was sind also die Gründe, warum sich die mathematischen PhysikerInnen diese enorme Fleißarbeit der – im obigen Sinne experimentellen – Überprüfung aufbürdeten?

Der gewichtigste Punkt ist ein konzeptioneller und hängt mit dem oben erwähnten Spannungsfeld zwischen Allgemeiner Relativitäts- und Quantenfeldtheorie zusammen. Im genaueren besagt die AdS/CFT-Dualität, dass eine Quantenfeldtheorie in  $D+1$  Raum-Zeit-Dimensionen exakt dual sei zu einer Stringtheorie in  $D+2$  Raum-Zeit-Dimensionen. Und letztere ist eine konsistente quantenmechanische Erweiterung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Man kann also die Gravitation gewissermaßen „in einer höheren Dimension verstecken“. Die Quantenfeldtheorie befindet sich dabei auf dem Rand der  $D+2$ -dimensionalen Raum-Zeit, in Analogie mit einem Hologramm, das dreidimensionale Informationen in exakt reproduzierbarer Weise auf einer zweidimensionalen Oberfläche speichert. Man sagt daher auch, dass AdS/CFT nur ein Beispiel für ein noch viel allgemeineres *holografisches Prinzip* sei.

Diese Idee erscheint so revolutionär und reizvoll, dass die daran arbeitenden PhysikerInnen überzeugt sind, dass sie auf die eine oder andere Weise in der Natur realisiert sein sollte, auch wenn es bisher kein konkretes Szenario gibt. So ist in der ursprünglichen Formulierung von AdS/CFT die Raum-Dimension  $D=3$ , so dass sich

die Stringtheorie und damit die Gravitation in fünf (statt der erforderlichen vier) Dimensionen manifestiert. Dennoch, als eine Art *Proof of Principle* induzierte die Maldacenasche Vermutung ihre enorm aufwendige, im obigen Sinne experimentelle und immer noch nicht abgeschlossene Überprüfung.

Die AdS/CFT-Korrespondenz ist allerdings, wie sich zeigen lässt, nur ein – wenn auch besonders drastisches – Beispiel für ein viel allgemeineres Phänomen in der theoretischen Physik. So kann man etwa für die seit 1968 entstandene Stringtheorie als Ganzes beobachten, dass noch nie in der Geschichte der Menschheit eine so große Anzahl von WissenschaftlerInnen (grob geschätzt mindestens 10.000) über einen so langen Zeitraum (fünfzig Jahre) an einer Theorie gearbeitet haben, für die bisher keine einzige im engeren Sinne experimentelle Überprüfung möglich war. Dennoch fordert zumindest das Selbstverständnis der daran arbeitenden WissenschaftlerInnen, dass es sich bei der Stringtheorie um „echte“ Physik handelt. Die Qualitätssicherung findet in einem weltweit einzigartigen räumlich und zeitlich delokalisierten Laborraum statt, dem arXiv (gesprochen engl. *Archive*), einem Dokumentenserver für Preprints, der Anfang der 1990er Jahre, sogar noch kurz vor der Expansion des Internets, innerhalb der String-Community entstand und sich inzwischen auf viele weitere Teilgebiete der Physik und Mathematik ausgedehnt hat. Es gestattet es, theoretische Szenarien gewissermaßen instantan weltweit zu präsentieren und sich damit unmittelbar einer kritischen Überprüfung durch die gesamte Community auszusetzen. Ein derartiges theoretisches Experiment scheitert also etwa dann, wenn ihm in der Folge in „Gegenpublikationen“ mathematische oder konzeptionelle Fehler nachgewiesen werden. Es scheitert aber auch in einem zweiten Szenario, nämlich der völligen Nichtbeachtung der Community. Andersherum ist das „Experiment“ umso mehr von Erfolg gekrönt, wenn eine möglichst große Anzahl von Folgearbeiten die Selbstkonsistenz und Tiefe des Vorschlags herausarbeiten. Die AdS/CFT-Korrespondenz ist vermutlich das bisher wichtigste Beispiel eines derartigen Erfolgsszenarios.

Ein solcher scheinbar von der Realität abgekoppelter und sich zunächst nur selbst genügender Laborraum mag von außen betrachtet wie der unbestimmte Ort eines bloßen Glasperlenspiels wirken. Dem entgegensetzen ist einerseits, dass die fundamentale theoretische Physik eben nach den dramatischen Einsichten des letzten Jahrhunderts ein Opfer ihres Erfolgs geworden ist, indem nur noch wenige experimentelle Schwachstellen im Theoriegebäude zu finden sind. Dennoch gibt es sie, so etwa das

eingangs erwähnte Problem von dunkler Energie und Materie. Der zweite Einwand ist, dass die wichtigste Schwachstelle der oben betonte mathematische Konflikt zwischen zwei jeweils für sich mit ungeheurer Präzision überprüften Theoriegebäuden (Allgemeine Relativitätstheorie und Quantenfeldtheorie) ist und dies eine neue Kultur des Experimentierens mit Theorien geradezu erfordert.

