

**Reihe 18**

Mechanik/  
Bruchmechanik

**Nr. 350**

Dipl.-Ing. Katharina Ursula Dibblee,  
Paderborn

## 3D-Risswachstum in homogenen, isotropen sowie funktional gradierten Strukturen





# 3D-Risswachstum in homogenen, isotropen sowie funktional gradierten Strukturen

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)  
der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Paderborn

genehmigte  
DISSERTATION

von  
Dipl.-Ing. Katharina Ursula Dibblee

aus Paderborn



# Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 18

Mechanik/  
Bruchmechanik

Dipl.-Ing. Katharina Ursula Dibblee,  
Paderborn

Nr. 350

3D-Risswachstum in  
homogenen, isotropen  
sowie funktional  
gradierten Strukturen

VDI verlag

Dibblee, Katharina Ursula

## **3D-Risswachstum in homogenen, isotropen sowie funktional gradierten Strukturen**

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 350. Düsseldorf: VDI Verlag 2018.

180 Seiten, 93 Bilder, 1 Tabelle.

ISBN 978-3-18-335018-6, ISSN 0178-9457,

€ 67,00/VDI-Mitgliederpreis € 60,30.

**Für die Dokumentation:** Bruchmechanik – bruchmechanische Gradierung – bruchmechanisches 3D Konzept für gradierte Materialien – dreidimensionales Risswachstum – Ermüdungsris-sausbreitung – Gradierungswinkel – numerische Risswachstumssimulationen – funktional gradierte Strukturen – Restlebensdauer – Rissausbreitungsrichtung

Durch den Einsatz von funktional gradierten Materialien ergeben sich neue Möglichkeiten der Strukturoptimierungen im Hinblick auf Leichtbaupotenziale. Gleichzeitig werden neue Herausforderungen an Ingenieure herangetragen, welche sich auf das Rissausbreitungsverhalten in solchen gradierten Strukturen beziehen. Diese Arbeit leistet daher einen Beitrag zur realitätsnahen Rissausbreitungsvorhersage und der damit einhergehenden Restlebensdauerbestimmung von dreidimensionalen Strukturen unter Verwendung von bruchmechanisch gradierten Materialien. Mit dem hier aufgezeigten neuen bruchmechanischen 3D Konzept ist es möglich, den Einfluss einer funktionalen Materialgradierung zu berücksichtigen. Durch die numerische Umsetzung dieses Konzeptes mit dem Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> werden die Auswirkungen einer Materialgradierung verdeutlicht. Anwendungsbeispiele veranschaulichen den Einfluss einer bruchmechanischen Gradierung im Hinblick auf die Risspfade sowie die Änderungen der Restlebensdauer von Strukturen.

### **Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter [www.dnb.de](http://www.dnb.de) abrufbar.

### **Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek**

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie (German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at [www.dnb.de](http://www.dnb.de).

Dissertation Universität Paderborn

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 2018

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9457

ISBN 978-3-18-335018-6

Kraft kommt nicht aus körperlichen Fähigkeiten.  
Sie entspringt einem unbeugsamen Willen.

(Mahatma Gandhi)



# INHALTSVERZEICHNIS

Verzeichnis der verwendete Symbole und Abkürzungen .....	VIII
<b>1 Einleitung und Zielsetzung .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlegende Charakterisierung des Risswachstums .....</b>	<b>4</b>
2.1 Charakteristische Spannungsverteilungen in der Rissumgebung .....	5
2.2 Rissverhalten unter statischer Belastung .....	7
2.3 Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren .....	9
2.4 Instabiles Risswachstum .....	11
2.4.1 Kriterium der Energiefreisetzung .....	12
2.4.2 $J$ -Kriterium .....	12
2.4.3 $K$ -Konzept .....	13
2.5 Instabiles Risswachstum bei ebener Mixed-Mode-Beanspruchung .....	13
2.5.1 Maximal-Tangentialspannungs-Kriterium .....	14
2.5.2 Bruchkriterium nach RICHARD .....	14
2.6 Rissverhalten unter zyklischer Beanspruchung .....	15
2.7 Stabiles Risswachstum bei ebener Mixed-Mode-Beanspruchung .....	18
2.7.1 Maximal-Tangentialspannungs-Kriterium für stabiles Risswachstum .....	18
2.7.2 Bruchkriterium nach RICHARD für stabiles Risswachstum .....	19
<b>3 Herausforderungen des 3D-Risswachstums .....</b>	<b>20</b>
3.1 Auswirkung von Belastungen/Beanspruchungen .....	21
3.2 Geometrien .....	22
3.3 3D-Mixed-Mode-Komplexität .....	23
3.4 Bruchkriterien bei 3-dimensionaler Rissausbreitung .....	24
3.4.1 Kriterium nach POOK .....	25
3.4.2 $\sigma_1$ -Kriterium nach SCHÖLLMANN et al. ....	25
3.4.3 Verallgemeinertes Kriterium nach RICHARD et al. ....	27
3.5 Stabiles Risswachstum bei räumlicher Mixed-Mode-Beanspruchung .....	28
3.5.1 $\sigma_1$ -Kriterium für stabiles Risswachstum .....	29
3.5.2 Verallgemeinertes Kriterium für stabiles Risswachstum .....	29
3.6 Herausforderungen bei der Simulation von 3D-Risswachstum .....	30
<b>4 Risswachstum in gradierten Materialien .....</b>	<b>31</b>

<b>4.1</b>	<b>Über den Leichtbau zu gradierten Materialien.....</b>	<b>32</b>
4.1.1	Differenzialbauweise .....	33
4.1.2	Verbundbauweise .....	35
<b>4.2</b>	<b>Funktional gradierte Materialien .....</b>	<b>38</b>
4.2.1	Elastische Gradierung.....	38
4.2.2	Bruchmechanische Gradierung.....	39
4.2.3	Verwendungsmöglichkeiten gradierten Materialien und Strukturen.....	42
<b>4.3</b>	<b>Bruchmechanische Gradierung unter 2-dimensionalem Gesichtspunkt .....</b>	<b>43</b>
4.3.1	Konzeptansätze für eine Rissausbreitung in gradierten Strukturen .....	44
4.3.2	TSSR-Konzept.....	45
<b>4.4</b>	<b>Bruchmechanische Gradierung unter 3-dimensionalem Gesichtspunkt .....</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>Numerische Simulation des 3D-Risswachstums.....</b>	<b>57</b>
<b>5.1</b>	<b>Risswachstumsprogramme für homogene Strukturen .....</b>	<b>57</b>
5.1.1	FRANC3D/NG .....	58
5.1.2	PROCRACK .....	59
5.1.3	ADAPCRACK3D.....	59
<b>5.2</b>	<b>Simulationssoftware für funktional gradierte Strukturen .....</b>	<b>60</b>
5.2.1	FRANC/FAM .....	60
5.2.2	MCRACK2D.....	60
<b>5.3</b>	<b>Entwicklung von ADAPCRACK3D<sup>Version_KD15</sup> .....</b>	<b>61</b>
5.3.1	Online-Benutzeroberfläche als Eingabewerkzeug.....	61
5.3.2	ADD-ON Funktion zur Programmstabilität .....	63
5.3.3	Rissausbreitung bei teilweise nicht wachstumsfähiger Rissfront .....	68
5.3.4	Ausbau der bruchmechanischen Konzepte im Riss simulationsprogramm ADAPCRACK3D <sup>VERSION_KD15</sup> .....	71
<b>5.4</b>	<b>Berechnungsfunktionen für Simulationen in bruchmechanisch gradierten Strukturen.....</b>	<b>73</b>
5.4.1	Funktion zur Berechnung der Rissausbreitung in einer scharfen bruchmechanischen Gradierung .....	74
5.4.2	Funktion zur Berechnung der Rissausbreitung in einem bruchmechanisch gradierten Übergangsbereich .....	81
<b>5.5</b>	<b>Verifikation von ADAPCRACK3D<sup>VERSION_KD15</sup> .....</b>	<b>85</b>
5.5.1	Rissausbreitung in homogenen Strukturen .....	85
5.5.2	Rissausbreitung in gradierten Strukturen.....	92
<b>6</b>	<b>Praxisbezogene Anwendungen von Risswachstumssimulationen .....</b>	<b>99</b>
<b>6.1</b>	<b>Einsatz von Risswachstumssimulationen zur Unterstützung von Evaluierungen anhand experimenteller Untersuchungen.....</b>	<b>103</b>

6.1.1	Numerische Ermittlung von Einflüssen auf die Ermüdungsrisssausbreitung in einer Axialrissrohrprobe .....	104
6.1.2	Bestimmung einer Masterkurve für Axialrissrohrproben .....	107
6.2	Einfluss einer Materialgradierung auf das Risswachstum in einem Zahnrad .....	110
7	Resümee .....	114
Anhang .....		116
A1	.....	116
A2	.....	118
A3	.....	122
A4	.....	128
A5	.....	132
A6	.....	134
A7	.....	147
Literaturverzeichnis .....		154

## VERZEICHNIS DER VERWENDETE SYMBOLE UND ABKÜRZUNGEN

### a) Lateinische Symbole

$A$	$m \times n$ -Matrix
$A, B$	Mixed-Mode-Verhältnisse
$A, B, C, D$	Parameter des Bruchkriteriums nach RICHARD
$C_E$	Parameter des ERDOGAN/RATWANI - Gesetzes
$C_{FM}$	Parameter der FORMAN/METTU - Gleichung
$C_P$	Parameter der PARIS/ERDOGAN - Gleichung
$DK1$	Relevanter Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_M$ in Abhängigkeit von $\Delta K_{I,th}(M1)$ nach dem neuen 3D-Konzept an einem Rissfront-knotenpunkt
$DK2$	Relevanter Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_0$ in Abhängigkeit von $\Delta K_{I,th}(M2)$ nach dem neuen 3D-Konzept an einem Rissfront-knotenpunkt
$DK3$	Relevanter Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_M$ in Abhängigkeit von $\Delta K_{I,C}(M1)$ nach dem neuen 3D-Konzept an einem Rissfront-knotenpunkt
$DK4$	Relevanter Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_0$ in Abhängigkeit von $\Delta K_{I,C}(M2)$ nach dem neuen 3D-Konzept an einem Rissfront-knotenpunkt
$G_I, G_{II}$	Energiefreisetzungsraten für Mode I und Mode II
$G_{IC}$	Bruchmechanischer Materialgrenzwert/ kritische Energiefreisetzungsraten
$H$	Householder-Matrix
$I$	Einheitsmatrix
$J$	Wert des $J$ -Integral
$J_{IC}$	kritischer Wert des $J$ -Integrals
$K_{ges}$	Gesamter Spannungsintensitätsfaktor
$K_I(t)$	Zeitlich veränderlicher Spannungsintensitätsfaktor für Mode I

$K_{I,F}, K_{I,M}$	Spannungsintensitätsfaktor für Mode I in Abhängigkeit einer Kraft F bzw. eines Momentes M
$K_{I,ges}$	Gesamter Spannungsintensitätsfaktor für Mode I
$K_{I,max}, K_{I,min}$	Maximaler und minimaler Spannungsintensitätsfaktor
$K_{II,ges}$	Gesamter Spannungsintensitätsfaktor für Mode II
$K_{III,ges}$	Gesamter Spannungsintensitätsfaktor für Mode III
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Spannungsintensitätsfaktoren für Mode I, Mode II und Mode III
$K_{IC}, K_{IIC}, K_{IIIC}$	Risszähigkeiten für Mode I, Mode II und Mode III
$K_V$	Vergleichsspannungsintensitätsfaktor
$K_{V,I,II}, K_{V,I,II,III}$	Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren nach POOK
$\Delta K$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor
$\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta K_{III}$	Zyklische Spannungsintensitätsfaktoren für Mode I, Mode II und Mode III
$\Delta K_I^C(\varphi = \varphi_0)$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_0$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_0$ mit zyklischer Bruchgrenzkurve des TSSR-Konzeptes
$\Delta K_I^C(\varphi = \varphi_M)$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_M$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_M$ mit zyklischer Bruchgrenzkurve des TSSR-Konzeptes
$\Delta K_I^{C,3D}(\varphi = \varphi_0)$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_0$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_0$ mit zyklischer Bruchgrenzkurve des neuen 3D-Konzeptes
$\Delta K_I^{C,3D}(\varphi = \varphi_0(z))$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_0$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_0$ mit zyklischer Bruchgrenzkurve des neuen 3D-Konzeptes in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\Delta K_I^{C,3D}(\varphi = \varphi_M)$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_M$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_M$ mit zyklischer Bruchgrenzkurve des neuen 3D-Konzeptes
$\Delta K_I^{C,3D}(\varphi = \varphi_M(z))$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_M$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_M$ mit zyklischer Bruchgrenzkurve des neuen 3D-Konzeptes in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\Delta K_I^{C,TSSR}$	Relevanter zyklischer Spannungsintensitätsfaktor von $\Delta K_I^C(\varphi)$ des TSSR-Konzeptes
$\Delta K_I^{th}(\varphi = \varphi_0)$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_0$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_0$ mit Schwellenwertkurve des TSSR-Konzeptes
$\Delta K_I^{th}(\varphi = \varphi_M)$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_M$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_M$ mit Schwellenwertkurve des TSSR-Konzeptes

$\Delta K_I^{\text{th},3D}(\varphi = \varphi_0)$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_0$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_0$ mit Schwellenwertkurve des neuen 3D-Konzeptes
$\Delta K_I^{\text{th},3D}(\varphi = \varphi_0(z))$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_0$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_0$ mit Schwellenwertkurve des neuen 3D-Konzeptes in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\Delta K_I^{\text{th},3D}(\varphi = \varphi_M)$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_M$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_M$ mit Schwellenwertkurve des neuen 3D-Konzeptes
$\Delta K_I^{\text{th},3D}(\varphi = \varphi_M(z))$	Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor mit $\varphi = \varphi_M$ und Berührungspunkt bei $\varphi = \varphi_M$ mit Schwellenwertkurve des neuen 3D-Konzeptes in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\Delta K_I^{\text{th},\text{TSSR}}$	Relevanter zyklischer Spannungsintensitätsfaktor von $\Delta K_I^{\text{th}}(\varphi)$ des TSSR-Konzeptes
$\Delta K_{\text{IC}}^{3D}$	Relevanter zyklischer Spannungsintensitätsfaktor von $\Delta K_I^{\text{C},3D}(\varphi)$ des neuen 3D-Konzeptes
$\Delta K_{\text{IC}}^{3D}(z)$	Relevanter zyklischer Spannungsintensitätsfaktor von $\Delta K_I^{\text{C},3D}(\varphi(z))$ des neuen 3D-Konzeptes in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\Delta K_{\text{I,max}}, \Delta K_{\text{I,min}}$	Zyklischer maximaler und minimaler Spannungsintensitätsfaktor für Mode I
$\Delta K_{\text{I,th}}$	Schwellenwerte der Ermüdungsrissoausbreitung für Mode I
$\Delta K_{\text{I,th},k}$	Lokaler Schwellenwerte für einen Rissfrontknoten
$\Delta K_{\text{I,th}}(z)$	Schwellenwerte der Ermüdungsrissoausbreitung für Mode I in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\Delta K_{\text{I,th}}(\varphi)$	Schwellenwertfunktion in Abhängigkeit von $\varphi$
$\Delta K_{\text{I,th}}(\varphi(z))$	Schwellenwertfunktion in Abhängigkeit von $\varphi$ und z-Koordinate
$\Delta K_{\text{I,th}}(\varphi_0)$	Schwellenwertfunktion in Richtung von $\varphi_0$
$\Delta K_{\text{I,th}}(\varphi_0(z))$	Schwellenwertfunktion in Richtung von $\varphi_0$ und z-Richtung
$\Delta K_{\text{I,th}}(\varphi_M)$	Schwellenwertfunktion in Richtung von $\varphi_M$
$\Delta K_{\text{I,th}}(\varphi_M(z))$	Schwellenwertfunktion in Richtung von $\varphi_M$ und z-Richtung
$\Delta K_{\text{I,th}}^{3D}$	Relevanter zyklischer Spannungsintensitätsfaktor von $\Delta K_I^{\text{th},3D}(\varphi)$ des neuen 3D-Konzeptes
$\Delta K_{\text{I,th}}^{3D}(z)$	Relevanter zyklischer Spannungsintensitätsfaktor von $\Delta K_I^{\text{th},3D}(\varphi(z))$ des neuen 3D-Konzeptes in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\Delta K_{\text{IC}}$	Zyklische Risszähigkeit für Mode I

$\Delta K_{IC,k}$	Lokale zyklische Risszähigkeit für einen Rissfrontknoten
$\Delta K_{IC}(\varphi)$	Risszähigkeit in Abhängigkeit von $\varphi$
$\Delta K_{IC}(\varphi_0)$	Risszähigkeit in Richtung von $\varphi_0$
$\Delta K_{IC}(\varphi_M)$	Risszähigkeit in Richtung von $\varphi_M$
$\Delta K_V$	Zyklischer Vergleichsspannungsintensitätsfaktor
$\Delta K_{V,max}$	Maximaler zyklischer Vergleichsspannungsintensitätsfaktor
$M_1; M_2$	Biegemomente
$N$	Lastwechselzahl
$P, Q, R$	Knotenpunkte aus der Gradierungsgrenze
$P1, P2, P2^*$ ; $P_{NB1}, P_{NB1}$	Orientierungspunkte für die Exponentialfunktion
$Q$	Orthogonale Matrix
$R$	Dreiecksmatrix
$R$	Spannungsverhältnis, $R$ -Verhältnis
$\tilde{R}$	Reduzierte Dreiecksmatrix
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$S$	Wert der Spline-Funktion
$\bar{U},$	Energiedichte
$V$	Verhältnis der Mixed Mode Beanspruchung des TSSR-Konzeptes
$W_{Bx}(x), W_{Bz}(x)$	Widerstandsmomente
$W_k^x, W_k^y$	Arbeit der äußeren Kräfte
$Y$	Geometriefaktor
$Y_{Axi}$	Geometriefaktor einer Axialrissrohrprobe
$Y_{I,ges}$	Gesamter Geometriefaktor für Mode I
$Y_I, Y_{II}, Y_{III}$	Geometriefaktoren für Mode I, Mode II und Mode III
$Y_{I,F}, Y_{I,M}$	Geometriefaktoren für Mode I
$a$	Risslänge
$\bar{a}, \bar{a}$	Gemittelte Risslängen
$a, b$	Längen der Halbachsen einer Kerbe
$a, b$	Parameter der kleinsten Fehlerquadratsumme
$a_i$	Spalte einer Matrix
$a_k, b_k, c_k$	Terme der Spline-Funktion

$\Delta a$	Rissinkrement
$\Delta a_k$	Rissinkrementes des Rissfrontknotenpunktes
$\Delta a_{\max}$	Maximales Rissverlängerungsinkrement
$b$	Breite des Übergangsbereichs bei einer Materialgradierung
$b, v, x$	Vektoren für die Berechnung der kleinsten Fehlerquadratsumme
$d$	Abstand zur Gradierungsgrenze
$da$	Rissverlängerung
$dA$	Rissflächenverlängerung
$da/dN$	Rissgeschwindigkeit/ Risswachstumsrate
$dF_y$	Druckkraft bei der Rissschließung
$dU$	Elastische Energie
$dW$	Rissschließungsarbeit
$dx$	Teilstück
$f(x) = c \cdot a^x$	Exponentialfunktion
$f(\Delta K_{IC})$	Relevante Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit von $\Delta K_{IC}$
$f(\Delta K_{I,th})$	Relevante Beanspruchungsfunktion
$f(\Delta K_{I,th}(z))$	Relevante Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit von $\Delta K_{I,th}$
$f(\Delta K_V)$	Reale Beanspruchungsfunktion
$f(\Delta K_V(z))$	Reale Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit von $\Delta K_V$
$f_1, f_2$	Beanspruchungsfunktion der Materialien 1 und 2 des neuen 3D_Konzeptes
$f_1(\Delta K_{I,th}, (\varphi = \varphi_M))$	Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit von $\Delta K_{I,th}$ und $\varphi = \varphi_M$
$f_2(\Delta K_{I,th}, (\varphi = \varphi_0))$	Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit von $\Delta K_{I,th}$ und $\varphi = \varphi_0$
$f_3(\Delta K_{IC}, (\varphi = \varphi_M))$	Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit von $\Delta K_{IC}$ und $\varphi = \varphi_M$
$f_4(\Delta K_{IC}, (\varphi = \varphi_0))$	Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit von $\Delta K_{IC}$ und $\varphi = \varphi_0$
$m, n$	Anzahl der Zeilen und Spalten einer Matrix
$m_E$	Parameter des ERDOGAN/RATWANI - Gesetzes
$m_P$	Paramater der PARIS/ERDOGAN - Gleichung
$n$	Anzahl der Simulationsschritte
$\vec{n}$	Normalenvektor
$n_{FM}, p, q$	Parameter der FORMAN/METTU - Gleichung

$q$	Wert der kleinsten Fehlerquadratsumme
$r, \varphi, z$	Zylinderkoordinaten am Riss
$t$	Probendicke
$t$	Zeit
$\Delta t_k$	Teilstück der Probendicke
$u, v$	Exponenten des Bruchkriterium nach RICHARD
$\vec{u}$	Verschiebungsvektor des J-Kriteriums
$\Delta u_{i-1,k}^x, \Delta u_{i-1,k}^y$	Knotenpunktverschiebungen
$v(x), u(x)$	Rissverschiebungen in x-Koordinate
$w(x)$	Länge des Restligamentes einer Axialrissrohrprobe
$x, y, z$	Kartesische Koordinaten

## b) Griechische Symbole

$\alpha_1, \alpha_2$	Werkstoffparameter des Bruchkriteriums nach RICHARD
$\gamma$	Rissöffnungsfunktion
$\varepsilon_{ij}$	Dehnungstensor
$\lambda, \mu$	Faktoren der Parameterform
$\nu$	Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl)
$\rho$	Kerbradius, Krümmungsradius der Kerbe
$\sigma$	Normalspannung, statische Spannung, äußere Bauteilbelastung
$\sigma(t)$	Zeitlich veränderliche Spannung
$\sigma_a$	Spannungsausschlag
$\sigma_{Bx}, \sigma_{Bz}$	Biegespannungskomponenten der Nennspannung $\sigma_{Lig}$
$\sigma_{ij}$	Komponenten des Spannungstensors an der Rissspitze
$\sigma_{Lig}$	Nennspannung im Restligament einer Axialrissrohrprobe
$\sigma_{max}, \sigma_{min}$	Maximale und minimale Spannung
$\sigma_r, \sigma_\varphi$	Spannungskomponenten in Zylinderkoordinaten
$\sigma_t$	Tangentialspannung entlang des Kerbrandes

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Spannungskomponenten in kartesischen Koordinaten
$\sigma_i(x)$	Spannungskomponente in Abhängigkeit der x-Koordinate
$\sigma_{Lug}$	Zugspannungskomponente der Nennspannung $\sigma_{Lig}$
$\sigma_\varphi$	Tangentialspannung
$\sigma_{\varphi, \max}$	Maximale Tangentialspannung
$\sigma_1'$	Spezielle Hauptnormalspannung des $\sigma_1'$ -Kriteriums
$\Delta\sigma$	Schwingbreite der Spannung bei zyklischer Belastung
$\Delta\sigma_{\max}$	Zyklische maximale Spannung
$\Delta\sigma_\varphi \sqrt{2\pi \cdot r}$	Zyklische Beanspruchungsfunktion des TSSR-Konzeptes
$\Delta\sigma_1' \sqrt{2\pi \cdot r}$	Zyklische Beanspruchungsfunktion des neuen 3D-Konzeptes
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Schubspannungskomponenten in kartesischen Koordinaten
$\tau_{xy}(x)$	Schubspannungskomponente in Abhängigkeit der x-Koordinate
$\tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$	Schubspannungskomponenten in Polarkoordinaten
$\varphi$	Polarkoordinate am Riss
$\varphi_M$	Gradierungswinkel
$\varphi_M(z)$	Gradierungswinkel in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\varphi_{M,k}$	Gradierungswinkel eines Knotenpunktes
$\varphi_0$	Abnickwinkel
$\varphi_0(z)$	Abnickwinkel in Abhängigkeit der z-Koordinate
$\psi_0$	Verdrehwinkel

### c) Abkürzungen

2D	Zweidimensional
3D	Dreidimensional
ABAQUS	Anerkanntes Finite-Elemente-Programm
ADD-ON	Erweiterungsfunktionen
ANSYS	Finite-Elemente-Programm
ASTM	American Society for Testing and Material

CT-Probe	Compact Tension-Probe
CTMM-Probe	Compact Tension Mixed Mode-Probe
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode
FGM	Funktional gradierte Materialien (engl.: functionally graded materials)
FKM	Forschungskuratorium Maschinenbau
FRANC3D/NG	Fracture Analysis Code 3D / Next Generation
FRANC/FAM	Fracture Analysis Code / Fachgruppe Angewandte Mechanik
GFK	Glasfaserverstärkte Kunststoffe
GUI	Benutzeroberfläche (engl.: Graphical User Interface)
ISO	International Organization for Standardization
LEBM	Linear-elastische Bruchmechanik
Lw	Lastwechsel
M1, M2	Material 1, Material 2
MEFR	Konzept der modifizierten Energiefreisetzungsrate
MTS	Maximale Tangentialspannung
MVCCI	Modified Virtual Crack Closure Integral (modifiziertes Risschließungsintegral)
NASTRAN	Nasa Structural Analysis System
P, Q, R	Knotenpunkte in der Gradierungsebene
SFB/TR TRR30	Sonderforschungsbereich Transregio 30
SLM	Selectiv Laser Melting
TSSR	Kriterium der Tangentialspannung für gradierte Materialien nach SCHRAMM und RICHARD
ZTU	Zeit-Temperatur-Umwandlungs-Schaubild

## ZUSAMMENFASSUNG

Technologische Weiterentwicklungen bringen stets neue Herausforderungen mit sich. Im Hinblick auf gradierte Materialien sind die Kenntnisse der lokalen Eigenschaftskennwerte ebenso relevant, wie das Rissausbreitungsverhalten in eben solchen rissbehafteten Bauteilen und Strukturen. Vor diesem Hintergrund ist das primäre Ziel dieser Dissertation, einen Beitrag für eine realitätsgetreue Aussage über das Rissausbreitungsverhalten in homogenen, isotropen sowie funktional gradierten Strukturen zu geben. Bereits etablierte bruchmechanische Konzepte, ermöglichen eine realitätsnahe Aussage über das Rissausbreitungsverhalten in homogenen Strukturen. Der Einfluss einer Materialgradierung wird hierbei zu meist vernachlässigt. Daher wurde ein neues 3-dimensionales Konzept erarbeitet, um eine Aussage über das Rissausbreitungsverhalten in Hinblick auf den Einfluss einer bruchmechanischen Materialgradierung geben zu können. Hierbei liegt der Fokus insbesondere auf der Rissausbreitungsrichtung unter Berücksichtigung der vorliegenden Gradierungsgrenzen. Um ein großes Spektrum an Kombinationsmöglichkeiten für eine Materialgradierung abbilden zu können, wird ein numerisches Riss simulationsprogramm für eine räumliche Rissausbreitungsvorhersage genutzt. Durch Optimierungsmaßnahmen zur Programmstabilität und Implementieren des neuen bruchmechanischen Konzeptes in das Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup>, sind Simulationen des Risswachstums in homogenen sowie gradierten Strukturen möglich. Erste Ergebnisse zeigen eine deutliche Verbesserung der Programmstabilität bei der Berechnung von homogenen Strukturen. Außerdem kann der Einfluss der Materialgradierung auf das Risswachstum individuell vorhergesagt werden.

## ABSTRACT

Technological advances mean new challenges. With regard to graded materials, the knowledge of the local property characteristics is as relevant as the crack propagation behaviour in the same crack-prone components and structures. Referring to this knowledge, the primary aim of this dissertation is to make a contribution to a realistic statement about the crack propagation behaviour in homogeneous, isotropic and functional graded structures. Already established fracture mechanic concepts allow a realistic statement about the crack propagation behaviour in homogeneous structures. The influence of a material gradation is usually neglected. Therefore a new 3-dimensional concept was developed in order to be able to give a statement about the crack propagation behaviour with regard to the influence of a fracture mechanical graded material. Here the focus is particularly on the crack propagation direction, taking into account the present gradation-line. In order to be able to display a wide range of combination possibilities for a material gradation, a numerical crack simulation program is used for a spatial crack propagation prediction. Through optimization measures for program stability and the implementation of the new fracture mechanical concept into the simulation program ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup>, simulations of crack growth in homogeneous as well as graded structures are possible. Initial results show a significant improvement in the stability of the program in the calculation of homogeneous structures. In addition, the influence of the material gradation on the crack growth can be predicted individually.

# 1 EINLEITUNG UND ZIELSETZUNG

Seit Menschengedenken brechen und reißen Bauteile und Strukturen. Die Ursachen hierfür sind unterschiedlichster Art. So können sowohl Fehler im Bauteil als auch falsche oder zu hohe Belastungen auf das Bauteil zu einem frühzeitigen Versagen führen. Insbesondere der Bereich der Bruchmechanik beschäftigt sich intensiv mit dem Versagen von Bauteilen und Strukturen. Die Anfänge der Bruchmechanik selbst sind bis auf GALILEO GALILEI um 1638 zurückzuführen. GALILEI stellte erste Überlegungen zum Bruchverhalten eines Balkens an, welcher durch Biegung belastet wurde. Doch erst mit dem serienmäßigen Einzug von Eisen in der Maschinenherstellung, allen voran im Eisenbahnbau, bekam die Materialprüfung einen größeren Stellenwert (A.WÖHLER 1877). Einen großen Meilenstein der Bruchmechanik setzte A.A. GRIFFITH im Jahr 1921 mit seiner Theorie über die aufgewendete Energie, welche für ein Risswachstum benötigt wird. Den großen Durchbruch erlangte G.R. IRWIN in den 50er Jahren [Irw57], als der Zustand an der Risspitze mit Hilfe von Spannungsintensitätsfaktoren beschrieben werden konnte. Seitdem gab es in der Entwicklung der Bruchmechanik und dementsprechend auch in der Vorhersage, ob ein Bauteil mit Riss den Belastungen standhalten kann, enorme Fortschritte. Viele Einzelanwendungen sind bekannt und auch Regelwerke (ASTM; FKM; ISO) mit etablierten Berechnungskonzepten für eine sichere Bewertung von Bauteilen, unter dem Aspekt der Rissentstehung sowie der Rissausbreitung in Bauteilen und Strukturen, stehen zur Verfügung.

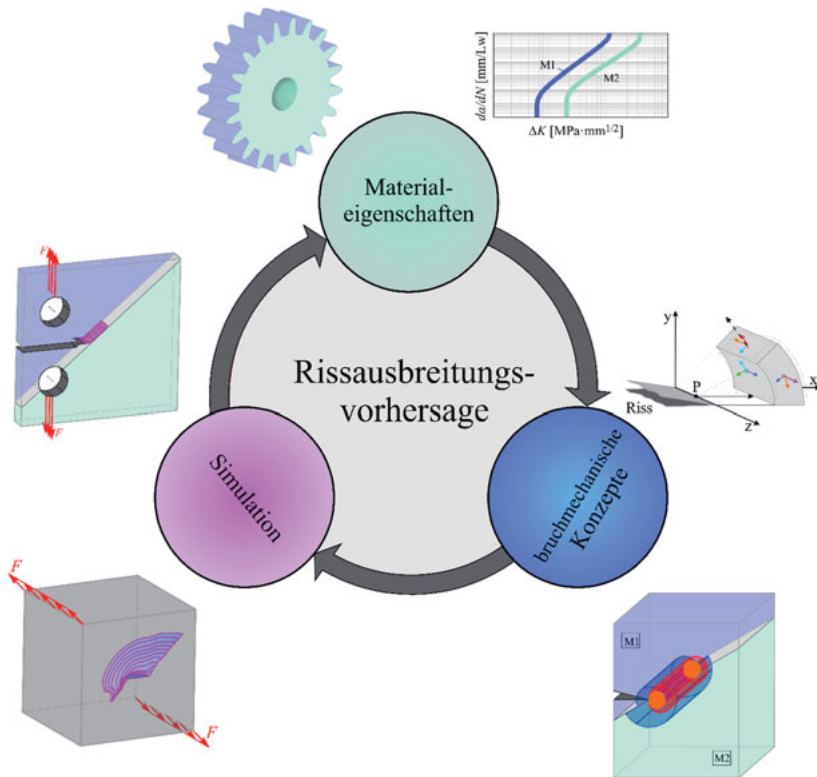
Parallel erhielt auch die Rechnerntechnik erheblichen Aufschwung und somit die Entwicklung von Simulationsprogrammen auf der Basis der Finite-Elemente-Methode (NASTRAN; ABAQUS). Mit dieser Methode ist es möglich, auch komplexe dreidimensionale Strukturen hinsichtlich ihrer Beanspruchung und Verformung zu untersuchen [AM86; Clo90]. Da die Leistungsfähigkeit von Computern extrem verbessert wurde, zählen FE-Analysen in der Produktentwicklung mittlerweile zum Standard.

Unabhängig von den Entwicklungen in der Bruchmechanik werden unaufhörlich weitere Verfahren zur Bauteilherstellung und -verarbeitung entwickelt, welche stets neue Herausforderungen mit sich bringen. Die Schnelligkeit der heutigen hochleistungsorientierten industriellen Gesellschaft führt zu persistent wachsenden neuen Technologien. Dabei liegt der Fokus in erster Linie darauf, dass immer schneller und leichter gebaut sein soll. Gleichzeitig müssen diese Bauteile und Strukturen jedoch auch komplexen funktionalen Anforderungen standhalten.

Bauteile, die einst noch schwer und groß konstruiert wurden, um ein Leben lang zu halten, werden nur noch für einen gewissen Zeitraum benötigt. Damit eröffnet sich ein großes Potenzial sowohl für den Leichtbau als auch für den Einsatz von funktionalen Werkstoffen. Der Grundgedanke liegt neben der Funktion des Bauteils vor allem auf höherer Leistung und Geschwindigkeit sowie auf besserem Komfort und Design. Gleichzeitig werden immer größere Erwartungen an die Sicherheit der Bauteile und Strukturen gestellt. Desgleichen steht ein umweltbewusster Umgang mit den Ressourcen mittlerweile genauso im Blickpunkt der Entwicklung wie das fachgerechte Recyclen. Um möglichst effizient und leicht zu bauen, bedarf

es einer gewissen Kenntnis, um entsprechende Materialien und Strukturen abhängig von ihren Einsatzgebieten zu berechnen und ausreichend bewerten zu können. Neben der Festigkeit sind auch die auftretenden Belastungen ein wichtiger Aspekt, um eine Aussage über eine sichere Auslegung der Bauteile treffen zu können.

Neue Herausforderungen im Hinblick auf den Leichtbau ergeben sich nicht nur aus den komplexen Belastungen auf ein Bauteil, sondern vor allem auch durch den Einsatz von neuen funktionalen Werkstoffen. Insbesondere beim Einsatz von funktional gradierten Werkstoffen, welche lokal unterschiedliche Materialeigenschaften aufweisen, bedarf es noch weiterer Erkenntnisse, ob und in wieweit diese einen Einfluss auf die Rissausbreitung mit sich bringen.



**Abbildung 1-1:** Überblick über die Gesamtheit einer Rissausbreitungsvorhersage

Bereits etablierte Konzepte aus der Bruchmechanik beschränken sich auf homogene Werkstoffe und können den Einfluss einer Materialgradierung nicht mitberücksichtigen. Aus diesem Grund müssen Konzepte entwickelt werden, welche den Einfluss einer solchen Gradierung berücksichtigen können. Die Entwicklung neuer Konzepte allein reicht jedoch nicht aus. Für eine rundum geschlossene Rissausbreitungsvorhersage sind unter anderem Materi-

aleigenschaften, Konzepte und entsprechende Simulationen notwendig (Abbildung 1-1). Um individuelle und effiziente Aussagen über ein mögliches Versagen von Bauteilen treffen zu können, werden Simulationsprogramme genutzt. Bei diesen Programmen werden die entstehenden Belastungen auf Bauteile übertragen. Die lokalen Beanspruchungen und kritischen Bereiche in einem Bauteil können dabei zuverlässig berechnet werden. Spezielle Riss simulationsprogramme können darüber hinaus die Ausbreitung eines Risses aufgrund der Beanspruchungen im Bauteil vorhersagen und eine Aussage über die zu erwartende Lebensdauer geben. Die Herausforderung für eine realitätsnahe Berechnung von Strukturen und Bauteilen, welche mit funktional gradierten Materialien hergestellt sind, liegt demzufolge nicht nur in der konzeptionellen Entwicklung von Kriterien, welche die lokalen Materialeigenschaften berücksichtigen, sondern auch in der Erweiterung von etablierten Riss simulationsprogrammen. Hierbei sollen Rissausbreitungssimulationen an komplexen, dreidimensionalen Strukturen und unter räumlichen Belastungen sowie zusätzlichen, lokalen Materialgradierungen durchgeführt werden können.

Für eine zweidimensionale Betrachtung der Rissausbreitung sind bereits einige Konzepte [Sch14; SSN+12] entwickelt worden, welche ebenfalls in 2D-Riss simulationsprogramme implementiert wurden. Um eine möglichst realistische Auswertung für Bauteile zu gewährleisten darf der Aspekt der dreidimensionalen Rissausbreitung jedoch nicht vernachlässigt werden.

Mit dieser Arbeit soll ein Beitrag zur Vorhersage des Risswachstums in räumlichen Strukturen in homogenen, isotropen sowie funktional gradierten Materialien mittels numerischer Simulation geleistet werden. Bereits etablierte Konzepte zur Rissausbreitungsvorhersage sind in 3D-Simulationsprogrammen implementiert worden. Da bei diesen Konzepten, wie bereits erwähnt, der Aspekt des Einflusses der Materialgradierung nicht berücksichtigt werden kann, beschäftigt sich ein Teil dieser Arbeit mit der Verifikation von Rissausbreitungskonzepten für bruchmechanisch gradierte Materialien und Strukturen. Mit einem neu entwickelten Konzept soll der Einfluss der Materialgradierung auf die Rissausbreitung sowie die Lebensdauervorhersage der einzelnen Bauteile berechnet und durch Implementierung in ein geeignetes Risswachstumssimulationsprogramm der Einfluss einer Materialgradierung aufgezeigt werden. Darüber hinaus wird ein bereits etabliertes Riss simulationsprogramm hinsichtlich seiner Funktionalität und Stabilität erweitert, damit eine zuverlässige Riss simulation für homogene und funktional gradierte Bauteile und Strukturen gewährleistet werden kann. Hierbei spielt vor allem die Komplexität der zu berücksichtigten Berechnungs- und Datenverwaltung eine übergeordnete Rolle.

Um neue Konzepte zu entwickeln, die eine Materialgradierung berücksichtigen, ist die Kenntnis von theoretischem Grundwissen unumgänglich. Aus diesem Grund wird im folgenden Kapitel zunächst eine Einführung in bruchmechanische Grundlagen stattfinden. Darauf aufbauend werden funktional gradierte Materialien mit ihren Eigenschaften und Einsatzbereichen aufgezeigt und die konzeptionelle Erweiterung eines etablierten bruchmechanischen Konzeptes zur Anwendung auf bruchmechanisch gradierte Strukturen vorgestellt. Darüber hinaus wird ein Überblick über das zu verwendende Riss simulationsprogramm gegeben und entsprechende Erweiterungen zur Funktionalitäts- und Stabilitätsverbesserung dargestellt. Abgerundet wird diese Arbeit mit numerischen Risswachstumssimulationen in homogenen, isotropen sowie funktional gradierten Strukturen.

## 2 GRUNDLEGENDE CHARAKTERISIERUNG DES RISSWACHSTUMS

Um sich mit dem Risswachstum im Allgemeinen vertraut zu machen, soll zunächst eine Einführung in das Thema „Risse“ durchgeführt werden. Im Anschluss daran geht es um die an der Risspitze vorherrschenden Spannungen im Bauteil, welche als grundlegende Basis für diese Arbeit angesehen werden. Als Riss werden Materialtrennungen im Bauteil bezeichnet. Dabei handelt es sich sowohl um sogenannte Lunker (Einschlüsse die während der Herstellung auftreten), Fehler im Material, lokale Anrisse, die während des Herstellungs- und Umformungsprozesses entstehen, als auch um lokale Materialtrennungen, die sich durch äußere Belastungen während des Einsatzes entwickeln. Beim Herstellen von Bauteilen entstehen häufig Fehler am oder im Bauteil. Deshalb muss untersucht werden, was ein Riss in dem Bauteil bewirkt und ab wann es für die Sicherheit des Bauteils im Einsatz kritisch wird.

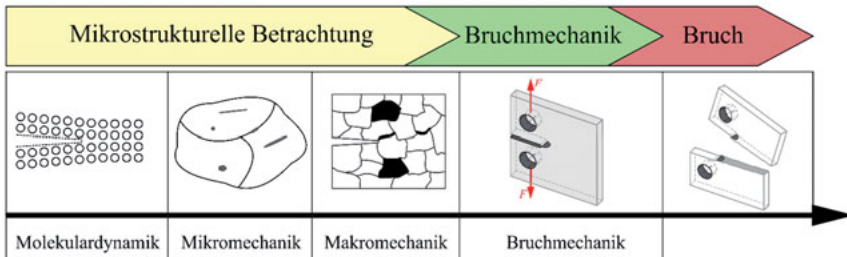


Abbildung 2-1: Phasen der Rissausbreitung nach [Kun08]

In Abbildung 2-1 sind drei wichtige Phasen der Rissentwicklung in einem unbeschädigten Bauteil mit entsprechenden Piktogrammen der einzelnen Rissphasen aufgezeigt. Während sich die Festigkeitslehre eigentlich auf „fehlerfreie“, beziehungsweise Bauteile mit Unstetigkeiten, die in einem Bereich liegen, der nicht eindeutig detektierbar ist, bezieht, schließt sich der Bereich der Bruchmechanik dort erst an. Laut der Theorie der Festigkeitsbetrachtung würde jedes Bauteil mit detektierbaren Anrissen unweigerlich zu einem sofortigen Versagen führen. Dies widerspricht jedoch der praktischen Anwendung. Aus diesem Grund wird bei Bauteilen mit vorhandenem Anriss zusätzlich die Bruchmechanik herangezogen.

In der Bruchmechanik wird zwischen zwei grundsätzlichen Rissausbreitungsarten unterschieden. Die erste Phase ist das sogenannte stabile Risswachstum. Bis zu einer bestimmten Größe, bei einer festgelegten Belastung wächst der Riss stabil und somit kontrolliert. Erst bei Erreichen einer kritischen Größe des Risses kommt es zu einer instabilen Rissausbreitung und somit zum Versagen des Bauteils. Das Risswachstum an sich ist belastungs- sowie materialabhängig. Ab wann es zu einem stabilen beziehungsweise instabilen Risswachstum kommt, ist demzufolge abhängig von den vorherrschenden Spannungen in unmittelbarer Risspitzenumgebung in Korrelation zu den Materialkennwerten [RS12].

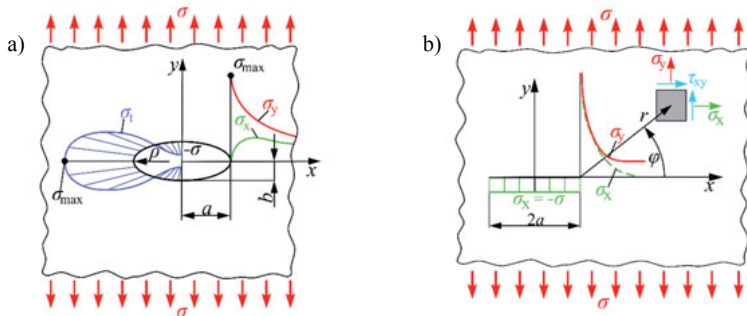
## 2.1 Charakteristische Spannungsverteilungen in der Rissumgebung

Durch die lokalen Trennungen des Materials werden die aufgrund äußerer Belastung aufgetragenen Spannungen im Bauteil umgeleitet. Sogenannte Kraftflussumleitungen, die zu lokalen Spannungserhöhungen im Bauteil führen, entstehen in unmittelbarer Rissspitzenumgebung. Um die Spannungsverteilungen in diesem Bereich definieren zu können, ist in der linear-elastischen Bruchmechanik, kurz LEBM, das elastische Spannungsfeld von Relevanz. Die Voraussetzung, unter der die Methode der linear-elastischen Bruchmechanik ihre Gültigkeit aufweist, ist, dass die plastische Zone unmittelbar an der Rissspitze deutlich kleiner sein muss als die Risslänge beziehungsweise die Geometrieabmessungen [RS12; RHB06].

Für eine genaue Spannungsverteilung an der Rissspitze wird der Riss näherungsweise als ein Sonderfall der Kerbe betrachtet. In Abbildung 2-2 sind die wirkenden Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_t$  und  $\tau_{xy}$  sowie deren Verteilungen an einer Kerbe exemplarisch dargestellt. Bei der Kerbe tritt im Kerbgrund die maximale Spannung auf, welche in Abhängigkeit der Halbachse  $a$ , der Halbachse  $b$  oder des Krümmungsradius  $\rho$  definiert wird:

$$\sigma_{\max} = \sigma \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{b}\right) = \sigma \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \quad (2-1).$$

Das Modell des GRIFFITH-Risses [Gri21] basiert auf der Annahme, dass sich ein Riss in einer unendlich ausgedehnten Scheibe befindet. Als eine Sonderform der Kerbe stellt der Innenriss somit eine Risslänge  $2a$  und einen Kerbradius gegen Null dar [RS12].



**Abbildung 2-2:** Spannungsverteilung an einer elliptischen Kerbe und am GRIFFITH-Riss

- a) elliptische Kerbe
- b) GRIFFITH-Riss

Aufgrund der gegebenen Randbedingungen können für diese Betrachtung des Risses verhältnismäßig einfache Lösungen definiert werden. Für die Spannungsverteilungen ergeben sich unter dem Aspekt der Elastizitätstheorie und unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingungen, Kompatibilitätsbedingungen, Verschiebungs-/Verzerrungsbedingungen und des Stoffgesetzes die für den GRIFFITH-Riss in den Gleichungen (2-2) bis (2-4) exakten Lösungen [Gri21]:

$$\sigma_x = \begin{cases} -\sigma & \text{für } x < a \\ \sigma \cdot \left[ \frac{x/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}} - 1 \right] & \text{für } x > a \end{cases} \quad (2-2)$$

$$\sigma_y = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \sigma \cdot \frac{x/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}} & \text{für } x > a \end{cases} \quad (2-3)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{für alle } x\text{-Werte} \quad (2-4).$$

Durch die Anlehnung an ein elliptisches Loch in einer unendlich ausgedehnten Scheibe zeigt sich, dass die Spannungen unmittelbar an der Risspitze unendlich hoch werden. An den Rissenden entstehen sogenannte mathematische Singularitäten. In der Praxis ist dieses Szenario jedoch nicht möglich. Jeder Werkstoff besitzt als ertragbare Spannungsgrenze eine Fließgrenze oder Zugfestigkeit. Diese natürliche Grenze sorgt dafür, dass die Spannungen nicht unendlich hoch ansteigen können und führen bei Erreichen der Fließgrenze zu einer plastischen Verformung und einer Umlagerung der Spannung an der Risspitze. Dabei kann es zu einer Materialtrennung im Bauteil kommen.

Für die Betrachtung der Spannungen an der Risspitze unter der Randbedingung, dass der Bereich der plastischen Verformung sehr klein ist im Vergleich zu der Riss- beziehungsweise Bauteilabmessung, also für den Bereich der linear elastischen Bruchmechanik, wurden Näherungsgleichungen aus den elastizitätstheoretischen Lösungen nach GRIFFITH entwickelt [Hah76]. Da bei der Reihenentwicklung nur der erste Term dominiert, können alle weiteren Glieder dieser Reihenentwicklung als hinreichend klein angenommen und somit vernachlässigt werden. Bei diesen Näherungsgleichungen (2-5) werden sogenannte Spannungsintensitätsfaktoren mit eingebunden, die die Intensität der Spannungen, nicht aber die Spannungsverteilung an der Risspitze beschreiben:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ K_I \cdot f_{ij}^I(\varphi) + K_{II} \cdot f_{ij}^{II}(\varphi) \right] \quad (2-5)$$

mit  $i, j=x, y$  beziehungsweise  $r, \varphi$ .

Für die Betrachtung der Spannungsverteilung in Polarkoordinaten gilt für die Ebene:

$$\sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \left[ 1 + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \frac{2}{3} \cdot \sin \varphi - 2 \cdot \tan \frac{\varphi}{2} \right] \quad (2-6)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos^3 \frac{\varphi}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (2-7)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} [3 \cdot \cos \varphi - 1] \quad (2-8).$$

Die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  (siehe Gl. (2-5) bis (2-8)) sowie der bei Mode III auftretende Spannungsintensitätsfaktor  $K_{III}$  (siehe Kap. 2.2)) berücksichtigen neben der Rissgeometrie und den auftretenden Spannungen und Belastungen auch die Risslage, Rissanordnung, Bauteilgeometrie sowie die Art und den Ort der Lasteinbringung. Zudem können die auftretenden Verschiebungen in unmittelbarer Rissumgebung durch die Spannungsintensitätsfaktoren zu einem aussagekräftigen und vergleichbaren Wert umgewandelt und gleichzeitig Rückschlüsse auf die Spannungen und Verschiebungen gezogen werden.

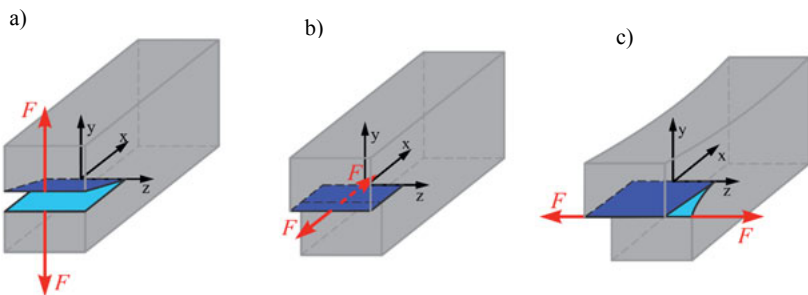
Für den GRIFFITH-Riss gilt der einfache Zusammenhang:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \quad (2-9).$$

Wobei der Geometriefaktor  $Y_I$  für diesen speziellen Fall mit eins definiert ist. Die Einheit des Spannungsintensitätsfaktors wird mit  $\text{N/mm}^{3/2}$  oder  $\text{MPa m}^{1/2}$  angegeben [RS12; Hah76; TPI73].

## 2.2 Rissverhalten unter statischer Belastung

Um jegliche Art des Rissöffnens beschreiben zu können, werden die drei grundlegenden Rissöffnungsmoden herangezogen. Unterschieden wird die Art der an der Risspitze vorherrschenden Beanspruchung. So bewirkt eine Normalbeanspruchung ein Rissöffnen, während eine ebene Scherbeanspruchung oder aber eine nicht ebene Schubbeanspruchung ein Verschieben der Rissflanken gegeneinander hervorrufen, wie in Abbildung 2-3 verdeutlicht.

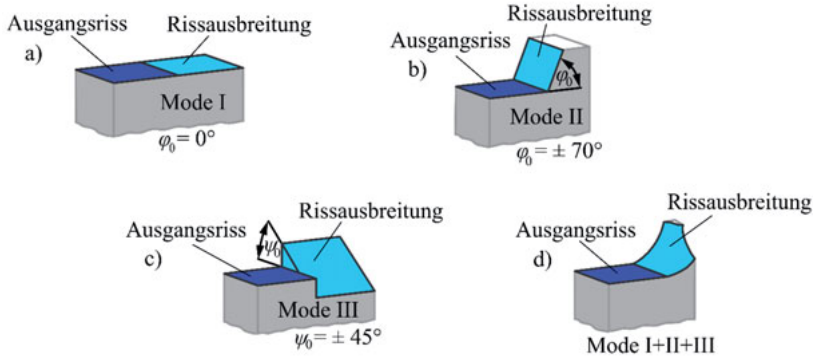


**Abbildung 2-3:** Grundlegende Rissöffnungsarten

- a) Mode I : Rissöffnen infolge Normalbeanspruchung
- b) Mode II : Ebenes Gleiten der Rissflächen infolge ebener Schubbeanspruchung
- c) Mode III: Nichtebeines Gleiten der Rissflächen infolge nichtebener Schubbeanspruchung

Diese drei Beanspruchungsarten führen zu charakteristischem Rissausbreitungsverhalten (Abbildung 2-4). So wird der Riss unter reiner Mode I eben zu der Rissfläche, also normal zur Hauptbeanspruchung weiterwachsen, während bei Mode II ein Abknicken des Risses unter  $\varphi \approx \pm 70^\circ$  hervorgerufen wird, welches durch die auftretende Schubbeanspruchung gesteuert

wird. Unter Mode III findet eine Verdrehung des Risses unter  $\psi = 45^\circ$  statt, hierbei bewirkt die nicht ebene Schubbeanspruchung ein Gleiten der Rissflächen quer zur Rissausrichtung [RS12].



**Abbildung 2-4:** Rissausbreitung in Abhängigkeit der Rissbeanspruchungen

Da in der Realität selten eine reine Mode I, II oder III Beanspruchung auftritt, ist es legitim, die einzelnen Moden zu überlagern, um eine hinreichende Beschreibung bezüglich der Rissausbreitung und der Spannungsintensität zu erhalten [RS12; Hah76].

Für die einzelnen Moden sind bei einer statischen Beanspruchung folgende Spannungsintensitätsfaktoren nach IRWIN [Irw58] definiert worden:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \quad (2-10)$$

$$K_{II} = \tau_{xy} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{II} \quad (2-11)$$

$$K_{III} = \tau_{yz} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{III} \quad (2-12).$$

Bei einer Überlagerung der einzelnen Moden, wie sie an realen Bauteilen im Betrieb häufig auftreten kann, wird dann von einer ebenen beziehungsweise nicht ebenen Mixed-Mode Beanspruchung gesprochen. Unter Berücksichtigung der einzelnen Spannungsintensitätsfaktoren, die unter Mixed-Mode Zuständen gleichzeitig auftreten, ist zu erwähnen, dass diese nicht einfach addiert werden dürfen, um einen „Gesamtspannungsintensitätsfaktor“ zu erhalten. Eine Vernachlässigung von einzelnen Spannungsintensitätsfaktoren würde ebenso wenig zu einer realen Bestimmung des Spannungsfeldes an der Rissspitzenumgebung führen wie das simple Addieren der Spannungsintensitätsfaktoren. Bei einer Überlagerung müssen deshalb drei wichtige Aspekte berücksichtigt werden:

1. Spannungsintensitätsfaktoren dürfen superponiert werden, wenn es sich bei mehreren aufgetragenen Lasten um reine Mode-I, Mode-II oder Mode-III Belastung handelt:

$$K_{I,ges} = K_{I,F} + K_{I,M} \quad (2-13).$$

2. Spannungsintensitätsfaktoren verschiedener Moden dürfen nicht addiert werden:

$$K_{\text{ges}} \neq K_{\text{I,ges}} + K_{\text{II,ges}} + K_{\text{III,ges}} \quad (2-14).$$

3. Geometriefaktoren dürfen nicht addiert werden:

$$Y_{\text{I,ges}} \neq Y_{\text{I,F}} + Y_{\text{I,M}} \quad (2-15).$$

Um eine Aussage über die Spannungsintensität an der Risspitze machen zu können, wird ein Vergleichsspannungsintensitätsfaktor berechnet. Zur Bestimmung des Vergleichsspannungsintensitätsfaktors  $K_v$  können verschiedene Bruchhypothesen herangezogen werden. Eine ausführliche Erläuterung zu einzelnen Bruchkriterien ist in Kapitel 2.5 zu finden [RS12].

## 2.3 Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren

Zur Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren können elastizitätstheoretische, numerische oder experimentelle Verfahren herangezogen werden. Da die elastizitätstheoretischen Verfahren jedoch nur für grundlegende Geometrien und Rissfälle einsetzbar und experimentelle Untersuchungen stets sehr aufwendig sind, wird in dieser Arbeit der Fokus auf die numerische Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren gelegt, wie sie auch in dem in dieser Arbeit verwendeten Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup> (siehe Kapitel 5) berechnet werden.

Aufbauend auf die Energiebetrachtung am Riss von GRIFFITH [Gri21] wurde von IRWIN [Irw58] die Energiefreisetzungsrate  $G$  definiert. Während der Rissausbreitung um eine Risslänge  $da$  wird elastische Energie  $dU$  freigesetzt, welche als Gesamtenergie zusammengefasst ist, die sowohl die Oberflächenenergie (Risswiderstand) als auch die Verformungsenergie beinhaltet. Durch das Verhältnis dieser beiden Größen wird die Energiefreisetzungsrate  $G$  definiert:

$$G = -\frac{dU}{da} \quad (2-16).$$

Für die dreidimensionale Betrachtung wird für die Energiefreisetzungsrate anstatt der Risslänge  $da$  die Rissfläche  $dA$  berücksichtigt:

$$G = -\frac{dU}{dA} \quad (2-17).$$

Im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik besteht ein fester Zusammenhang zwischen der Energiefreisetzungsrate und den Spannungsintensitätsfaktoren.

Für die reinen Mode Zustände gelten nach IRWIN [Irw57; TPI73] folgende formelmäßige Zusammenhänge:

- Mode I:

$$G = G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{für den ebenen Spannungszustand (ESZ)} \quad (2-18).$$

und

$$G = G_I = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot K_I^2 \quad \text{für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ)} \quad (2-19).$$

- Mode II:

$$G = G_{II} = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot K_{II}^2 \quad (2-20).$$

- Entsprechend gilt der Zusammenhang für den ebenen Mixed-Mode:

$$G = G_I + G_{II} \quad (2-21).$$

Unter der Voraussetzung, die freigesetzte Energie bei der Rissausbreitung entspreche der Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um den Riss rein theoretisch wieder zu schließen, können diese beiden Faktoren gegenübergestellt werden. Die Risssschließungsarbeit  $dW$ , für ein Teilstück  $dx$ , berechnet sich aus der Spannung  $\sigma_y(x)$  und der Rissverschiebung  $v(x)$ , wobei für die Risssschließung die Druckkraft  $dF_y = -\sigma_y(x) dx$  angenommen wird [Buc08; FR03]. Bei einer Scheibe der Dicke  $t = 1$  ergibt sich:

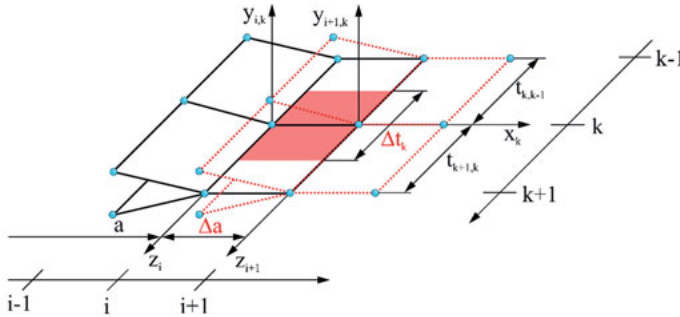
$$dW = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot dF_y \cdot v(x) = -\sigma_y(x) \cdot v(x) \cdot dx \quad (2-22).$$

Mit  $W = U$  werden die Energiefreisetzungsraten Mode spezifisch definiert:.

$$G_I = -\frac{dU}{da} = -\frac{dW}{da} = \frac{1}{da} \int_0^{da} \sigma_y(x) \cdot v(x) \cdot dx \quad \text{Mode I} \quad (2-23)$$

$$G_{II} = -\frac{dU}{da} = -\frac{dW}{da} = \frac{1}{da} \int_0^{da} \tau_{xy}(x) \cdot u(x) \cdot dx \quad \text{Mode II} \quad (2-24).$$

Dieser Ansatz lässt sich sehr gut mit der Finite-Elemente-Methode umsetzen,



**Abbildung 2-5:** Finite-Elemente-Konfiguration zur Ermittlung der Energiefreisetzungsrate [RS12]

in dem die Betrachtung bei der FE-Analyse auf die Knotenpunktkräfte und -verschiebungen gelegt wird. Schematisch ist dieses Vorgehen in Abbildung 2-5 aufgezeigt. Bei dem modifizierten Rissschließungsintegral, auch MVCCI-Methode genannt, wird entsprechend der Gleichung (2-22) die Kraft sowie die Verschiebung an den einzelnen Knotenpunkten ermittelt und zur Bestimmung der Energiefreisetzungsrate herangezogen. Analog zu (2-23) und (2-24) gilt:

$$G_I(a, \Delta t_k)_k = \frac{1}{\Delta t_k \cdot \Delta a} \cdot W_k^y \quad \text{mit} \quad W_k^y = \frac{1}{2} [F_{i,k}^y(a) \cdot \Delta u_{i-1,k}^y(a)] \quad (2-25)$$

$$G_{II}(a, \Delta t_k)_k = \frac{1}{\Delta t_k \cdot \Delta a} \cdot W_k^x \quad \text{mit} \quad W_k^x = \frac{1}{2} [F_{i,k}^x(a) \cdot \Delta u_{i-1,k}^x(a)] \quad (2-26).$$

Mit diesem Ansatz werden dann die Spannungsintensitätsfaktoren nach den Gleichungen (2-18) bis (2-21) ermittelt [RK77; Buc08].

## 2.4 Instabiles Risswachstum

Nachdem in Kapitel 2.1 bis 2.3 über die Verteilung und Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren berichtet wurde, soll im Weiteren die Abhängigkeit dieser Größen mit dem Eintreten des instabilen Risswachstums aufgezeigt werden. Dass Risse in Bauteilen nicht immer vermeidbar sind, wurde in einschlägiger Literatur bereits ausführlich diskutiert. Daher ist es von großer Relevanz zu wissen, ab und wann das Bauteil zu versagen droht. Einige Konzepte wurden in Abhängigkeit der hier bereits aufgezeigten Kenngrößen aufgestellt. Um eine Aussage über das Eintreten eines instabilen Risswachstums zu treffen, werden die ermittelten Kenngrößen an der Rissfront mit entsprechenden Materialkennwerten verglichen. Im Weiteren werden einige etablierte Konzepte erläutert.

### 2.4.1 Kriterium der Energiefreisetzung

Eine Möglichkeit zu definieren, wann instabiles Risswachstum auftritt, bietet das Kriterium der Energiefreisetzung. Um die Gefährlichkeit des Risses abschätzen zu können, wird die Energiefreisetzungsrates, ähnlich wie bei dem K-Konzept und dem J-Kriterium, siehe Kapitel 2.4.2 und 2.4.3, mit einem Materialkennwert verglichen. Entsprechend lautet das Bruchkriterium

$$G_I = G_{IC} \quad (2-27)$$

für den Mode-I Zustand.

Ab dem Erreichen des kritischen Wertes  $G_{IC}$  tritt instabiles Risswachstum ein. Auch dieser kritische Wert kann in Relation mit dem Risszähigkeitskennwert  $K_{IC}$  gesetzt und mit Gleichung (2-28) für den ebenen Verzerrungszustand bestimmt werden [RS12]:

$$G_{IC} = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot K_{IC}^2 \quad (2-28).$$

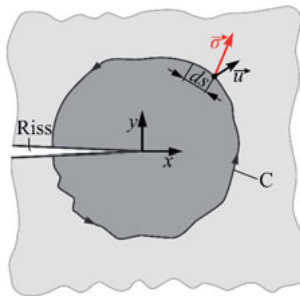
### 2.4.2 J-Kriterium

Für das  $J$ -Kriterium, welches in dem Riss simulationsprogramm FRANC/FAM verwendet wird, wird das sogenannte  $J$ -Integral von RICE [Ric68] herangezogen. Der Vorteil dieses Kriteriums liegt darin, dass das  $J$ -Integral wegunabhängig ist und sowohl für den Einsatz in elastisch als auch plastisch verformten Gebieten geeignet ist. Das  $J$ -Integral berücksichtigt die elastische Energiedichte  $\bar{U}$ , also die Energie pro Volumeneinheit und die Spannungs- und Verschiebungsvektoren. Mit

$$\bar{U} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} \quad (2-29)$$

bildet sich das  $J$ -Integral aus

$$J = \int_C \left( \bar{U} dy - \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) \quad (2-30).$$



**Abbildung 2-6:** Darstellung des Integrationsweges für die Bestimmung des J-Integrals [RS12]

Das  $J$ -Integral durchläuft den Weg C um die Rissspitze (Abbildung 2-6). Durch den geschlossenen Integrationsweg kann gezeigt werden, dass die erhaltenen Werte unabhängig vom Weg sind und der Durchlauf durch elastisches sowie plastisches Gebiet keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.<sup>1</sup> Im  $J$ -Kriterium wird dieses  $J$ -Integral mit einem kritischen Materialgrenzwert verglichen. Erreicht  $J$  den kritischen Wert  $J_{IC}$ , tritt instabiles Risswachstum ein. Exemplarisch für Mode-I Zustand gilt:

$$J = J_{IC} \quad (2-31)$$

$$J_{IC} = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot K_{IC}^2 \quad (2-32).$$

Im Gegensatz zu der Ermittlung des  $J$ , welches auf analytische oder numerische Weise ermittelt werden kann, muss der kritische Wert  $J_{IC}$  auf experimentelle Art und Weise bestimmt werden. Für die LEBM kann der kritische Wert  $J_{IC}$  mit dem kritischen Wert für das K-Konzept unter Beachtung des reinen Mode-I Zustandes in Zusammenhang gebracht werden, auf welches im Weiteren noch genauer eingegangen wird [Ric85; RS12; Hah76].

### 2.4.3 K-Konzept

Wie bereits erwähnt, wird die Rissausbreitung überwiegend mit Hilfe der Spannungsintensitätsfaktoren beschrieben. Aus diesem Grund bietet das K-Konzept einen direkten Vergleich der Spannungsintensitätsfaktoren mit einer materialspezifischen Kenngröße. Die Risszähigkeit  $K_{IC}$  wird mit Hilfe von entsprechenden experimentellen Untersuchungen nach zum Beispiel ASTM-Norm für die einzelnen Werkstoffe ermittelt.

Sobald der Wert des Spannungsintensitätsfaktors unter einer reinen Mode I den maximal ertragbaren Wert erreicht hat, tritt instabiles Risswachstum ein:

$$K_I = K_{IC} \quad (2-33).$$

Für die Moden II und III gilt der Zusammenhang:

$$K_{II} = K_{IIIC} = 0,87 \cdot K_{IC} \quad (2-34)$$

$$K_{III} = K_{IIIC} = K_{IC} \quad (2-35).$$

Die Zusammenhänge zwischen  $K_{IIIC}$  und  $K_{IIIC}$  mit  $K_{IC}$  lassen sich aus dem Bruchkriterium nach RICHARD (Kapitel 2.5.2) berechnen [Ric85].

## 2.5 Instabiles Risswachstum bei ebener Mixed-Mode-Beanspruchung

Neben der Betrachtung für instabiles Risswachstum unter reinen Modenzuständen, stellt eine Mixed-Mode-Beanspruchung eine weitere Herausforderung für eine Rissvorhersage dar. Diese in der Praxis häufiger vorzufindende Beanspruchung in Bauteilen ergibt sich durch eine Überlagerung der vorherrschenden Spannungsintensitätsfaktoren. Da, wie in Kapitel 2.2 be-

<sup>1</sup> Der Beweis für dieses Linienintegral ist in Ric68 nachzulesen

reits erwähnt, eine Addition der einzelnen Spannungsintensitätsfaktoren nicht zulässig ist, wurden Konzepte für ebene Mixed-Mode-Beanspruchungen entwickelt. Zwei relevante Konzepte für die Betrachtung einer Rissausbreitung im zweidimensionalen Raum unter Verwendung von homogenen, isotropen Materialien werden im Weiteren aufgezeigt. Weitere bruchmechanische Konzepte sind in [Ric85] zusammengefasst.

### 2.5.1 Maximal-Tangentialspannungs-Kriterium

Das von ERDOGAN und SIH [ES63] entwickelte Kriterium der maximalen Tangentialspannung (MTS), berücksichtigt die auftretenden Spannungen in der Ebene. Unter der Annahme, dass sich der Riss nur in radialer Richtung, ausgehend von der Risspitze, ausbreitet und die Rissausbreitungsrichtung senkrecht zur maximalen Tangentialspannung  $\sigma_{\varphi, \max}$  verläuft, gilt folgender formelmäßiger Zusammenhang:

$$\sigma_{\varphi, \max} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \cos^3 \frac{\varphi}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi} \cdot r} \frac{3}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (2-36).$$

Da bei Erreichen der maximalen Tangentialspannung die Schubspannung  $\tau_{r\varphi} = 0$  ist, kann durch partielle Ableitung der Tangentialspannung (Gleichung (2-36) der Abknickwinkel  $\varphi_0$  bestimmt werden:

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \quad (2-37)$$

$$\varphi_0 = -\arccos \left[ \frac{3K_{II}^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right] \quad (2-38).$$

Das Eintreten einer instabilen Rissausbreitung beginnt nach ERDOGAN und SIH, sobald  $\sigma_{\varphi, \max}$  einen Materialgrenzwert  $\sigma_{\varphi c}$  erreicht hat beziehungsweise der aus diesem Kriterium abgeleitete Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_{V, \max}$  die Risszähigkeit  $K_{IC}$  erreicht hat [ES63; Ric85]:

$$K_{V, \max} = \cos \frac{\varphi_0}{2} \left[ K_I \cdot \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \cdot \sin \varphi_0 \right] = K_{IC} \quad (2-39).$$

### 2.5.2 Bruchkriterium nach RICHARD

Ein weiteres vor allem in der Praxis sehr relevantes Bruchkriterium ist das Kriterium nach RICHARD. Im Gegensatz zu dem MTS-Kriterium handelt es sich hierbei um ein empirisches Konzept. Ausgehend von dem allgemeinen Ansatz

$$\left( \frac{K_I}{K_{IC}} \right)^u + \left( \frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right)^v = 1 \quad (2-40)$$

lässt sich mit  $u = 1$  und  $v = 2$  ein Vergleichsspannungsintensitätsfaktor herleiten, mit dem es möglich ist, sehr praxisnahe Ergebnisse zu erzielen [Ric85]:

$$K_V = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 5,336 K_{II}^2} \quad (2-41).$$

Ein Abknickwinkel, welcher eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen aufweist, lässt sich nach RICHARD über die Gleichung (2-42) bestimmen:

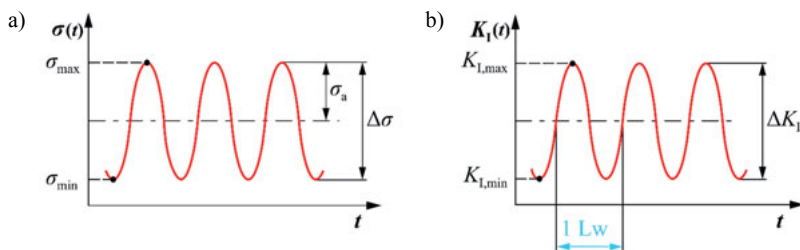
$$\varphi_0 = \mp \left[ 155,5^\circ \cdot \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|} - 83,4^\circ \cdot \left( \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|} \right)^2 \right] \quad (2-42).$$

Auch bei diesem Konzept wird eine Aussage über instabiles Risswachstum getroffen, in dem der Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_V$  mit den Schwellenwerten  $K_{IC}$  verglichen wird. Instabiles Risswachstum fängt demzufolge bei Erreichen der statischen Risszähigkeit  $K_{IC}$  an [Ric85]:

$$K_V = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 5,336 K_{II}^2} = K_{IC} \quad (2-43).$$

## 2.6 Rissverhalten unter zyklischer Beanspruchung

Analog zu dem bisher aufgezeigten Verhalten von Rissen unter statischer Beanspruchung soll im Weiteren darauf eingegangen werden, wie sich die Rissausbreitung bei einer wechselnden Beanspruchung beziehungsweise zyklischen Beanspruchung verhält. Diese Betrachtung ist insoweit relevant, da aus Untersuchungen in der Vergangenheit bereits bekannt ist, dass bei vielen technischen Strukturen betriebsbedingte zyklische Belastungen einwirken, welche bei Bauteilen mit Anriss letztendlich zum Versagen führten. Bei zyklischer Belastung tritt ein Risswachstum bereits vor Erreichen des kritischen Materialkennwertes auf, weshalb ein Schwellenwert  $\Delta K_{I,th}$  bei der Betrachtung von Rissausbreitung unter zyklischer Belastung berücksichtigt werden muss. Wie in den vorherigen Unterkapiteln bereits gezeigt, ist die Spannung eine entscheidende Größe für die Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren. Unter Berücksichtigung der zyklischen Spannungen wird in Analogie auch eine zyklische Spannungsintensität erwartet, womit die Zeitabhängigkeit der Beanspruchung an der Risssspitze mitberücksichtigt werden kann [San08] (vgl. Abbildung 2-7).



**Abbildung 2-7:** Korrelation der zyklischen Spannung und der Spannungsintensitätsfaktoren [RS12]

a) zeitlicher Spannungsverlauf  $\sigma(t)$

b) auftretende Spannungsintensität  $K_I(t)$  am Riss

Anhand des zeitlich parallelen Ablaufs der aufgetragenen Spannungen zu den Spannungsintensitätsfaktoren und der unter Gleichung (2-10) bis (2-12) aufgezeigten Zusammenhänge, ergeben sich entsprechende minimale und maximale Spannungsintensitätsfaktoren:

$$K_{I,\min} = \sigma_{\min} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \quad (2-44)$$

$$K_{I,\max} = \sigma_{\max} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \quad (2-45),$$

welche unter der Voraussetzung einer konstanten Spannungsamplitude den zyklischen Spannungsintensitätsfaktor

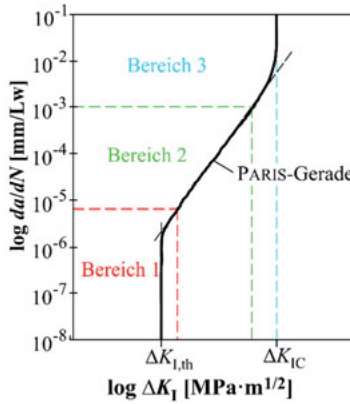
$$\Delta K_{I,\max} = \Delta \sigma_{\max} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \quad (2-46)$$

charakterisieren.

Neben den Spannungszyklen ist auch das Spannungsverhältnis ein relevantes Maß für die zyklische Spannungsintensität. So kann mit dem sogenannten *R*-Verhältnis sowohl das Verhältnis der Spannungen als auch der Spannungsintensitätsfaktoren beschrieben werden:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{K_{I,\min}}{K_{I,\max}} \quad (2-47).$$

Nun wird jedoch nicht jeder Riss unweigerlich zu einem Versagen des Bauteils führen. Damit es zu einem Ermüdungsrissswachstum kommen kann, müssen bestimmte Bedingungen gegeben sein. Bei einem Ermüdungsrissswachstum beginnt die Rissverlängerung bereits bei Spannungsintensitäten, welche deutlich unterhalb des Bereiches liegen, bei denen eine Rissausbreitung unter statischer Belastung zu einem instabilen Risswachstum führen würde. Dafür wächst der Riss jedoch für eine gewisse Zeit stabil. Bei einem Ermüdungsrissswachstum breitet sich der Riss pro Lastwechsel *N* um einen kleinen Betrag  $\Delta a$  aus, welcher in der Summe zu einer messbaren Größe heranwächst. Verdeutlicht wird das Ermüdungsrissswachstum, indem die Rissgeschwindigkeit, also die Ableitung der Risslänge *a* nach den Lastwechseln *N*, über die zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K$  aufgetragen wird. Diese Rissgeschwindigkeitsdiagramme sind sowohl materialspezifisch als auch belastungsspezifisch aufgetragene Kurven, welche experimentell ermittelt werden.



**Abbildung 2-8:** Rissgeschwindigkeitskurve  $da/dN$  in Abhängigkeit des zyklischen Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_I$

Für die Charakterisierung der Rissgeschwindigkeitskurve selbst, wie sie schematisch in Abbildung 2-8 dargestellt ist, sind drei Ansätze federführend. Zum einen der PARIS-Bereich, der den linearen zweiten Bereich des Kurvenverlaufes gut wiedergibt, wobei die Grenzbereiche jedoch nicht realitätsnah beschrieben werden können:

$$\frac{da}{dN} = C_P \cdot \Delta K_I^{m_P} \quad (2-48).$$

Bei diesem Ansatz stellen die Parameter  $m_P$  und  $C_P$  werkstoffabhängige Konstanten dar, wobei  $m_P$  die Steigung der Geraden beschreibt. Beide Parameter stehen in Korrelation zueinander und werden zudem durch das Umgebungsmedium, das Material und die aufgetragenen Spannungen beeinflusst [TM77]. Diese Parameter müssen aus experimentellen Untersuchungen gewonnen werden.

Ein wesentlich genaueres Konzept bietet das von ERDOGAN/RATWANI [ER70] aufgestellte, welches es ermöglicht, unter Beachtung zusätzlicher Einflussparameter, den gesamten Kurvenverlauf des Rissfortschrittsbereiches zu beschreiben:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_E \cdot (\Delta K_I - \Delta K_{I,th})^{m_E}}{(1-R) \cdot K_{IC} - \Delta K_I} \quad (2-49).$$

Im Gegensatz zu der Paris-Geraden werden bei diesem Konzept zusätzlich die Einflüsse des  $R$ -Verhältnisses sowie der beiden Schwellenwertgrenzen  $\Delta K_{I,th}$  und  $K_{IC}$  berücksichtigt. Auch die werkstoffabhängigen Größen  $C_E$  und  $m_E$  fließen in die Funktion mit ein. Die benötigten Parameter werden in Experimenten ermittelt.

Weiterhin kann mit der FORMAN/METTU Gleichung (2-50) ebenfalls die gesamte Rissfortschrittskurve abgebildet werden:

$$\frac{da}{dN} = C_{FM} \cdot \left[ \left( \frac{1-\gamma}{1-R} \right) \cdot \Delta K_I \right]^{n_{FM}} \frac{\left( 1 \cdot \frac{\Delta K_{I,th}}{\Delta K_I} \right)^p}{\left( 1 - \frac{K_{I,max}}{K_{IC}} \right)^q} \quad (2-50).$$

Bei dieser Gleichung fließt zusätzlich zu den charakteristischen Kenngrößen  $\Delta K_{I,th}$  und  $K_{IC}$ , welche in der von ERDOGAN/RATWANI Berücksichtigung finden, der Parameter  $\gamma$  mit ein. Mit dieser Variablen wird das Risssschließen während des Ermüdungsrisswachstums berücksichtigt. Weitere benötigte Parameter stellen die werkstoffabhängigen Größen  $C_{FM}$ ,  $n_{FM}$ ,  $p$  und  $q$  dar, welche experimentell ermittelt werden müssen. [FM90].

## 2.7 Stabiles Risswachstum bei ebener Mixed-Mode-Beanspruchung

Insbesondere bei zyklischer Belastung auf ein Bauteil muss ein Riss nicht zu einem sofortigen Versagen des Bauteils führen. Je nach Höhe der Belastung, der Rissgeometrie und der Materialeigenschaften kann es zu einer stabilen Rissausbreitung, dem sogenannten Ermüdungsrisswachstum, kommen. Dieses stabile Risswachstum tritt ein, sobald der an der Rissfront vorherrschende Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  den Materialschwellenwert  $\Delta K_{I,th}$  überschritten, die Risszähigkeit  $\Delta K_{IC}$  jedoch noch nicht erreicht hat:

$$\Delta K_{I,th} \leq \Delta K_V < \Delta K_{IC} \quad (2-51).$$

$\Delta K_{I,th}$  und  $\Delta K_{IC}$  stellen die relevanten Kennwerte in einem Rissgeschwindigkeitsdiagramm dar und bilden die Grenzwerte für ein Ermüdungsrisswachstum (vgl. Kap. 2.5). Bei der Verwendung von numerischen Simulationsprogrammen werden die zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren mit diversen bruchmechanischen Ansätzen ermittelt.

### 2.7.1 Maximal-Tangentialspannungs-Kriterium für stabiles Risswachstum

Wie bereits in Kapitel 2.5.1 beschrieben, erlaubt das Maximal-Tangentialspannungs-Kriterium (MTS-Kriterium) in seiner ursprünglichen Form eine Umstellung für die Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren unter statischer Betrachtung. Darüber hinaus lässt sich dieses Kriterium auch auf zyklische Beanspruchungen übertragen. Hierbei findet die zyklische Tangentialspannung  $\Delta \sigma_\phi$  unter Verwendung der zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_I$  und  $\Delta K_{II}$  Berücksichtigung. Der daraus berechnete Vergleichsspannungsintensitätsfaktor

$$\Delta K_{V,max} = \cos \frac{\varphi_0}{2} \left[ \Delta K_I \cdot \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \frac{3}{2} \Delta K_{II} \cdot \sin \varphi_0 \right] \quad (2-52)$$

kann für eine Vorhersage von stabilem Risswachstum herangezogen werden. Eine Ermüdungsrissausbreitung wird demzufolge stattfinden, sobald der maximale zyklische Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_{V,max}$  den Schwellenwert  $\Delta K_{I,th}$  erreicht hat:

$$\Delta K_{V, \max} \geq \Delta K_{I, \text{th}} \quad (2-53).$$

Überschreitet der maximale zyklische Vergleichsspannungsintensitätsfaktor den Wert der Risszähigkeit  $\Delta K_{Ic}$  kommt es infolge einer instabilen Rissausbreitung zu einem Versagen des Bauteils [ES63; Ric85].

## 2.7.2 Bruchkriterium nach RICHARD für stabiles Risswachstum

Auch bei diesem Kriterium nach RICHARD kann eine Aussage über stabiles Risswachstum getroffen werden, indem der Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_V$  auf einen zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktor

$$\Delta K_V = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta K_I^2 + 5,336 \Delta K_{II}^2} \quad (2-54)$$

erweitert wird.

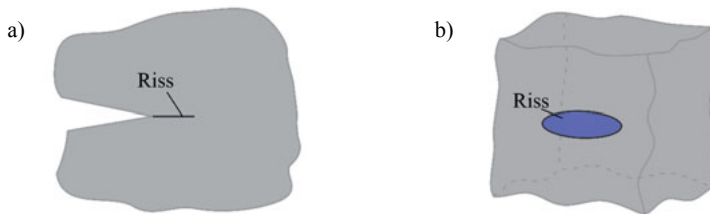
Dieser zyklische Faktor wird mit dem Schwellenwert  $\Delta K_{I, \text{th}}$  verglichen. Ist dieser Faktor größer als  $\Delta K_{I, \text{th}}$ , so tritt stabiles Risswachstum ein. Überschreitet der so ermittelte Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  die zyklische Risszähigkeit  $\Delta K_{Ic}$ , so tritt instabiles Risswachstum ein und das Bauteil versagt. Beide hier aufgezeigten Konzepte, sowohl das MTS-Kriterium als auch das Bruchkriterium nach RICHARD, zeigen sehr gute Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen auf, unabhängig der vorherrschenden Belastungen für reine Modezustände I und II oder ebener Mixed-Modezustände<sup>2</sup> [RS12].

<sup>2</sup> Weitere Untersuchungen zu Bruchmechanischen Kriterien ist in Ric85 nachzulesen.

### 3 HERAUSFORDERUNGEN DES 3D-RISSWACHSTUMS

Bauteile, die wechselnden Belastungen ausgesetzt sind, zeigen nach gewisser Einsatzzeit Ermüdungserscheinungen. Diese äußern sich zumeist durch kleine Risse, bis hin zu einem vollständigen Versagen des Bauteils. Für eine realitätsnahe Abschätzung dieser Ermüdungserscheinungen wird in der Forschung mehr und mehr auf Simulationsprogramme gesetzt, welche eine Rissausbreitung numerisch simulieren können. Bei der Definition des 3D-Risswachstums ist in diesem Zusammenhang jegliche Art des Risswachstums in Bauteilen und Strukturen gemeint, welche in einem dreidimensionalen Raum Berücksichtigung finden. Für eine realitätsnahe Abbildung eines solchen Risswachstums ist es notwendig, alle Faktoren, die einen Einfluss auf die Rissausbreitung haben, zu definieren. Ein natürliches Risswachstum bezieht sich hierbei immer auf eine Ausbreitung in alle drei Raumrichtungen. In den meisten Simulationsprogrammen ist die Dickenebene jedoch nicht oder nur eingeschränkt dargestellt. Eine realitätsnahe Rissausbreitung ist somit nur für eine ebene Rissausbreitung realistisch darstellbar. Bei der Berechnung eines realen Risswachstums unter Berücksichtigung der gesamten Rissfront sind alle auf das Risswachstum bezogene Einflussfaktoren zu berücksichtigen.

Aufbauend auf das vorangegangene Kapitel, welches sich auf ein Risswachstum im zweidimensionalen Raum beschränkt, soll hier die Herausforderung und die Komplexität eines dreidimensionalen Risswachstums aufgezeigt werden. Das Risswachstum als solches wird bei der räumlichen Betrachtung nicht mehr nur als ein einfacher Schnitt mit einer Risspitze betrachtet (Abbildung 3-1 a)).



**Abbildung 3-1:** Darstellung von Rissen unter 2- und 3-dimensionaler Betrachtung

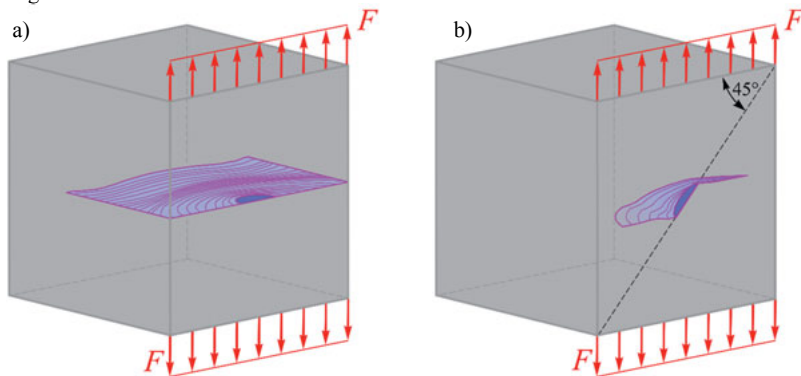
- a) Rissbetrachtung unter 2-dimensionalem Gesichtspunkt
- b) Rissbetrachtung unter 3-dimensionalem Gesichtspunkt

Vielmehr handelt es sich hierbei um eine mehr oder weniger komplexe Fläche im Raum, die eine für das Risswachstum relevante Rissfront aufweist (Abbildung 3-1 b)). Zusätzlich stellt auch die Geometrie des Bauteils eine Beeinflussung auf die Rissausbreitung dar. Durch eine Vereinfachung von komplexen Geometrien kann diese eine Verfälschung der Ergebnisse der Rissausbreitungsvorhersage mit sich ziehen. Im Folgenden wird zunächst auf den Einfluss komplexer Belastungen und Beanspruchungen sowie der geometrischen Abmessungen einge-

gangen. Im Anschluss werden einige etablierte Konzepte, mit denen Rissausbreitungen unter dreidimensionaler Betrachtung berechnet werden können, vorgestellt.

### 3.1 Auswirkung von Belastungen/Beanspruchungen

Eine äußere Kraft, welche auf eine Struktur einwirkt, wird als Belastung verstanden. Dabei kann es sich sowohl um Zug- oder Druckkräfte als auch Biege- und Torsionsmomente handeln. Jede Art der Belastung ruft eine entsprechende Beanspruchung im Inneren der Struktur hervor. Es handelt sich hierbei um auftretende mechanische Spannungen [Mot91]. Anhand dieser Spannungen können die Spannungsintensitätsfaktoren in unmittelbarer Rissfrontumgebung berechnet werden (siehe Kapitel 2.2). Diese wiederum ermöglichen es, eine Aussage über die Rissausbreitung zu treffen. Die Rissausbreitung unter einem dreidimensionalen Gesichtspunkt bezieht sich auf die Ausbreitungsrichtung in alle drei räumlichen Abmessungen. Reale Bauteile erfahren in der Regel Belastungen und Beanspruchungen, welche die unterschiedlichsten Rissausbreitungsrichtungen in einem Bauteil hervorrufen können. Deshalb zeigen auch vermeintlich einfache Belastungsfälle komplexe Rissausbreitungssituationen auf, die nur unter einer räumlichen Betrachtung Berücksichtigung finden (vergleiche Abbildung 3-2). Ausschlaggebend, ob ein Riss eine Mixed-Mode Beanspruchung erfährt, sind somit mehrere Faktoren. Zum einen spielt bei der Rissvorhersage die eingebrachte Belastung auf das Bauteil eine entscheidende Rolle, da diese unterschiedliche Beanspruchungen an der Rissfront zur Folge hat. Zum anderen ist auch die Lage beziehungsweise Orientierung des vorhandenen Risses im Bauteil von großer Bedeutung. Inwiefern sich die Belastung und die Lage des Risses auf die Rissausbreitung auswirken, ist anhand von zwei simulierten Beispielen in Abbildung 3-2 dargestellt. Die berechnete Rissausbreitung geht hierbei stets von einem halb-elliptischen Außenriss aus. Der Geometrieinfluss des Bauteils kann hier als vernachlässigbar angesehen werden.



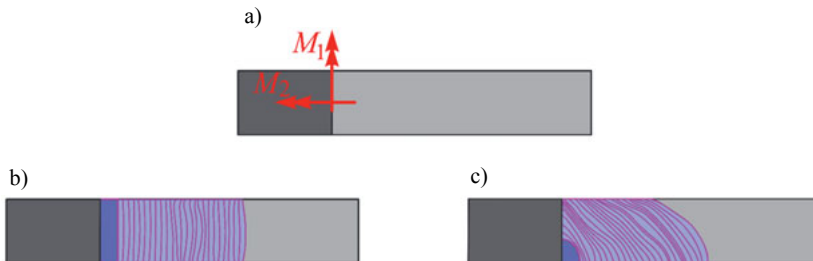
**Abbildung 3-2:** Einfluss der Belastung auf das Rissausbreitungsverhalten

- a) Ausgangsrisssebene senkrecht zur aufgetragenen Belastungsrichtung
- b) Ausgangsrisssebene um  $45^\circ$  gedreht zur aufgetragenen Belastungsrichtung

Bei gleicher Belastungsrichtung kann aufgrund der Lage des Initialrisses, also des Ausgangsrisses, ein vollkommen anderes Rissausbreitungsverhalten auftreten. Während sich der Riss in Abbildung 3-2 a) weiter in der Ebene des Initialrisses ausbreitet, verdreht sich die Rissfläche zu der Ausgangsrisebene bei Risswachstum in Abbildung 3-2 b). An der Rissfront herrscht aufgrund der gedrehten Ausgangslage des Initialrisses eine räumliche Mixed-Mode Beanspruchung vor, welche eine vollkommen andere Rissausbreitungssituation hervorruft als unter Abbildung 3-2 a). Durch das Zusammenspiel der Belastung und der Initialrisslage kann es zu Kombinationen von Abknicken und Verdrehen der Risse kommen. Diese ergeben sich durch die individuellen Spannungszustände an den Rissfronten.

### 3.2 Geometrien

Die Geometrie eines Bauteils oder einer Struktur kann einen zusätzlichen Einfluss auf die Rissausbreitung mit sich bringen. Dieser Zustand liegt darin begründet, dass unterschiedliche Beanspruchungen an der Rissfront auftreten können, welche durch die Geometrie beeinflusst werden. Durch Kraftflussumleitungen oder Hebelarmwirkungen stellen sich weitere Biege- oder Torsionsmomente an der Rissfront ein, wodurch komplexe Spannungszustände an der Rissfront vorherrschen können. Die daraus resultierenden Rissausbreitungen unterscheiden sich deutlich gegenüber der Rissausbreitung in Strukturen, bei denen ein überlagerter Einfluss des Biegemomentes nicht auftritt. Durch ein zusätzlich wirkendes Biegemoment kann es zum Beispiel zu einem einseitigen Vorlaufen der Rissfront kommen, welches bei einer ebenen Betrachtung der Rissausbreitung nicht berücksichtigt werden kann. An einem Beispiel in Abbildung 3-3 ist der Einfluss der Geometrie auf die Rissausbreitung schematisch aufgegriffen.



**Abbildung 3-3:** Einfluss der Geometrie auf die Rissausbreitung

- a) Wirkende Biegemomente am Riss
- b) Rissfläche nach einachsiger Biegung durch  $M_1$
- c) Rissfläche nach zweiachsiger Biegung durch  $M_1$  und  $M_2$

Durch die geometrischen Abmessungen der Strukturen wirkt unter Abbildung 3-3 b) ein einachsiges Biegemoment  $M_1$  am Riss. In Abbildung 3-3 c) tritt ein zweiachsiges Biegemoment durch  $M_1$  und  $M_2$  am Riss auf. Die durch die Biegemomenteverteilung hervorgerufenen unterschiedlichen Beanspruchungen an der Rissfront wirken sich auf die Rissausbreitung aus. In Abbildung 3-3 b) herrscht aufgrund des Biegemomentes  $M_1$  eine gleichmäßige Beanspru-

chung entlang der Rissfront, und die Rissausbreitung erfolgt kontinuierlich über die gesamte Dicke der Struktur. Die ungleichmäßige Spannungsverteilung an der Starterkerbe in Abbildung 3-3 c), bedingt durch die Biegemomente  $M_1$  und  $M_2$ , führen zu einem initialen Eckenriss. Dieser Umstand deutet darauf hin, dass die Beanspruchungen auf der einen Seite der Struktur höher sind als auf der gegenüberliegenden Seite. Demzufolge kommt es zu einem kontinuierlichen Vorlaufen des Risses entlang der Seite mit der höheren Beanspruchung. Bei einer Vereinfachung der Geometrie auf ein zweidimensionales Gebilde würde einer der beiden Biegemomenteanteile entfallen, wodurch die Rissausbreitung entweder zu konservativ oder aber überschätzt werden würde.

### 3.3 3D-Mixed-Mode-Komplexität

Bei einer räumlichen Spannungs Betrachtung der Rissfront werden insgesamt sechs Spannungskomponenten berücksichtigt. Im kartesischen Koordinatensystem sind dies die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  sowie  $\tau_{yz}$ , wie sie in Abbildung 3-4 a) dargestellt sind. Die drei Normalspannungen  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  und  $\sigma_z$  sowie die Schubspannungen  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\tau_{rz}$  und  $\tau_{\varphi z}$  (vgl. Abbildung 3-4 b)) entsprechen den Spannungen im Zylinderkoordinatensystem. Je nach der Art der aufgetragenen Belastungen und der geometrischen Abmessungen der Struktur stellen sich diese Spannungskomponenten an der Rissfront ein. Die Berücksichtigung dieser sechs Spannungskomponenten findet unter der Annahme des Ebenen-Verzerrungs-Zustandes (EVZ) statt. Als Sonderfall werden lastfreie Oberflächen und extrem dünne Strukturen angesehen. Hierbei tritt der sogenannte Ebene-Spannungs-Zustand (ESZ) auf. Bei einem ESZ wird davon ausgegangen, dass nur die Normalspannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$  sowie die Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  auftreten.

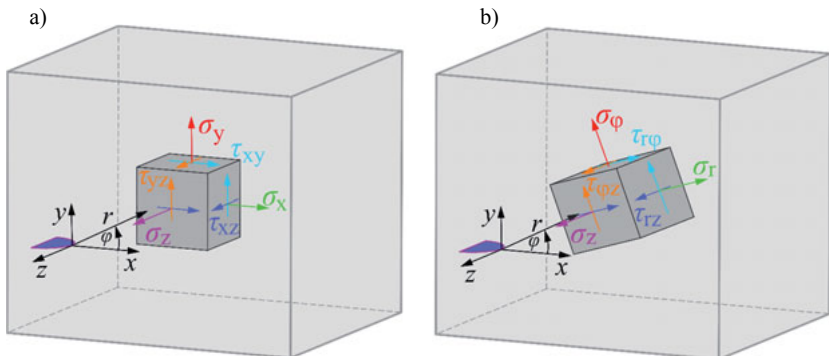


Abbildung 3-4: Spannungsverteilung an der Rissfront in Anlehnung an [RS12]

- a) in kartesischen Koordinaten
- b) in Zylinderkoordinaten

Durch die Erweiterung der Spannungen, bezogen auf die z-Richtung, vergrößert sich auch der Spannungstensor an der Rissfront um den Spannungsintensitätsfaktor  $K_{III}$  [RS12]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ K_I \cdot f_{ij}^I(\varphi) + K_{II} \cdot f_{ij}^{II}(\varphi) + K_{III} \cdot f_{ij}^{III}(\varphi) \right] \quad (3-1)$$

mit  $i, j = x, y, z$  beziehungsweise  $r, \varphi, z$ .

Für die Betrachtung der Spannungsverteilung an der Rissfront gilt in Zylinderkoordinaten:

$$\sigma_r = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ 5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ 5 \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right] \quad (3-2)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ 3 \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right] \quad (3-3)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ \cos \frac{\varphi}{2} + 3 \cos \frac{3\varphi}{2} \right] \quad (3-4)$$

$$\tau_{rz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3-5)$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (3-6)$$

$$\sigma_z = \nu \cdot [\sigma_r + \sigma_\varphi] = \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ K_I \cdot \cos \frac{\varphi}{2} - K_{II} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right] \quad (3-7).$$

Unter Beachtung aller auftretenden Spannungen erfährt demnach auch der Spannungsintensitätsfaktor  $K_{III}$  Berücksichtigung. Somit können sämtliche Einflüsse, welche bei einer räumlichen Betrachtung der Rissausbreitung auftreten, mit einfließen. Für eine Rissausbreitungsvorhersage unter dreidimensionalem Gesichtspunkt wurden diverse Konzepte aufgestellt. Im folgenden Kapitel werden einige etablierte Kriterien aufgezeigt, mit denen es möglich ist, das gesamte Spektrum der Einflussfaktoren für eine Rissausbreitung in homogenen 3D-Strukturen abzudecken.

### 3.4 Bruchkriterien bei 3-dimensionaler Rissausbreitung

Analog zu der Betrachtung einer zweidimensionalen Rissausbreitung muss auch bei einer dreidimensionalen Rissausbreitung abgeklärt werden, wie sich der Riss ausweiten wird. Hierbei ist neben den Kenntnissen über die zu erwartende stabile oder instabile Rissausbreitung auch die Risswachstumsrichtung von Interesse. Ausschlaggebend in diesem Zusammenhang sind die an der Rissfront vorherrschenden Spannungsintensitätsfaktoren. Um den Einfluss aller drei Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  zu berücksichtigen, wurden Konzepte aufgestellt, die es ermöglichen, eine allgemeine Mixed-Mode-Rissausbreitung zu berechnen. Mit den so berechneten Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren kann dann unter Verwendung von vorhandenen Werkstoffkennwerten eine Aussage über den Rissfortschritt getroffen werden. Anders als bei den Kriterien für zweidimensionale Rissausbreitung wird bei dem im folgenden Kapitel beschriebenen Konzepten zusätzlich zu dem Abknickwinkel  $\varphi_0$  auch die Verdrehung  $\varphi_0$  an der Rissfront mitberücksichtigt.

### 3.4.1 Kriterium nach POOK

Ein Kriterium, welches es ermöglicht, bei einer Rissvorhersage alle drei vorherrschenden Spannungsintensitätsfaktoren mit zu berücksichtigen, ist das nach POOK [Poo80; Poo85; Poo10]. Die beiden für die Rissausbreitung relevanten Abknick- beziehungsweise Verdrehwinkel werden hierbei unabhängig voneinander berechnet. Der Abknickwinkel  $\varphi_0$ , welcher das Abknicken des Risses aus der Initialrissebene heraus beschreibt (vgl. Kapitel 2.2), setzt sich aus den Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  mit

$$K_I \cdot \sin \varphi_0 = K_{II} (3 \cos \varphi_0 - 1) \quad (3-8)$$

zusammen.

Zudem werden bei diesem Kriterium zwei Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren gebildet. Zunächst werden mit dem Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_{V,I,II}$  die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  berücksichtigt. Darauf aufbauend wird ein Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_{V,I,II,III}$  ermittelt, welcher zusätzlich den Spannungsintensitätsfaktor  $K_{III}$  beinhaltet. Die Zusammenhänge sind in Gleichung (3-9) und (3-10) aufgezigt:

$$K_{V,I,II} = \frac{0,83K_I + \sqrt{0,4489K_I^2 + 3K_{II}^2}}{1,5} \quad (3-9)$$

$$K_{V,I,II,III} = \frac{K_{V,I,II}(1+2\nu) + \sqrt{K_{V,I,II}^2(1-2\nu)^2 + 4K_{III}^2}}{2} \quad (3-10)$$

mit  $\nu = \text{Querdehnzahl}$ .

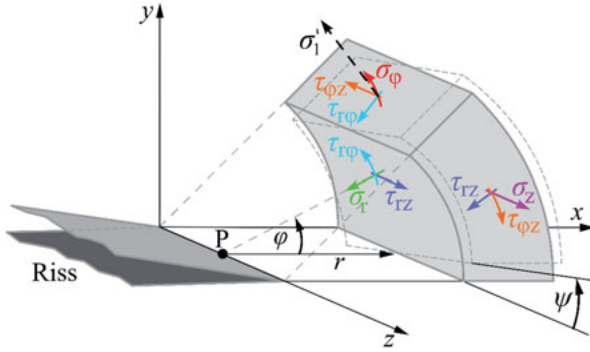
Für die Definition des nicht ebenen Verdrehwinkels  $\psi_0$  ergibt sich mit  $K_{III}$  und dem Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_{V,I,II}$ :

$$\tan 2\psi_0 = \frac{2K_{III}}{K_{V,I,II}(1-2\nu)} \quad (3-11).$$

Der Wertebereich dieses Verdrehwinkels liegt bei  $\psi_0 = \pm 45^\circ$ . Eine Aussage über das Eintreten einer instabilen Rissausbreitung wird dadurch gewährleistet, dass der Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_{V,I,II,III}$  mit der Risszähigkeit  $K_{IC}$  verglichen wird. Aufgrund der Tatsache, dass der Abknickwinkel  $\varphi_0$  unabhängig von  $K_{III}$  gebildet wird, ergibt sich ein Wertebereich von  $\varphi_0 = \pm 70,5^\circ$ . Bei einer reinen Mode-III Beanspruchung ist  $\varphi_0$  nicht definiert und liefert bei geringen Mode I-Anteilen sehr hohe Abknickwinkel mit bis zu  $\varphi_0 = \pm 70,5^\circ$  [RFB+03; Poo80; Sch12].

### 3.4.2 $\sigma'_I$ -Kriterium nach SCHÖLLMANN et al.

Bei diesem Konzept handelt es sich um eine Erweiterung des Maximal-Tangentialspannungskriteriums (MTS-Kriterium) auf dreidimensionale Betrachtung des Risses [Sch01]. Zusätzlich fließt in dieses erweiterte Konzept die Mode III Beanspruchung mit ein, wodurch die Verdrehung unter nichtebener Schubbelastung ebenfalls Berücksichtigung findet.



**Abbildung 3-5:** Zylinderkoordinatensystem an einer dreidimensionalen Rissfront nach [Sch01]

Unter der Voraussetzung, dass sich der Riss radial von der Rissfront ausbreitet, wird die Richtung der Rissausbildung durch die größte Hauptnormalspannung  $\sigma'_1$  gesteuert, wie in Abbildung 3-5 dargestellt. Diese Hauptnormalspannung  $\sigma'_1$  kann anhand der auftretenden Spannungen  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  und  $\tau_{\varphi z}$  des Rissnahfeldes mit

$$\sigma'_1 = \frac{\sigma_\varphi + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\varphi z}^2} \quad (3-12)$$

berechnet werden. Der Riss breitet sich demnach senkrecht zu dieser Hauptnormalspannung aus. Durch Umformung und Verwendung der Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  lässt sich der Zusammenhang für  $\sigma'_1$  wie in Gleichung (3-12) aufgezeigt darstellen:

$$\begin{aligned} \sigma'_1 = \frac{1}{8\sqrt{2\pi} \cdot r} & \left\{ K_I \left( 3 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) - K_{II} \left( 3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) \right. \\ & + \left[ \left[ K_I \left( 3 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) - K_{II} \left( 3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) \right]^2 \right. \\ & \left. \left. + 64K_{III}^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]^{1/2} \right\} \quad (3-13). \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass  $\sigma'_1$  an dieser Stelle ein Maximum aufweist, kann mit der partiellen Ableitung von der Hauptspannung  $\sigma'_1$  nach  $\varphi$

$$\left. \frac{\partial \sigma'_1}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma'_1}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} < 0 \quad (3-14)$$

der Abknickwinkel  $\varphi_0$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_1'}{\partial \varphi} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi} \cdot r} & \left\{ K_I \left( -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) - K_{II} \left( \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{9}{2} \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[ 2 \left[ K_I \left( 3 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) - K_{II} \left( 3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) \right] \right. \\
& \cdot \left[ K_I \left( -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) - K_{II} \left( \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{9}{2} \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) \right] \\
& - 32 K_{III}^2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) * \left[ \left[ K_I \left( 3 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) - K_{II} \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left( 3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right) \right]^2 + 64 K_{III}^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left. \right\} \quad (3-15).
\end{aligned}$$

Für die Bestimmung des Abknickwinkels  $\varphi_0$  ist jedoch keine geschlossene Lösung gegeben. Aus diesem Grund muss für die Berechnung von  $\varphi_0$  die Gleichung (3-15) für jede Kombination der Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  neu aufgestellt werden. Da in einer räumlichen Betrachtung ein Verdrehen des Risses im Raum möglich ist, besteht mit diesem Kriterium zudem die Möglichkeit einer rechnerischen Bestimmung des Verdrehwinkels  $\psi_0$ .

Über den Ansatz der klassischen Festigkeitslehre kann unter Verwendung des bereits berechneten Abknickwinkels  $\varphi_0$  und den an der Rissfront auftretenden Spannungen der Verdrehwinkel  $\psi_0$  mit

$$\tan(2\psi_0) = \frac{2\tau_{\varphi z}(\varphi_0)}{\sigma_{\varphi}(\varphi_0) - \sigma_z(\varphi_0)} \quad \text{bzw} \quad \psi_0 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2\tau_{\varphi z}(\varphi_0)}{\sigma_{\varphi}(\varphi_0) - \sigma_z(\varphi_0)}\right) \quad (3-16)$$

bestimmt werden.

Durch die stetige Weiterentwicklung der Computersysteme und entsprechend hoher Leistungskapazitäten der Rechner stellt die Tatsache, dass dieses Konzept keine geschlossene Lösung bietet, jedoch keinerlei Hindernis dar. Dieses Konzept liefert sehr gute und realitätsnahe Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren an der Riss Spitze und damit verbunden bietet es eine sehr genaue Rissausbreitungsvorhersage. Daher wurde dieses Kriterium bereits sehr erfolgreich in ein etabliertes Riss Simulationsprogramm implementiert (vgl. Kapitel 5) [Sch01; SFR03; Sch12].

### 3.4.3 Verallgemeinertes Kriterium nach RICHARD et al.

Um eine Rissvorhersage unter allgemeiner räumlicher Mixed-Mode Beanspruchung möglichst einfach und zugleich zuverlässig berechnen zu können, wurde von RICHARD et al. [RBK+03; RFS05] ein empirisches Konzept entwickelt. Der Vorteil bei diesem Kriterium liegt vor allem darin begründet, dass es sich bei diesen Formeln um geschlossene Lösungen handelt. Aus diesem Grund ist, neben der einfachen Handhabung, eine Anpassung an Ver-

suchsdaten relativ einfach möglich. Für die Bestimmung des Abknickwinkels  $\varphi_0$  und des Verdrehwinkels  $\psi_0$  werden folgende Gleichungen herangezogen:

$$\varphi_0 = \mp \left[ A \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} + B \left( \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} \right)^2 \right] \quad (3-17)$$

$$\psi_0 = \mp \left[ C \frac{|K_{III}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} + D \left( \frac{|K_{III}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} \right)^2 \right] \quad (3-18).$$

Die Faktoren  $A$  bis  $D$  sind empirischer Natur und können an entsprechende Versuchsdaten angepasst werden. Zahlreiche Berechnungen haben gezeigt, dass sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen des  $\sigma_1'$ -Kriteriums einstellen lässt, wenn für die Faktoren  $A = 140^\circ$ ,  $B = 70^\circ$ ,  $C = 78^\circ$  und  $D = 33^\circ$  verwendet werden.

Mit

$$K_V = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(\alpha_1 K_{II})^2 + 4(\alpha_2 K_{III})^2} \quad (3-19)$$

lässt sich der Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_V$  realitätsgetreu bestimmen. Unter der Verwendung von  $\alpha_1 = 1,155$  und  $\alpha_2 = 1$  ergeben sich nahezu identische Ergebnisse wie mit dem  $\sigma_1'$ -Kriterium [RFB+03; RSS14]. Zur instabilen Rissausbreitung kommt es laut diesem Konzept, wenn  $K_V$  die Risszähigkeit  $K_{IC}$  erreicht:

$$K_V = K_{IC} \quad (3-20).$$

### 3.5 Stabiles Risswachstum bei räumlicher Mixed-Mode-Beanspruchung

Da eine zyklische Belastung auf reale Bauteile oder Strukturen eher die Regel als eine Ausnahme darstellt, gilt es diesen Aspekt bei der Rissausbreitung mit zu berücksichtigen. Auftretende Beanspruchungen weit unterhalb der Risszähigkeit  $K_{IC}$  können bereits zu einer Risserweiterung führen. Die Rissgeschwindigkeit steigt mit einer zunehmenden zyklischen Spannungsintensität  $\Delta K_V$  an. Diese Phase der Rissausbreitung wird auch stabiles Ermüdungsrissswachstum genannt [RS12]. Während die stabile Risswachstumsphase über einen sehr lang andauernden Zeitraum ausgeweitet sein kann, tritt bei instabilem Risswachstum schlagartiges Versagen des Bauteils ein. Anders als bei einer rein statischen Belastung des Bauteils muss dem zufolge bei einer zyklischen Belastung neben der Risszähigkeit  $K_{IC}$  auch der Schwellenwert  $\Delta K_{I,th}$  Berücksichtigung finden.

Um eine Aussage treffen zu können, welche Belastungen ein stabiles beziehungsweise instabiles Risswachstum hervorrufen, werden folgende bruchmechanische Konzepte angewendet.

### 3.5.1 $\sigma'_I$ - Kriterium für stabiles Risswachstum

Das  $\sigma'_I$  - Kriterium nach SCHÖLLMANN et al., welches bereits in Kapitel 3.4.2 vorgestellt wurde, kann in seiner ursprünglichen Form zu einem Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_V$  umgestellt werden:

$$K_V = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \left\{ K_I \cos^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\varphi_0) + \sqrt{\left[ K_I \cos^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\varphi_0) \right]^2 + 4 K_{III}^2} \right\} \quad (3-21).$$

Aufgrund des zeitlich parallelen Ablaufs der aufgebrachten Spannungen zu den Spannungsintensitätsfaktoren (vgl. Kapitel 2.6) ist es legitim, diesen Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_V$  ebenfalls in Form eines zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_V$  aufzustellen. Um eine Aussage treffen zu können, ob es bei einer vorliegenden Beanspruchung zu einem stabilen oder instabilen Risswachstum kommt, wird dieser Faktor mit dem Schwellenwert  $\Delta K_{I,th}$  und der zyklischen Risszähigkeit  $\Delta K_{IC}$  mit

$$\Delta K_{IC} = (1 - R) K_{IC} \quad (3-22)$$

verglichen.

Eine stabile Rissausbreitung tritt ein, wenn

$$\Delta K_V \geq \Delta K_{I,th} \quad (3-23)$$

entspricht.

Erst bei Erreichen der Risszähigkeit  $\Delta K_{IC}$ , das heißt bei

$$\Delta K_V = \Delta K_{IC} \quad (3-24),$$

breitet sich der Riss instabil aus und es kommt zum Versagen des Bauteils [RSB+03].

### 3.5.2 Verallgemeinertes Kriterium für stabiles Risswachstum

Ein weiteres etabliertes Konzept um eine Aussage über stabiles oder instabiles Risswachstum geben zu können, bietet das Verallgemeinerte Kriterium nach RICHARD et al. (vgl. Kapitel 3.4.3). Durch Überführung des Vergleichsspannungsintensitätsfaktors  $K_V$  in einen zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  (vgl. Kapitel 2.6) kann im Zusammenspiel mit den werkstoffabhängigen Größen  $\Delta K_{I,th}$  und  $\Delta K_{IC}$  ebenfalls eine Aussage über das Risswachstumsverhalten getroffen werden:

$$\Delta K_{I,th} \leq \Delta K_V \leq \Delta K_{IC} \quad (3-25).$$

Eine stabile Rissausbreitung tritt ein, sobald der zyklische Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  größer ist als der Schwellenwert  $\Delta K_{I,th}$ . Erreicht der zyklische Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  jedoch die zyklische Risszähigkeit  $\Delta K_{IC}$ , tritt auch unter der Verwendung dieses Kriteriums eine instabile Rissausbreitung ein [RFB+03; RSS14].

### 3.6 Herausforderungen bei der Simulation von 3D-Risswachstum

Durch Simulationen können reale Prozesse in einem überschaubar kurzen Zeitraum berechnet und aufgezeigt werden. Die Auswertungen einer solchen Simulation ermöglichen es dem Anwender, die Prozessabläufe und daraus resultierenden Ergebnisse anschaulich darzustellen. Speziell im Hinblick auf eine Rissausbreitung in Bauteilen und Strukturen ermöglichen es entsprechende Simulationsprogramme, Rissentwicklungen frühzeitig zu erkennen. Aber auch nach einem Schadensfall können durch entsprechende Simulationen wertvolle Erkenntnisse über die Ursache aufgezeigt werden [RFS+04; RSK+04].

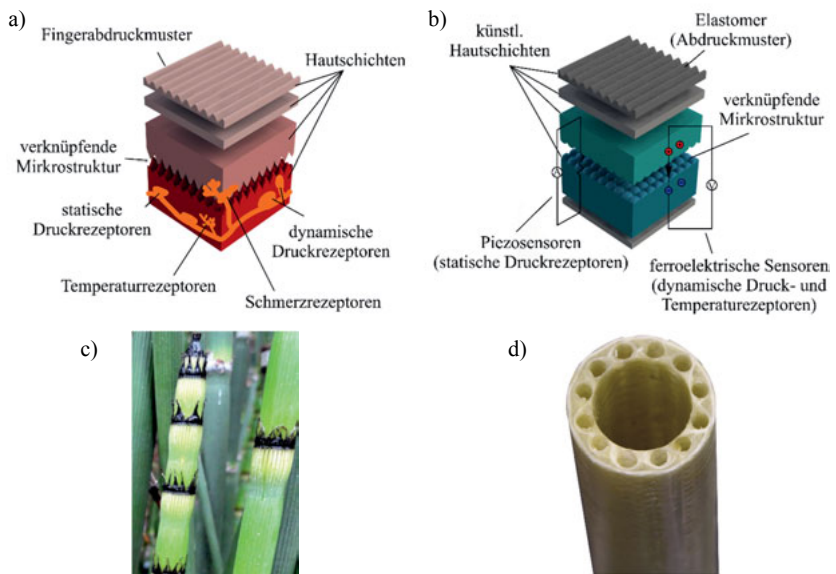
Unter Verwendung von geeigneten 3D-Konzepten und entsprechenden Riss simulationsprogrammen, mit denen eine räumliche Darstellung der Geometrie möglich ist, können realitätsnahe Aussagen über die Rissausbreitung getroffen werden. Dabei liegt die Herausforderung unter anderem in der Modellierung der Strukturen und der Koppelung der Berechnungen mit geeigneten Finite-Elemente-Programmen. Bei einem Finite-Elemente-Programm wird die Geometrie eines Bauteils durch endlich viele Elemente dargestellt. Anhand dieser Einteilungen des Bauteils ist es möglich, die auftretenden Spannungen in der gesamten Struktur zu berechnen. Ohne ein geeignetes Finite-Elemente-Programm ist die Simulation einer Rissausbreitung nahezu unmöglich, da für jeden einzelnen Knotenpunkt an der Rissfront eine separate Rissausbreitungsberechnung durchgeführt werden muss. Abschließend kann aus der Summe der Ergebnisse die Risserweiterung entlang der Rissfront generiert werden. Hierbei spielen sowohl der Abknickwinkel  $\varphi_0$  als auch der Verdrehwinkel  $\psi_0$  eine entscheidende Rolle. Was bislang in vielen Untersuchungen nur unzureichend behandelt wurde, ist der Einfluss der eingesetzten Materialien. Sämtliche hier aufgezeigte Konzepte gehen von einem homogenen Materialverhalten im gesamten Bauteil aus. Inwiefern jedoch lokal unterschiedliche Materialparameter einen Einfluss auf die Rissausbreitung mit sich bringen, ist in den aufgezeigten Konzepten noch unberücksichtigt geblieben. Der Einfluss einer lokalen Materialgradierung bringt dementsprechend eine weitere Herausforderung für eine realitätsnahe Rissausbreitungsvorhersage mit sich. Inwiefern eine lokale Materialeigenschaftsänderung realisierbar ist und wie sich diese hinsichtlich einer Rissausbreitung bemerkbar macht, wird in den folgenden Kapiteln aufgezeigt.

Für eine dreidimensionale Rissausbreitungsvorhersage müssen sämtliche in diesem Kapitel aufgezeigten Einflussfaktoren mitberücksichtigt werden. Somit stellt eine Rissvorhersage unter allgemeiner räumlicher Mixed-Mode Belastung eine große Herausforderung dar. Sowohl der Einfluss der Geometrie als auch die Lage des Risses in einem Bauteil müssen realitätsnah erfasst werden. Anhand der Ergebnisse von Rissimulationen, wie sie in Kapitel 3.1 und 3.2 aufgezeigt sind, ist der Einfluss der Belastungen beziehungsweise der Beanspruchungen an der Rissfront verdeutlicht. Insbesondere die Auswirkungen des Spannungsintensitätsfaktors  $K_{III}$ , welcher relevant für die Verdrehung der Rissfront ist, können nur bei einer räumlichen Betrachtung mit Berücksichtigung finden.

## 4 RISSWACHSTUM IN GRADIENTEN MATERIALIEN

Die Fähigkeit, Eigenschaften von Werkstoffen zu erkennen und diese zu optimieren, ist eine der wichtigsten Herausforderungen an Ingenieure in Bezug auf die technische Entwicklung im Leichtbau. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass in der heutigen Zeit Materialien gebraucht werden, die den wirtschaftlichen und ökologischen Standards entsprechen müssen, haben Innovationen von neuartigen Materialien Hochkonjunktur [NS16].

Neben der idealen Ausnutzung eines Werkstoffes besteht die Möglichkeit in unterschiedlich stark beanspruchten Bereichen einer Struktur, verschiedenartige Materialeigenschaften zu generieren. Somit können dem Bauteil unabhängig von seiner Geometrie lokale Eigenschaftsänderungen im Sinne von zum Beispiel Festigkeits- und Steifigkeitsoptimierungen zugewiesen werden. Diese lokale Eigenschaftsänderung in einem Bauteil kann sowohl durch den Einsatz verschiedener Materialien als auch durch gezielte Materialeigenschaftsänderungen eines homogenen Werkstoffes realisiert werden. Sobald sich die Eigenschaften eines Bauteils lokal im Hinblick auf mechanische, physikalische oder chemische Kennwerte in mindestens einer Raumrichtung ändern, wird von einer Gradierung gesprochen [Röd96; RN95; HHS12].



**Abbildung 4-1:** Aufbau von gradierten Strukturen in der Natur und der Technik

a) schematischer Aufbau der menschlichen Haut nach [PKL+15]

b) schematischer Aufbau einer künstlichen ferroelektrischen Haut nach [PKL+15]

c) Winterschachtelhalm

d) Technischer Pflanzenhalm [Bel12]

Aus der Natur sind zahlreiche Phänomene bekannt, bei denen Gradierungen in Strukturen eine wichtige Rolle spielen. So zeigen sich unter anderem im Aufbau der menschlichen Haut bis hin zu Pflanzen wie dem Winterschachtelhalm lokal unterschiedliche Materialeigenschaften. Der Zweck einer Gradierung ist in diesen Fällen weniger die Ersparnis, sondern eher die Verbindung funktionaler Zonen [HHS12]. Die künstliche Haut (Abbildung 4-1 b)) auf Basis von ferroelektrischen Mikrostrukturen wurde in Anlehnung an die menschliche Haut (Abbildung 4-1 a)) in Schichtbauweise (vgl. Kapitel 4.1.2.1) erzeugt [PKL+15]. Auch der Aufbau eines Winterschachtelhalmes (Abbildung 4-1 c)) mit seiner gradierten Faserverteilung dient als Vorbild im Leichtbaubereich. Die lokal differierenden mechanischen Eigenschaften des Winterschachtelhalmes wurden in einem technischen Pflanzenhalm (Abbildung 4-1 d)) mittels Faser-verbundmaterialien (Kapitel 4.1.2.2) nachgeahmt. Ein Ziel von Materialgradierung ist demnach das Bestreben, die in der Natur vorkommenden Optimierungsprinzipien aufzugreifen und auf die bauteilspezifischen Anforderungen zu adaptieren [HHS12]. Funktional gradierte Materialien (FGM) bieten hier ein großes Potenzial, um den spezifischen Anforderungen an Bauteile und Strukturen gerecht zu werden. Durch die lokale Eigenschaftsänderung in bis zu drei Raumrichtungen werden einzelne Werkstoffcharakteristika optimal an die Anforderungen und Umgebungsbedingungen angepasst [HHS12].

Wie sich die ersten technologischen Materialien bis hin zu den „neuen“ funktional gradierten Materialien und Strukturen entwickelt haben, wird im folgenden Kapitel aufgezeigt<sup>3</sup>. Ferner werden mögliche Auswirkungen einer lokalen Materialgradierung auf die Rissausbreitung identifiziert und Konzepte für bruchmechanisch gradierte Materialien beschrieben. Abschließend wird ein neues dreidimensionales Konzept für eine Rissausbreitung in bruchmechanisch gradierten Strukturen vorgestellt.

## 4.1 Über den Leichtbau zu gradierten Materialien

Leichtbau im Maschinenbau ist nach wie vor ein großes Thema in der industriellen Fertigung und birgt noch viele, nicht ausgeschöpfte Potenziale. Leichtbau selbst kann auf verschiedenste Weise realisiert werden. Welche Ansätze verfolgt werden, hängt unter anderem von der Motivation und dem Einsatzbereich ab. Das Hauptziel ist es jedoch, eine Einsparung von Masse und Material durch konstruktive Maßnahmen und den Einsatz von optimal gewählten Materialparametern zu realisieren [HHS12]. Grundsätzlich lässt sich der Bereich Leichtbau in drei Kategorien einteilen. So wird unter Struktur-, System- und Materialleichtbau unterschieden [Sob07]. Bei dem Struktur- und Systemleichtbau liegt die Betrachtungsebene bei dem Bauteil als Ganzes. Eine Gewichtersparnis wird durch die konstruktive Gestaltung entsprechend der auftretenden Beanspruchungen realisiert. Auf der Ebene des Materialleichtbaus stehen die materialspezifischen Kenngrößen im Vordergrund. An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass sich eine optimale Leichtbaukonstruktion nur durch eine Kopplung der drei Kategorien realisieren lässt.

<sup>3</sup> Da in dieser Arbeit der Fokus im Bereich des Risswachstums von Metallen liegt, werden einige Verfahren, welche sich für die Gradierung von Metallen eignen, vorgestellt.

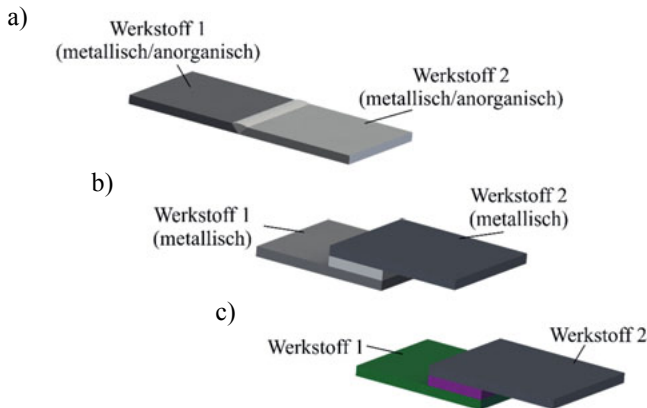
Der Fokus dieser Arbeit liegt in der Kategorie des Materialleichtbaus. Da diese nicht abgegrenzt von der Konstruktion der Strukturen allein betrachtet werden kann, wird derzeit zwischen vier verschiedenen Herangehensweisen unterschieden, welche unter anderem auch die Strukturen mitberücksichtigen:

- Differenzialbauweise,
- Integralbauweise,
- integrierende Bauweise
- und Verbundbauweise.

Unter Verwendung eines dieser Prinzipien und durch den Einsatz von ein oder mehreren Werkstoffkomponenten ist es möglich, lokal unterschiedliche Bauteileigenschaften in einer Struktur zu erzeugen. Aufgrund des Fokus auf der Materialgradierung werden im Weiteren einige Bauweisen aufgezeigt, mit denen eine lokale Materialgradierung durchgeführt werden kann. Detaillierte Erläuterungen zu den weiteren Leichtbaukategorien sowie Bauweisen sind in [Sob07] nachzulesen.

#### 4.1.1 Differenzialbauweise

In der Differenzialbauweise wird eine lokale Materialeigenschaftsänderung durch verschiedene Fügeverfahren realisiert. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass mit und ohne Zusatzwerkstoff unlösbare Verbindungen zwischen den einzelnen Bauteilkomponenten geschaffen werden können. Zu diesen Verfahren gehören das Schweißen, Löten und Kleben [Kle13]. Diese Techniken unterscheiden sich in erster Linie durch die Art der Verbindung und der Anwendbarkeit bei diversen Werkstoffkombinationen (vgl. Abbildung 4-2).

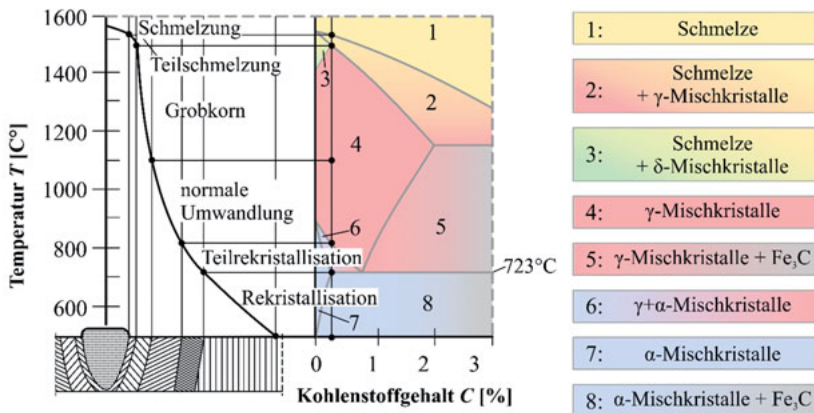


**Abbildung 4-2:** Fügeverfahren in der Differenzialbauweise nach [IKZ02]

- a) Schweißverbindung
- b) Lötverbindung
- c) Klebeverbindung

#### 4.1.1.1 Schweißverbindungen

Beim Schweißen werden einzelne Bauteilkomponenten unter Verwendung von Wärme und/oder Druck unlösbar miteinander verbunden (vgl. Abbildung 4-2 a)). Idealerweise wird eine solche Schweißverbindung in plastischem oder flüssigem Stoffzustand der Schweißzone erzeugt [Rad88]. Besonders bei großen Bauteilen bietet sich das Schweißen an, um einzelne Bauteile, welche aus unterschiedlichen Materialien gefertigt sind, miteinander zu verbinden. Dabei beschränkt sich die Materialauswahl lediglich auf die Werkstoffkategorie, metallisch oder nicht metallisch. Neben den positiven Eigenschaften, die das Schweißen von Bauteilkomponenten mit sich bringt, zeigt dieses Verfahren jedoch auch negative Beeinflussungen der Materialeigenschaften auf. Ein nicht zu vernachlässigender Effekt ist die unerwünschte Härtezunahme in der Wärmeeinflusszone [RW13]. Durch das lokale Aufschmelzen in der Schweißzone treten zumeist unerwünschte Gefügeumwandlungen auf, wie sie in Abbildung 4-3 schematisch aufgezeigt sind [Rad88]. Im ungünstigsten Fall entsteht  $\alpha$ -Mischkristall (sehr grobkörniger Martensit), welcher besonders sprödes Materialverhalten aufweist. Für die einzelnen Gefügezonen gelten teilweise deutlich schlechtere Festigkeits- und Formänderungsverhalten als für den Grundwerkstoff außerhalb der Wärmeeinflusszone. Es kann vermehrt zu Rissbildungen, vor allem in den grobkörnigen Gefügezuständen unmittelbar neben der Schmelzzone kommen [Rad88; Dil05].



**Abbildung 4-3:** Gefügeänderungen in der Wärmeeinflusszone beim Schweißen nach [Rad88]

#### 4.1.1.2 Lötverbindungen

Eine weitere Möglichkeit zum Verbinden zweier Bauteilkomponenten bietet das Löten. Bei diesem Verfahren werden die zu verbindenden Komponenten nicht partiell aufgeschmolzen, sondern lediglich auf eine Arbeitstemperatur erwärmt. Bei diesem Verfahren wird für die Realisierung der Verbindung immer ein Zusatzstoff, das Lot, benötigt. Die Wärmezone beziehungsweise der Fügebereich wird bei diesem Verfahren stets flächenhaft realisiert (vgl. Abbildung 4-2b)). Durch die geringere Wärmeeinbringung treten kaum schädigende

Werkstoffbeeinflussungen auf. Zudem ist es auch möglich, verschiedene Materialien miteinander zu fügen, solange es sich um metallische Werkstoffe handelt. Für größere Lötstellen ist dieses Verfahren jedoch eher unwirtschaftlich, da das Lot verhältnismäßig teuer ist, gegenüber den Grundwerkstoffen [WMJ+13]. Auch bei der Wahl der einzelnen Werkstoffe treten Einschränkungen für das Löten auf. So besteht bei Aluminium beispielsweise die Gefahr der elektrolytischen Zerstörung der Lötstelle. Grundsätzlich gelten zudem für alle Lötverbindungen geringere Festigkeiten im Vergleich zu geschweißten Verbindungen [WMJ+13; RW13; SIZ03].

#### 4.1.1.3 Klebeverbindungen

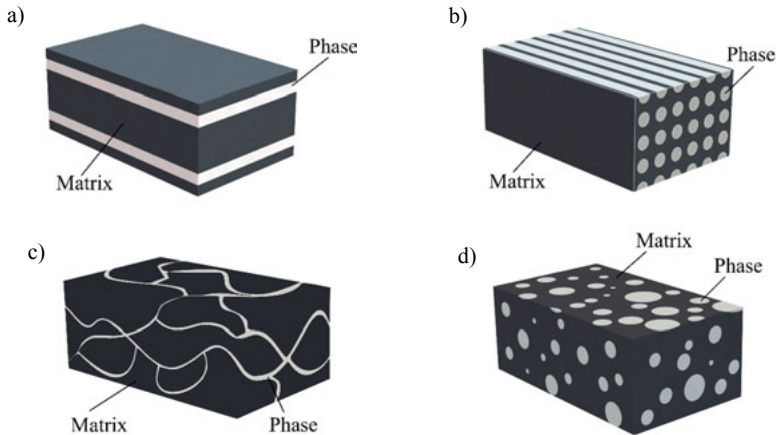
Beim Kleben können metallische und nicht metallische Werkstoffe durch Verwendung eines Klebstoffes dauerhaft verbunden werden. Der große Vorteil dieser Art des Fügens liegt in der vielseitigen Anwendbarkeit. Anders als beim Schweißen oder Löten kann bei diesem Verfahren auf die Zufuhr von Wärme verzichtet werden. Die dadurch ausgelösten Werkstoffbeeinträchtigungen im Hinblick auf Festigkeit und Korrosion bleiben außen vor. Die Realisierung von Verbindungen mit verschiedenartigen Werkstoffen wie Metall, Glas und Kunststoff ermöglichen eine Vielzahl von Materialkombinationen. Aus diesem Grund erfährt das Kleben insbesondere in der Leichtbauindustrie zunehmen mehr an Bedeutung. Zwar wird beim Kleben ähnlich wie beim Löten eine flächige Verbindung realisiert (Abbildung 4-2 c)), dafür bietet dieses Verfahren jedoch die Möglichkeit, großflächige Verbindungen an sehr dünnen Fügeteilen durchzuführen [RW13; WMJ+13]. Den großen Vorteilen der Klebetechnik stehen jedoch auch Nachteile gegenüber. Da die Klebstoffe und damit die Klebungen sehr wärmeempfindlich sind, sollten diese keinen Dauerbeanspruchungen bei hoher Temperatur ausgesetzt werden. Des Weiteren ist die Herstellung einer Klebeverbindung deutlich aufwendiger als bei anderen Verfahren. Eine optimale Haftung des Klebstoffes kann nur durch eine Oberflächenbehandlung realisiert werden. Auch die lange Abbindezeit bis zur Endfestigkeit der Verbindung unter meist flächenhaftem Druck erschwert den Einsatz der Klebetechnik [RW13; WMJ+13; SIZ12].

#### 4.1.2 Verbundbauweise

Ein weiterer Ansatz, um lokale Materialeigenschaftsänderungen zu erzeugen, bietet die Verbundbauweise. Insbesondere auf der Werkstoffebene ist ein Zusammenführen von Werkstoffen mit gegensätzlichen Eigenschaften gängige Praxis, wodurch neue Verbundwerkstoffe oder auch Composites mit funktional optimierten Eigenschaften kreiert werden [KPP+12]. Mit den bereits aufgezeigten Möglichkeiten der Differenzialbauweise sind lokale Eigenschaftsoptimierungen nur begrenzt realisierbar. Auch um ungewollte negative Beeinträchtigungen, wie sie zum Beispiel beim Schweißen entstehen, zu umgehen, bieten Verbundwerkstoffe eine gute Alternative. Mit der Verwendung dieser Werkstoffe erweitert sich das Spektrum im Hinblick auf die lokalen Eigenschaftsänderungen erheblich und wirkt sich positiv auf die gestalterischen Freiheiten im Leichtbau aus. Der Grundgedanke liegt darin, höhere Leistung, verbesserte Funktion sowie Material- und Energieeinsparung durch „Arbeitsteilung“ im Werkstoffverbund zu erreichen [Wei07]. Die verwendeten Komponenten werden so gewählt, dass diese

aufgrund ihrer Eigenschaften für den vorliegenden Fall optimal beansprucht und zielgerichtet genutzt werden.

Im Zusammenhang mit der Verbundbauweise, speziell dem Werkstoffverbund, wird zwischen Matrix und Phase unterschieden. Bei der überwiegenden Werkstoffkomponente handelt es sich um die Matrix oder auch Grundmasse, während die zweite Werkstoffkomponente als Phase in die Matrix eingebettet wird [IS10; Wei07]. Werkstoffe mit zwei nicht zu vermischenden Komponenten werden nach [RN95] auch als Gradientenwerkstoffe bezeichnet. Die Kombinationsmöglichkeiten bei Werkstoffverbunden sind aufgrund gezielter Beschichtungsverfahren<sup>4</sup> der Phase nahezu unbegrenzt. Durch die Einbringung der Phase in die Matrix lässt sich ein weiterer Gestaltungsparameter generieren, mit dem sich die Eigenschaften des Werkstoffes auf ein gewünschtes Eigenschaftsprofil optimieren lassen [IS10; RN95]. Zu den Werkstoffverbunden zählen Schicht-, Faser-, Teilchen- und Durchdringungsverbunde, wie sie in Abbildung 4-4 aufgezeigt sind [KPP+12; Sob07].



**Abbildung 4-4:** Kategorien der Werkstoffverbunde in Anlehnung an [Wei07]

- |                          |                    |
|--------------------------|--------------------|
| a) Schichtverbund        | b) Faserverbund    |
| c) Durchdringungsverbund | d) Teilchenverbund |

#### 4.1.2.1 Schichtverbundwerkstoffe

Gradientenwerkstoffe, bei denen die flächigen Halbfabrikate aus dünnen Schichten zusammengesetzt sind, werden als Schichtverbundwerkstoffe oder auch Sandwichstrukturen bezeichnet (siehe Abbildung 4-4 a)). Die äußeren Schichten übernehmen hierbei zumeist den Anteil der Formsteifigkeit und der Oberflächenbeständigkeit zum Beispiel gegen Korrosion. Die innen liegenden Schichten dienen häufig der Schall- und Wärmedämmung. Darüber hinaus ist eine Kombination von metallischen und nicht metallischen Werkstoffen möglich, wodurch ein zusätzlicher Aspekt der Gewichtseinsparung eine wichtige Rolle spielen kann. Sol-

<sup>4</sup> Diese Verfahren sind in [Wei07] nachzulesen.

che Schichtverbunde werden bereits erfolgreich in Dach- und Wandverkleidungen, aber auch in Gehäusen für Baumaschinen und Kfz-Bodenblechen eingesetzt [KPP+12; Wei07].

#### 4.1.2.2 Faserverbundwerkstoffe

Im Gegensatz zum reinen Matrixmaterial weisen die Faserverbundwerkstoffe (Abbildung 4-4 b)) eine deutlich höhere Festigkeit auf. Dies ist auf die hohe Festigkeit der einzelnen dünnen Fasern, welche die Phase darstellen, zurückzuführen. Bei zum Beispiel glasfaserverstärkten Kunststoffen (GFK) erfolgt die Lastaufnahme nahezu vollständig über die Fasern und kaum über die Matrix [IS10]. Während der Herstellung werden diese Fasern in die Matrix des Halbzeuges fest eingebettet. Neben der Wahl des Faserwerkstoffes haben auch die Ausrichtungen der Fasern einen entscheidenden Einfluss auf die Festigkeit. Faserverbundwerkstoffe werden überwiegend bei Polymeren eingesetzt. In Bezug auf Metallmatrix-Faserverbunde zeigen sich teilweise noch Schwierigkeiten bei der gleichmäßigen Verteilung und Ausrichtung der Fasern. Eingesetzt werden solche metallbasierten Faserverbundwerkstoffe bereits für Pressgusskolben in Dieselmotoren [Wei07].

#### 4.1.2.3 Durchdringungsverbundwerkstoffe

Für die Herstellung von Durchdringungsverbundwerkstoffen werden in zwei Arbeitsschritten die Matrix und die Phase des Verbundes miteinander kombiniert. Die meist hochschmelzende formgebende Matrix weist offene Poren auf, welche nach der Erstarrung von der flüssigen Phase durchtränkt werden (Abbildung 4-4 c)). Die Durchdringungsphase übernimmt hierbei häufig die Aufgabe der Wärme- oder Stromleitung. Mit Verwendung von Durchdringungsverbundwerkstoffen können Werkstoffe mit hoher Leitfähigkeit bei gleichzeitig hoher Wärmedehnung erzeugt werden. Hierbei wird zumeist eine Kompromisslösung der einzelnen Werkstoffeigenschaften realisiert. Im Verbund können so die Stärken der einzelnen Materialkomponenten zu einem neuen technologischen Werkstoff zusammengefügt werden [KPP+12; Wei07].

#### 4.1.2.4 Teilchenverbundwerkstoffe

In den Teilchenverbundwerkstoffen weisen die Phasenteilchen eine rundliche oder unbestimmte Form auf (vgl. Abbildung 4-4 d)). Aufgrund ihrer Verteilung und Ausrichtung in der formgebenden Matrix ergibt sich zumeist ein isotropes Werkstoffverhalten. Eingesetzt werden diese Verbundwerkstoffe überwiegend bei der zerspanenden Bearbeitung von metallischen Werkstoffen. Durch die Werkstoffwahl der Phasenteilchen kann bei dem Werkzeug ein hoher Widerstand gegen Abrasion realisiert werden [KPP+12].

Neben einer Beanspruchungsoptimierung durch Struktur- oder Werkstoffanpassungen wird darüber hinaus auch ein verstärktes Augenmerk auf die ökologischen Standards gelegt. Recycling gerät zunehmend in den Fokus, wenn es um innovative Werkstoffe geht. Daher sollte bei der Entwicklung und Konstruktion von Strukturen und Bauteilen auch die spätere Wiederverwertung der Werkstoffe mitberücksichtigt werden [STH10]. Um kostspielige Verfahren für eine Materialtrennung beim Recyceln zu vermeiden, wird in der Industrie zunehmend mehr auf den Einsatz von gradierten Materialien, bestehend aus nur einer Werkstoffkomponente, gesetzt. Darüber hinaus liegt das Bestreben darin, eine definierte lokale Materialgradie-

nung zu erzeugen, welche während oder auch nach der Formgebung realisiert werden kann und zudem reproduzierbar ist.

## 4.2 Funktional gradierte Materialien

Der begrenzte Einsatz von Metallmatrix-Verbundwerkstoffen ist zum einen auf die hohen Herstellungskosten und zum anderen auf die noch nicht ausreichende Qualitätssicherung bei der Herstellung der Verbunde zurückzuführen [Wei07]. Aus diesem Grund treten weitere Optionen für eine Materialgradierung in den Vordergrund, mit denen gezielte und vor allem reproduzierbare Gradierungen in Strukturen möglich sind. Einen Ansatz bieten hier die funktional gradierten Materialien (FGM). Unter der Verwendung von zwei oder auch mehreren Materialkomponenten können gezielt lokale Materialeigenschaftsänderungen vorgenommen werden. Ein besonderes Merkmal dieser funktional gradierten Materialien ist, dass die unterschiedlichen Gefügebestandteile ganz oder teilweise ineinander gelöst werden. Durch die örtliche Häufigkeitsverteilung der Bestandteile können somit lokal unterschiedliche Materialeigenschaften eingestellt werden [RN95]. Der Übergang zwischen den unterschiedlichen Eigenschaftsbereichen erfolgt kontinuierlich und kann sich über einige hundert Mikrometer bis hin zu mehreren Millimetern erstrecken [HHS12]. Dieser Zustand wirkt sich zum Beispiel bei hochtemperaturbeanspruchten Bauteilen sehr positiv aus. Durch die kontinuierliche Eigenschaftsänderung kann ein Abplatzen zwischen den unterschiedlichen Materialbereichen, bedingt durch die hohen Temperatureinwirkungen, unterbunden werden [NR97]. Durch vielseitige Materialkombinationen wie zum Beispiel Metall-Keramik, Polymer-Keramik und Metall-Metall, können diese funktional gradierten Materialien für ein sehr großes Spektrum von Anwendungen eingesetzt werden. Die Funktion von Bauteilen und Strukturen kann gezielt verbessert oder gar erweitert werden [BBF+03; Pau02; GA97; KP02; MAM16; RW13]. Darüber hinaus ist auch eine Gradierung mit nur einer Werkstoffkomponente realisierbar, indem unterschiedliche Gefügebereiche eingestellt werden (vgl. Kapitel 4.2.2). Bei funktional gradierten Strukturen wird zwischen einer elastischen und einer bruchmechanischen Gradierung differenziert. Um den Einfluss einer bruchmechanischen Materialgradierung auf die Rissausbreitung erfassen zu können, soll zunächst der Unterschied zwischen einer elastischen und einer bruchmechanischen Gradierung verdeutlicht werden.

### 4.2.1 Elastische Gradierung

Bei einer elastischen Gradierung liegt der Fokus auf den Materialeigenschaftsänderungen, welche sich über die elastischen Materialkenngrößen erstrecken. Die elastische Gradierung charakterisiert somit die Änderungen der elastischen Werkstoffeigenschaften. Je nach Herstellungsprozess lassen sich gezielt der Elastizitätsmodule  $E$  sowie die Querkontraktionszahl  $\nu$  an die lokal vorherrschenden Beanspruchungen der Struktur anpassen.

Drei Prozessabläufe sind hier federführend:

- der konstitutive Prozess,
- das Homogenisieren,
- und der segregative Prozess [KNR03].

Bei der Nutzung des konstitutiven Prozesses wird ein schrittweiser Aufbau des gradierten Materials vorgenommen, wodurch die Struktur der Moleküle in den gewünschten Gradierungsbereichen angepasst wird. Während des Homogenisierens wird bei der Formgebung eine molekulare Verbindung im Gefüge hervorgerufen, die in Teilbereichen des Bauteils eine elastische Gradierung ermöglicht. Der segregative Prozess ermöglicht eine Gradierung nach der Formgebung. Hierbei wird durch Anlegen beispielsweise eines elektrischen Feldes eine molekulare Verbindung angeregt, welche ebenfalls zu einer elastischen Gradierung führt. Grundsätzlich wird bei den drei Prozessabläufen unter Zuhilfenahme von zusätzlichen Materialkomponenten eine Gradierung erzeugt [KNR03; RN95]. Wünschenswert ist eine solche elastische Materialgradierung dann, wenn lokal unterschiedliche Steifigkeiten gefordert sind. Weitere Möglichkeiten zur Realisierung einer solchen Materialgradierung sind durch additive Fertigungsverfahren gegeben. Das Selective-Laser-Melting-Verfahren (SLM) zählt zu diesen modernen Fertigungsverfahren. Auf 3D-Druckbasis können komplexe geometrische Strukturen hergestellt werden. Hierbei werden die Bauteile schichtweise durch partielles Aufschmelzen der Werkstoffpartikel aufgebaut. Durch die Verwendung von zwei verschiedenen starken Lasern zum Aufschmelzen der Materialpartikel kann ein Einfluss auf die elastischen Materialkennwerte einer beliebigen geometrischen Struktur gezielt vorgenommen werden [NLR+13; KRS+16; UE06].<sup>5</sup> Ein entscheidender Vorteil bildet hier insbesondere die Tatsache, dass mit nur einer Materialkomponente eine Gradierung in der Struktur erzeugt werden kann.

Inwieweit eine elastische Materialgradierung Einfluss auf die Spannungsverteilung im Bauteil und die Rissausbreitungsrichtung hat, ist in diversen Veröffentlichungen [Vil17; BBF+03; GA97; TP05; TT10] bereits diskutiert worden. Insbesondere aus den Untersuchungen von [KSR16] und [KRS+16] ist zu entnehmen, dass neben der Beanspruchung einer Struktur auch eine lokale, elastische Materialgradierung einen entscheidenden Einfluss auf die Rissausbreitung ausüben kann.

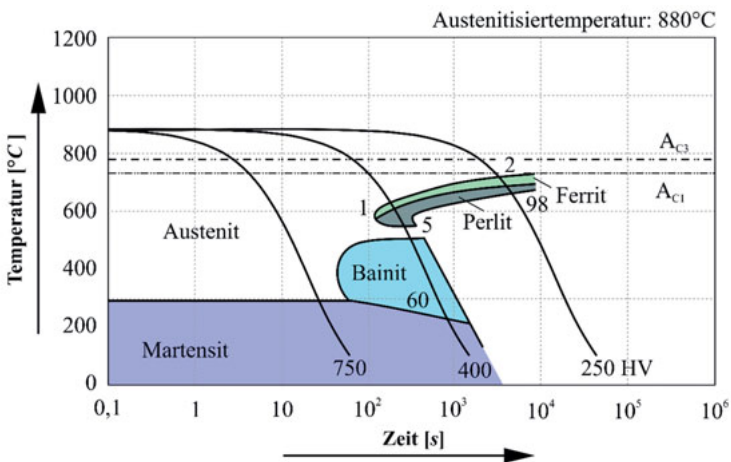
## 4.2.2 Bruchmechanische Gradierung

Bei Materialien mit einer bruchmechanischen Gradierung treten lokale Eigenschaftsänderungen in den bruchmechanischen Materialkennwerten auf. Diese Kennwerte sind insbesondere für eine Aussage über das Risswachstumsverhalten relevant. Zu diesen gehören der Schwellenwert  $\Delta K_{I,th}$ , die zyklische Risszähigkeit  $\Delta K_{IC}$  und die Rissgeschwindigkeitskurve  $da/dN$  sowie die Risszähigkeit  $K_{IC}$ . Mit oder ohne Zugabe einer weiteren Materialkomponente können diese Kennwerte in bis zu drei Raumrichtungen variieren. Wie bereits in Kapitel 4.1.1.1 aufgezeigt, kann durch einen konzentrierten Wärmeeintrag das Gefüge einer Struktur lokal

<sup>5</sup> Nähere Informationen über Additive Fertigungsverfahren kann in [Rie15] nachgelesen werden.

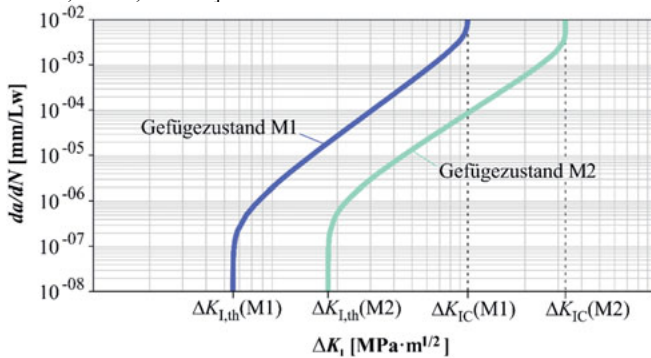
verändert werden. Diese Erkenntnis wird bei der Realisierung einer bruchmechanischen Gradierung genutzt. Verfahren, welche eine lokale Änderung der bruchmechanischen Materialkennwerte gegenüber dem Ausgangsmaterial hervorrufen, sind unter anderem thermomechanische Prozesse wie die Warmumformung oder das Warmwalzen. Im Zusammenhang mit dem Sonderforschungsbereich (SFB) Transregio 30 wurden bereits Untersuchungen durchgeführt, um die lokalen Materialeigenschaftsänderungen infolge einer thermomechanischen Behandlung zu charakterisieren [HBH13; Sch14]. Aber auch Wärmeverfahren, welche nach der Formgebung der Struktur zum Einsatz kommen, rufen eine bruchmechanische Gradierung hervor. Im Zusammenhang mit einer funktionalen Gradierung werden häufig das Induktions- oder Oberflächenhärten und das Randschichhärten erwähnt [ITE+12; SIZ09; SIZ05; BS14].

In einem Zeit-Temperatur-Umwandlungs-Schaubild, dem sogenannten ZTU-Schaubild können die möglichen Gefügezustände des Werkstoffes dargestellt werden. In diesem Diagramm sind diverse Abkühlkurven eingetragen, bei denen in Abhängigkeit von der Zeit die einzelnen Gefügezustände im Werkstoff abzulesen sind. In dem in Abbildung 4-5 dargestellten kontinuierlichen ZTU-Schaubild ist beispielhaft ein kohlenstoffhaltiger Stahl aufgezeigt. Die eingetragenen Abkühlkurven stellen den Verlauf für eine kontinuierliche Abkühlung des Werkstoffes, beginnend bei der Austenitisierungstemperatur, dar. Es ist zu erkennen, dass bei zunehmender Abkühlgeschwindigkeit beziehungsweise bei kürzeren Abkühlprozessen der Anteil des martensitischen Gefüges zunimmt. Dieser Martensit weist eine hohe Härte sowie hohen Widerstand gegen Verschleiß auf. Darüber hinaus ist die Beschaffenheit dieses Gefüges in den meisten Fällen deutlich spröder als bei dem vorliegenden Grundmaterial [JDK+84; BS08; Gob09].



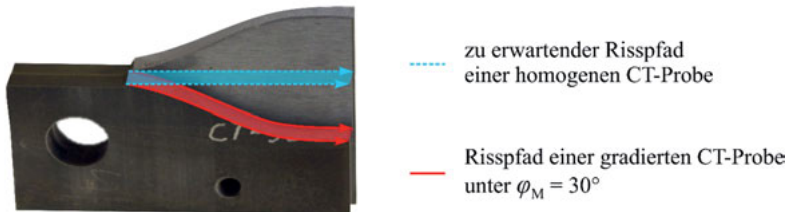
**Abbildung 4-5:** Prinzipielle Darstellung des kontinuierlichen ZTU-Schaubild einer beliebigen Stahlsorte

Die durch den Temperatureinfluss hervorgerufenen Gefügeänderungen ziehen jedoch auch Änderungen der bruchmechanischen Kennwerte mit sich. In experimentellen Untersuchungen konnte der Einfluss des Gefüges auf die bruchmechanischen Kennwerte bereits aufgezeigt werden [HBH13; Sch14; SRK16].



**Abbildung 4-6:** Rissgeschwindigkeitskurven  $da/dN$  in Abhängigkeit der Gefügestände

Aus der schematischen Darstellung in Abbildung 4-6 ist zu entnehmen, dass sich die Rissgeschwindigkeitskurven  $da/dN$  in Abhängigkeit der Gefügestände entlang der  $\Delta K_I$ -Achse verschieben. Für die einzelnen Gefügebereiche M1 oder M2 eines beliebigen Werkstoffes gelten demzufolge verschiedene Schwellenwerte  $\Delta K_{I,th}$  und Risszähigkeiten  $\Delta K_{IC}$ . Die Gefügeänderungen haben jedoch keinen Einfluss auf die elastischen Materialkennwerte (Elastizitätsmodul  $E$ , Querkontraktionszahl  $\nu$ ). Inwiefern sich die Änderungen der bruchmechanischen Kennwerte auf das Risswachstum bemerkbar machen, wurde von [Sch14] unter anderem in experimentellen Untersuchungen aufgezeigt.



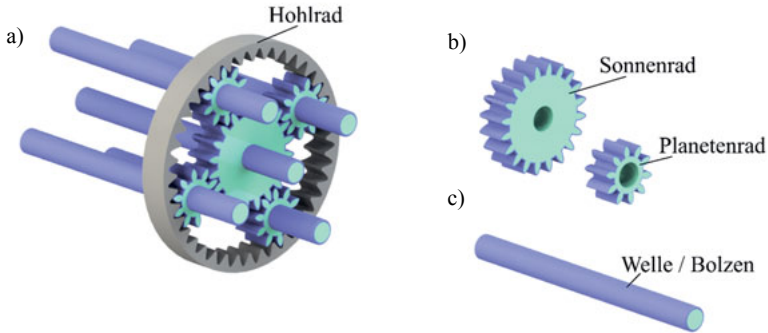
**Abbildung 4-7:** Rissausbreitung in einer gradierten CT-Probe nach [Sch14]

Anhand von diversen Versuchen an Proben mit lokal unterschiedlichen Gefügeständen und unter variierenden Materialgradierungen [Sch14] konnten Einflüsse der Gradierung auf das Rissausbreitungsverhalten identifiziert werden. Ein exemplarisches Ergebnis der experimentellen Untersuchungen von [Sch14] auf das Rissausbreitungsverhalten ist in Abbildung 4-7 dargestellt. Bei dieser Compact Tension-Probe (CT-Probe) wurde eine Materialgradierung eingebracht, welche unter einem Winkel von  $\varphi_M = 30^\circ$ , bezogen auf den Ausgangsriss an der Kerbe erzeugt wurde. Im Gegensatz zu einer homogenen CT-Probe, bei der der Riss rein be-

anspruchungsgesteuert in Richtung des blauen Kurvenverlaufs (siehe Abbildung 4-7) weiterwachsen würde, ist in dieser Untersuchung der Einfluss der Materialgradierung deutlich sichtbar. Trotz gleicher Beanspruchung knickt der Riss entlang der Gradierungsgrenze (roter Kurvenverlauf) ab und bewirkt somit eine Mixed-Mode-Beanspruchung entlang der Rissfront. Erst nach einem längeren Risswachstum entlang der Gradierungsgrenze tendiert das Rissausbreitungsverhalten zu einem Wachstum ohne Einfluss der vorliegenden Gradierung. Somit ist ein Einwirken der bruchmechanischen Materialgradierung auf das Rissausbreitungsverhalten aufgezeigt. Jedoch wurde in den Untersuchungen nicht immer eine Änderung der Rissausbreitungsrichtung erzielt. Je nach Materialeigenschaftskombination und des eingestellten Gradierungswinkels wurde das Risswachstum teilweise durch die Gradierung beeinflusst und teilweise nicht. Um nun diesen Einfluss einer bruchmechanischen Materialgradierung auf das Risswachstum zu berücksichtigen, bedarf es deshalb an Konzepten (vgl. Kapitel 4.3 und 4.4), bei denen neben den auftretenden Beanspruchungen an der Rissfront auch die lokalen bruchmechanischen Parameter in die Berechnung mit einfließen.

#### 4.2.3 Verwendungsmöglichkeiten gradiert Materialien und Strukturen

Dass funktionale bruchmechanische Gradierungen in Strukturen und Bauteilen bereits standardmäßig eingebracht werden, wird in einschlägigen Veröffentlichungen wie zum Beispiel [SIZ08; BK14; EPW06; Ben90; SIZ05; SIZ05a] aufgezeigt. Insbesondere für Verschleißteile bietet die Gradierung von Strukturen eine Möglichkeit, die Lebensdauer durch eine Steigerung der Verschleißfestigkeit in stark beanspruchten Bereichen zu erhöhen. Im Kraftfahrzeugbereich erfährt das Randschicht- oder Einsatzhärten von Getrieberädern immer größere Bedeutung [BS17]. Aber auch das Induktionshärten von Zahnrädern oder anderen Fahrzeugstrukturen wird bereits serienmäßig angewendet [ITE+12; HHJ+05; BS14]. Durch Innovationen in den Bereichen der Wärmebehandlung können somit gezielt Materialeigenschaften eingestellt und den vorliegenden Beanspruchungen entsprechend angepasst werden. Die Konturen beispielsweise von Wellen oder Bolzen aber auch von komplexeren Geometrien wie den Zahnrädern stellen mittlerweile keine Herausforderung mehr dar, um eine gezielte Änderung des Gefügezustandes zu erzeugen. Exemplarisch ist in Abbildung 4-8 a) ein Planetengetriebe dargestellt. Bei den einzelnen Komponenten wurden bruchmechanische Materialgradierungen eingebracht. Das Sonnenrad und die Planetenräder unter Abbildung 4-8 b) erfahren in der Praxis überwiegend Induktionshärtungen, während die Wellen beziehungsweise Bolzen in Abbildung 4-8 c) randschichtgehärtet werden.



**Abbildung 4-8:** Strukturbeispiele mit einer Materialgradierung

- a) Vereinfachter Aufbau eines Planetengetriebes
- b) Induktionsgehärtetes Sonnen- und Planetenrad
- c) Randschichtgehärtete/r Welle/Bolzen

Durch die voll automatisierten Wärmeprozesse ist eine zuverlässige und reproduzierbare bruchmechanische Gradierung möglich. Mit der Modifikation der Materialeigenschaften hat sich gezeigt, dass auch das Rissausbreitungsverhalten in dem Bereich der Materialgradierung eine Änderung erfahren kann (vgl. Abbildung 4-7). Neben einer Umlenkung des Risspfades, bedingt durch die Gradierungsgrenze, kann es zu einem Rissstillstand oder plötzlichem Versagen des Bauteils kommen, sobald die Rissfront auf ein anderes Werkstoffgefüge trifft. Um eine genaue Vorhersage des Risswachstums treffen zu können, müssen daher spezielle Konzepte herangezogen werden, die eine solche funktionale bruchmechanische Gradierung in Bauteilen und Strukturen berücksichtigen.

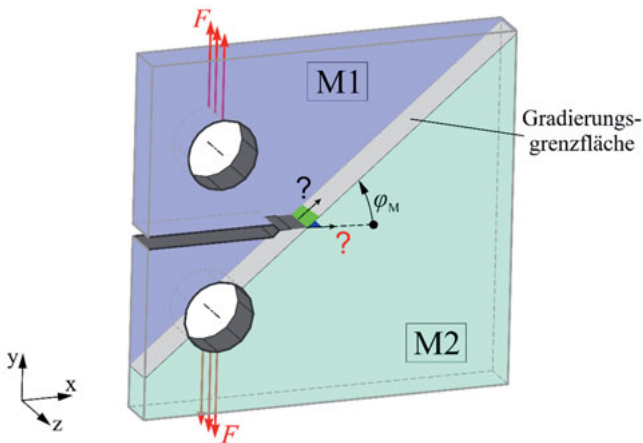
### 4.3 Bruchmechanische Gradierung unter 2-dimensionalem Gesichtspunkt

Bereits etablierte bruchmechanische Konzepte für eine Rissvorhersage (siehe Kapitel 2.5) beziehen sich zumeist auf homogene, isotrope Materialeigenschaften in einer Struktur. Eine Aussage über das Rissausbreitungsverhalten wird unter anderem über die vorherrschenden Spannungen in unmittelbarer Rissfrontumgebung nach Gleichung (2-10) bis (2-12) getroffen. Durch die Verwendung der Konzepte aus Kapitel 2.5 ist es zudem möglich eine Aussage über das Rissausbreitungsverhalten in Strukturen mit einer elastischen Materialgradierung (siehe Kapitel 4.2.1) zu treffen. Anders sieht es bei einer bruchmechanischen Materialgradierung aus. Da sich lediglich die bruchmechanischen Kennwerte an der Risspitze bei Erreichen der Materialgradierungsgrenze ändern, nicht aber das lokale Spannungsfeld, kann mit den standardmäßigen Bruchkonzepten keine realitätsnahe Aussage über das Rissausbreitungsverhalten in bruchmechanisch gradierten Strukturen getroffen werden.

Bei den bereits aufgezeigten bruchmechanischen Konzepten werden Materialkennwerte ( $\Delta K_{I,th}$ ,  $\Delta K_{IC}$ ) herangezogen, welche über die gesamte Rissausbreitung hinweg ihre Gültigkeit haben. Variierende Faktoren stellen lediglich die an der Rissfront vorherrschenden Beanspru-

chungen in Form der Spannungsintensitätsfaktoren dar. Zusätzlich zu der Berücksichtigung der Beanspruchungen an der Rissfront müssen bei bruchmechanisch gradierten Strukturen auch die veränderten bruchmechanischen Materialkennwerte sowie die Gradierungsgrenze (das heißt der lokal vorliegende Gradierungswinkel  $\varphi_M$  (siehe Abbildung 4-9)) in die Berechnung mit eingebunden werden.

In dem in Abbildung 4-9 dargestellten Beispiel handelt es sich um ein Risswachstum in einer CT-Probe. Unter Berücksichtigung eines rein homogenen isotropen Materialverhaltens würde der Riss beanspruchungsgesteuert unter Mode I wachsen. Für die Betrachtung des Risswachstumsverhaltens in einer gradierten CT-Probe gilt die Annahme, dass der Riss zunächst in einem homogenen, isotropen Materialeigenschaftsbereich M1 startet. Solange sich die Rissfront in diesem Materialbereich befindet, wird der Riss beanspruchungsgesteuert unter Mode I wachsen. Erst bei Erreichen des Materialüberganges entscheidet sich, ob der Riss infolge des Materialgradierungseinflusses abknickt oder in dem Materialeigenschaftsbereich M2 beanspruchungsgesteuert weiterwächst. Eine Beeinflussung des Rissausbreitungsverhaltens, bevor der Riss die Materialgradierungsgrenze erreicht, ist durch eine bruchmechanische Gradierung nicht gegeben.



**Abbildung 4-9:** Bruchmechanisch gradierte CT-Probe mit möglichen Rissausbreitungsrichtungen

Einfluss auf die Rissausbreitungsrichtung haben demnach die vorliegende Beanspruchungssituation, der Materialgradierungswinkel und die differierenden Materialkennwerte. Eine Änderung der Rissgeschwindigkeit  $da/dN$  tritt jedoch immer ein, unabhängig davon, ob die Rissausbreitungsrichtung durch die Materialgradierung beeinträchtigt wird oder nicht.

#### 4.3.1 Konzeptansätze für eine Rissausbreitung in gradierten Strukturen

Mit der Entwicklung von funktional gradierten Strukturen stellt sich unweigerlich auch die Frage, wie sich diese Werkstoffe unter Belastung und insbesondere beim Risswachstum verhalten. Basierend auf den bereits bestehenden Konzepten (siehe Kapitel 2 und 3) bietet sich

ein breites Spektrum, um lokal differierende Materialeigenschaften mit in die Rissausbreitungsvorhersage einfließen zu lassen. Ein möglicher Ansatz bietet zum Beispiel das J-Kriterium (vgl. Kapitel 2.4.2). Auf Basis dieses Konzeptes wurden von [KP04; TT10; TP05] ergänzende Parameter mit in die Berechnung eingefügt, sodass eine Aussage über das Risswachstumsverhalten in funktional gradierten Strukturen möglich ist. Auch über die Energiefreisetzungsrates kann durch Verwendung zusätzlicher Einflussparameter eine Rissausbreitung in gradierten Materialien realisiert werden. Dieser Ansatz wurde in [SSN+12; NSS14; Ste15] weiterverfolgt. Das in dieser Arbeit aufgestellte neue 3D-Konzept für bruchmechanisch gradierte Strukturen basiert auf den Ansätzen des  $\sigma_1$ '-Kriteriums (Kapitel 3.4.2) und dem TSSR-Konzept von [Sch14]. Dieses zuletzt genannte Konzept ermöglicht es, ein Risswachstum in bruchmechanisch gradierten Materialien unter einer zweidimensionalen Rissbetrachtung zu berechnen. Aus diesem Grund wird dieses Konzept im Folgenden detailliert aufgezeigt, um im Anschluss das neue 3D-Konzept vorzustellen.

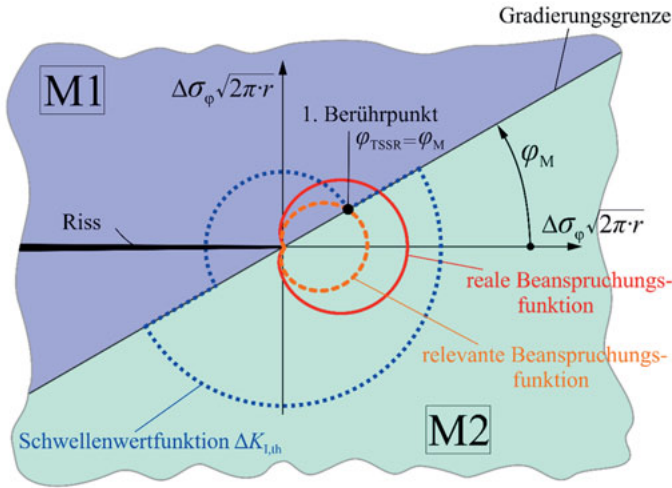
### 4.3.2 TSSR-Konzept

Als Basis für dieses TSSR-Konzept [Sch14] wurde das Maximal-Tangentialspannungskriterium (MTS) [ES63] herangezogen. Bei diesem Ansatz wird die Tangentialspannungsfunktion mit der bruchmechanischen Materialfunktion an der Risspitze überlagert. Der Schnittpunkt dieser beiden Funktionen liefert eine Aussage über die Rissausbreitungsrichtung. Darüber hinaus wird auch das Rissausbreitungsverhalten in Bezug auf stabiles und instabiles Risswachstum beschrieben. Ein möglicher Rissstillstand bei Erreichen der Materialgradierungsgrenze kann ebenso bestimmt werden wie das Eintreten einer instabilen Rissausbreitung.

Um die lokale Materialfunktion an der Rissfront in die Berechnung mit einfließen zu lassen, wurde die zyklische Beanspruchung aus Gleichung (2-36) zu einer vergleichbaren zyklischen Beanspruchungsfunktion  $\Delta\sigma_\varphi\sqrt{2\pi\cdot r}$  aufgestellt:

$$\Delta\sigma_\varphi\sqrt{2\pi\cdot r} = \Delta K_I \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \Delta K_{II} \frac{3}{2} \cdot \sin\varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (4-1).$$

In Abbildung 4-10 sind schematisch die realen und relevanten Beanspruchungsfunktionen sowie die Materialfunktion  $\Delta K_{I,th}$  in Abhängigkeit des Schwellenwertes an der aktuellen Risspitze dargestellt.



**Abbildung 4-10:** Konzeptionelle Darstellung des TSSR-Konzeptes in Anlehnung an [Sch14]

An der Materialgradierungsgrenze erfährt die Materialfunktion eine sprunghafte Änderung, welche in bruchmechanisch gradierten Materialübergängen auftritt. Um eine Aussage über die Rissausbreitungsrichtung treffen zu können, wird der erste Berührungspunkt der Beanspruchungsfunktion mit der Materialfunktion (hier die Schwellenwertfunktion  $\Delta K_{I,th}(\varphi)$ ) gesucht. Dieser Berührungspunkt wird durch die relevante Beanspruchungsfunktion ermittelt. Um diesen Punkt bestimmen zu können, werden die Beanspruchungs- und Materialfunktion gleichgesetzt:

$$\Delta\sigma_\varphi \sqrt{2\pi \cdot r} = \Delta K_I \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \Delta K_{II} \frac{3}{2} \cdot \sin \varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \Delta K_{I,th}(\varphi) \quad (4-2)$$

Mit dem Verhältnis für:

$$V = \frac{K_{II}}{K_I + K_{II}} \quad (4-3)$$

lässt sich der Zusammenhang

$$\Delta\sigma_\varphi \sqrt{2\pi \cdot r} = \Delta K_I \left\{ \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{V}{1-V} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sin \varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\} = \Delta K_{I,th}(\varphi) \quad (4-4)$$

aufstellen.

Zur Bestimmung des ersten Berührungspunktes mit der Materialfunktion werden zyklische Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_{I,th}(\varphi)$  ermittelt. Diese werden in Abhängigkeit des beanspruchungsgesteuerten Abknickwinkels  $\varphi_0$  sowie des lokal an der Risspitze vorliegenden Materialgradierungswinkels  $\varphi_M$  berechnet. Der Abknickwinkel  $\varphi_0$  wird hierbei über das MTS-Kriterium definiert. Des Weiteren werden die jeweils vorliegenden Thresholdwerte  $\Delta K_{I,th}$  an

der Materialgradierungsgrenze in Abhängigkeit der möglichen Rissausbreitungsrichtung miteinbezogen:

$$\Delta K_I^{\text{th}}(\varphi = \varphi_0) = \frac{\Delta K_{I,\text{th}}(\varphi_0)}{\cos^3\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{V}{1-V} \cdot \frac{3}{2} \sin \varphi_0 \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)} \quad (4-5)$$

$$\Delta K_I^{\text{th}}(\varphi = \varphi_M) = \frac{\Delta K_{I,\text{th}}(\varphi_M)}{\cos^3\left(\frac{\varphi_M}{2}\right) - \frac{V}{1-V} \cdot \frac{3}{2} \sin \varphi_M \cos\left(\frac{\varphi_M}{2}\right)} \quad (4-6)$$

Die aus den Gleichungen (4-5) bis (4-6) ermittelten Werte werden abschließend miteinander verglichen. Der kleinste Wert aus den Berechnungen stellt den relevanten zyklischen Spannungsintensitätsfaktor

$$\Delta K_I^{\text{th,TSSR}} = \text{MIN}\{\Delta K_I^{\text{th}}(\varphi = \varphi_0); \Delta K_I^{\text{th}}(\varphi = \varphi_M)\} \quad (4-7)$$

dar.

Über diesen Faktor kann die relevante Beanspruchungsfunktion an der Risspitze definiert werden.  $\Delta K_I^{\text{th,TSSR}}$  zeigt somit den ersten Berührungspunkt der Beanspruchungsfunktion mit der Materialfunktion auf und kann dementsprechend eine Aussage über den zu erwartenden Rissausbreitungswinkel an der Materialgradierung geben:

$$\Delta K_I^{\text{th,TSSR}} = \Delta K_I^{\text{th}}(\varphi = \varphi_0) \quad \text{Abknickwinkel} = \varphi_0 \quad (4-8)$$

$$\Delta K_I^{\text{th,TSSR}} = \Delta K_I^{\text{th}}(\varphi = \varphi_M) \quad \text{Abknickwinkel} = \varphi_M \quad (4-9).$$

Mit der Ermittlung des  $\Delta K_I^{\text{th,TSSR}}$  wurde die theoretische Rissausbreitungsrichtung festgelegt, nun bleibt noch zu überprüfen, ob der Riss bei der realen Belastung tatsächlich ausbreitungsfähig ist. Dafür wird der ermittelte  $\Delta K_I^{\text{th,TSSR}}$  dem zyklischen Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_I$ , welcher tatsächlich an der Risspitze vorliegt, gegenübergestellt. In Abbildung 4-10 wird über diese zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren die reale Beanspruchungsfunktion dargestellt.

Es gilt für:

$$\Delta K_I \geq \Delta K_I^{\text{th,TSSR}} \quad \Rightarrow \text{Riss ist ausbreitungsfähig}$$

$$\Delta K_I < \Delta K_I^{\text{th,TSSR}} \quad \Rightarrow \text{Riss ist nicht ausbreitungsfähig.}$$

Analog zu der Bestimmung des relevanten Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_I^{\text{th,TSSR}}$  wird ein weiterer relevanter Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_I^{\text{C,TSSR}}$  benötigt, mit dem eine Aussage über instabiles Risswachstum infolge der Materialgradierung getroffen werden kann. In die Berechnung des  $\Delta K_I^{\text{C,TSSR}}$  fließt daher der Materialkennwert für die zyklische Risszähigkeit  $\Delta K_{Ic}$  mit ein. Über die Gleichungen:

$$\Delta K_I^C(\varphi = \varphi_0) = \frac{\Delta K_{IC}(\varphi_0)}{\cos^3\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{V}{1-V} \cdot \frac{3}{2} \sin \varphi_0 \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)} \quad (4-10)$$

und

$$\Delta K_I^C(\varphi = \varphi_M) = \frac{\Delta K_{IC}(\varphi_M)}{\cos^3\left(\frac{\varphi_M}{2}\right) - \frac{V}{1-V} \cdot \frac{3}{2} \sin \varphi_M \cos\left(\frac{\varphi_M}{2}\right)} \quad (4-11)$$

wird der relevante Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_I^{C,TSSR}$  mit

$$\Delta K_I^{C,TSSR} = \text{MIN}\{\Delta K_I^C(\varphi = \varphi_0); \Delta K_I^C(\varphi = \varphi_M)\} \quad (4-12)$$

definiert.

Über die Bestimmung dieses Faktors ist es somit möglich, eine Aussage über das zu erwartende, instabile Risswachstum zu treffen.

Es gilt für:

$$\Delta K_I^{\text{th},TSSR} \leq \Delta K_I < \Delta K_I^{C,TSSR} \quad \Rightarrow \text{stabiles Risswachstum}$$

$$\Delta K_I \geq \Delta K_I^{C,TSSR} \quad \Rightarrow \text{instabiles Risswachstum.}$$

#### 4.4 Bruchmechanische Gradierung unter 3-dimensionalem Gesichtspunkt

Das vorgestellte TSSR-Konzept für eine Rissausbreitungsbestimmung in bruchmechanisch gradierten Strukturen zeigt sehr gute Übereinstimmungen mit experimentellen Untersuchungen auf [Sch14, SRK16]. Bei den bisherigen Anwendungen wurde der Einfluss einer räumlichen Rissbeanspruchung noch nicht berücksichtigt. Das heißt, der  $K_{III}$ -Faktor ging nicht in die Berechnung ein. Durch die konsequente Weiterentwicklung des TSSR-Konzeptes auf dreidimensionale Risse ist ein neues 3D-Konzept für bruchmechanisch gradierte Materialien und Strukturen entstanden. Als Basis dieses neuen Konzeptes dient das  $\sigma'_I$ -Kriterium (siehe Kapitel 3.4.2, [Sch01]). Auf der Grundlage dieses Kriteriums wird die benötigte Hauptnormalspannungsfunktion für die Rissfrontumgebung bestimmt und mit der lokal vorliegenden Materialfunktion verglichen. Die erste Berührfront dieser beiden Funktionen liefert dann eine Aussage über den zu erwartenden Rissabknickwinkel (vgl. Abbildung 4-11). Dieses Konzept dient dementsprechend der Rissausbreitungsvorhersage für Risse in dem Materialgradierungsbereich. Das bedeutet, dieses Konzept kommt dann zum Tragen, sobald die Rissfront des Risses von einem homogenen Materialeigenschaftsbereich M1 in den Materialgradierungsübergang zu Materialeigenschaftsbereich M2 hineinwächst (vgl. Abbildung 4-12). Um die benötigte Berührfront der beiden Funktionen berechnen zu können, wird zunächst die Beanspruchung an der Rissfront über Gleichung (3-13) zu einer zyklischen Beanspruchungsfunktion umgestellt.

$$\Delta\sigma_1'\sqrt{2\pi\cdot r} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left\{\Delta K_{\text{I}}\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\Delta K_{\text{II}}\sin(\varphi) + \sqrt{\left[\Delta K_{\text{I}}\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\Delta K_{\text{II}}\sin(\varphi)\right]^2 + 4\Delta K_{\text{III}}^2}\right\} \quad (4-13)$$

Durch das Gleichsetzen der Beanspruchungsfunktion mit der lokal anliegenden Materialfunktion, in diesem Fall für den Schwellenwert  $\Delta K_{\text{I,th}}(\varphi)$ , kann die erste Berührfront dieser beiden Funktionen bestimmt werden:

$$\Delta\sigma_1'\sqrt{2\pi\cdot r} = \Delta K_{\text{I,th}}(\varphi) \quad (4-14).$$

Über die Abwicklung der Beanspruchungsfunktionen bezogen auf die Polarkoordinaten, wie sie in Abbildung 4-11 dargestellt sind, kann der voraussichtliche Rissabknickwinkel an der Materialgradierung abgelesen werden. Die beiden Beanspruchungsfunktionen  $f_1(\Delta K_{\text{I}}^{\text{th,3D}}(\varphi=\varphi_{\text{M}}))$  und  $f_2(\Delta K_{\text{I}}^{\text{th,3D}}(\varphi=\varphi_0))$  sind jeweils in Abhängigkeit der vorliegenden Schwellenwerte  $\Delta K_{\text{I,th}}$  für die beiden Materialeigenschaftsbereiche M1 und M2 (vgl. Abbildung 4-12) und den möglichen Abknickwinkeln  $\varphi_{\text{M}}$  und  $\varphi_0$  ermittelt worden. Der Abknickwinkel  $\varphi_{\text{M}}$  ist über den eingebrachten Materialgradierungswinkel festgelegt, während der Winkel  $\varphi_0$  über die Berechnung mit dem  $\sigma_1'$ -Kriterium definiert wird. In dem unter Abbildung 4-11 aufgezeigten Beispiel befindet sich die erste Berührfront der Beanspruchungsfunktionen mit der Materialfunktion unter einem Winkel von 30°. Dieser Winkel entspricht dem Materialgradierungswinkel  $\varphi_{\text{M}}$  und stellt somit den zu erwartenden Abknickwinkel an der Rissfront dar.

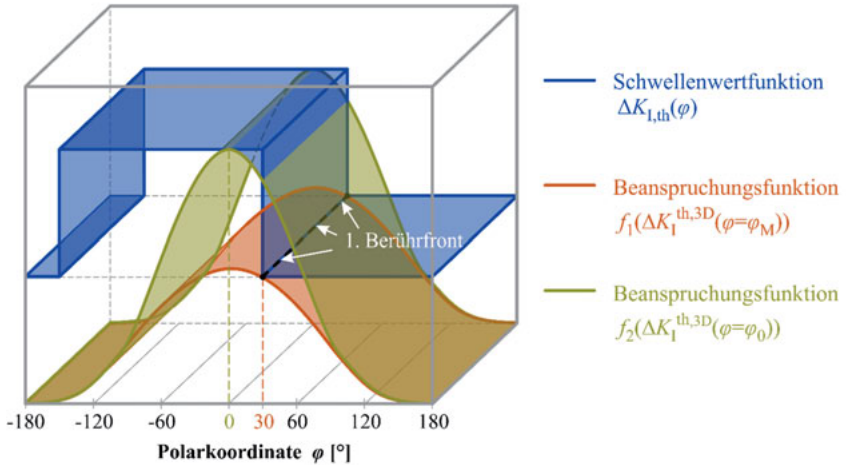


Abbildung 4-11: Schematische Darstellung der Berührfront aufgetragen über die Polarkoordinate

Über die mathematischen Zusammenhänge der Mixed-Mode-Verhältnisse:

$$A = \frac{\Delta K_{II}}{\Delta K_I + \Delta K_{II} + \Delta K_{III}} \quad \text{und} \quad B = \frac{\Delta K_{III}}{\Delta K_I + \Delta K_{II} + \Delta K_{III}} \quad (4-15)$$

und den vorliegenden Schwellenwerten  $\Delta K_{I,th}$  sowie den möglichen Rissabknickwinkeln  $\varphi_0$  und  $\varphi_M$  kann diese erste Berührung der Material- mit der Beanspruchungsfunktionen berechnet werden. Dafür werden die zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_I^{th,3D}(\varphi_0)$  und  $\Delta K_I^{th,3D}(\varphi_M)$  nach:

$$\begin{aligned} \Delta K_I^{th,3D}(\varphi_0) = \Delta K_{I,th}(\varphi_0) & \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \left\{ \cos^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_0) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\left( \cos^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_0) \right)^2 + 4 \left( \frac{B}{1-B-A} \right)^2} \right\} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4-16)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta K_I^{th,3D}(\varphi_M) = \Delta K_{I,th}(\varphi_M) & \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi_M}{2}\right) \left\{ \cos^2\left(\frac{\varphi_M}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_M) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\left( \cos^2\left(\frac{\varphi_M}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_M) \right)^2 + 4 \left( \frac{B}{1-B-A} \right)^2} \right\} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4-17)$$

bestimmt.

Anhand dieser beiden Berechnungen lässt sich der relevante zyklische Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_{I,th}^{3D}$  über

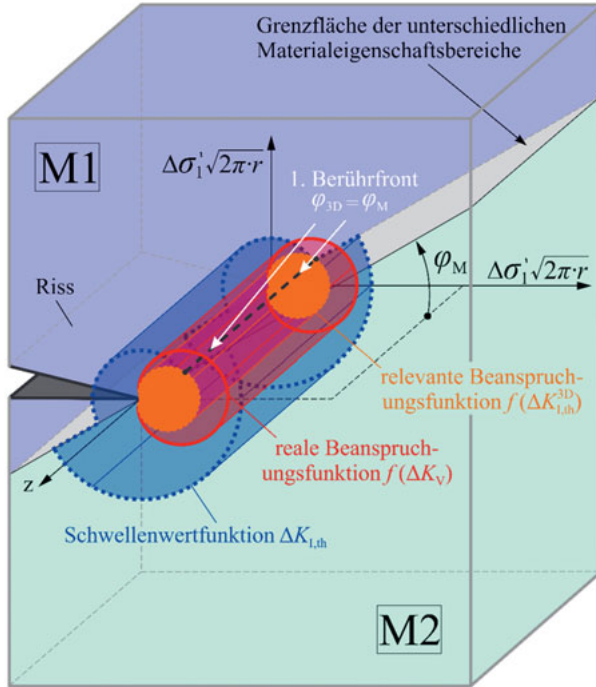
$$\Delta K_{I,th}^{3D} = \text{MIN} \left\{ \Delta K_I^{th,3D}(\varphi = \varphi_0); \Delta K_I^{th,3D}(\varphi = \varphi_M) \right\} \quad (4-18)$$

definieren.

Für die Bestimmung des Rissabknickwinkels gilt:

$$\Delta K_{I,th}^{3D} = \Delta K_I^{th,3D}(\varphi = \varphi_0) \quad \text{Abknickwinkel} = \varphi_0 \quad (4-19),$$

$$\Delta K_{I,th}^{3D} = \Delta K_I^{th,3D}(\varphi = \varphi_M) \quad \text{Abknickwinkel} = \varphi_M \quad (4-20).$$



**Abbildung 4-12:** Schematische Darstellung des neuen 3D-Konzeptes für eine Aussage über den Rissausbreitungswinkel in einer bruchmechanisch gradierten Struktur, bei konstanten Rissfrontfunktionen über die Tiefe  $z$

Durch den relevanten zyklischen Spannungsintensitätsfaktor wird somit die relevante Beanspruchungsfunktion  $f(\Delta K_{I,th}^{3D})$ , wie sie in Abbildung 4-12 dargestellt ist, abgebildet. Im nächsten Schritt wird überprüft, ob der Riss bei Erreichen der Materialgradierung und unter dem vorhergesagten Rissabknickwinkel auch wachstumsfähig ist. Für diesen Zweck, wird der relevante zyklische Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_{I,th}^{3D}$  mit der real vorliegenden Beanspruchung  $\Delta K_V$ , verglichen.

Es gilt:

$$\Delta K_V \geq \Delta K_{I,th}^{3D} \quad \Rightarrow \text{Riss ist ausbreitungsfähig}$$

$$\Delta K_V < \Delta K_{I,th}^{3D} \quad \Rightarrow \text{Riss ist nicht ausbreitungsfähig}$$

Zusätzlich zu der Berechnung in welche Richtung der Riss sich ausbreiten wird und ob der Riss genügend Beanspruchung erfährt, um überhaupt zu wachsen, muss im nächsten Schritt die Stabilität des Risswachstums ermittelt werden. Eine stabile Rissausbreitung findet statt, wenn sich die reale Beanspruchungsfunktion  $f(\Delta K_V)$  wie in Abbildung 4-13 zwischen den

relevanten Beanspruchungsfunktionen  $f(\Delta K_{I,th}^{3D})$  und  $f(\Delta K_{IC}^{3D})$  befinden. Aus diesem Grund wird ein weiterer relevanter zyklischer Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_{IC}^{3D}$  benötigt. Dieser lässt sich durch die möglichen Rissabknickwinkel und den vorliegenden Risszähigkeiten  $\Delta K_{IC}$  über die zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_I^{C,3D}(\varphi)$  mit:

$$\Delta K_I^{C,3D}(\varphi_0) = \Delta K_{IC}(\varphi_0) \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \left\{ \cos^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_0) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\left( \cos^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_0) \right)^2 + 4 \left( \frac{B}{1-B-A} \right)^2} \right\} \right]^{-1} \quad (4-21)$$

und

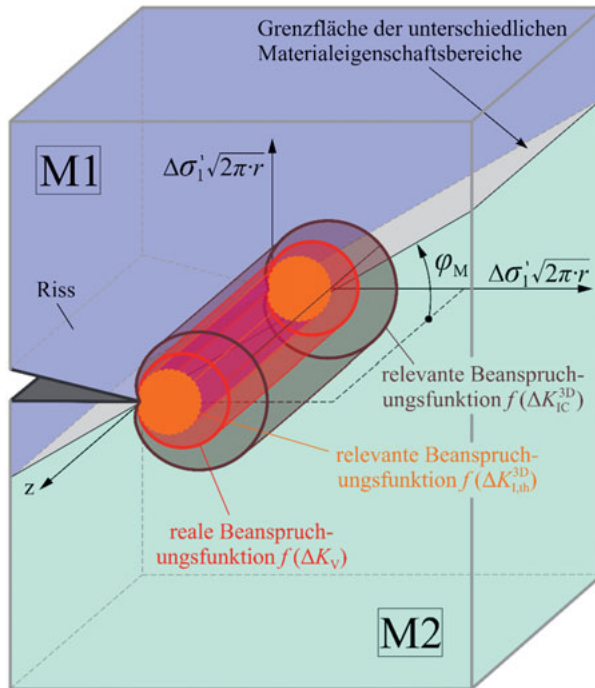
$$\Delta K_I^{C,3D}(\varphi_M) = \Delta K_{IC}(\varphi_M) \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi_M}{2}\right) \left\{ \cos^2\left(\frac{\varphi_M}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_M) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\left( \cos^2\left(\frac{\varphi_M}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_M) \right)^2 + 4 \left( \frac{B}{1-B-A} \right)^2} \right\} \right]^{-1} \quad (4-22)$$

berechnen.

Der relevante zyklische Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_{IC}^{3D}$  und die damit einhergehende relevante Beanspruchungsfunktion  $f(\Delta K_{IC}^{3D})$  wird über:

$$\Delta K_{IC}^{3D} = \text{MIN} \{ \Delta K_I^{C,3D}(\varphi = \varphi_0); \Delta K_I^{C,3D}(\varphi = \varphi_M) \} \quad (4-23)$$

definiert.



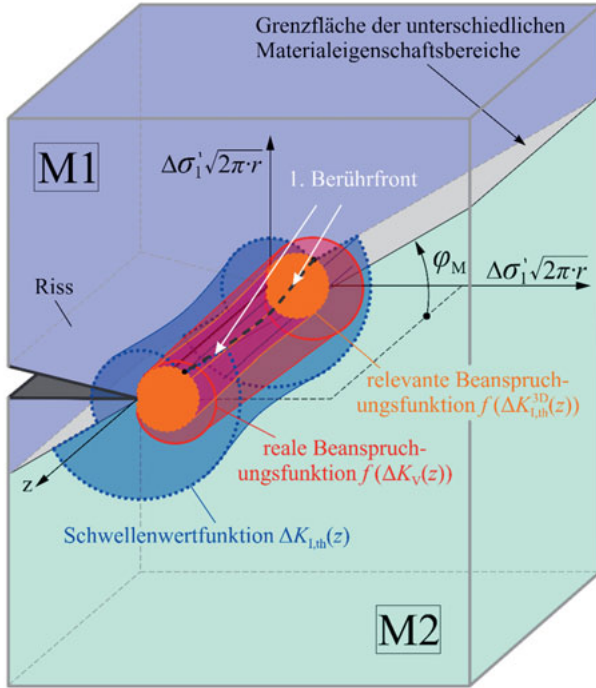
**Abbildung 4-13:** Beanspruchungsfunktionen für eine Aussage über stabiles und instabiles Risswachstum

Wird der so bestimmte relevante zyklische Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_{IC}^{3D}$  mit der real vorliegenden Spannungsintensität  $\Delta K_v$  verglichen, kann eine Aussage über das zu erwartende instabile Risswachstumsverhalten aufgezeigt werden.

Es gilt für:

$$\Delta K_{I,th}^{3D} \leq \Delta K_v \leq \Delta K_{IC}^{3D} \quad \Rightarrow \text{stabiles Risswachstum}$$

$$\Delta K_I > \Delta K_{IC}^{3D} \quad \Rightarrow \text{instabiles Risswachstum.}$$



**Abbildung 4-14:** Schematische Darstellung des neuen 3D-Konzeptes für eine Aussage über den Rissausbreitungswinkel in einer bruchmechanisch gradierten Struktur, bei unregelmäßigen Rissfrontfunktionen über die Tiefe  $z$

Diese Zusammenhänge für das neue 3D-Konzept sind allgemeingültig, unabhängig von der Materialeigenschaftskombination oder der Lage der Materialgradierung. Bei der Abbildung realer Rissausbreitungssituationen können zusätzlich Änderungen der Materialeigenschaften über die Rissfront auftreten. Auch lokal abweichende Beanspruchungen entlang der Rissfront sind mögliche Szenarien, die bei der Berechnung der Rissausbreitung mit einbezogen werden müssen. Mögliche Beanspruchungsfunktionen, welche über  $z$ -Koordinate variieren, sind in Abbildung 4-14 angedeutet. Diese weitere Einflussgröße entlang der Rissfront kann über die entsprechende Richtungskordinate mitberücksichtigt werden. In Bezug auf Abbildung 4-14 gilt exemplarisch für die Ermittlung der relevanten Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit des Schwellenwertes  $\Delta K_{I,th}(\varphi(z))$ :

$$\Delta K_{I,th}^{3D}(\varphi_0(z)) = \Delta K_{I,th}(\varphi_0(z)) \left[ \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\varphi_0(z)}{2}\right) \left\{ \cos^2\left(\frac{\varphi_0(z)}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_0(z)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\left( \cos^2\left(\frac{\varphi_0(z)}{2}\right) - \frac{3}{2} \left( \frac{A}{1-B-A} \right) \sin(\varphi_0(z)) \right)^2 + 4 \left( \frac{B}{1-B-A} \right)^2} \right\} \right]^{-1} \quad (4-24)$$

$$\Delta K_I^{\text{th},3\text{D}}(\varphi_M(z)) = \Delta K_{I,\text{th}}(\varphi_M(z)) \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi_M(z)}{2}\right) \left\{ \cos^2\left(\frac{\varphi_M(z)}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{A}{1-B-A}\right) \sin(\varphi_M(z)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\left( \cos^2\left(\frac{\varphi_M(z)}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{A}{1-B-A}\right) \sin(\varphi_M(z)) \right)^2 + 4 \left(\frac{B}{1-B-A}\right)^2} \right\} \right]^{-1} \quad (4-25)$$

Der relevante zyklische Spannungsintensitätsfaktor wird dann über:

$$\Delta K_{I,\text{th}}^{3\text{D}}(z) = \text{MIN} \left\{ \Delta K_I^{\text{th},3\text{D}}(\varphi = \varphi_0(z)); \Delta K_I^{\text{th},3\text{D}}(\varphi = \varphi_M(z)) \right\} \quad (4-26)$$

definiert.

Über die Rissfront verteilt, ist somit kein einheitliches Risswachstum in Richtung  $\varphi_0$  beziehungsweise  $\varphi_M$  zwingend gegeben. Aufgrund der Risslage, der lokalen Beanspruchungen sowie der lokalen Materialkennwerte ist es möglich, dass sich die Rissfront nur partiell von der Materialgradierung beeinflussen lässt. Einzelne Rissfrontabschnitte können dementsprechend eine Rissausbreitung in Abhängigkeit des Gradierungswinkels  $\varphi_M$  erfahren, während in anderen Abschnitten Risserweiterungen in Abhängigkeit von  $\varphi_0$  möglich sind. Zusätzlich kann sich auch das instabile Risswachstumsverhalten über die Rissfront verändern. Über die Bestimmung des relevanten zyklischen Spannungsintensitätsfaktors in Abhängigkeit der z-Koordinate, findet diese mögliche Beeinflussung über die Rissfront mit:

$$\Delta K_I^{\text{C},3\text{D}}(\varphi_0(z)) = \Delta K_{I,\text{C}}(\varphi_0(z)) \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0(z)}{2}\right) \left\{ \cos^2\left(\frac{\varphi_0(z)}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{A}{1-B-A}\right) \sin(\varphi_0(z)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\left( \cos^2\left(\frac{\varphi_0(z)}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{A}{1-B-A}\right) \sin(\varphi_0(z)) \right)^2 + 4 \left(\frac{B}{1-B-A}\right)^2} \right\} \right]^{-1} \quad (4-27)$$

und

$$\Delta K_I^{\text{C},3\text{D}}(\varphi_M(z)) = \Delta K_{I,\text{C}}(\varphi_M(z)) \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi_M(z)}{2}\right) \left\{ \cos^2\left(\frac{\varphi_M(z)}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{A}{1-B-A}\right) \sin(\varphi_M(z)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\left( \cos^2\left(\frac{\varphi_M(z)}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{A}{1-B-A}\right) \sin(\varphi_M(z)) \right)^2 + 4 \left(\frac{B}{1-B-A}\right)^2} \right\} \right]^{-1} \quad (4-28)$$

Berücksichtigung.

Auch hier gilt wieder für den relevanten zyklischen Spannungsintensitätsfaktor:

$$\Delta K_{IC}^{3D}(z) = \text{MIN}\{\Delta K_I^{C,3D}(\varphi = \varphi_0(z)); \Delta K_I^{C,3D}(\varphi = \varphi_M(z))\} \quad (4-29).$$

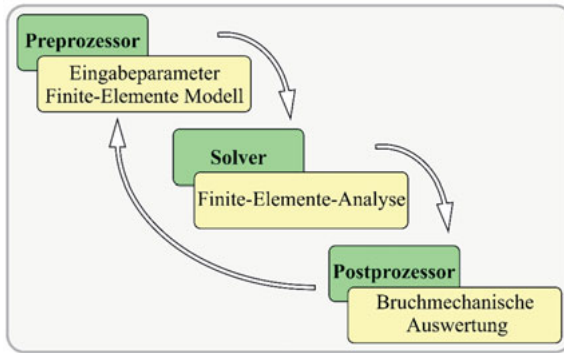
Eine Aussage über das Risswachstumsverhalten, insbesondere für eine dreidimensionale Rissausbreitung, stellt somit eine sehr komplexe Aufgabe dar. Aus diesem Grund ist die Verwendung eines geeigneten numerischen Riss simulationsprogramms unumgänglich. Daher wurde für die Nutzung dieses neuen 3D-Konzeptes das dreidimensionale Riss simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> ausgewählt. Durch Implementieren dieses neuen Konzeptes in dieses Simulationsprogramm soll eine Vorhersage des Rissausbreitungsverhaltens für beliebige dreidimensionale Strukturen mit bruchmechanischen Gradienten realisiert werden.

## 5 NUMERISCHE SIMULATION DES 3D-RISSWACHSTUMS

Bauteile, die wechselnden Belastungen ausgesetzt sind, können nach gewisser Einsatzzeit Ermüdungserscheinungen aufzeigen. Diese äußern sich zumeist durch kleine Risse bis hin zu einem vollständigen Versagen des Bauteils. Für eine realitätsnahe Abschätzung dieser Ermüdungserscheinungen wird in der Forschung mehr und mehr auf Simulationsprogramme gesetzt, welche eine Rissausbreitung numerisch ermitteln können. Solche Simulationsprogramme basieren zum Beispiel auf der Finiten-Elemente-Methode, mit der komplexe Geometrien und Strukturen unter einer zyklischen Belastung berechnet werden können. Auf diesem Gebiet der Rissimulationen sind bereits einige etablierte Programme entwickelt worden, mit denen eine zuverlässige Risswachstumsvorhersage in homogenen, isotropen Strukturen möglich ist. Für die Berechnung von Rissen in funktional gradierten Bauteilen und Strukturen sind bislang kaum Risswachstumsprogramme verfügbar. Für zweidimensionale Rissausbreitungsvorhersagen in bruchmechanisch gradierten Materialien wurden bereits Simulationsprogramme aufgestellt beziehungsweise erweitert. Anders sieht es aus bei dreidimensionalen Risswachstumsprogrammen. Da eine Vielzahl von realen Rissproblemen unter räumlichen Beanspruchungen auftreten, liegt ein Schwerpunkt dieser Arbeit in der Erweiterung eines dreidimensionalen Riss simulationsprogramms. Neben einer Aussage über das Risswachstum in homogenen, isotropen Strukturen soll durch die Erweiterung die Berücksichtigung der bruchmechanischen Materialgradierung bei der Rissvorhersage mit einbezogen werden. Als Basis dient das an der Fachgruppe Angewandte Mechanik entwickelte numerische Simulationsprogramm ADAPCRACK3D. Durch die Implementierung des neuen 3D-Konzeptes aus Kapitel 4.4 und weiteren Entwicklungen in der Software (vgl. Kapitel 5.3.1 bis 5.3.4) ist ein modifiziertes Riss simulationsprogramm entstanden. Mit diesem Programm ist eine Aussage über das Risswachstum in komplexen Geometrien sowohl in homogenen, isotropen als auch funktional gradierten Strukturen möglich. Da der Fokus dieser Arbeit nicht auf der Finite-Elemente-Methode als solcher liegt, werden die Grundlagen an dieser Stelle nicht weiter erläutert, sondern wird auf die entsprechende Literatur verwiesen [Kun08; Kle12; Bra07; Ste12]. Des Weiteren werden im Folgenden einige etablierte Riss simulationsprogramme vorgestellt, bevor im Anschluss daran die Entwicklung des Simulationsprogramms ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup> aufgezeigt wird. Abgerundet wird dieses Kapitel mit ersten Ergebnissen von Risswachstumssimulationen in Strukturen mit und ohne bruchmechanische Materialgradierung.

### 5.1 Risswachstumsprogramme für homogene Strukturen

Da eine Vielzahl von Simulationsprogrammen für Risswachstumsberechnungen bereits erfolgreich am Markt angesiedelt sind, kann an dieser Stelle nur eine kleine Auswahl von etablierten numerischen Simulationsprogrammen aufgezeigt werden. Der grundsätzliche Ablauf bei den Riss simulationsprogrammen unterscheidet sich kaum.



**Abbildung 5-1:** Allgemeiner Prozessablauf eines Risswachstumssimulationsprogramms nach dem Konzept einer Modularbauweise

Die Simulationssoftware wird in den meisten Programmen in Modularbauweise aufgebaut. Beginnend mit dem *Preprocessor* werden alle benötigten Eingangsparameter und Finite-Elemente-Modelle eingelesen und/oder erstellt. Zu den Eingangsparametern zählen unter anderem die Randbedingungen und Materialkennwerte. Diese Informationen werden an den *Solver* für die Finite-Elemente-Analyse weitergeleitet. Das mathematische Gleichungssystem wird individuell für das gegebene Finite-Elemente-Modell aufgestellt und gelöst. Abschließend findet die bruchmechanische Auswertung im *Postprocessor* statt. Hier wird abschließend eine Aussage über das zu erwartende Risswachstum getroffen und die daraus folgende Risserweiterung generiert. Die ermittelten Rissfortschrittsdaten werden an den *Preprocessor* weitergeleitet und somit eine neue Rissfront erzeugt. Diese Vorgehensweise wiederholt sich so lange, bis ein Abbruchkriterium erreicht wird. Unterschiede zwischen den einzelnen Simulationsprogrammen gibt es demnach hauptsächlich in der Auswertung des Risswachstums und der Erzeugung beziehungsweise der Berechnung der Finite-Elemente-Modelle.

### 5.1.1 FRANC3D/NG

Das Riss simulationsprogramm *Fracture Analysis Code 3D / Next Generation*, auch bekannt als *FRANC3D/NG*, wurde entwickelt um das Risswachstum in komplexen dreidimensionalen Strukturen zu berechnen. Dieses Programm ist der Nachfolger des bereits etablierten *Originals FRANC3D*, welches an der Cornell Universität in den 1980er Jahren entstand. Bei dieser Neuauflage wurden alle Erfahrungswerte und Entwicklungen der letzten 30 Jahre zusammengeführt, sodass zwischen unterschiedlichen Ansätzen der Finite-Elemente-Modellierung und Auswertungsanalysen differenziert werden kann. Unter der Verwendung von FE-Solvern wie *ABAQUS* und *ANSYS*<sup>6</sup>, können die Finite-Elemente-Modelle erstellt und analysiert werden. Durch die Submodelltechnik und ein mitbewegtes Spezialnetz in unmittelbarer Rissfront kann eine dreidimensionale Rissausbreitung in komplexen räumlichen Strukturen realisiert werden.

<sup>6</sup> Informationen zu den hier aufgeführten FE-Solvern sind in [DSS17] zu finden.

Die bruchmechanische Auswertung erfolgt über Spannungsintensitätsfaktoren, welche aus den resultierenden Verschiebungen aus der Finite-Elemente-Analyse berechnet werden [WCI10].

### 5.1.2 PROCRAK

Das Simulationsprogramm PROCRAK wurde an der Technischen Universität Bergakademie Freiberg entwickelt. Es basiert auf einer modularen Aufbauweise in Zusammenarbeit mit dem Finite-Elemente-Solver ABAQUS. Die einzelnen Programmmodule steuern das Pre- und Postprocessing, während die FE-Analyse über das Programm ABAQUS gelöst wird. Über Schnittstellen zwischen den einzelnen Modulen können die ermittelten Daten für den nächsten Berechnungsschritt zur Verfügung gestellt werden. Neben einer Risswachstumsvorhersage in dreidimensionalen Strukturen ist auch eine Aussage über die zu erwartende Lebensdauer des rissbehafteten Bauteils möglich [RLS+12].

### 5.1.3 ADAPCRACK3D

Das an der Universität Paderborn in der Fachgruppe Angewandte Mechanik entwickelte Riss-simulationsprogramm ADAPCRACK3D setzt sich ebenfalls aus drei primären Funktionsmodulen zusammen, die über Schnittstellen miteinander verkoppelt sind. Auf Basis der Submodell-technik kann mit diesem Programm eine Rissausbreitung in beliebigen dreidimensionalen Strukturen berechnet und eine Aussage über die zu erwartende Rissausbreitung und der damit einhergehenden Lebensdauer getroffen werden. Als *Preprocessor* fungiert das Modul NETADAPT3D. Hier werden die bereits erstellten Finite-Elemente-Modelle der globalen Struktur ohne Riss und das Rissmodell eingelesen und mittels automatischer Netzadaption verkoppelt. Als Output wird ein rissbehaftetes globales Finite-Elemente-Modell und ein Submodell zur Abbildung der Rissfront an den *Solver* ABAQUS übergeben und gelöst. Die bruchmechanische Auswertung erfolgt abschließend in dem Modul NETCRACK3D, dem sogenannten *Post-processor*. Über die berechneten Kräfte und Verschiebungen an der Rissfront werden mittels der MVCCI-Methode (siehe Kapitel 2.3) zunächst die Energiefreisetzungsraten und daraus die benötigten Spannungsintensitätsfaktoren berechnet. Das in diesem Programmteil implementierte bruchmechanische

$\sigma_1$ -Konzept liefert die relevanten Ergebnisse für eine Rissausbreitungsvorhersage. Für die abschließende Berechnung der Lastwechselzahlen beziehungsweise der Restlebensdauer stehen mehrere Methoden (zum Beispiel Cycle-by-Cycle-Methode mit konstanter Amplitude) zur Verfügung. Abhängig der vorliegenden Belastung kann zwischen variablen und konstanten Belastungsamplituden gewählt werden. Aber auch für Lebensdauerbestimmung anhand der Rissgeschwindigkeitskurve kann zwischen verschiedenen Ansätzen wie zum Beispiel der ERDOGAN/RATWANI- oder der FORMAN/METTU-Gleichung gewählt werden. Die hieraus resultierenden neuen Rissfrontkoordinaten werden an das Modul NETADAPT3D übergeben, wodurch die Risserweiterung voll automatisch in das globale rissbehaftete Modell integriert werden kann und die Simulation fortgesetzt wird. Erst bei Erreichen eines gesetzten Abbruchkriteriums wird diese Programmschleife unterbrochen [FSR00; SFR00; RFS+02; SFR03].

## 5.2 Simulationssoftware für funktional gradierte Strukturen

Für eine Rissausbreitung in funktional gradierten Strukturen stehen bereits zweidimensionale Rissausbreitungsprogramme zur Verfügung. Mit diesen Programmen ist es möglich ebene Rissprobleme in homogenen sowie bruchmechanisch gradierten Strukturen realitätsnah zu berechnen. Insbesondere die Berücksichtigung der lokal differierenden bruchmechanischen Kenngrößen stellt eine hohe Anforderung an die Simulationssoftware.

### 5.2.1 FRANC/FAM

Das zweidimensionale Riss simulationsprogramm FRANC/FAM wurde ursprünglich unter dem Namen FRANC an der Cornell University of New York entwickelt und von der Fachgruppe Angewandte Mechanik weiter modifiziert. Unter Anwendung dieses Programms ist es möglich, in ebenen rissbehafteten Strukturen eine Berechnung der Rissausbreitung und der Gesamtlebensdauer durchzuführen. Hierbei wird die Initiierungs- und Rissfortschrittsphase mitberücksichtigt, wodurch die berechneten Lastwechselzahlen mit denen aus experimentellen Untersuchungen gut übereinstimmen [Sch01]. Anders als bei den zuvor aufgezeigten Simulationsprogrammen wird dieses Programm in sieben einzelne Funktionsbereiche unterteilt, welche ebenfalls über Schnittstellen miteinander verkoppelt sind. Ein Vorteil bei diesem Programm ist, dass es ohne einen zusätzlichen *Solver* die Finite-Elemente-Analyse durchführen kann. Des Weiteren wurde von [Sch14] eine Erweiterung in das Programm implementiert, sodass auch eine Rissausbreitung unter Berücksichtigung einer vorliegenden bruchmechanischen Materialgradierung durchgeführt werden kann [Sch14]. Unter Verwendung des in Kapitel 4.3.2 aufgezeigten TSSR-Konzeptes ist das Programm in der Lage, die vorliegende Beanspruchungssituation an der Risspitze und eine bruchmechanische Materialgradierung bei der Rissvorhersage zu berücksichtigen.

### 5.2.2 MCRACK2D

MCRACK2D [SSF+10] ist ein Finite-Elemente Code für eine Risswachstumssimulation in zweidimensionalen Strukturen. Entwickelt wurde dieses Programm in Zusammenarbeit mit dem Sonderforschungsbereich (SFB) Transregio 30 [HBH13]. Ein Ziel war es, ein Simulationsprogramm aufzusetzen, mit dem homogene und inhomogene (zum Beispiel funktional gradierte) Strukturen hinsichtlich des Rissausbreitungsverhaltens untersucht werden können. Für die Finite-Elemente-Analyse wurde die deal.II Bibliothek basierend auf dem C++-Code ausgewählt. Für die Vernetzungsadaption wurde eine Schnittstelle mit dem Netzgenerator Cubit geschaffen. Unter Verwendung des Konzeptes der modifizierten Energiefreisetzungsrates<sup>7</sup> (MEFR) können Rissausbreitungspfade in homogenen und bruchmechanisch gradierten Strukturen berechnet werden [SSF+10; Ste15; Ste17].

<sup>7</sup> Nähere Informationen über dieses Konzept sind aus [SSF+10] zu entnehmen.

### 5.3 Entwicklung von ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup>

Die Hauptaufgabe einer Simulationssoftware ist in erster Linie, die für den Anwender benötigten Berechnungen durchzuführen. Präzise und realitätsnahe Ergebnisse sind das oberste Ziel, welche durch die Nutzung eines Computerprogramms geliefert werden sollen. Eine Software muss darüber hinaus aber auch kompatibel und erweiterbar sein und gleichzeitig eine hohe Robustheit aufweisen. Ein meist unterschätzter Faktor ist der Anwender der Software. Schwer verständliche Anweisungen bei der Anwendung und häufige Programmabstürze überschreiten schnell die Frustrationstoleranz der Nutzer. Demnach werden neben der eigentlichen Funktion viele zusätzliche Anforderungen an ein gutes Computerprogramm gestellt.

Das Riss simulationsprogramm ADAPCRACK3D liefert bereits sehr gute Simulationsergebnisse (siehe: [KR09; KSR05; RFS+05]), bietet jedoch noch Potenzial im Hinblick auf Robustheit und Anwenderfreundlichkeit. Im Zuge der Erweiterung des Programms auf Risswachstumsberechnungen in funktional gradierten Strukturen wurde demnach auch ein Schwerpunkt auf die Anwenderfreundlichkeit sowie die Robustheit des Programms gelegt, um diese zu optimieren. Das somit entstandene ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup> basiert auf dem etablierten Riss simulationsprogramm ADAPCRACK3D und enthält darüber hinaus noch ein paar zusätzliche Funktionen, mit denen unter anderem die Nutzung auf ein breites Spektrum an Rissausbreitungssimulationen in homogenen, isotropen sowie funktional gradierten Strukturen anwendbar ist. Die Grundstruktur des Basisprogramms ADAPCRACK3D bleibt bei der neuen Version erhalten. Lediglich in dem Softwarecode selbst wurden Erweiterungen und anwenderfreundliche Änderungen durchgeführt.

#### 5.3.1 Online-Benutzeroberfläche als Eingabewerkzeug

Losgelöst von der eigentlichen Hauptfunktion eines Softwareprogramms spielt die Handhabung eine wichtige Rolle bei der Nutzung. Dem Anwender sollten möglichst verständlich die benötigten Simulationsparameter zugänglich gemacht werden. Um eine benutzerfreundliche Eingabe zu ermöglichen, wurde deshalb ein zusätzliches Tool entwickelt. Über einen online Internetzugang wird eine Benutzeroberfläche bereitgestellt, die als Eingabewerkzeug für das Programm herangezogen werden kann. In Anlehnung an eine GUI (Graphical User Interface) wurde eine Eingabemaske entwickelt, die dem Anwender zur Unterstützung bei der Eingabe der Simulationsparameter für das Programm ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup> dienen soll. Aufgrund der breiten Auswahl der einzelnen Teilfunktionen und den damit verbundenen Eingabeparametern soll es auch dem ungeübten Anwender ermöglicht werden, dieses Simulationsprogramm einfacher zu bedienen. Diese Eingabemaske (vgl. Abbildung 5-2) dient somit als visuelle Schnittstelle zwischen dem Nutzer und dem Simulationsprogramm. Durch eine klare Strukturierung der einzelnen Eingabeparameter und einer eindeutigen Zuweisung der benötigten Informationen ist es das Ziel, die Hintergründe der Eingabeparameter verständlich zu übermitteln und mögliche Fehlerpotenziale bei der Eingabe der Simulationsbefehle zu verringern.

ADAPCRACK3D <sup>VERSION_KD15</sup>	
1. Version :	
2. Dateiname :	
3. Materialkennung :	
4. Rechnerkapazität :	
5. Rissfronten :	
6. Anzahl der Dimensionen :	
7. Bruchmechanische Auswertung :	
8. Lebensdauerberechnung :	
9. Rissfortschrittsinkrement :	
10. Rissfortschritt des Initialrisses :	
11. Ansatzfunktion :	
12. Energiefreisetzungsrate :	
13. Rissknoteneinfügung :	
14. Simulationsschritte :	
15. Lastspielzahl :	
16. Iterationstiefe :	
17. Subnetzgröße :	
18. Netzverbesserung :	
19. Initialrisslänge :	
20. Amplitude der aufgebrachten Kräfte :	

Abbildung 5-2: Eingabemaske für das Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup>

Schrittweise wird es dem Anwender ermöglicht, alle benötigten Eingabeschritte abzuhandeln und die entsprechenden Parameter auszuwählen. Abschließend wird der Eingabecode für die Rissfortschrittssimulation bereitgestellt. Exemplarisch ist in Abbildung 5-3 der Eingabeparameter für die Auswahl der Ansatzfunktion für die Finite-Elemente-Berechnung in ABAQUS aufgezeigt.

**11. Ansatzfunktion :**

☒ Quadratische Ansatzfunktion

☐ Lineare Ansatzfunktion

Beschreibung : Festlegung der Ansatzfunktion für die Finite-Elemente-Berechnung.  
Tendenziell ist die genauere quadratische Ansatzfunktion zu empfehlen.

**Abbildung 5-3:** Eingabehilfe für die Auswahl einer geeigneten Ansatzfunktion

Die für die Finite-Elemente-Berechnung zur Verfügung gestellten Ansatzfunktionen beziehen sich auf die Lösung der Gleichungssysteme des FE-Netzes [Kle12]. Bei der Nutzung des Simulationsprogramms ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> stehen die Möglichkeiten einer quadratischen oder einer linearen Ansatzfunktion zur Verfügung. Die Auswahl der Ansatzfunktion wird in einen verschlüsselten, für das Programm lesbaren Code umgewandelt und in die Ausgabezeile eingefügt (siehe Abbildung 5-4). Diese Ausgabezeile stellt zugleich den benötigten Eingabecode für den Start der Simulation dar. Die Verknüpfungen der aufgelisteten Befehle mit dem Simulationsprogramm sind in Anhang A2 anhand eines Pseudocodes beziehungsweise eines Flussdiagramms dargestellt.

netadapt3d test -d -cpus 8 -rv 20 -dim 3D -ml NIX -mk 10 -mb 1 -l 10 -q -ESZ -lz 1000000000 -st 50 -f | tee out.txt

**Abbildung 5-4:** Ausgabe der in der Eingabemaske gewählten Parameter, wobei das “-q-“ die gewählte Ansatzfunktion wiedergibt

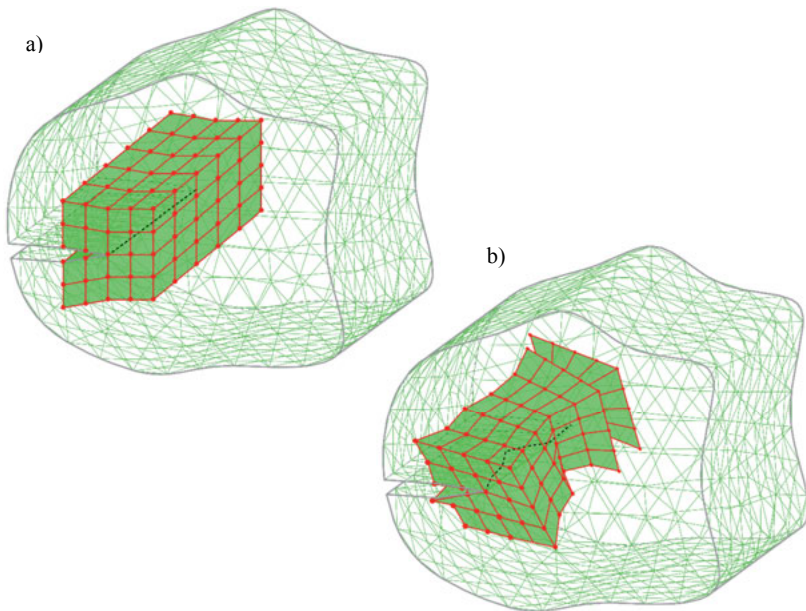
Beim Einlesen dieser Befehlszeile wird das Modul NETADAPT3D über einen bereitgestellten Netzwerk-Server aufgerufen. Insbesondere durch die Sicherung der Parameter bietet dieses Tool eine einfache Möglichkeit, Simulationsvorgänge jederzeit neu zu reproduzieren.

### 5.3.2 ADD-ON Funktion zur Programmstabilität

Um möglichst genaue Ergebnisse bei der bruchmechanischen Auswertung an der Rissfront zu erhalten, wird in der Finite-Elemente-Analyse über den FE-Solver ABAQUS die Submodelltechnik [Ful03] verwendet. Mit dieser Analysemethode können einzelne Teilbereiche eines Finite-Elemente-Modells aufgrund einer lokalen feineren Vernetzung genauer berechnet werden. Durch die Wahl der Vernetzungselemente des Submodells ist die Nutzung der MVCCI-Methode (siehe Kapitel 2.3) unabhängig von der Vernetzung der gesamten Geometrie stets gewährleistet. Zunächst wird eine grobe Vernetzung für das Finite-Elemente-Modell der gesamten Geometrie erstellt, ein sogenanntes globales Finite-Elemente-Netz. Diese globale Vernetzung wird durch eine Finite-Elemente-Analyse gelöst. Abschließend wird für das relevante Teilgebiet eine neue feinere Vernetzung erstellt, ein sogenanntes Submodell wird generiert. Dieses Submodell steht in keiner geometrischen Verbindung mit dem globalen Netz, es werden jedoch die benötigten Randbedingungen für die Lösung des Submodells aus den Er-

gebnissen der globalen Finite-Elemente-Analyse übertragen. Über sogenannte *driven nodes* werden die Positionen der Finite-Elemente-Knotenpunkte zwischen dem globalen FE-Netz und dem Submodell miteinander verknüpft [Ful03]. Diese Analysetechnik bietet vor allem Vorteile bei der Reduzierung der Rechenzeit von großen FE-Modellen und steigert darüber hinaus die Ergebnisgenauigkeit durch die lokal feinere Diskretisierung.

Grundsätzlich können jedoch bei der Nutzung einer Finite-Elemente-Methode und der damit einhergehenden Analyse leichte Ungenauigkeiten in den Ergebnissen nicht ausgeschlossen werden. Diese „Fehler“ in den Berechnungen sind nicht eindeutig vorhersehbar. Unter Umständen ist die Vernetzung in einigen Teilbereichen unregelmäßiger als gewünscht, aber auch die große Anzahl von Rechenoperationen kann zum Beispiel durch Rundungsfehler zu Ergebnisverfälschungen führen [GJ10]. Um diese unregelmäßigen beziehungsweise zufälligen Fehler zu kontrollieren, kann eine Ausgleichsfunktion [Fis74] Abhilfe schaffen.



**Abbildung 5-5:** Eingebettete Submodelle in globale Finite-Elemente-Netze zur Berechnung der Beanspruchung an den Rissfronten

- a) Submodell mit idealer Formgebung für eine Risswachstumssimulation
- b) Stark verzerrtes Submodell infolge einer ungleichmäßigen Rissfrontknotenpunktverteilung

In dem hier verwendeten Programm werden über die Submodelltechnik die relevanten Werte für die bruchmechanische Auswertung an der Rissfront bestimmt. Somit besteht ein direkter Zusammenhang für die Lage und Form des Submodells mit der Rissfront. In Abbildung 5-5 sind exemplarisch zwei globale Finite-Elemente-Netze mit entsprechenden Submodellen für die Berechnung der Rissfront in einer beliebigen dreidimensionalen Geometrie dargestellt.

Eine genaue und stabile Risswachstumssimulation ist gegeben, solange das Submodell nicht zu stark verzerrt ist (vgl. Abbildung 5-5 a)). Im Umkehrschluss bedeutet das, dass die Rissfrontknotenpunktverteilung einen entscheidenden Einfluss auf die Stabilität der Risswachstumssimulation hat. Schwankungen in den Koordinaten der Rissfrontknotenpunkte haben eine Verzerrung des Submodells (siehe Abbildung 5-5 b)) und somit gegebenenfalls Simulationsabbrüche zur Folge. Um die Rissausbreitungssimulationen stabiler zu gestalten, ist es daher wichtig, die relevante Rissfront „stufenlos“ zu gestalten.

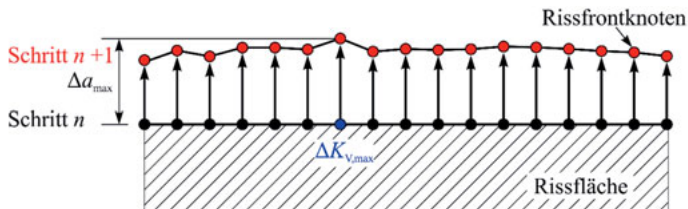
Aufgrund von numerischen Ungenauigkeiten bei der Finite-Elemente-Analyse kann es zu leichten Unstimmigkeiten in den Werten der Verschiebungen und Kräfte an den Rissfrontknotenpunkten kommen. Diese Abweichungen werden bei der Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren für die Rissfront über die Zusammenhänge aus Kapitel 2.3 mit übertragen.

Über den unmittelbaren Zusammenhang der zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_v$  zu der Rissgeschwindigkeit  $da/dN$  (siehe Kapitel 2.6) und dem damit verbundenen Rissfortschrittsinkrement  $\Delta a_k$ :

$$\Delta a_k = \frac{da}{dN} \cdot N \quad (5-1),$$

mit  $k$  = Nummer der Rissfrontknoten

können sich die Abweichungen in den Berechnungen auch auf die Rissausbreitung, wie in Abbildung 5-6 dargestellt, auswirken.



**Abbildung 5-6:** Verteilung der Rissfortschrittsinkremente entlang der Rissfront

Durch Diskrepanzen in den Werten der Spannungsintensitätsfaktoren und den daraus resultierenden Rissfortschrittsinkrementen bildet sich die Rissfront, wie in Abbildung 5-6 zu erkennen, unregelmäßig aus. Das liegt daran, dass bei der Risserweiterung die Werte der Spannungsintensitätsfaktoren genutzt werden, um eine größenbezogene Rissausbreitung durchzuführen. Durch die Angabe des Anwenders wird das max. Risswachstumsinkrement festgesetzt. Der Rissfrontknoten mit dem größten  $\Delta K_v$ -Wert erhält demnach die größte Rissausbreitung. Alle anderen Rissfrontknotenpunkte wachsen in prozentualer Abhängigkeit von dem maximalen Wert  $\Delta K_v$ , aber mindestens um das 0,3-fache des vorgegebenen Risswachstumsinkrements. Somit ist eine kontinuierliche Risserweiterung gewährleistet.

In dem hier dargestellten Beispiel erfahren alle Rissfrontknoten eine Beanspruchung, sodass gilt:

$$\Delta K_{1,th} \leq \Delta K_v \leq \Delta K_{1c} \quad (5-2).$$

Im nächsten Simulationsschritt wird durch die Risserweiterung eine neue Rissfront gebildet. Wenn bei der Risserweiterung die einzelnen Rissfrontknoten gegenüber den Nachbarrisfrontknoten jedoch deutlich variieren, wird ein stark verzerrtes Submodell gebildet, welches bei der FE-Analyse zu Problemen und damit zum Abbrechen des Simulationsvorganges führt. Damit die Ungenauigkeiten in den Berechnungen nicht signifikant ansteigen und die Auswirkungen auf die Berechnungen der neuen Rissfrontkoordinaten verringert werden, ist es sinnvoll, bereits beim ersten Auftreten von „Fehlern“ in den Ergebnissen, diese durch geeignete Maßnahmen zu reduzieren. Da die berechneten Werte grundsätzlich im Mittel der berechneten Lösungen liegen, kann durch die GAUSS'sche Fehlerquadratmethode oder auch Kleinste-Fehlerquadrate-Methode, die Abweichungen in den Messdatenreihen ausgeglichen werden [Har68]. Dieses Verfahren wurde in dem hier verwendeten Simulationsprogramm neu implementiert. Die Anwendung der Kleinsten-Fehlerquadrate-Methode wird über die Nutzung einer *QR-Zerlegung* mit Verwendung von Householder-Matrizen realisiert. Da, wie bereits erwähnt, die ersten Schwankungen in der bruchmechanischen Auswertung bei der Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren auftreten, bietet es sich an, an dieser Stelle eine Anpassung der Ergebnisse durchzuführen. Aus diesem Grund wurde eine Funktionserweiterung mit einer Ausgleichsberechnung in das Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup> implementiert. Unter Verwendung dieser Erweiterung kann eine Ausgleichsrechnung durchgeführt werden, bei der die Abstände der angepassten Werte zu den gemessenen Werten ein Minimum aufzeigen (vgl. Abbildung 5-7). Die Ausgleichsfunktion kann durch Polynome  $n$ -ter Ordnung bestimmt werden. Je höher die Ordnung der Ausgleichsfunktion, desto weniger stark werden die neu berechneten Werte angepasst. Der Ablauf für die Berechnung einer Ausgleichsfunktion zweiter Ordnung (quadratische Funktion) und die damit verknüpfte Implementierung in das Simulationsprogramm wird im Folgenden aufgezeigt. Diese Funktion ist eine Standardmethode, um überbestimmte lineare Gleichungssysteme zu lösen [Har68; Bös65].

Für die kleinste Fehlerquadratsumme  $q$  gilt allgemein eine lineare Ausgleichsfunktion:

$$q = q(a, b) = \sum_{i=1}^m (a \cdot x_i + b - y_i)^2 \quad (5-3).$$

Über die gegebene Anzahl der Messpunkte  $m$  werden die Parameter  $a$  und  $b$  so bestimmt, dass sich die Fehlerquadratsumme  $q$  minimiert. Bei numerischen Berechnungen bietet es sich an, diesen Ansatz über eine allgemeine Matrixform mit:

$$\|A \cdot x - b\|_2^2 \quad (5-4),$$

darzustellen.

Es gilt für den hier beschriebenen Anwendungsfall:

$$A \cdot x = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad b \in \mathbb{R}^m \quad (5-5).$$

Hierbei wird  $A$  als eine  $m \times n$ -Matrix aufgestellt. Da die Gleichungen in der Konstellation  $m > n$  im Allgemeinen keine Lösung für  $x$  bieten, wird mit dieser Methode das  $x$  gesucht, welches die Gleichung möglichst gut erfüllt [Har68; Bös65]. Bei einem quadratischen Ausgleichspolynom mit  $n = 3$  wird in den hier genutzten Anwendungsfällen für  $m$  die Anzahl der Rissfrontknoten definiert. Der Vektor  $b$  setzt sich aus den an der Rissfront vorliegenden Spannungsintensitätsfaktoren zusammen, welche in Abhängigkeit der Finite-Elemente-Analyse berechnet werden. Um die Gleichung in (5-5) lösen zu können, wird die *QR-Zerlegung* genutzt. Dieses Verfahren liefert unabhängig von der Größe der  $A$ -Matrix sehr robuste und zuverlässige Werte [DR08].

Für die *QR-Zerlegung* gilt die Transformation:

$$A = Q \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Q^T A = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} = R, \quad \tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (5-6),$$

mit  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Die  $Q$ -Matrix stellt eine orthogonale Matrix dar, was bedeutet, dass die Inverse der Matrix  $Q^{-1}$  der transponierten Matrix  $Q^T$  entspricht. Die  $R$ -Matrix bildet eine obere rechte Dreiecksmatrix. Unter der Voraussetzung, dass:

$$A^T \cdot A \cdot x = \underbrace{A^T \cdot b}_b \quad \text{und} \quad A^T \cdot A = (Q \cdot R)^T \cdot Q \cdot R \quad (5-7),$$

gilt:

$$A \cdot x = Q \cdot R \cdot x \approx b \quad \Rightarrow \quad Q^T \cdot b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{R} \cdot x = b_1 \quad (5-8).$$

Die Berechnung der Matrix  $Q$  wird über die Householder-Matrix  $H$  durchgeführt:

$$H = I - \frac{2 \cdot v_i \cdot v_i^T}{v_i^T \cdot v_i} \quad (5-9).$$

Mit der Einheitsmatrix  $I$  und dem dyadischen  $v_i \cdot v_i^T$  sowie dem Skalarprodukt aus  $v_i^T \cdot v_i$  wird die Householder-Matrix  $H$  bestimmt. Die Vektoren  $v_i$ :

$$v_i = \begin{bmatrix} a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{bmatrix} + \text{sign}(a_{i,j}) \cdot \sqrt{a_{i,j}^2 + a_{i,j+1}^2 + \dots + a_{i,n}^2} \quad (5-10),$$

mit  $i=1, \dots, m$  und  $j=1, \dots, n$ ;

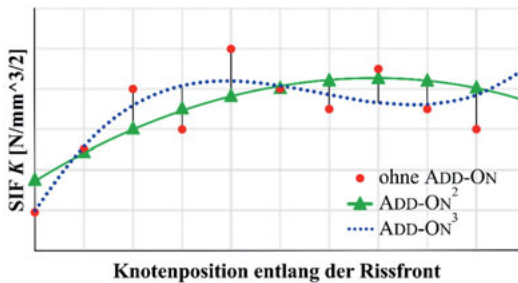
ergeben sich aus der Spalte  $a_i$  der Matrix  $A_{i-1}$ , dem Vorzeichen des ersten Wertes  $a_{i,j}$  und der euklidischen Norm  $\|a_i\|$  der entsprechenden Spalte  $a_i$ .

Die Berechnung für:

$$A_i = Q_i \cdot A_{i-1} \quad (5-11)$$

wird solange durchgeführt, bis eine rechte obere Dreiecksmatrix  $R$  entsteht. Mit dieser Matrix kann dann der Vektor  $x$  nach Gleichung (5-8) berechnet werden. Im Anschluss können dann

über den Vektor  $x$  und die Matrix  $A$  die angepassten neuen Spannungsintensitätsfaktoren bestimmt werden, wie exemplarisch in Abbildung 5-7 dargestellt.



**Abbildung 5-7:** Berechnete Ausgleichskurven für die Spannungsintensitätsfaktoren entlang der Rissfront, mit den neu hinterlegten ADD-ON Funktionen

Da diese Funktionserweiterung als eine zusätzliche Unterstützung in die Software von ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> implementiert wurde, besteht keine Zwangsbedingung zur Basissoftware. Es handelt sich hierbei um sogenannte ADD-ON Funktionen. Bei diesen Funktionen besteht für den Anwender die Möglichkeit zwischen Polynomen verschiedener Ordnung zu wählen. Je nach Anwendungsfall bietet sich ein Polynom höheren oder niedrigeren Grades an, um eine Ausgleichsfunktion über die Spannungsintensitätsfaktorwerte zu legen. In Anhang A3 ist der Ablauf beziehungsweise die Implementierung dieser Funktionen detailliert aufgezeigt. Die Auswahl der ADD-ON Funktionen ist bei der Eingabe der Simulationsparameter festgelegt. Auswirkungen der Wahl einer ADD-ON Funktion greifen jedoch erst in dem Postprocessor NETRACK3D. Bei der Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  und  $\Delta K_V$  werden abschließend Ausgleichsfunktionen bestimmt und die  $K$ -Faktoren entsprechend angepasst. Somit ist gewährleistet, dass die Berechnungsfehler, hervorgerufen durch die FE-Analyse, nur eingeschränkt fortgeführt werden und der Einfluss der Ergebnisionsgenauigkeiten auf die weitere Rissausbreitungsberechnung reduziert wird.

### 5.3.3 Rissausbreitung bei teilweise nicht wachstumsfähiger Rissfront

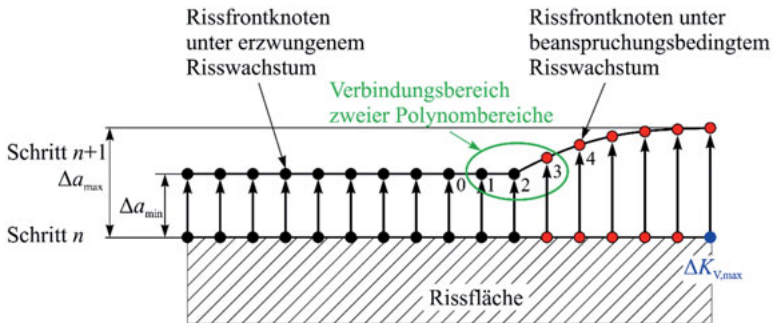
Damit eine Risswachstumssimulation möglichst stabil laufen kann, ist es notwendig einen stetigen Verlauf der Rissfront zu gewährleisten. Eine Maßnahme bietet die in Kapitel 5.3.2 aufgezeigte ADD-ON Funktion. Diese Erweiterung im Programm greift so lange, wie für alle Rissfrontknotenpunkte ein stabiles Risswachstum berechnet wurde (vgl. Gl. (3-25)). Dies trifft jedoch nicht immer zu. Der Initialriss wird von dem Anwender, unabhängig von der vorliegenden Beanspruchung, festgelegt. Zumeist wird von einem eingetretenen Versagensfall ausgegangen, bei dem durch die Risswachstumssimulation der Risswachstumsverlauf reproduziert werden soll. Hierbei kann es sein, dass der Ausgang eines Risses durch Fehler im Bauteil oder mechanische Kratzer bedingt war. Bei der Reproduzierung dieses Versagensfalls kann eine Situation an der Rissfront auftreten, bei der nicht alle Rissfrontknotenpunkte so stark beansprucht werden, dass es zu einem stabilen Risswachstum kommt. Theoretisch wür-

den dementsprechend an einzelnen Rissfrontknoten zunächst keine Risserweiterungen auftreten. Erst durch höhere Beanspruchungen der Rissfront und dem damit einhergehenden partiellen Risswachstum werden nach und nach alle Bereiche der Rissfront so stark beansprucht, dass eine zyklische Vergleichsspannungsintensität

$$\Delta K_V \geq \Delta K_{l,th} \quad (5-12)$$

auftritt.

Bei einer numerischen Risswachstumssimulation gilt es jedoch, einige numerische Berechnungsvoraussetzungen einzuhalten. Hierzu gehört, dass eine Risswachstumssimulation nur unter der Voraussetzung erfolgen kann, wenn bei jedem Simulationsschritt  $n$  jeder einzelne Rissfrontknoten  $k$  eine Risserweiterung erfährt. Diese Einschränkung wurde in ADAPCRACK3D bereits erfolgreich gelöst. Jeder Rissfrontknoten erhält eine entsprechend der berechneten Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_V$  und der damit einhergehenden Rissgeschwindigkeit  $da/dN$  eine anteilige Risserweiterung. Das maximale Rissinkrement wird dem Rissfrontknotenpunkt zu geordnet, welcher die höchste Beanspruchung mit  $\Delta K_{V,max}$  (vgl. Abbildung 5-8, blauer Rissfrontknoten) aufweist. Als Bedingung wird jedoch eine Mindestrisserweiterung von 30% des maximalen Rissfortschrittsinkrementes  $\Delta a_{max}$  erzwungen. Zahlreiche Untersuchungen von [Ful03; Sch01; SFK+01; RSF+01; RFS+02; FSR00; SFR00; SFR03; BJR03; FRS+06] haben gezeigt, dass sich dieser Eingriff in das Risswachstumsverhalten nicht negativ auf das Gesamtergebnis einer solchen Risswachstumssimulation auswirkt. Durch diesen Eingriff in den Verlauf der Rissfront kann es jedoch, wie bereits in Kapitel 5.3.2 aufgezeigt, zu Beeinträchtigungen während der Simulation im Hinblick auf die Simulationsstabilität kommen. An einem Beispiel, wie in Abbildung 5-8 dargestellt, wird verdeutlicht, warum es bei erzwungenem Risswachstum zu Simulationsabbrüchen kommen kann.



**Abbildung 5-8:** Rissausbildung mit teilweise erzwungenem Risswachstum während einer numerischen Risswachstumssimulation mit ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup>

Durch die Unterteilung des Risswachstumsverhaltens in zwei Bereiche (erzwungenes und natürliches Risswachstum) kommt es zu einem scharfen Übergang in dem Rissfrontverlauf. In Abbildung 5-8 sind die Knotenpunkte rot dargestellt, bei denen es aufgrund der Höhe der Beanspruchung zu einer Risserweiterung kommt.

Die übrigen Rissfrontknotenpunkte erfahren ein minimales Risswachstum, da die vorherrschenden zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren

$$\Delta K_v \leq \Delta K_{l,th} \quad (5-13)$$

sind.

Daraus entsteht dann unter Umständen wie in dem hier aufgezeigten Beispiel in Abbildung 5-8 eine neue Rissfront, die in einem Bereich linear ausgebildet ist und in dem anderen Bereich einen parabelförmigen Verlauf darstellt. Bei dem Übergang dieser zwei Rissfrontbereiche entsteht eine „Ecke“, welche zu einem verzerrten Submodell und damit zu einem Simulationsabbruch führen kann. Durch die Nutzung einer Spline-Funktion wird der Übergang so gestaltet, dass ein „glatter“ Verbindungsbereich realisiert wird.

Bei einer Spline-Funktion handelt es sich um eine Aneinanderreihung von Polynom-Teilintervallen, welche über sogenannte Stützstellen  $\{a, b\}$  mit einander verkoppelt werden. Ein Spline  $S$  mit dem Grad  $n$  ist  $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar [Har08; DR08], was bedeutet, dass an den Stützstellen die Punkte der Teilintervalle mit den Punkten des benachbarten Teilintervalls eindeutig bestimmt sind. Aufgrund der Angleichung der Werte zwischen den Stützstellen erscheint der Kurvenverlauf deutlich glatter, wodurch eine gleichmäßige Rissfrontverteilung gewährleistet wird (vgl. Abbildung 5-9). Diese „Glättung“ der Rissfront ermöglicht wiederum die Realisierung eines verhältnismäßig wohlgeformten Submodells, was wiederum zu einer stabilen Risswachstumssimulation führt.

Durch die Beschränkung, dass die Nutzung des Splines sich lediglich auf einen kleinen Verbindungsbereich zwischen den Knotenpunkten mit real stattfindender und denen mit erzwungenem Risserweiterung auswirken soll (siehe Abbildung 5-8), reicht die Nutzung eines Splines zweiter Ordnung beziehungsweise einer quadratischen Spline-Funktion, für die hier vorliegenden Fälle aus. Der Verbindungsbereich, bei denen der Spline einen glatten Rissfrontkurvenverlauf liefern soll, ist in Abbildung 5-8 schematisch gekennzeichnet. Durch die Beschränkung des Teilintervalls auf einen kleinen Wertebereich zeigen erste Voruntersuchungen keine relevanten Unterschiede zwischen der Nutzung eines quadratischen oder eines kubischen Splines auf. Aus diesem Grund wurde an dieser Stelle entschieden, eine quadratische Spline zu nutzen. Diese Funktion bezieht sich einzig auf die Anpassung der berechneten Rissfortschrittsinkremente entlang der Rissfront, für den vordefinierten Verbindungsbereich. Es gelten somit die Funktionen:

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 \quad (5-14),$$

mit der 1. Ableitung:

$$S'_k(x) = b_k + 2 \cdot c_k(x - x_k) \quad (5-15)$$

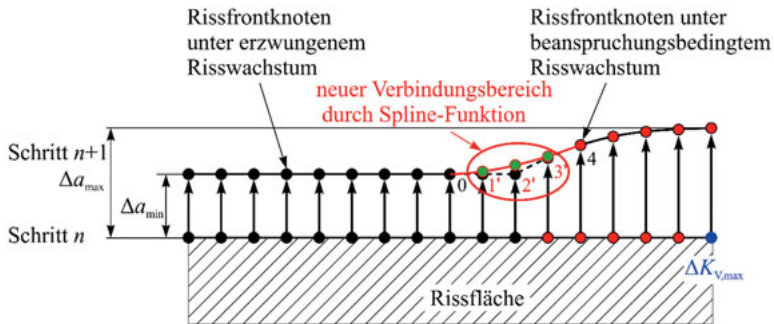
mit  $k = \text{Nummer der Rissfrontknoten}$  und  $x = \text{Größe des Rissinkrements } \Delta a_k$ .

Die Berücksichtigung des minimalen Risswachstumsinkrements erfolgt mit:

$$a_k = \Delta a_{\min} \quad (5-16).$$

Über die Indizes des Rissfrontknotenpunktes werden die Terme  $x$  und  $x_k$  festgelegt. Da die Steigung in dem Bereich des erzwungenen Risswachstums 0 beträgt, entspricht der Term

$b_k = 0$ . Die Steigung in dem Teilintervall, welches an der risswachstumsfähigen Rissfront mündet, wird über den Term  $c_k$  definiert. Somit kann in Abhängigkeit der Steigungen und der Länge des Teilintervalls die Verteilung der Rissfortschrittsinkremente über  $S(x)$  angepasst werden. Hierbei ist es das Ziel, die „Ecke“ im Kurvenverlauf zu minimieren.



**Abbildung 5-9:** Auswirkungen einer Spline-Funktion auf das Rissausbreitungsverhalten bei teilweise erzwungenem Risswachstum während einer numerischen Risswachstumssimulation mit ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup>

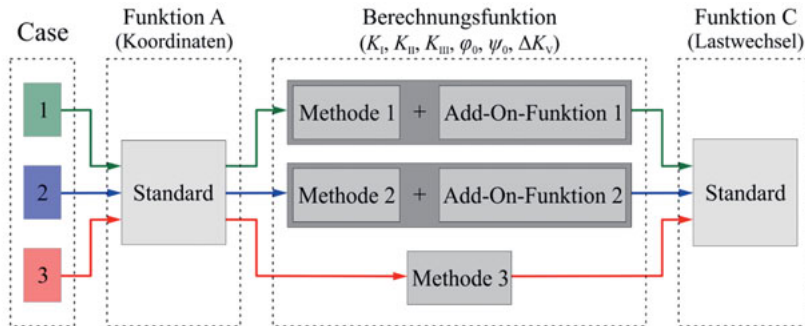
Die Auswirkungen der Anpassung einzelner Werte an die Rissfrontknotenpunkte ist in Abbildung 5-9 anhand des roten Kurvenverlaufs zu erkennen. Neben einem glatten Frontverlauf kann insbesondere auch ein positiver Einfluss auf die Gestaltung des Submodells genommen werden. Der Übergang des Risswachstums zwischen den Rissfrontknotenpunkten, welche beanspruchungsbedingt ein Risswachstum hervorrufen, und den Knotenpunkten, denen ein zwangsweises Risswachstum auferlegt wurde, ist nun so gestaltet, dass eine Verzerrung des Submodells reduziert werden kann. Durch die Anpassung ist somit auch eine stabilere Risswachstumssimulation gewährleistet. Der schematische Ablauf des Programmcodes wird im Anhang A4 anhand von Flussdiagrammen und Pseudocodes detailliert aufgezeigt.

### 5.3.4 Ausbau der bruchmechanischen Konzepte im Risssimulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup>

Im Zusammenhang mit der Erweiterung des Riss simulationsprogramms für ein Risswachstum in gradierten Strukturen entstand die Herausforderung, zwischen verschiedenen Auswertungsmethoden zu wählen. Es sollte sowohl die Auswahl einer ADD-ON Funktion (siehe Kapitel 5.3.2) sowie die freie Wahl einer Methode zur bruchmechanischen Auswertung gewährleistet werden. Insbesondere die Unterscheidung der bruchmechanischen Auswahl von homogenen, isotropen und gradierten Strukturen lag hierbei im Fokus.

Da sich der grundsätzliche Programmablauf in ADAPCRACK3D sehr bewährt hat, sollte an diesem Ablaufschema keine unnötige Änderung durchgeführt werden. Die Herangehensweise für eine Erweiterung der Methoden für die bruchmechanische Auswertung wurde deshalb ausschließlich über Änderungen der Verknüpfungsalgorithmen in der Software realisiert. Über einen zusätzlichen Funktionsablauf in dem Modul NETCRACK3D, den sogenannten

Cases, werden die Berechnungsschritte für eine bruchmechanische Auswertung einzeln aufgerufen. Der grundsätzliche Ablauf zwischen den Cases wurde hierbei nicht verändert. Für die Wahl der Berechnungsfunktion, in dem die Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren, Abknickwinkel und Verdrehwinkel durchgeführt werden, stehen nun zusätzliche Berechnungsansätze in dem Code bereit, welche in Abhängigkeit der Cases durchgeführt werden können.



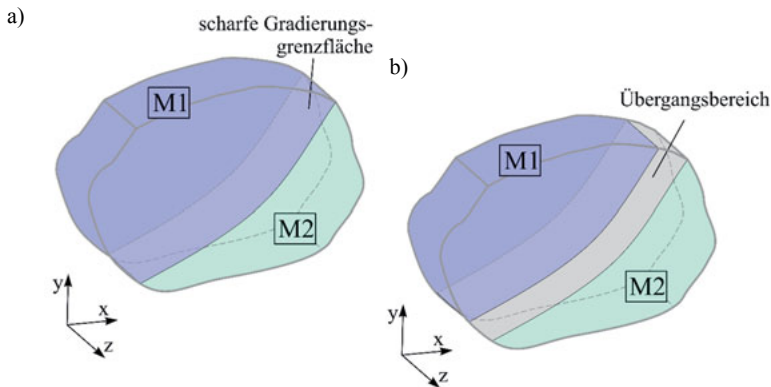
**Abbildung 5-10:** Schematischer Ablauf von bruchmechanischen Auswertungen in Abhängigkeit der genutzten Cases

Durch Änderungen in der Strukturierung und der Bereitstellung individueller Verknüpfungen der Berechnungsfunktionen im Postprocessor Netracrack3D ist es nun möglich, zwischen verschiedenen Berechnungsmethoden zu wählen. Derzeit stehen dem Anwender 10 verschiedene Cases (Berechnungsansätze) zur Verfügung. Für die bruchmechanische Auswertung in homogenen, isotropen Strukturen kann zwischen dem  $\sigma_I'$ -Kriterium (Kapitel 3.4.2) und dem Verallgemeinerten Kriterium nach RICHARD et. al (Kapitel 3.4.3) gewählt werden. Zudem sind durch die ADD-ON Funktionen weitere Kombinationsmöglichkeiten hinsichtlich der bruchmechanischen Auswertung gegeben. Hinterlegt ist eine quadratische, eine kubische und eine biquadratische Ausgleichsfunktion, die beliebig mit einem ausgewählten bruchmechanischen Konzept kombiniert werden können. Neben der Wahlmöglichkeit der Nutzung einer zusätzlichen ADD-ON Funktion, musste eine Schnittstelle geschaffen werden, bei der es möglich ist, bei der Wahl der bruchmechanischen Auswertung, zwischen homogenen, isotropen und bruchmechanisch gradierte Strukturen zu differenzieren. Dies ist in dem Postprocessor NETRACK3D, in dem Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup>, gelungen. Im Anhang A5 ist der Zusammenhang verdeutlicht dargestellt. Über die Schnittstelle der Cases kann bei der Auswertung zwischen Konzepten für homogene Strukturen, aber auch gradierten Strukturen unterschieden werden. Dadurch, dass der grundsätzliche Ablauf für die bruchmechanische Auswertung sowohl in homogenen als auch gradierten Strukturen gleich ist, bezieht sich der Unterschied hauptsächlich auf die Schnittstelle der Berechnungsfunktion. Für diesen Funktionsbereich wurde das Konzept aus Kapitel 4.4 in dem Code bereitgestellt (vgl. Kapitel 5.4). Die allgemeinen Berechnungsfunktionen wie etwa für die Lebensdauerberechnung werden über eine Schnittstelle den einzelnen Cases gesondert zur Verfügung gestellt. So ist es

dem Anwender jederzeit möglich, die für die Risswachstumssimulation benötigten bruchmechanischen Ansätze individuell auszuwählen.

## 5.4 Berechnungsfunktionen für Simulationen in bruchmechanisch gradierten Strukturen

Während der Entwicklungsphase von neuen Produkten gehören numerische Simulationen bereits zum Standardrepertoire. Aber auch für Untersuchungen nach eventuellem Bauteilversagen wird zunehmend mehr auf Simulationsprogramme für eine Vorhersage des Rissausbreitungsverhaltens gesetzt. Durch kontinuierliche Entwicklungen von funktional gradierten Materialien und Strukturen haben sich jedoch auch die Anforderungen an ein solches Riss simulationsprogramm erweitert. Lokal unterschiedliche Materialeigenschaften in einer Struktur müssen bei der Bestimmung des Rissausbreitungsverhaltens genauso in die Berechnung einfließen wie die Lage und Beanspruchung des Risses in dem Bauteil. Einzig die Abänderung des bruchmechanischen Konzeptes reicht nicht aus, um alle Einflüsse bei einer Rissausbreitung in gradierten Strukturen zu berücksichtigen, da ein Einfluss der bruchmechanischen Gradierung auf das Risswachstum nur bei Erreichen der Gradierung auftritt. Außerdem muss auch zwischen zwei Arten einer bruchmechanischen Gradierung differenziert werden. Zum einen kann in einer Struktur eine Materialgradierung mit schlagartigen Materialparameteränderungen vorliegen, es wird von einer sogenannten scharfen Gradierung ausgegangen, wie sie in Abbildung 5-11 a) aufgezeigt wird.



**Abbildung 5-11:** Unterscheidung zweier unterschiedlicher Materialgradierungen in beliebigen Strukturen

- a) Materialgradierung mit einer scharfen Gradierungsgrenzfläche
- b) Materialgradierung mit einem Übergangsbereich der Gradierung

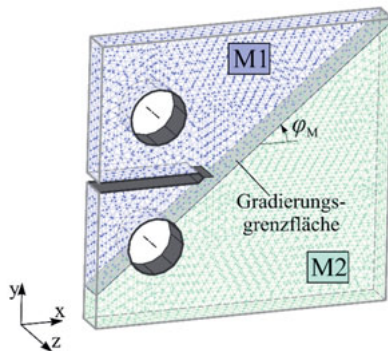
Zum anderen kann sich der Übergang von einem Materialeigenschaftsbereich zum anderen kontinuierlich über einen gewissen Bereich erstrecken (siehe Abbildung 5-11 b)), was im Weiteren als Übergangsbereich bezeichnet wird. Bei einem Übergangsbereich ändern sich die

Materialkennwerte demnach nicht schlagartig bei Erreichen der Grenze. Die Materialkennwerte des Übergangsbereiches können zum Beispiel über eine Exponentialfunktion beschrieben werden, bei der sich die Kennwerte des ersten Materialbereiches denen des zweiten Materialbereiches stetig annähern (verdeutlicht wird dieser Ansatz in Kapitel 5.4.2).

Um diesen neuen Anforderungen gerecht zu werden, müssen daher einige erweiternde Algorithmen in die Software des hier verwendeten Simulationsprogramms implementiert werden. Somit können alle etwaigen Einflüsse einer Gradierung auf das Rissausbreitungsverhalten in der Berechnung berücksichtigt werden. Die bereits zur Verfügung stehenden Algorithmen des Simulationsprogramms ADAPCRACK3D bilden eine solide Basis für das Riss simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup>. In den nachfolgenden zwei Unterkapiteln wird der funktionelle Ablauf im Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> für eine Rissausbreitung in einer bruchmechanischen gradierten Struktur aufgezeigt. Differenziert wird hierbei die Art der Materialgradierungsgrenze, wobei zwischen einer scharfen und einer Übergangsgradierung separiert wird. Abschließend werden erste Simulationsergebnisse für diese beiden Arten der bruchmechanischen Gradierung aufgezeigt und der Einfluss auf das Rissausbreitungsverhalten hervorgehoben.

#### 5.4.1 Funktion zur Berechnung der Rissausbreitung in einer scharfen bruchmechanischen Gradierung

Die erste Erweiterung, welche für die Risswachstumssimulation von gradierten Strukturen nötig ist, findet bereits bei der Erstellung des globalen Finite-Elemente-Modells statt. Anhand des globalen Finite-Elemente-Modells muss eine bruchmechanische Gradierung berücksichtigt werden. Das bedeutet, dass die Position der Gradierung bekannt sein muss und die Lage und Ausrichtung einer solchen Gradierung bei der Erstellung des Finite-Elemente-Modells einfließen muss. Durch eine partielle Einteilung der Struktur in einzelne Bereiche mit der Zuweisung von unterschiedlichen Materialien während der Erstellung des Finite-Elemente-Modells können dem Simulationsprogramm dann alle benötigten Informationen zur Verfügung gestellt werden.

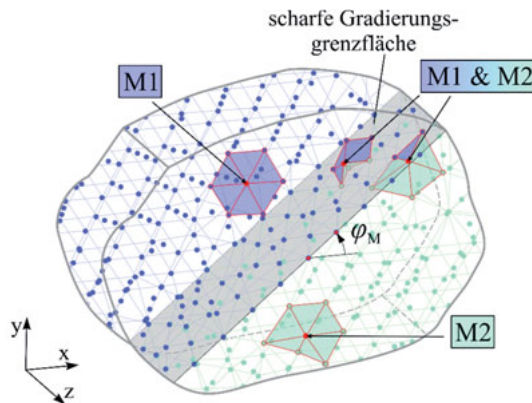


**Abbildung 5-12:** Finite-Elemente-Modell einer CT-Probe mit partiell unterschiedlichen Materialeigenschaftsbereichen

In Abbildung 5-12 ist als beispielhafte Struktur eine einfache CT-Probe aufgezeigt. Bei dieser Probe wird durch die partielle Einteilung zweier Bereiche mit unterschiedlichen Materialien M1 und M2 eine bruchmechanische Gradierung unter einem Winkel von  $\varphi_M = 40^\circ$  erzeugt. Das für die Abbildung des Risses relevante Finite-Elemente-Modell spielt bei der Zuordnung der Materialien keine Rolle. Durch die Wahl der hinterlegten Werkstoffe aus dem Programm werden bei Simulationsstart (siehe Kapitel 5.3.1) die einzelnen Materialparameter den entsprechenden Bereichen zugewiesen.

Damit ein Zusammenhang der lokalen Rissfront zu der globalen Gradierungsgrenze hergestellt werden kann, gilt es zunächst, alle geometrischen Abmessungen der Grenze in Bezug auf die globale Struktur systematisch zu erfassen und daraus Rückschlüsse über die Lage der Grenzfläche zu ziehen. Abschließend werden diese Informationen benötigt, um die lokale Ausrichtung der Gradierung gegenüber der aktuellen Rissfront zu bestimmen.

Um die unterschiedlichen Eigenschaftsbereiche und damit die Gradierungsgrenze in der Struktur zu lokalisieren, werden die an den einzelnen Knotenpunkten auftretenden Materialien aufgegriffen. Durch die Zuordnung der Materialien bezüglich der partiellen Teilbereiche des Finite-Elemente-Modells erhalten die einzelnen Elemente entsprechende Materialeigenschaften. Diese werden auf die anliegenden Knotenpunkte der Elemente übertragen (vgl. Abbildung 5-13). Die Knotenpunkte in den beiden Teilbereichen bekommen die Materialien M1 beziehungsweise M2 zugeordnet. Im Gegensatz dazu stechen die Knotenpunkte im Grenzbereich dadurch hervor, dass diese eine Zuordnung von jeweils zwei Materialien M1/2 erhalten. Dieser Zustand liegt in den angrenzenden Elementen und damit auch in den Nachbarknoten begründet.

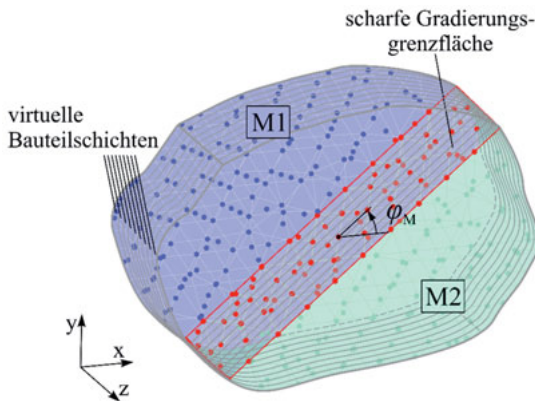


**Abbildung 5-13:** Zuordnung der Materialien auf die einzelnen Knotenpunkte in einer gradierten Struktur in Abhängigkeit der angrenzenden Finite-Elemente

Wie in Abbildung 5-13 zu erkennen, sind bei den Knotenpunkten im Grenzbereich einige Nachbarknoten des relevanten Knotenpunktes dem Material M1 zugehörig, während die anderen Nachbarknoten dem Material M2 zugeordnet sind. Dementsprechend liegen an dem Knotenpunkt sowohl Elemente mit Material M1 sowie Material M2 an. Diese Information bezüg-

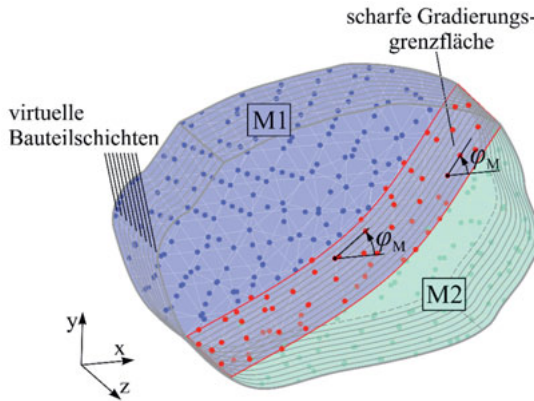
lich der angrenzenden unterschiedlichen Materialien bleibt mit den Knotenpunkten stets verbunden, auch wenn letztendlich nur einer der beiden Materialkennwerte bei der bruchmechanischen Auswertung herangezogen wird. Die Zuordnung, welche Materialkennwerte bei der Auswertung von Relevanz sind, ergibt sich erst, wenn die Rissfront den entsprechenden Knotenpunkt erreicht hat. In Abhängigkeit von Rissrichtung und -lage wird dann das Material, welches sich hinter der Rissfront befindet, für die bruchmechanische Berechnung herangezogen. Um nun die Gradierungsgrenze und die damit verbundene Orientierung zu identifizieren, wird beim Einlesen des globalen Finite-Elemente-Modells im Modul NETADAPT3D die Zuordnung der Materialeigenschaften gesondert berücksichtigt. Die Knotenpunkte, welche zwei Materialien zugewiesen bekommen haben, werden zusätzlich separiert abgespeichert. Zudem ist eine Unterscheidung von mehreren Gradierungsgrenzen in einer Struktur möglich, indem zwischen den einzelnen Materialkombinationen an den Knotenpunkten differenziert wird.

Für die Bestimmung des Gradierungswinkels  $\varphi_M$  findet dann eine lokale Betrachtung an den Knotenpunkten in der Grenzschrift statt. Der Winkel  $\varphi_M$  wird jedoch unter Beachtung des globalen Koordinatensystems ermittelt. Dafür wird das Finite-Elemente-Modell als eine Art Schichtmodell betrachtet.



**Abbildung 5-14:** Einteilung der Struktur in virtuelle Bauteilschichten zur Lokalisierung der vorliegenden ebenen Gradierungsgrenzfläche in Abhängigkeit der Knotenpunkte

In der Tiefe beziehungsweise der Dicke des Modells werden virtuelle Schichten angenommen. Diese Annahme wird in Abbildung 5-14 in Richtung der z-Koordinate aufgezeigt. Für jede Schicht in Abhängigkeit der z-Koordinate werden die Knotenpunkte an der Gradierungsgrenzfläche gesondert betrachtet. Für die Knotenpunkte in den einzelnen Schichten kann so über die angrenzenden Nachbarknoten der lokale Gradierungswinkel  $\varphi_M$  definiert werden. Wie in Abbildung 5-15 aufgezeigt, können über diesen Ansatz auch unterschiedliche Materialgradierungswinkel  $\varphi_M$  bei einer in sich gekrümmten Gradierungsgrenzfläche berücksichtigt werden.



**Abbildung 5-15:** Einteilung der Struktur in virtuelle Bauteilschichten und Lokalisierung der vorliegenden gekrümmten Gradierungsgrenze in Abhängigkeit der Knotenpunkte

Die so ermittelten Informationen für sämtliche Knotenpunkte in den Gradierungsgrenzen bleiben während der gesamten Risswachstumssimulation erhalten. Bei der bruchmechanischen Auswertung im Modul NETCRACK3D kann somit auf die Grenzknotenpunkte zurückgegriffen werden, wodurch eine Auswertung des Rissausbreitungsverhaltens unter Berücksichtigung der Materialgradierung ermöglicht wird.

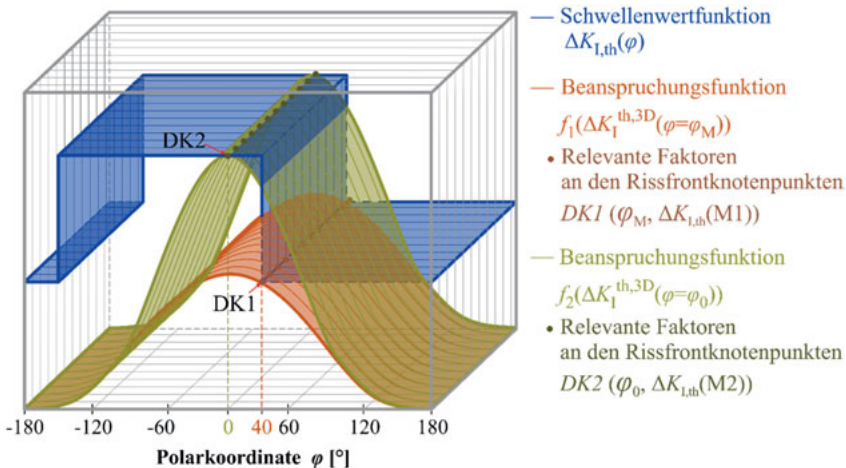
Für die bruchmechanische Auswertung wird in dem Simulationsprogramm grundsätzlich zwischen homogenen und gradierten Strukturen und den damit verbundenen Auswertungskonzepten unterschieden. Die Auswahl der verschiedenen Cases, also die verschiedenen Auswertungskonzepte für eine bruchmechanische Auswertung, wurde bereits in Kapitel 5.3.4 aufgezeigt. In gradierten Strukturen gilt es nach der Finite-Elemente-Analyse, die Lage des Risses beziehungsweise der Rissfront gegenüber der Materialgradierungsgrenze zu identifizieren. Wie bereits in Kapitel 4.4 erläutert, kann sich der Einfluss einer bruchmechanischen Gradierung auf das Rissausbreitungsverhalten erst bei Erreichen der Materialgradierungsgrenze auswirken. Solange sich die Rissfront in einem homogenen Materialbereich befindet, wird die bruchmechanische Auswertung an der Rissfront und dem daraus resultierenden Rissausbreitungsverhalten mit dem bruchmechanischen Konzept  $\sigma_I$  nach SCHÖLLMANN et al (siehe Kapitel 3.4.2) durchgeführt. Um die Lage der Gradierungsgrenze berücksichtigen zu können, wurde für die Auswertung in gradierten Strukturen ein zusätzlicher Algorithmus in das Programm implementiert. Über diese Erweiterung kann dann im Anschluss an die Berechnung des Vergleichsspannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_V$  eine Überprüfung der Lage der Rissfront gegenüber der Gradierungsgrenze stattfinden. Über die Zuweisung der Materialien für die Rissfrontknotenpunkte kann nun überprüft werden, ob sich diese bereits an der Gradierungsgrenze befinden oder nicht. Jeder Rissfrontknotenpunkt wird hierbei Punkt für Punkt betrachtet. Sobald bei dem gerade relevanten Knotenpunkt zwei Materialien detektiert werden, ist die Gradierungsgrenze erreicht. Erst unter dieser Bedingung wird der Einfluss der Materialgradierung auf das Rissausbreitungsverhalten hin untersucht.

Entsprechend des bruchmechanischen Konzeptes aus Kapitel 4.4 findet nun die Berechnung der relevanten Spannungsintensitätsfaktoren statt. Die dafür benötigten Materialkennwerte  $\Delta K_{I,th}$  und  $\Delta K_{IC}$  werden passend zu den an der Gradierungsgrenze vorliegenden Materialzuordnungen definiert. Der Gradierungswinkel  $\varphi_M$  wird aus der zu Beginn der Simulation angelegten Liste mit sämtlichen Knotenpunkten in der Gradierungsgrenze und den zugehörigen Gradierungswinkeln  $\varphi_M$  herausgelesen. Da sich die Gradierungswinkel auf das lokale Koordinatensystem beziehen, muss die Lage des Risses zu der Gradierungsgrenze zunächst in Betracht gezogen werden. Über die lokale Drehung des Submodells wird der tatsächliche Winkel der Gradierungsgrenze zu dem Riss bestimmt. Dieses Vorgehen wird für jeden Knotenpunkt einzeln durchgeführt, um die Lage des Risses auch bei einer verdrehten Rissfront exakt bestimmen zu können. Der lokale Gradierungswinkel  $\varphi_{M,k}$  aber auch der durch die Spannungsintensitätsfaktoren resultierende Abknickwinkel  $\varphi_0$  fließt somit in die Berechnung des neuen 3D-Konzeptes ein. Infolgedessen werden entsprechend der Gleichungen (4-16) und (4-17) beziehungsweise (4-21) und (4-22) zunächst die vier relevanten Spannungsintensitätsfaktoren:

- $DK1 (\varphi_M, \Delta K_{I,th} (M1))$
- $DK2 (\varphi_0, \Delta K_{I,th} (M2))$
- $DK3 (\varphi_M, \Delta K_{IC} (M1))$
- $DK4 (\varphi_0, \Delta K_{IC} (M2))$

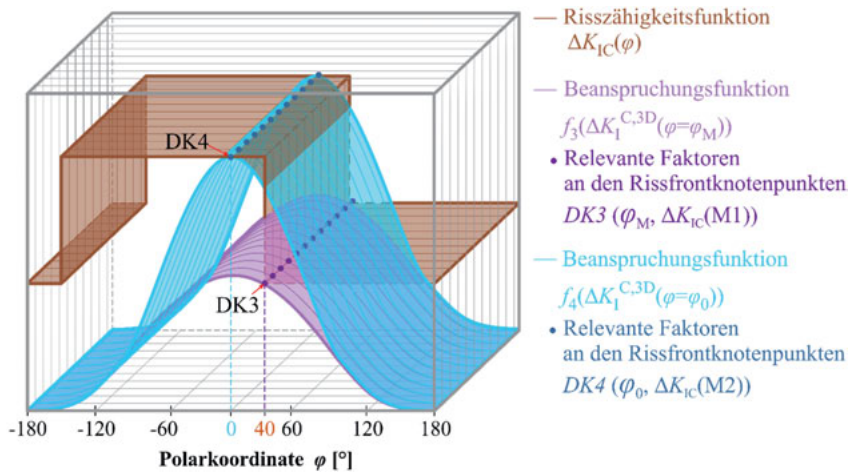
berechnet.

Anhand der beiden Faktoren  $DK1$  und  $DK2$ , welche in Abhängigkeit der vorliegenden Schwellenwerte  $\Delta K_{I,th}$  bestimmt werden, wird die potenzielle Rissausbreitungsrichtung definiert.



**Abbildung 5-16:** Vergleich der berechneten relevanten Faktoren  $DK1$  und  $DK2$  an den Rissfrontknoten für die Bestimmung des potenziellen Abknickwinkels in der Gradierungsgrenze

Wie in Abbildung 5-16 dargestellt, zeigt der relevante Faktor mit dem geringeren Wert die erste Berührung mit der Materialfunktion, hier der Schwellenwertfunktion  $\Delta K_{I,th}$ , auf und gibt somit die Richtung des zu erwarteten Abknickwinkels  $\varphi_i$  des Rissfrontknotenpunktes an. Um eine Aussage über das Rissausbreitungsverhalten treffen zu können, findet im Anschluss eine Gegenüberstellung des relevanten Faktors  $DK1$  beziehungsweise  $DK2$ , mit dem an dem Knotenpunkt vorherrschenden Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  statt. Nur wenn der Wert von  $\Delta K_V$  größer als der des vergleichenden Faktors ist, kann von einem möglichen Risswachstum ausgegangen werden. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, führt dies zum Abbruch der Risswachstumssimulation aufgrund einer nicht ausbreitungsfähigen Rissbeanspruchung.



**Abbildung 5-17:** Vergleich der berechneten relevanten Faktoren  $DK3$  und  $DK4$  an den Rissfrontknoten für die Bestimmung des stabilen Risswachstums in der Gradierungsgrenze

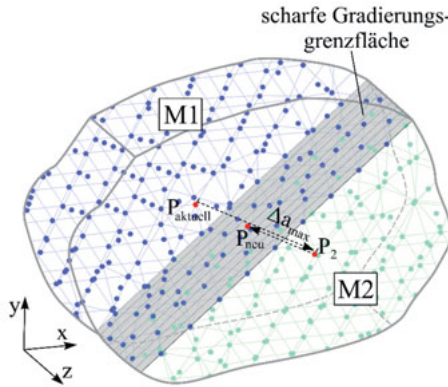
Ein ähnliches Vorgehen wie für die Bestimmung des relevanten Faktors in Abhängigkeit des Schwellenwertes  $\Delta K_{I,th}$  wird auch für das Identifizieren des relevanten Faktors in Abhängigkeit der Rissfähigkeit  $\Delta K_{Ic}$  durchgeführt. Bei einem Vergleich der beiden Faktoren  $DK3$  und  $DK4$  kann eine Aussage über das stabile Risswachstum getroffen werden. Der Faktor mit dem geringeren Wert zeigt analog zur Abbildung 5-17 die erste Berührung mit der Materialfunktion von  $\Delta K_{Ic}$  auf. Dieser Faktor wird abschließend mit dem entsprechenden  $\Delta K_V$  verglichen. Es kommt zu einem Abbruch der Rissimulation infolge eines instabilen Risswachstums, wenn der vorliegende Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  höher ist als der relevante Faktor  $DK3$  beziehungsweise  $DK4$ . Ein stabiles Risswachstum wird durch die Bedingung:

$$\Delta K_V < DK3 \quad \text{beziehungsweise} \quad \Delta K_V < DK4 \quad (5-17).$$

bestätigt. Der über diese Bedingungen festgelegte Abknickwinkel  $\varphi$  wird für die weitere bruchmechanische Auswertung der damit verbundenen Rissausbreitung herangezogen. Der berechnete Abknickwinkel  $\varphi_0$  verliert durch den Einfluss der Materialgradierung gegebenen-

falls an Bedeutung und eine Rissausbreitung findet in Abhängigkeit des Gradierungswinkels  $\varphi_M$  statt.

Dieser Ablauf für die Bestimmung des Risswachstums an der Gradierungsgrenze wird für jeden Rissfrontknotenpunkt individuell durchgeführt. Damit ist gewährleistet, dass mögliche Änderungen der Spannungsintensitäten über der Rissfront genauso Berücksichtigung finden wie die Lage der Gradierungsgrenze gegenüber der Rissfront. Durch die Formgebung der Rissfront sowie der geometrischen Gestaltung der im Bauteil vorliegenden Materialgradierungsgrenze ist ein Auftreffen der gesamten Rissfront auf die Gradierungsgrenze nicht zwingend gegeben. Es ist dementsprechend möglich, dass nur einige Teilbereiche der Rissfront von der Gradierungsgrenze hinsichtlich der Rissausbreitung beeinflusst werden, während sich der andere Bereich der Rissfront noch im homogenen Materialbereich befindet.



**Abbildung 5-18:** Verschiebung der Rissfrontknotenpunkte auf die Grenzschicht, welche aufgrund des festgelegten Rissfortschrittsinkrements die Materialgradierungsgrenze überschreiten würden

Um sicherzustellen, dass jeder Rissfrontknotenpunkt infolge einer Risserweiterung die Gradierungsgrenze nicht einfach überspringt und infolgedessen die Berechnung mit dem neuen 3D-Konzept nicht zustande kommen würde, wurde eine weitere Funktion zur Überprüfung der Rissfrontknotenpunkte in das Simulationsprogramm implementiert. Nach der Bestimmung der zu erwartenden Lebensdauer und der damit einhergehenden Risserweiterung wird sichergestellt, dass sich die neue Rissfront noch in demselben Materialbereich befindet wie die Vorgängerfront. Sollte es zu einem Überspringen der Gradierungsgrenze kommen, wird der Rissfrontknoten zurück auf die Grenze verschoben. Dafür wird über drei nächstgelegene Knotenpunkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  aus der Gradierungsgrenze in der Parameterform:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} R_x - P_x \\ R_y - P_y \\ R_z - P_z \end{pmatrix} \quad (5-18)$$

eine Ebene aufgespannt. Hierbei stellt der Punkt  $P$  den Stützvektor dar.

Über den Normalenvektor  $\bar{n}$ :

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_x - P_x \\ R_y - P_y \\ R_z - P_z \end{pmatrix} \quad (5-19)$$

ergibt sich mit dem Stützvektor die Normalenform:

$$\bar{n} \circ \begin{pmatrix} x_x \\ x_y \\ x_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5-20).$$

Der relevante Knotenpunkt, von welchem der Abstand zur Ebene gesucht wird, ist mit  $\bar{x}$  angegeben.

Über die Hesse'sche Normalform kann dann der Abstand  $d$  mit:

$$d = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3}{|\bar{n}|} \quad (5-21)$$

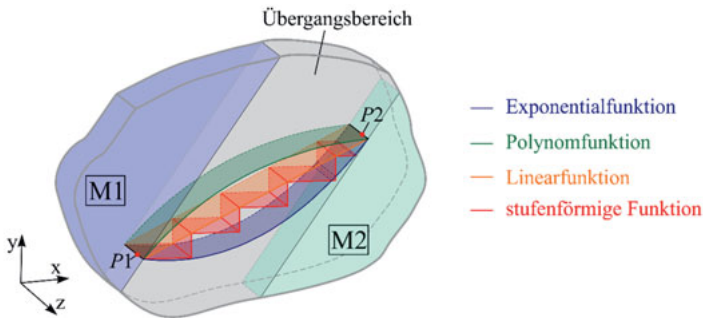
bestimmt werden [PS13]. Über diesen Zusammenhang kann der Knotenpunkt, der über die Gradierungsgrenze „gesprungen“ ist, zurückgeschoben werden und somit im nächsten Simulationsschritt der Einfluss der Materialgradierung Berücksichtigung finden. Da die Rissverlängerung, vorgegeben durch den Anwender, einen entscheidenden Einfluss auf die Lastwechsel hat, findet bei einem „Zurückschieben“ des Rissfrontknotenpunktes mit dem maximalen Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  und dementsprechend auch mit dem maximalen Rissverlängerungssinkrement  $\Delta a_{\max}$  eine erneute Berechnung der Lebensdauer statt.

Die für den Ablauf im Simulationsprogramm benötigten Algorithmen für die Berücksichtigung einer scharfen Materialgradierung hinsichtlich der Rissausbreitung werden im Anhang A6 aufgezeigt.

## 5.4.2 Funktion zur Berechnung der Rissausbreitung in einem bruchmechanisch gradierten Übergangsbereich

Auch für eine Simulation des Risswachstums in einer gradierten Struktur mit Übergangsbereich kann das in Kapitel 4.4 aufgestellte Konzept herangezogen werden. Der Umstand, dass es sich bei der Materialgradierungsgrenze nun nicht mehr um eine sprunghafte Änderung der bruchmechanischen Materialkennwerte handelt, erschwert zwar die Bestimmung der lokal vorliegenden Materialkennwerte, ändert an dem grundsätzlichen Ablauf der bruchmechanischen Auswertung jedoch nichts. Wächst ein im Bauteil vorhandener Riss in einen gradierten Übergangsbereich, kann es aufgrund der vorliegenden Materialeigenschaften zu einer Beeinflussung des Risswachstums infolge der Materialgradierung kommen. Da eine bruchmechanische Gradierung in einer Struktur über eine lokale Wärmeeinbringung erfolgt, kann der gradierte Bereich nicht immer exakt zu dem unbeeinflussten Material abgegrenzt werden. Selbst bei einer gezielten Wärmeeinbringung in das Bauteil kann eine gewisse Streuung des Wärme-

bereiches nur begrenzt unterbunden werden. Es entsteht eine sogenannte Übergangszone, in der sich ein „Mischgefüge“ einstellt. Die Kennwerte in einem solchen Gefügebereich unterscheiden sich von den Kennwerten in dem gehärteten sowie dem nicht gehärteten Bereich. Nach [GA97; KP02; KP04; Pau02; Jin03; Erd96] ändern sich die Materialkennwerte selbst in diesem Bereich kontinuierlich von dem unbeeinflussten Materialbereich (nicht gehärteten) bis hin zu den Kennwerten des vollständig gradierten (gehärteten) Bereiches. Je nach Verfahren kann sich eine solche Übergangszone über mehrere Millimeter erstrecken [Wie07]. In zahlreichen Studien wurde sich bereits mit der Beschreibung der Änderung der Materialeigenschaften in einem solchen Materialgradiierungsübergang auseinandergesetzt [WMN02; SHN+09; CC03; SR12]. Um den Verlauf der Materialeigenschaftsänderung beschreiben zu können, werden näherungsweise mathematische Funktionen herangezogen. Mögliche Ansätze zur Beschreibung des Materialeigenschaftsverlaufes bieten Exponential-, Polynom-, Linear- oder stufenförmige Funktionen, wie sie in Abbildung 5-19 aufgezeigt sind.



**Abbildung 5-19:** Mathematische Funktionsverläufe zur Beschreibung der Materialkennwerte und des lokalen Gradiierungswinkels  $\varphi_{M,k}$  in einem Übergangsbereich

Da sich bislang noch keine allgemein gültige Funktion zur Beschreibung der Materialeigenschaften in einem solchen Übergangsbereich durchgesetzt hat, wurde sich bei der Erweiterung des Simulationsprogramms ADAPCRACK3D<sup>VERSIONS\_KD15</sup> auf die Nutzung einer Exponentialfunktion konzentriert. Eine Implementierung weiterer mathematischer Funktionen wird an dieser Stelle jedoch nicht ausgeschlossen.

Exponentialfunktionen eignen sich sehr gut, um stetige Abkling- oder Wachstumsprozesse zu beschreiben [Pap09]. Allgemein lässt sich diese Funktion mit der Gleichung

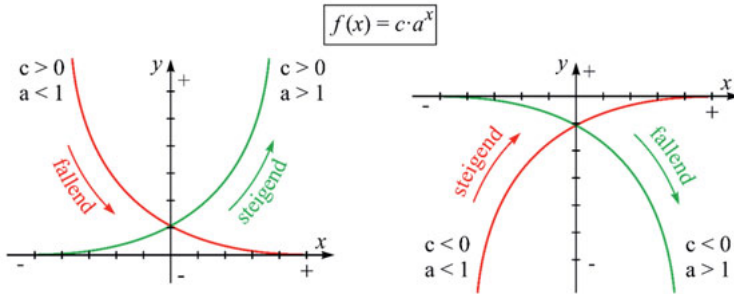
$$f(x) = c \cdot a^x \quad (5-22)$$

mit  $a, c, x \in \mathbb{R}; a > 0; \quad a \neq 1$

für eine Exponentialfunktion zur Basis  $a$  beschreiben.

Die entsprechende Variable  $x$  befindet sich im Exponenten, weshalb die Funktion auch den Namen trägt. Der Faktor  $c$  stellt die Konstante der Funktion dar. Hinsichtlich des gegebenen Wertebereiches ist es möglich, sowohl steigende als auch fallende Funktionsverläufe darzu-

stellen. Wie in Abbildung 5-20 dargestellt, schneidet eine Exponentialfunktion in der hier aufgezeigten Form nicht die x-Achse und besitzt dementsprechend auch keine Nullstellen. Aufgrund ihrer Handhabbarkeit kann eine solche Funktion für jegliche Materialkombinationen an der Gradierungsgrenze beziehungsweise an dem Gradierungsübergang herangezogen werden.

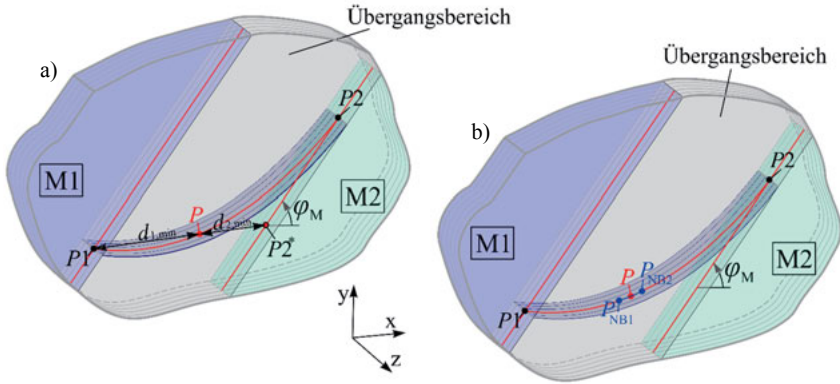


**Abbildung 5-20:** Verläufe von Exponentialfunktionen in Abhängigkeit der Wertebereiche nach [Ser17]

Um den Funktionsverlauf für einen festgelegten Bereich zu definieren, können Koordinatenpunkte aus den Materialbereichsgrenzen herangezogen werden (vgl. Punkte  $P1$  und  $P2$  aus Abbildung 5-19). Diese Punkte dienen als „Richtwerte“ für den Funktionsverlauf. Für die Bestimmung einer Exponentialfunktion zwischen zwei Punkten  $P1$  ( $x_1 \mid y_1$ ) und  $P2$  ( $x_2 \mid y_2$ ) gilt:

$$a = \frac{y_1 \left( \frac{1}{x_1 - x_2} \right)}{y_2}; \quad c = \frac{y_1}{a^{x_1}} \quad (5-23).$$

Auf die Simulation bezogen, stellen die Gradierungsgrenzen beziehungsweise jeweils zwei Knotenpunkte in den relevanten Gradierungsgrenzen die Bezugspunkte  $P1$  und  $P2$  dar. Der Punkt  $P1$  ergibt sich aus dem minimalen Abstand des relevanten Knotenpunktes  $P$  zur bereits übersprungenen Gradierungsgrenze. Um den Punkt  $P2$  definieren zu können, wird zunächst ein Hilfsknoten  $P2^*$  gesucht. Dieser ergibt sich aus dem minimalen Abstände des Knotenpunktes  $P$  zur nächsten Gradierungsgrenze. Abschließend kann der Punkt  $P2$  über den Abstand der beiden relevanten Gradierungsgrenzen zueinander und des vorherrschenden Gradierungswinkels in  $P2^*$  berechnet werden. Der schematische Zusammenhang zwischen den Punkten ist in Abbildung 5-21 dargestellt.



**Abbildung 5-21:** Bestimmung der lokalen Materialkennwerte sowie des Gradierungswinkels  $\varphi_{M,k}$  über eine exponentielle Verteilung innerhalb des Übergangsbereiches  
a) Definition der Funktionsgrenzen  
b) Bestimmung der relevanten Nachbarknoten

Über die Funktionen aus Gleichung (5-22) und (5-23) ist es somit möglich, die lokalen Abknickwinkel  $\varphi_{M,k}$  sowie die Schwellenwerte  $\Delta K_{I,th,k}$  und die zyklischen Risszähigkeiten  $\Delta K_{IC,k}$  für jede Position im Übergangsbereich definieren zu können. Die an den Grenzbereichen P1 und P2 vorliegenden Materialkennwerte fließen gleichwertig in die Berechnung ein. Für die Bestimmung des lokalen Gradierungswinkels  $\varphi_{M,k}$  ist die Winkelangabe an dem Knotenpunkt P2\* ausschlaggebend. Aufgrund von praktischen Erfahrungen bei der Herstellung von gradierten Bauteilen und Strukturen hat sich gezeigt [SIZ08; HHJ+05; BS14], dass die Grenzen eines solchen Übergangsbereiches nahezu parallel zueinander liegen. Aus diesem Grund wurde bei der numerischen Lösung des Rissausbreitungsverhaltens in einem Übergangsbereich davon ausgegangen, dass die Grenzflächen wie in Abbildung 5-21 stets parallel zueinander ausgerichtet sind. Demnach ist die Bestimmung des lokalen Gradierungswinkels sowohl in Abhängigkeit des vorliegenden Winkels an dem Punkt P1 als auch an dem Punkt P2\* zulässig. Um den Winkel an den relevanten Knotenpunkten in dem Gradierungsübergang bestimmen zu können, muss die Position eines Nachbarknotens, in Abbildung 5-21 die Punkte  $P_{NB1}$  oder  $P_{NB2}$ , bekannt sein. Im Anschluss an die Berechnung der Knotenpunkte mit Hilfe der Exponentialfunktion wird der lokale Winkel zwischen dem relevanten Knotenpunkt und einem der Nachbarknotenpunkte berechnet. Dieser Winkel gibt den lokal vorliegenden Gradierungswinkel  $\varphi_{M,k}$  an. Die Bestimmung der lokalen Materialkennwerte hingegen erfolgt direkt über die Exponentialfunktion und unter Angabe der lokalen Koordinaten des Knotenpunktes P. Der Ansatz zur Ermittlung der lokalen Parameter ( $\varphi_{M,k}$ ,  $\Delta K_{I,th,k}$  und  $\Delta K_{IC,k}$ ) des aktuellen Rissfrontknotens wird genutzt, sobald dieser den Gradierungsübergang erreicht hat. Abschließend wird über das neue 3D-Konzept geprüft, inwieweit der Einfluss der Gradierung auf das Risswachstumsverhalten einwirkt. Die Berechnung einer Rissausbreitung mit einem Gradierungsübergang stellt somit eine Erweiterung des Algorithmus zur Berechnung einer Rissausbreitung mit einer scharfen Materialgradierung dar. Diese zusätzlichen Berechnungsalgorithmen sind im Anhang A7 detailliert aufgezeigt.

## 5.5 Verifikation von ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup>

Durch die Implementierung neuer Funktionen in das Riss simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> wurde sowohl in die Berechnung der vorliegenden Spannungsintensitätsfaktoren an der Rissfront als auch in die Bestimmung der Rissausbreitungsrichtung eingegriffen. Um sicherzustellen, dass die Resultate der Simulationen mit dem in der Realität auftretenden Risswachstumsverhalten übereinstimmen, werden Simulationen an vergleichbaren Proben durchgeführt. Dabei handelt es sich um Compact Tension-Proben (CT-Probe) nach der ASTM Norm E 647-08 [AST08]. Diese Probenform wird auch für experimentelle Untersuchungen häufig herangezogen. Insbesondere im Hinblick auf den Einfluss der Materialgradierung bietet sich eine Verifikation anhand dieses Probentypen für erste Simulationsergebnisse mit dem modifizierten Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> an. Bereits durchgeführte Untersuchungen von [Sch14] mit vergleichbaren Proben mit homogenen und bruchmechanisch gradierten Materialien können zusätzlich als Nachweis für die Ergebnissenauigkeit herangezogen werden.

### 5.5.1 Rissausbreitung in homogenen Strukturen

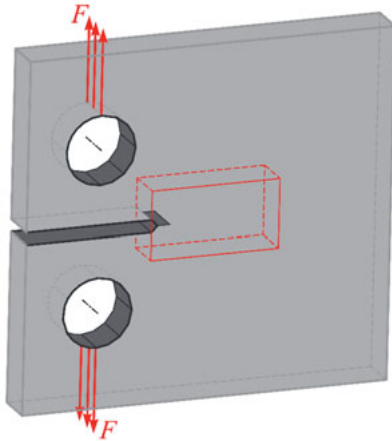
Die ersten Berechnungen wurden an CT-Proben nach der ASTM Norm E 647-11 mit homogenen Materialeigenschaften durchgeführt. Zum Verifizieren der Ergebnisse wurden unter anderem Simulationsergebnisse des bereits etablierten Programms ADAPCRACK3D, aber auch eine Referenzlösung nach [Mur87] herangezogen. Bei den für die Simulation genutzten Werkstoffen handelt es sich um fiktive Materialien. Der Fokus bei den Untersuchungen liegt hier nicht bei der Bestimmung eines ganz bestimmten Risswachstums in einem vorgegebenen Werkstoff, vielmehr ist es das Ziel, Simulationen für jegliche Art von vorliegenden Materialien durchführen zu können, weshalb die Eigenschaften des verwendeten Werkstoffes nur zweitrangig sind. Durch die Nutzung der sogenannten ADD-ONS (siehe Kapitel 5.3.2) wird Einfluss auf die Berechnungsergebnisse der Spannungsintensitätsfaktoren und der daraus resultierenden Rissweiterung genommen. Das Ziel ist es, die Streuung in den Ergebnissen der  $K_I$ -Werte zu reduzieren und die Risswachstumssimulation bei gleichbleibender Qualität der bruchmechanischen Auswertung stabiler zu gestalten.

#### 5.5.1.1 Auswirkungen von ADD-ON Funktionen auf die Rissausbreitung

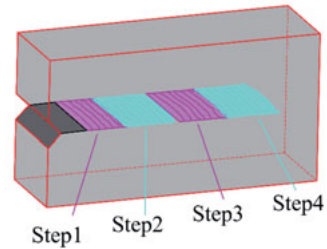
Um die Ergebnisse unter Verwendung der ADD-ON Funktionen vergleichen zu können, wurde zunächst eine Risswachstumssimulation an einer CT-Probe unter Einsatz des Programms ADAPCRACK3D durchgeführt. Im Weiteren wird an dieser Stelle dann nur noch von einer Simulation *ohne* ADD-ON gesprochen um die Unterschiede in dem Simulationsablauf zu verdeutlichen. Wie in Abbildung 5-22 b) zu erkennen, zeigt die Rissausbreitung den typischen Verlauf eines Risswachstums unter reiner Mode I auf. Die farblich wechselnden Rissfronten kennzeichnen hierbei die Risswachstumsschritte pro neu angesetztem Simulationsdurchlauf (*Step*). Trotz sehr guter Ergebnisübereinstimmung mit Referenzlösungen [Ful03] kommt es zu Simulationsabbrüchen noch vor Erreichen eines instabilen Risswachstums. Aufgrund der ungleichmäßigen Verteilung der Rissfrontennotenpunkte kommt es vermehrt zu numerischen

Problemen bei der Rissdarstellung beziehungsweise -berechnung, was letztendlich zu Simulationsabbrüchen führt. Ein Eingreifen des Anwenders in die Risswachstumssimulation ist unumgänglich.

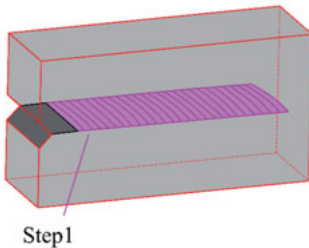
a)



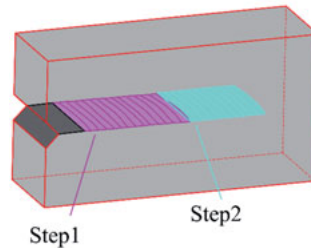
b)



c)



d)

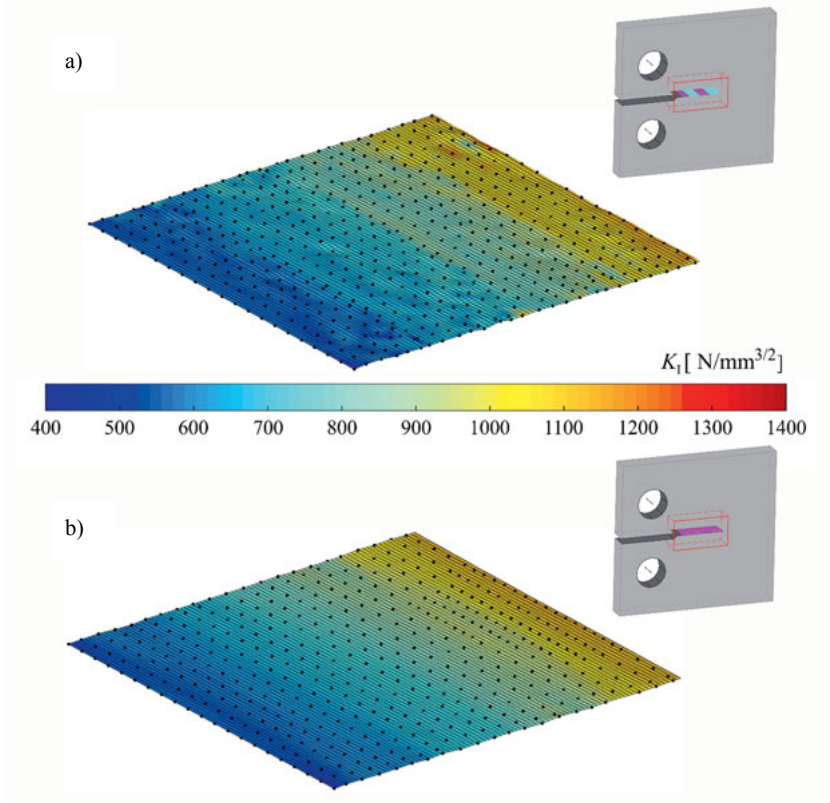


**Abbildung 5-22:** Rissausbreitung in einer CT-Probe unter Verwendung des  $\sigma_I'$ -Kriteriums

- a) CT-Probe mit Initialriss
- b) Rissausbreitung ohne Verwendung eines ADD-ONS
- c) Rissausbreitung unter Verwendung des ADD-ON<sup>2</sup>
- d) Rissausbreitung unter Verwendung des ADD-ON<sup>4</sup>

Durch die Nutzung eines ADD-ON<sup>2</sup> (Ausgleichsfunktion mit Polynom 2-ter Ordnung) während der Simulation mit demselben Finite-Elemente-Modell der CT-Probe zeigen sich deutliche Unterschiede in der Simulationsstabilität. Bezogen auf die Rissfrontausbildungen und der entsprechenden Rissausbreitungsrichtungen zeichnen sich in Abbildung 5-22 c) hingegen kaum Abweichungen zwischen der Simulation mit oder ohne ADD-ON ab. Sowohl die Richtung als auch die Länge der Risse bis hin zur instabilen Rissausbreitung sind nahezu identisch. Bei der unter Abbildung 5-22 c) dargestellten Rissausbreitung konnte sogar ein Risswachstum bis hin zur Instabilität mit nur einem Simulationsdurchlauf realisiert werden. Durch die Nut-

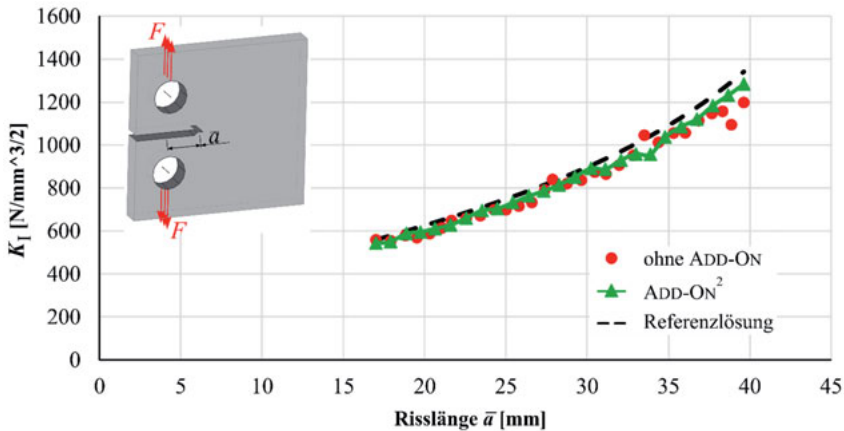
zung eines höherwertigen Ausgleichspolynoms ist eine Verbesserung beziehungsweise Verschlechterung der Simulationsstabilität jedoch stark von der vorliegenden Beanspruchung und der Form der Rissfront abhängig. Bei einer unter Mode I beanspruchten Rissfront mit einer geometrischen, nahezu linearen Risserweiterung, wie es hier der Fall ist, zeigt die Nutzung eines ADD-ON<sup>4</sup> kaum eine Verbesserung der Simulationsstabilität (vgl. Abbildung 5-22 d)), was darauf schließen lässt, dass die Nutzung einer Ausgleichsfunktion mit einem Polynom  $n$ -ter Ordnung nur bis zu einem gewissen Grad als sinnvoll zu erachten ist. Die Höhe der Ordnung des genutzten Ausgleichspolynoms kann dementsprechend nicht pauschal festgelegt werden, sondern ist abhängig von der vorliegenden Rissgeometrie und -beanspruchung.



**Abbildung 5-23:** Geplottete Rissflächen der simulierten CT-Probe im Hinblick auf die Verteilung der Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_I$   
a) Rissfläche nach Simulation ohne Nutzung einer ADD-ON Funktion  
b) Rissfläche nach Simulation unter Nutzung einer ADD-ON<sup>2</sup> Funktion

Bei genauerer Betrachtung der an den Rissfronten vorliegenden Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_I$ , wird der Einfluss auf die Simulationsergebnisse verdeutlicht. Aus diesem Grund wurden

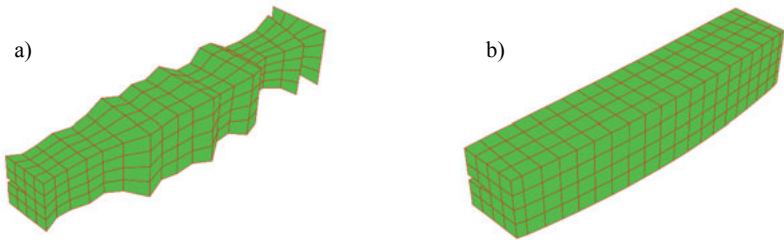
die Rissflächen der beiden simulierten CT-Proben (ohne ADD-ON und mit ADD-ON<sup>2</sup>) in Abbildung 5-23 geplottet. Die farblichen Verläufe in den Rissflächen stellen hierbei die vorliegenden Spannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_I$  an den Rissfrontknotenpunkten dar. Bei der Rissfläche ohne ADD-ON in Abbildung 5-23 a) fällt auf, dass über die Fläche verteilt immer wieder Bereiche auftreten, bei denen die Werte der Spannungsintensitätsfaktoren deutlich von denen in den umliegenden Bereichen abweichen. Dies deutet auf die Schwankungen in den Ergebnissen an den berechneten Rissfrontknotenpunkten hin. Im Gegensatz dazu zeigt die Rissfläche in Abbildung 5-23 b) einen gleichmäßigeren Farbverlauf auf. Daraus lässt sich schließen, dass die lokalen Ausreißer bei der Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren durch die Nutzung des ADD-ON<sup>2</sup> deutlich abgeschwächt wurden. An dem Niveau der vorliegenden Spannungsintensitätsfaktoren zeigen sich jedoch keine Änderungen. Durch die Nutzung der Ausgleichsfunktionen über die ADD-ONS erfolgt lediglich eine gleichmäßigere Verteilung der  $\Delta K_I$  entlang der Rissfront.



**Abbildung 5-24:** Gegenüberstellung der Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  über die Risslänge  $\bar{a}$  am Beispiel einer CT-Probe

Um die erhaltenen Simulationsergebnisse besser einschätzen zu können, soll eine Referenzlösung herangezogen werden. Die aus dem [Mur87] bekannte analytische Berechnung nach SRAWLEY gilt als ein anerkannter Richtwert für die Charakterisierung der an der Rissfront vorliegenden Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ , bezogen auf eine CT-Probe. Die Werte der Spannungsintensitätsfaktoren beziehen sich auf die Risslänge  $\bar{a}$ , welche durch Ausplanimetrieren der einzelnen Rissflächen nach jedem Risswachstumsschritt bestimmt wurde. Wie in Abbildung 5-24 zu erkennen, stimmen die Ergebnisse der beiden Simulationen, ohne und mit Verwendung einer Ausgleichsfunktion (ADD-ON<sup>2</sup>) sehr gut mit den Ergebnissen der Referenzlösung überein. Das Ziel, eine möglichst stabile Risswachstumssimulation zu erreichen, bei der die Qualität der bruchmechanischen Auswertung gleichbleibend ist, konnte somit realisiert werden.

Je nach geometrischer Gestalt der Rissfläche und den an der Rissfront herrschenden Beanspruchungen ist es möglich, eine deutlich stabilere Risswachstumssimulation durchzuführen. Diese Programmstabilität ist insbesondere auf die regelmäßigere Formgebung des Submodells zurückzuführen.

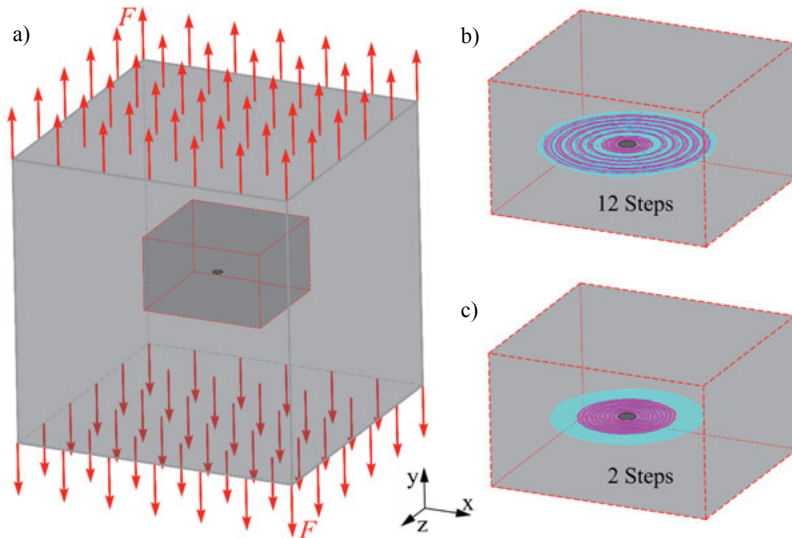


**Abbildung 5-25:** Formgebung der Submodelle während der Risswachstumssimulationen

- a) 7. Simulationsschritt ohne Verwendung einer ADD-ON Funktion
- b) 7. Simulationsschritt mit Verwendung einer quadratischen ADD-ON<sup>2</sup> Funktion

Im Hinblick auf die Formgebung der Submodelle zeigen sich im Vergleich deutliche Unterschiede bei den Simulationsberechnungen mit und ohne Verwendung einer ADD-ON Funktion. Bei einer Risswachstumssimulation zeigen die Submodelle wie in Abbildung 5-25 a) häufig starke Verzerrungen auf, wenn bei der Simulation auf die Verwendung eines ADD-ONS verzichtet wurde. Durch diesen Umstand steigt das Risiko eines Programmabbruchs deutlich an, was anhand von Untersuchungen wie zum Beispiel in Abbildung 5-22 b) bereits aufgezeigt wurde. Unter den gleichen Simulationsbedingungen und unter Verwendung eines ADD-ONS werden die Submodelle, wie in Abbildung 5-25 b) zu erkennen, weniger stark verzerrt, wodurch die Programmabbrüche reduziert werden können. Da die Anwendung der Ausgleichsfunktionen sich nicht in erster Linie auf die Rissausbreitung selbst beziehen, sondern auf die vorliegenden Werte der Spannungsintensitätsfaktoren, kann die Nutzung der ADD-ON Funktionen auf beliebige Risswachstumssimulationen mit unterschiedlichen Rissgeometrien angewendet werden. Anhand der in Abbildung 5-26 simulierten Beispiele eines Pennyshape-Cracks in einem Würfel ist der positive Effekt der unterstützenden ADD-ON Funktionen ebenfalls gut zu erkennen. Ausgehend von einem Pennyshape-Crack mit einem Durchmesser von  $\varnothing = 1,5\text{mm}$  wurden Simulationen mit und ohne Verwendung einer ADD-ON Funktion durchgeführt. Bei allen Simulationsdurchführungen konnten die Rissfronten der einzelnen Wachstumsschritte der real auftretenden Rissfrontform gut nachempfunden werden. Darüber hinaus zeigen sich erhebliche Unterschiede in der Simulationsstabilität. Analog zu der Darstellung der simulierten Rissfronten in Abbildung 5-22 geben auch hier die farblichen Kennungen der Rissfronten die Risswachstumsschritte pro neu angesetztem Simulationsdurchlauf wieder. Bei der Simulation ohne Verwendung einer ADD-ON Funktion (siehe Abbildung 5-26 a)) muss nach nahezu jedem zweiten Risswachstumsschritt die Simulation manuell neu gestartet werden, um eine Rissausbreitung in der hier aufgezeigten Größenordnung realisieren zu können. Unter Einhaltung der gleichen Randbedingungen und unter Nutzung der ADD-ON<sup>2</sup> Funktion weisen die Ergebnisse in Abbildung 5-26 a) im Hinblick auf die Stabilität deutliche Verbesserungen auf. Um eine Rissausbreitung in gleicher Größenordnung wie in Abbildung 5-26 b) zu

erzeugen, wurden lediglich zwei neu angesetzte Simulationsdurchläufe benötigt, wodurch eine Steigerung der Simulationsstabilität in diesem Fall von 12 auf 2 Steps um ca. 60 % erwirkt werden konnte.



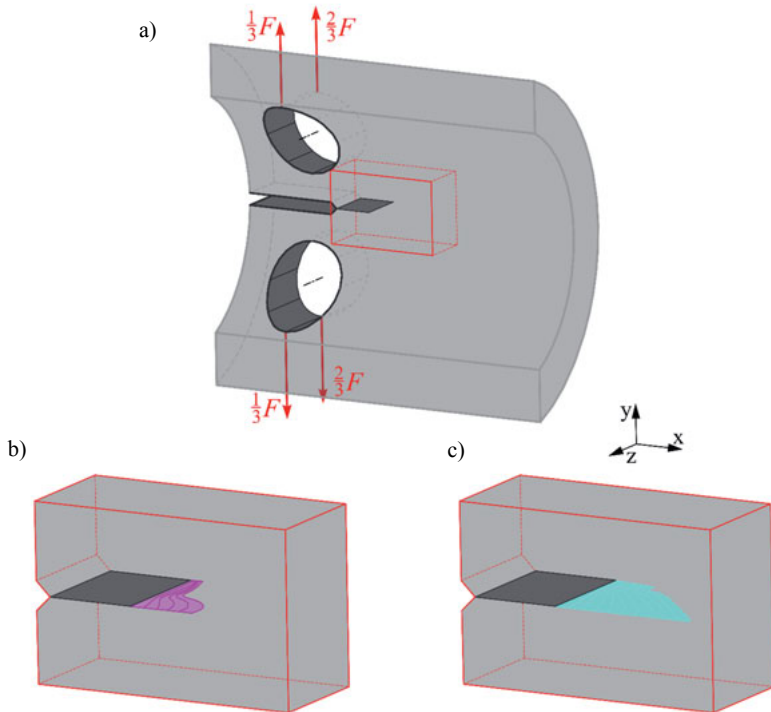
**Abbildung 5-26:** Rissausbreitung in einem beliebigen Würfel mit Pennyshape-Crack unter Verwendung des  $\sigma_I'$ -Kriteriums

- a) Würfel unter einer flächigen Belastung  $F$  senkrecht zur Rissebene
- b) Rissausbreitung ohne Verwendung einer ADD-ON Funktion
- c) Rissausbreitung mit Verwendung der ADD-ON<sup>2</sup> Funktion

### 5.5.1.2 Auswirkungen von Spline-Funktionen auf die Rissausbreitung

Auf demselben Hintergrund, nämlich der Reduzierung der Verzerrungen der Submodelle, basiert das Prinzip der Spline-Funktion. Bei einer Risswachstumssimulation können Beanspruchungen an vereinzelt Rissfrontknotenpunkten auftreten, welche nicht ausreichend sind, um eine stabile Rissausbreitung hervorzurufen. Durch den sprunghaften Übergang der Rissfrontbereiche mit erzwungenem und natürlichem Risswachstum ergeben sich ähnlich wie in Abbildung 5-25 dargestellte Submodelle. Aufgrund eines „geschmeidigeren“ Übergangs zwischen den einzelnen Rissfrontbereichen kann die Verzerrung des Submodells reduziert werden, wodurch eine Stabilisierung der Simulation erwirkt werden kann. Ein prägnantes Beispiel stellt die Axialrissrohrprobe, wie es in Abbildung 5-27 a) aufgezeigt ist, dar. Aufgrund der zweiachsigen Biegung kommt es an der Rissfront zu lokal unterschiedlichen Beanspruchungen. Zu Beginn des Risswachstums erfährt nur der Bereich der Rissfront, welcher von der Rissfläche betrachtet zur inneren Krümmung angrenzt, eine entsprechend hohe Beanspruchung, wodurch eine stabile Rissausbreitung hervorgerufen wird. Der restliche Rissfrontbereich erfährt aufgrund der deutlich geringeren Beanspruchung nur ein „erzwungenes“ Risswachstum (vgl. Kapitel 5.3.3). Durch diesen Umstand entsteht ein Sprung im Rissfront-

verlauf, welcher sich im Verlauf der weiteren Simulation „aufschaukelt“ und somit letztendlich zu einem Programmabbruch führt. Durch die Spline-Funktion kann dem ausgeprägten Übergang zwischen den beiden Rissfrontbereichen im Hinblick auf das Risswachstum entgegengewirkt werden, ohne zu sehr in das Rissausbreitungsverhalten einzugreifen. Wie in Abbildung 5-27b) zu erkennen, zeigt die Simulation ohne Verwendung der Spline-Funktionen prägnante Sprünge in den Verläufen der einzelnen Rissfronten auf, welche sich von einem auf den anderen Simulationsschritt verstärken. Durch die daraus resultierende Verformung der Submodelle kommt es letztendlich zu einem Simulationsabbruch nach nur fünf Rissausbreitungsschritten. Durch die Nutzung der Spline-Funktion kann, wie in Abbildung 5-27 c) zu erkennen, der Übergang von einem wachstumsfähigen und einem nicht wachstumsfähigen Rissfrontbereich reibungsloser gestaltet werden. Als Folge dieser Anpassung zeigt die Simulation eine realitätsnahe und zu gleich stabilere Berechnung des Risswachstums auf.



**Abbildung 5-27:** Rissausbreitungsverhalten unter einer zweiachsigen Biegung am Beispiel einer Axialrissrohrprobe

- a) Axialrissrohrprobe mit Initialriss und aufgebrachtener Belastung
- b) Rissausbreitung bei teilweise nicht wachstumsfähigen Rissfrontknotenpunkten
- c) Rissausbreitung bei teilweise nicht wachstumsfähigen Rissfrontknotenpunkten unter Verwendung einer Spline-Funktion

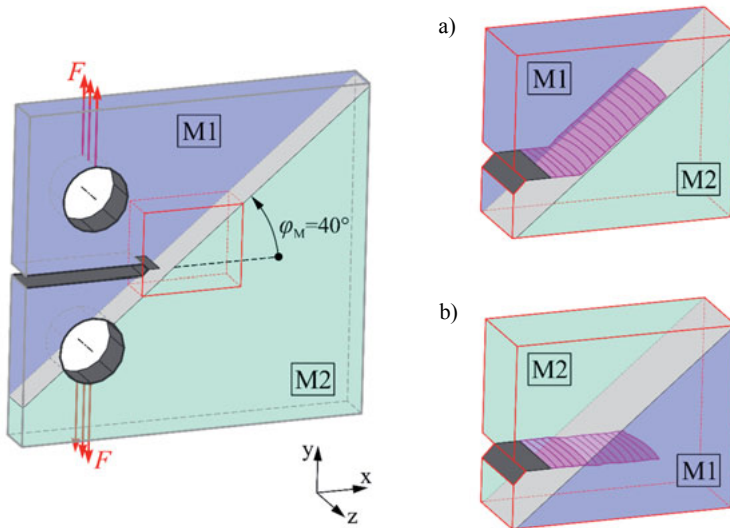
## 5.5.2 Rissausbreitung in gradierten Strukturen

Zusätzlich zu den Erweiterungen in dem Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup>, bei denen der Fokus auf die Stabilisierung der Risswachstumssimulationen gelegt wurde, zeigt die Modifikation des Programms einen weiteren Schwerpunkt auf. Hierbei liegt der Fokus auf der Berücksichtigung der im Bauteil vorliegenden Materialien, insbesondere einer bruchmechanischen Materialgradierung. Über das neue 3D-Konzept soll der Einfluss einer lokalen Materialeigenschaftsänderung auf das Rissausbreitungsverhalten mit einbezogen werden.

### 5.5.2.1 Rissausbreitungsverhalten bei einer scharfen Materialgradierung

Anhand des Beispiels einer CT-Probe (siehe Abbildung 5-28) wurden erste Berechnungen im Hinblick auf eine vorliegende Materialgradierung simuliert. Bei der untersuchten Probe wurde zunächst eine scharfe Materialgradierung unter einem Winkel von  $\varphi_M = 40^\circ$  in die Probe eingebracht. Die violetten beziehungsweise türkisfarbenen Bereiche wurden mit unterschiedlichen bruchmechanischen Kennwerten charakterisiert. Analog zu den Rissgeschwindigkeitskurven aus Abbildung 4-6 wurden dem violetten Bereich *schlechtere* bruchmechanische Kennwerte zugeordnet und dem türkisfarbenen Bereich *bessere* bruchmechanische Kennwerte. Die Änderungen beziehen sich in erster Linie auf die Schwellenwerte  $\Delta K_{I,th}$ . Die Risszähigkeiten wurden bei diesen Berechnungen bewusst extrem hoch angenommen, sodass eine möglichst ausgeprägte Ermüdungsrissausbreitung gewährleistet werden konnte. Alle weiteren Werkstoffkennwerte sind in beiden Materialbereichen unverändert geblieben, sodass von einer reinen bruchmechanischen Materialgradierung ausgegangen werden kann. Bei den beiden Materialien wurde für das Material M1 (violett) ein Thresholdwert von  $\Delta K_{I,th} = 240 \text{ N/mm}^{3/2}$  und für das Material M2 (türkis) ein Thresholdwert von  $\Delta K_{I,th} = 256 \text{ N/mm}^{3/2}$  angenommen. Zunächst wachsen in den beiden Beispielen von Abbildung 5-28 die Risse, ausgehend von dem Initialriss, rein beanspruchungsgesteuert. Für die hier aufgezeigten CT-Proben bedeutet das, dass der Riss in der Initialrissebene weiterwächst. Wie zu erwarten, tritt eine Änderung in der Rissausbreitung erst bei Erreichen der Materialgradierungsgrenze auf. Während die Gradierung in Abbildung 5-28 a) einen großen Einfluss auf die Rissausbreitungsrichtung aufzeigt, verhält es sich mit der Rissausbreitung in Abbildung 5-28 b) so, als ob überhaupt keine Materialänderungen vorliegen würden. Der Riss in a) weicht von der reinen Mode I gesteuerten Ausbreitungsrichtung ab, sobald die Rissfront die Gradierung erreicht hat. Ab diesem Zeitpunkt dominiert die Materialgradierung das Rissausbreitungsverhalten und der Riss wächst unter einer ebenen Mixed-Mode Beanspruchung entlang der Gradierungsgrenze unter einem Winkel von  $40^\circ$  weiter. Dieses Abknicken des Risses tritt ein, da der Riss ausgehend von dem bruchmechanisch *schlechteren* Material (M1) in das *bessere* Material (M2) hineinwachsen möchte. Jedoch ist der Riss stets bemüht den Weg des geringsten Widerstandes zu gehen [Sch14]. Mittels der Berechnungen der relevanten Spannungsintensitätsfaktoren nach dem neuen 3D-Konzept (vgl. Kapitel 5.4.1), kann dieser Weg der Rissausbreitung bestimmt werden. Durch die Konstellation der hier vorliegenden Beanspruchungssituation an der Rissfront, den zugeordneten Materialkennwerten und der Lage der Gradierungsgrenze erweist sich die Rissausbreitung entlang der Gradierungsgrenze als der Weg mit dem geringsten Widerstand.

Durch den Wechsel der Materialkennwerte in Abbildung 5-28 b) wächst der Riss nun ausgehend von dem bruchmechanisch *besseren* Material (M2) in das bruchmechanisch *schlechtere* Material (M1). Unter diesen Umständen zeigt sich kein Einfluss auf das Rissausbreitungsverhalten. Nahezu unbeachtet scheint der Riss die Gradierungsgrenze zu überqueren und wächst somit stets unter reiner Mode I Beanspruchung in der Initialrissebene.



**Abbildung 5-28:** Rissausbreitungsverhalten in einer CT-Probe mit einer bruchmechanischen Gradierung unter einem Winkel von  $\varphi_M = 40^\circ$

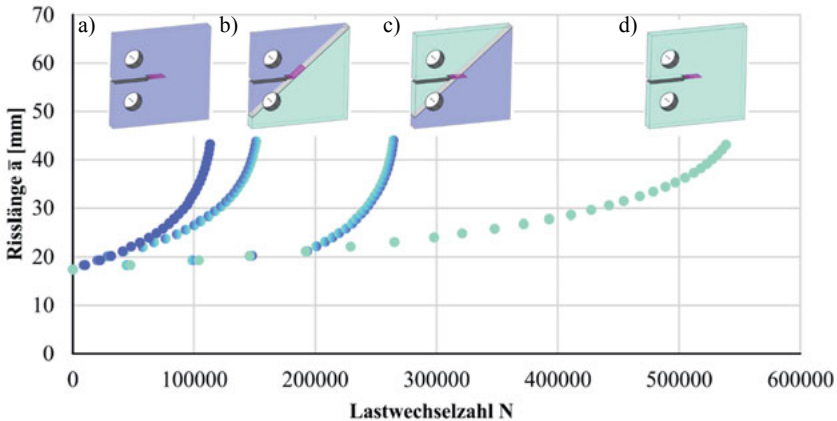
- a) Rissausbreitung ausgehend von einem bruchmechanisch *schlechteren* Material M1 in ein bruchmechanisch gesehen *besseres* Material M2
- b) Rissausbreitung ausgehend von einem bruchmechanisch *besseren* Material M2 in ein bruchmechanisch gesehen *schlechteres* Material M1

Die Simulationen haben gezeigt, dass eine augenscheinliche Änderung des Risswachstumsverhaltens nur auftritt, wenn der Riss ausgehend von dem bruchmechanisch *schlechteren* Material in das *bessere* Material hineinwachsen möchte. Was visuell nicht zu erkennen ist, ist eine zusätzliche Änderung in den erreichten Lastwechselzahlen. Um den Einfluss der Materialeigenschaften auf die Lastwechselzahlen hervorheben zu können, sind zusätzliche Simulationen an dem gleichen Probenmodell durchgeführt worden. Bei diesen Berechnungen sind homogenen Materialeigenschaften für die Probe, analog zu den Materialkennwerten für M1 und M2, berücksichtigt worden.

Die Ergebnisse der vier Simulationen (zwei Proben mit homogenen Materialeigenschaften M1 sowie M2 und zwei Proben mit bruchmechanischer Materialgradierung M1  $\rightarrow$  M2 beziehungsweise M2  $\rightarrow$  M1) sind in Abbildung 5-29 aufgezeigt. Dargestellt ist in diesem Zusammenhang die Lastwechselzahl  $N$  bezogen auf die wahre Risslänge  $\bar{a}$ . Die Risslänge wurde anhand der Flächen zwischen den einzelnen Rissfortschritten bestimmt. Hierfür sind die ein-

zelen Teilflächen ausplanimetriert, durch die Probendicke geteilt und schrittweise aufsummiert worden.

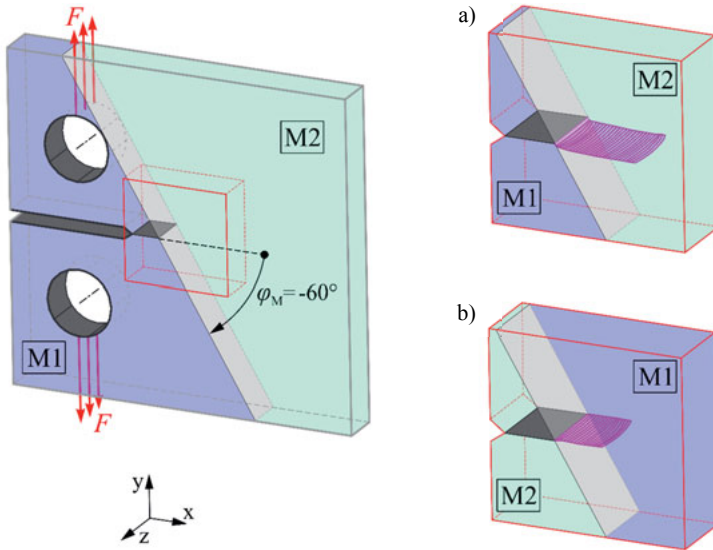
Die beiden Simulationen mit homogenen Materialeigenschaften in a) und d) zeigen, wie zu erwarten, deutliche Unterschiede in den erreichten Lastwechseln auf. Unter Verwendung des bruchmechanisch *besseren* Materials (Abbildung 5-29 d)) können bei einer Risslänge von circa 35mm fünfmal so viele Lastwechsel ertragen werden, als dies bei dem *schlechteren* Material unter a) der Fall ist. Bei einer Kombination der beiden Materialien, im Sinne einer bruchmechanischen Materialgradierung, stellen sich Lastwechselzahlen ein, die in der Größenordnung zwischen denen mit homogenen Materialien liegen. Darüber hinaus lässt sich auch der Einfluss der Materialkombinationen an sich feststellen. Es ist zu erkennen, dass das Material, in dem der Initialriss startet, den größten Einfluss auf die erreichbare Lastwechselzahl in der Struktur ausübt. Bis zur Gradierungsgrenze hat sich der größte Anteil der zu erreichenden Lastwechsel bereits eingestellt. Ab der Gradierungsgrenze steigt die Rissgeschwindigkeit unvermittelt an, sodass es im Vergleich kaum noch zu einer Erhöhung der Lastwechselzahlen kommt. Werden die beiden Simulationen mit einer Materialgradierung (Abbildung 5-29 b) und c)) gegenübergestellt, so ist zu erkennen, dass weniger Lastwechsel zu erwarten sind, wenn der Initialriss in dem *schlechteren* Material M1 startet. Dennoch zeigen beide Kurvenverläufe eine höhere ertragbare Lastwechselzahl auf als unter Verwendung der Probe mit der homogenen, *schlechteren* Materialeigenschaft, welche unter Abbildung 5-29 a) aufgezeigt ist.



**Abbildung 5-29:** Gegenüberstellung der Lastwechselzahlen bezogen auf die Risslänge in Abhängigkeit der vorliegenden unterschiedlichen bruchmechanischen Materialien am Beispiel einer CT-Probe

- a) Risswachstum in dem bruchmechanisch *schlechteren* Material
- b) Risswachstum bei einer bruchmechanischen Gradierung ausgehend von dem bruchmechanisch *schlechteren* in das bruchmechanisch *bessere* Material
- c) Risswachstum bei einer bruchmechanischen Gradierung ausgehend von dem bruchmechanisch *besseren* in das bruchmechanisch *schlechtere* Material
- d) Risswachstum in dem bruchmechanisch *besseren* Material

Dass eine grundsätzliche Aussage über das Rissausbreitungsverhalten von bruchmechanischen Gradierungen einzig und allein über die Kenntnisse der Materialkennwerte nicht zulässig ist, wird an dem Beispiel in Abbildung 5-30 ersichtlich.



**Abbildung 5-30:** Rissausbreitungsverhalten in einer CT-Probe mit einer bruchmechanischen Gradierung unter einem Winkel von  $-60^\circ$

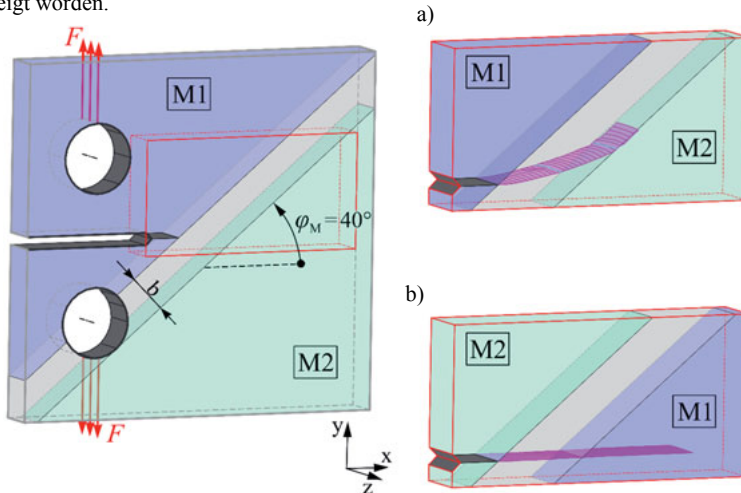
- a) Rissausbreitung ausgehend von einem bruchmechanisch *schlechteren* Material M1 in ein bruchmechanisch gesehen *besseres* Material M2
- b) Rissausbreitung ausgehend von einem bruchmechanisch *besseren* Material M2 in ein bruchmechanisch gesehen *schlechteres* Material M1

Hierbei handelt es sich ebenfalls um eine Untersuchung an einer CT-Probe. Im Gegensatz zu den bislang aufgezeigten Beispielen ist hier eine Gradierung unter einem Winkel von  $\varphi_M = -60^\circ$  eingebracht. Ausgehend von der Situation, dass sich der Initialriss in dem Materialbereich M1, also dem Bereich mit den *schlechteren* bruchmechanischen Kennwerten befindet, liegt die Vermutung nahe, dass sich der Riss zunächst in der Initialrissebene ausbreiten wird und bei Erreichen der Gradierungsgrenze entlang dieser weiterwächst. Diese Vermutung trifft jedoch nur teilweise zu. Zunächst wächst der Riss beanspruchungsgesteuert bis zur Gradierungsgrenze. Nachdem diese Grenze erreicht wurde, knickt der Riss entlang der Gradierungsgrenze ab, ändert seine Richtung jedoch bereits nach wenigen Millimetern Wachstum wieder und tendiert zu einer Rissausbreitung parallel zur Initialrissebene. Aufgrund der vorliegenden Mixed-Mode Beanspruchungssituation und dem Gradierungswinkel von  $\varphi_M = -60^\circ$  findet unmittelbar nach Erreichen der Gradierungsgrenze, mit Risswachstum entlang dieser Grenze, ein erneuter Wechsel in der ausschlaggebenden Berechnungsgröße für den Abknickwinkel statt (vgl. Kapitel 5.4.1). Bei Erreichen der Gradierungsgrenze weist der relevante

Spannungsintensitätsfaktor  $DK1$  ( $\varphi_M$ ,  $\Delta K_{I,th}(M1)$ ) zunächst einen geringeren Wert als  $DK2$  ( $\varphi_0$ ,  $\Delta K_{I,th}(M2)$ ) auf und der Riss wächst entlang der Gradierungsgrenze. Aufgrund der Änderung der Mixed-Mode Situation ergibt die Berechnung im weiteren Verlauf jedoch einen geringeren Wert für  $DK2$  als für  $DK1$ . Das bedeutet, dass, wie in Abbildung 5-16, die Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit des Gradierungswinkels  $\varphi_M$  zunächst die erste Berührung mit der Schwellenwertfunktion aufzeigt. Im weiteren Verlauf ändert sich jedoch die Situation und die Beanspruchungsfunktion in Abhängigkeit des beanspruchungsgesteuerten Winkels  $\varphi_0$  markiert die erste Berührung mit der Materialfunktion. Der Riss wächst also in Abhängigkeit des beanspruchungsgesteuerten Winkels  $\varphi = \varphi_0$  weiter. Dieser Wechsel der Beeinträchtigung auf den Rissabknickwinkel ist in Abbildung 5-30 a) anhand des Rissflächenverlaufes dargestellt. Startet der Initialriss jedoch in dem *besseren* Material M2, stellt sich ein ähnliches Bild wie bei der Berechnung in Abbildung 5-28 b) ein. Der Riss breitet sich kontinuierlich in Abhängigkeit des Abknickwinkels  $\varphi_0$  aus und wird im Risspfadverlauf durch die Materialgradierung nicht beeinträchtigt.

### 5.5.2.2 Rissausbreitungsverhalten in einem gradierten Übergangsbereich

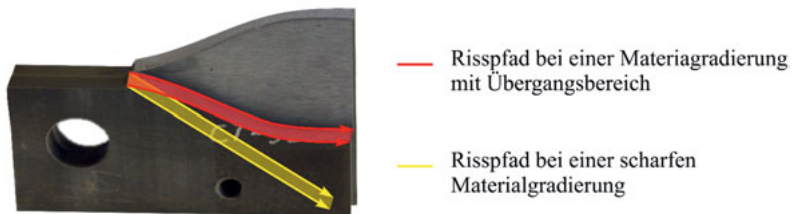
Ein ähnliches Verhalten bezüglich der Rissausbreitungsrichtung zeigt sich, wenn ein Materialgradierungsübergang wie in Abbildung 5-31 in die CT-Probe eingebracht wird. Der Übergangsbereich erstreckt sich hierbei über eine Breite von  $b = 10$  mm und ist ebenfalls um  $40^\circ$  geneigt worden.



**Abbildung 5-31:** Rissausbreitungsverhalten in einer CT-Probe mit einem bruchmechanischen Gradierungsübergang unter einem Winkel von  $40^\circ$

- a) Rissausbreitung ausgehend von einem bruchmechanisch *schlechteren* Material in ein bruchmechanisch gesehen *besseres* Material
- b) Rissausbreitung ausgehend von einem bruchmechanisch *besseren* Material in ein bruchmechanisch gesehen *schlechteres* Material

Die Materialkennwerte für den Übergangsbereich werden während der Simulation iterativ berechnet und steigen exponentiell von den Materialkennwerten des Bereiches mit dem Initialriss zu den Kennwerten des Materialbereiches auf der entsprechend gegenüberliegenden Seite des Materialgradierungsübergangs an. Startet der Riss ausgehend vom *schlechteren* Material M1, wächst der Riss, wie gehabt, zunächst Mode I gesteuert in der Initialrissebene weiter. Bei Erreichen des Übergangsbereiches wird der Riss aufgrund der Materialkennwertänderung zunächst nur leicht aus der Rissebene abgelenkt. Je weiter der Riss in den Gradierungsbereich hineinwächst, desto stärker wirkt sich die Materialgradierung auf die Rissausbreitungsrichtung aus. Der Abknickwinkel steigt exponentiell an, bis am Ende des Übergangsbereiches ein Winkel von  $40^\circ$  erreicht wird. Von diesem Zeitpunkt an ändert sich der Winkel  $\varphi_M$  nicht weiter und der Riss wächst entlang der Grenze des Übergangsbereiches zu dem Bereich mit dem *besseren* Material M2 weiter. Die Grenze selbst wird hierbei nicht überschritten. Ein scharfes Abknicken des Risses findet nicht statt. Startet der Riss in einem *besseren* Material M2 und wächst auf die Materialgrenze M1 zu, zeigt sich wie bei einer scharfen Gradierung kein Einfluss auf die Rissausbreitungsrichtung. Der Einfluss einer solchen Übergangsgradierung auf die Rissausbreitung, ausgehend von einem *schlechteren* in einen *besseren* Materialbereich, kann in experimentellen Untersuchungen nachgewiesen werden. Bei den Versuchen von [Sch14] wurden diverse Rissausbreitungsuntersuchungen an bruchmechanisch gradierten CT-Proben durchgeführt. Hierbei startete der Initialriss in dem Bereich mit den *schlechteren* bruchmechanischen Materialkennwerten. Aufgrund der Wärmebehandlung der Proben hat sich ein Übergangsbereich eingestellt, sodass sich die Materialkennwerte nicht schlagartig ändern, wie es die Annahme bei einer scharfen Materialgradierung vorsieht. Ein Vergleich zwischen einem angenommenen Risspfad bei einer scharfen Gradierung und dem Risspfad bei der tatsächlich vorherrschenden Übergangsgradierung ist in Abbildung 5-32 aufgezeigt. Durch die kontinuierliche Änderung des Rissabknickwinkels schlägt der Riss einen *flacheren* Verlauf ein, als dies bei einer scharfen Materialgradierung der Fall wäre. Somit steuert der Abknickwinkel  $\varphi$  schrittweise dem gewünschten Materialgradierungswinkel  $\varphi_M$  zu, bis es zu einer instabilen Rissausbreitung mit Versagen der Probe kommt. Dieses Rissverhalten konnte mit dem hier modifizierten Simulationsprogramm ebenfalls aufgezeigt werden. Die Simulationen, bei denen vorausgesetzt wurde, dass sich die Materialkennwerte in einem Übergangsbereich exponentiell von Material M1 zu Material M2 ändern, zeigen somit gute Übereinstimmungen mit den experimentellen Untersuchungen auf.

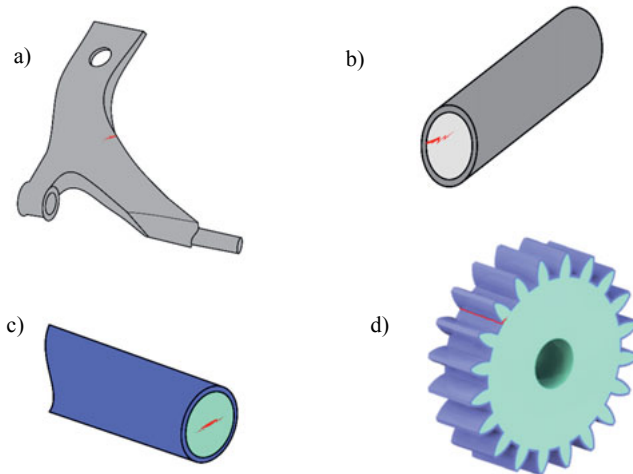


**Abbildung 5-32:** Vergleich des Risswachstum in einer CT-Probe bei einer scharfen und einer Übergangsgradierung, ausgehend von dem bruchmechanisch *schlechteren* in das bruchmechanisch *bessere* Material nach [Sch14]

Durch die Bereitstellung von zwei unterschiedlichen Ansätzen für die Berechnung einer Rissausbreitung in bruchmechanisch gradierten Strukturen kann je nach vorliegendem Fall von einer scharfen Materialgradierung oder einer Gradierung mit Übergangsbereich ausgegangen werden. Aufgrund neuerer Verfahrenstechniken (zum Beispiel Induktionshärten) für die Erzeugung einer bruchmechanischen Gradierung (vgl. Kapitel 4.2.2) kann der Übergang von einem Materialbereich in einen anderen auf ein Minimum reduziert werden. Bei solchen nahezu nicht existenten Übergangsbereichen bietet es sich an, Simulationen unter der Annahme einer scharfen Materialgradierung durchzuführen. Erstreckt sich der Gradierungsbereich jedoch über mehrere Millimeter, so ist es sinnvoll, bei der Bestimmung des Risspfades den Übergangsbereich mit einzubeziehen. Durch die genaue Abbildung des Übergangsbereiches und der damit verknüpften Materialänderung weisen die Simulationen wie in Abbildung 5-31 a) realitätsnahe Übereinstimmungen des Risspfades mit vergleichbaren experimentellen Untersuchungen auf.

## 6 PRAXISBEZOGENE ANWENDUNGEN VON RISSWACHSTUMSSIMULATIONEN

Aufgrund der zumeist zyklischen Belastungen auf rissbehaftete Bauteile erfährt die Rissfront eine zyklische Beanspruchung, wodurch es zu einem Risswachstum kommen kann. Die von der Beanspruchung abhängige Rissausbreitungsrichtung kann dabei die unterschiedlichsten Wege einschlagen und zu einem frühzeitigen Versagen der Struktur führen. Dabei spielt es keine Rolle, ob es sich bei dem Bauteil um einen Querlenker, ein Rohr, einen Bolzen oder ein Zahnrad handelt (vgl. Abbildung 6-1).



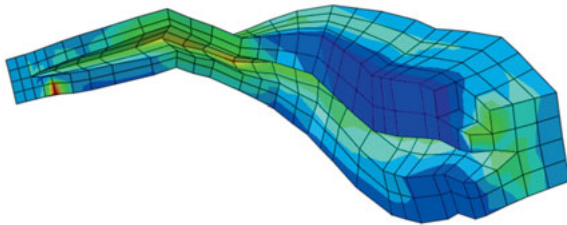
**Abbildung 6-1:** Beispiele von Bauteilen und Strukturen mit Rissbildung

- a) Querlenker eines Kraftfahrzeugs mit Außenrissen
- b) Rohr mit Riss ausgehend von der Innenseite des Rohres
- c) Oberflächen gehärteter Bolzen mit Innenriss
- d) Induktionsgehärtetes Zahnrad mit Anriss an einer Zahnflanke

Daher ist es erforderlich, Kenntnisse darüber zu haben, in welche Richtung sich der Riss ausbreiten wird und wie lange das Bauteil nach dem Detektieren des Risses noch im Einsatz verbleiben kann. Ein Riss simulationsprogramm sollte demnach in der Lage sein, das Risswachstum in jeglichen vorliegenden Bauteilgeometrien sowie mit variierenden Risspositionen berechnen zu können. Eine solche Berechnung sollte in Abhängigkeit der vorliegenden Materialeigenschaften realitätsgetreu durchführbar sein. Wünschenswert ist es in diesem Zusammenhang, ein Programm zu nutzen, mit dem möglichst stabile Simulationen und zugleich gute Ergebnisse erzeugt werden können. Eine besondere Herausforderung sind in diesem Zusam-

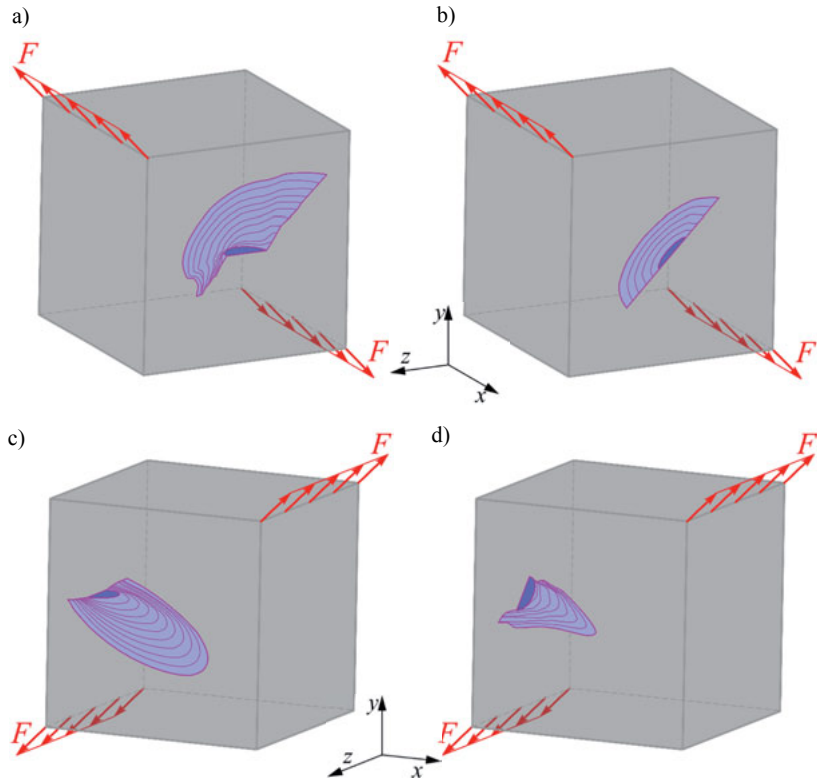
menhang komplexe, dreidimensionale Beanspruchungen an der Rissfront, welche ein daraus resultierendes dreidimensionales Risswachstum zur Folge haben.

In diesem Kapitel der vorliegenden Arbeit sollen anhand von exemplarischen Risswachstumsimulationen die Auswirkungen der Modifizierungen des Simulationsprogramms ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup> behandelt werden. Um ein möglichst weites Spektrum an komplexem Risswachstum aufzeigen zu können, werden zunächst würfelförmige Strukturen herangezogen, welche jeweils mit einem halbelliptischen Oberflächenriss versehen sind. Bei den unter Abbildung 6-3 aufgezeigten Rissausbreitungen sind sowohl die Belastungen als auch die Orientierung des Initialrisses variiert worden. Auf diesem Wege ist es möglich, zu zeigen, wie sich komplexe Rissausbreitungen in einer beliebigen Struktur einstellen können. Wie bereits in Kapitel 3.1 unter Abbildung 3-2 aufgezeigt, kann sich bereits durch eine Orientierungsänderung des Initialrisses bei gleichbleibender Belastung aus einer reinen Mode I gesteuerten Rissbeanspruchung eine komplexe räumliche Mixed-Mode-Situation an der Rissfront einstellen. Diese bewirkt nun ebenfalls eine komplexe 3-dimensionale Rissausbreitung, welche über eine ebene Rissbetrachtung nicht mehr realitätsgetreu abgebildet werden kann. Durch die Verdrehung der Rissfront ist eine Einbringung der erweiterten Rissfront in das globale Finite-Elemente-Modell nach jedem Berechnungsdurchlauf sehr anspruchsvoll. Insbesondere bei der Erstellung des für die Rissfrontberechnung benötigten Submodells führen ungleichmäßige Verteilungen der neuen Rissfrontknotenpunkte zu einem frühzeitigen Simulationsabbruch.



**Abbildung 6-2:** Submodell einer komplexen 3-dimensional ausgerichteten Rissfront

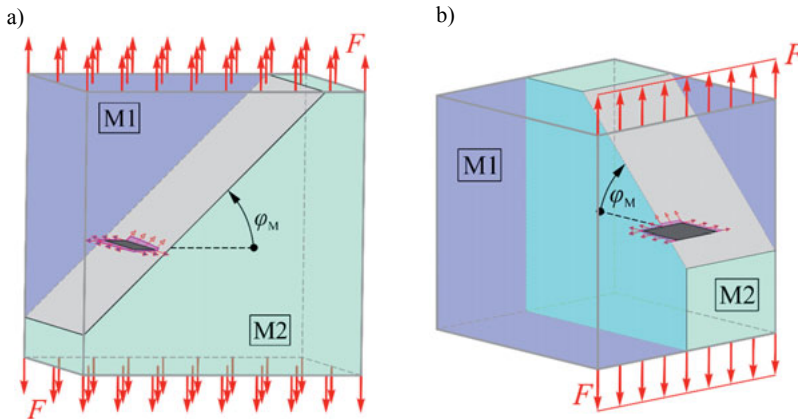
Da die Gestalt der Submodelle von der Form der Rissfront abhängig sind (vgl. Abbildung 6-2), treten bei dreidimensionalen Rissfrontverläufen zumeist unsymmetrisch verformte Submodelle auf. Kommt es durch komplexe Risserweiterungen dann auch noch zu Unregelmäßigkeiten entlang der Rissfront, werden diese Finite-Elemente-Modelle häufig zu stark verzerrt, sodass es zu Simulationsabbrüchen kommt. Durch die Implementierung der unter Kapitel 5.3.2 und 5.3.3 aufgeführten Modifizierungen ist es möglich, auch bei komplexen Rissausbreitungsvorgängen eine stabile Risswachstumssimulation zu gewährleisten. Diese Erkenntnis wird anhand der Rissausbreitungen in Abbildung 6-3 verdeutlicht. Trotz zumeist stark verdrehter Rissfrontausprägungen zeigen die Simulationsdurchführungen eine deutliche Optimierung der Simulationsstabilität auf.



**Abbildung 6-3:** Rissausbreitungsverhalten in Abhängigkeit der Risslage und der Belastungsrichtung  
 a) Belastungsrichtung um  $45^\circ$  gedreht zur Rissfläche  
 b) zusätzliche Drehung der Rissfläche  
 c) Belastungsrichtung um  $45^\circ$  geneigt zur Rissfläche  
 d) zusätzliche Drehung der Rissfläche

Durch weitere Modifikationen ist es möglich, den Gradierungseinfluss auf die Rissausbreitung nun ebenfalls zu berücksichtigen. Somit kann in Strukturen, in denen eine Materialgradierung vorliegt, bestimmt werden, inwiefern sich diese Gradierung auf das Rissausbreitungsverhalten bemerkbar macht und welche lokalen Teilabschnitte der Rissfront betroffen sind. Abbildung 6-4 zeigt zwei Beispiele auf, bei denen sich der Gradierungseinfluss nicht auf die gesamte Rissfront auswirkt, sondern lediglich auf einen lokalen Anteil der Rissfront beschränkt. Bei diesen exemplarischen Rissausbreitungssimulationen wurden jeweils zwei Materialbereiche M1 und M2 definiert, wobei der Riss stets in dem bruchmechanisch *schlechteren* Material M1 eingebracht ist. Die Materialgrenze zu dem bruchmechanisch *besseren* Material M2 ist an einzelnen Rissfrontabschnitten bereits erreicht. Die Materialkennwerte sowie der Gradierungswinkel  $\varphi_M$  sind für diese Beispiele frei gewählt. Bei den Thresholdwerten

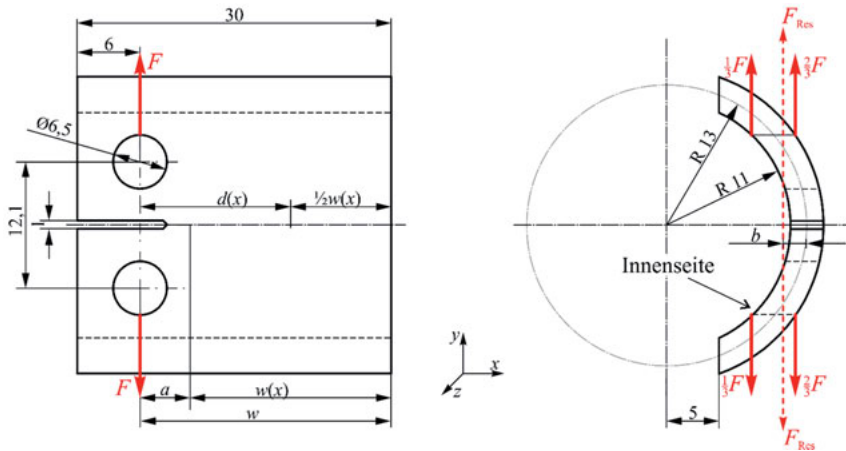
liegen die Werte für  $\Delta K_{I,th}(M1) = 20 \text{ N}/(\text{mm}^{3/2})$  und  $\Delta K_{I,th}(M2) = 200 \text{ N}/(\text{mm}^{3/2})$ . Die Materialgradierung ist mit einem Winkel  $\varphi_M = 45^\circ$  festgelegt. Zunächst wird in Abbildung 6-4 a) von einem innen liegenden Riss mit einem Rechteckquerschnitt ausgegangen. Hierbei liegt nur der zur Gradierungsgrenze zugewandte Rissfrontbereich in dem Einflussbereich der Materialgradierung. Bei der aufgetragenen Art der Belastung wird der Riss so beansprucht, dass ein Risswachstum in einem homogenen Materialgefüge in der Rissebene stattfindet. Lediglich die Kante des Risses, welche sich direkt an der Gradierungsebene befindet, wird im Risswachstum durch die Gradierung insofern beeinflusst, dass es dort zu einem Abknicken des Risses entlang der Gradierungsebene kommt. Ähnliches Verhalten ist auch in dem Beispiel unter Abbildung 6-4 b) zu erkennen. Hier wird das Rissausbreitungsverhalten an einem Oberflächenriss untersucht. Die Materialgradierung zieht sich hier nicht durch die gesamte Struktur, sondern umfasst lediglich einen Teilbereich. Somit kann es, wie in Abbildung 6-4 b) zu erkennen, dazu kommen, dass entlang der Rissfront sowohl ein homogenes Materialfeld als auch eine lokale Materialgradierung vorliegt. Hierdurch bedingt erfährt nur ein kleiner Rissfrontbereich eine Beeinflussung der Materialgradierung. Aufgrund der aufgetragenen Belastung wird auch in diesem Beispiel zunächst von einer Rissausbildung in der Rissebene ausgegangen. An dem Rissfrontbereich, an dem bereits die Gradierungsgrenze erreicht wird, kommt es aufgrund des Materialeinflusses zu einem lokalen Abknicken des Risses. Teilabschnitte der Rissfront wachsen somit beanspruchungsgesteuert und während sich andere Abschnitte beeinflussen durch die Materialgradierung ausbreiten. Durch diesen Umstand „spaltete“ sich der Riss lokal auf. Im weiteren Verlauf würden somit zwei unterschiedliche Rissausbildungsebenen eingeschlagen werden.



**Abbildung 6-4:** Rissausbreitungsverhalten bei lokaler Materialgradierungsbeeinflussung  
a) Innenliegender Riss mit einseitigem Kontakt zur Materialgradierungsgrenze  
b) Spaltung der Rissfront aufgrund lokaler Materialgradierung bei Wachstum eines Oberflächenrisses

## 6.1 Einsatz von Risswachstumssimulationen zur Unterstützung von Evaluierungen anhand experimenteller Untersuchungen

Numerische Risswachstumsuntersuchungen werden häufig genutzt, um bereits aufgetretene Schadensfälle zu rekonstruieren und mögliche Schadensursachen zu detektieren beziehungsweise eine Abschätzung der noch ertragbaren Lastwechsel  $N$  in Abhängigkeit der Risslänge  $a$  zu geben. Daher ist für einen Großteil der Risswachstumssimulationen das Wissen über die Materialkennwerte des verwendeten Werkstoffes notwendig. Diese werkstoffabhängigen Größen wie der Schwellenwert  $\Delta K_{I,th}$  gegen Rissausbreitung, die Risszähigkeit  $\Delta K_{Ic}$  und die Risswachstumsgeschwindigkeit  $da/dN$  werden zum Beispiel über experimentelle Überprüfungen ermittelt. Zumeist werden solche Untersuchungen an Standardproben wie der CT-Probe durchgeführt. Für die Ermittlung der Materialkennwerte ist die Kenntnis des probenabhängigen Geometriefaktors  $Y$  unumgänglich. Für die Bestimmung dieses zuletzt genannten Faktors kann wiederum ein Riss simulationsprogramm genutzt werden. Da der Geometriefaktor von der Geometrie der Struktur, der Risslage und -anordnung sowie der Lasteinleitung nicht aber von dem Werkstoff abhängig ist, muss für jede Probenform eine neue Geometriefaktorfunktion ermittelt werden.

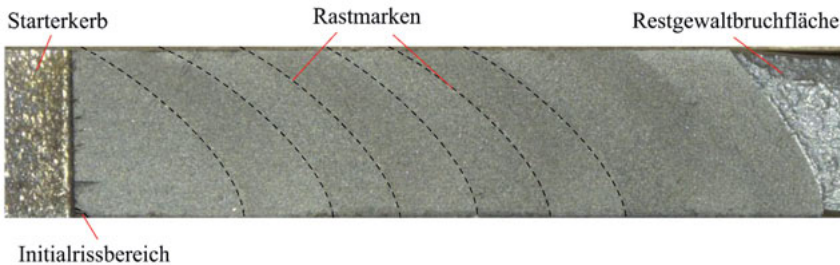


**Abbildung 6-5:** Abmessungen einer 30 x 4 – Axialrissrohrprobe

Im Rahmen dieser Arbeit sind Risswachstumssimulationen an Sonderproben durchgeführt worden, um das Rissausbreitungsverhalten und die entsprechenden Geometriefaktorfunktionen zu ermitteln. Die zu untersuchende Probengeometrie (siehe Abbildung 6-5) stellt eine Axialrissrohrprobe dar, welche von WIEDEMEIER in [Wie11] entwickelt wurde.

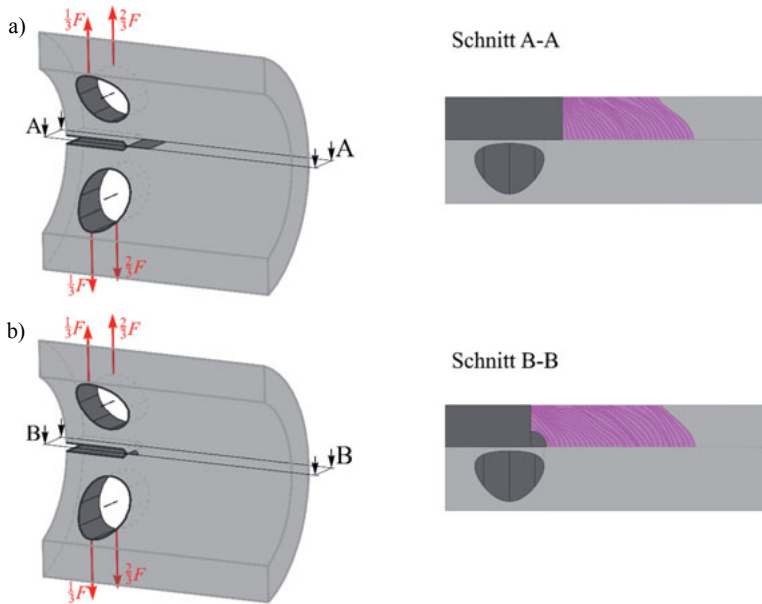
### 6.1.1 Numerische Ermittlung von Einflüssen auf die Ermüdungsrissausbreitung in einer Axialrissrohrprobe

Durch die räumliche Krümmung liegt bei der Probe keine gleichmäßige Krafteinleitung über die Kontaktfläche der Lasteinleitungsbohrung bei experimentellen Ermittlungen der Materialkennwerte vor. Nach Untersuchungen in [Wie11] ist es daher zulässig, für die Simulationen von Rissausbreitungen eine ein Drittel zu zwei Drittel Kraftaufteilung an den Rändern der Bohrungen, wie sie in Abbildung 6-5 aufgezeigt sind, anzunehmen. Die durch die Krafteinleitung in Verbindung mit der Krümmung der Probe hervorgerufenen Hebelwirkungen bewirken eine zweiachsige Biegebeanspruchung auf den Restquerschnitt der Probe, welche einen großen Einfluss auf die Entwicklung des Initialrisses ausübt (vgl. Kapitel 3.2). Durch die linear steigende Beanspruchung entlang der Starterkerbe bildet sich bei experimentellen Untersuchungen ein viertelkreis-förmiger Eckenriss auf der Innenseite der konkaven Krümmung an dem Starterkerb der Probe, wie Abbildung 6-6 zeigt.



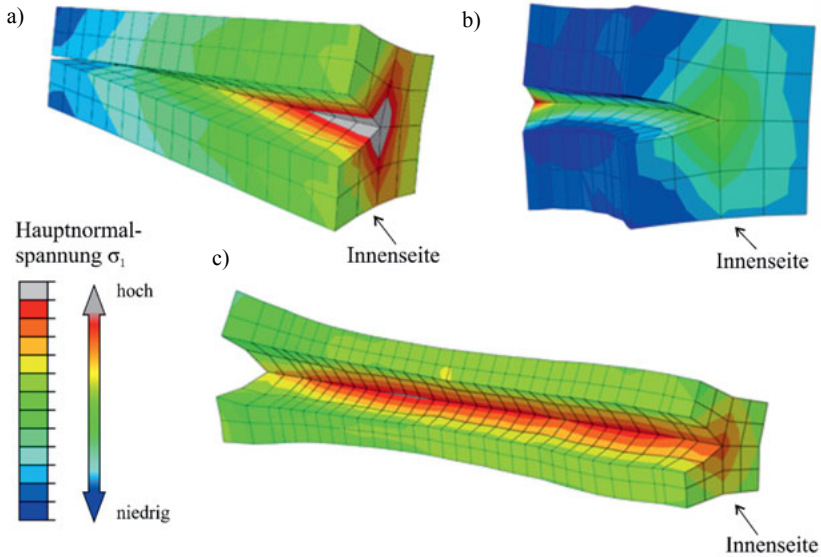
**Abbildung 6-6:** Bruchfläche einer Axialrissrohrprobe

Ziel dieser Untersuchungen ist es, das Vorlaufen des Risses während der Ermüdungsrissausbreitung zu reduzieren, indem der Einfluss der zweiachsigen Biegung zunächst identifiziert und eliminiert wird. Aufgrund dieser Feststellung sind zunächst Risswachstumssimulationen mit dem Programm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> durchgeführt worden, um den Einfluss auf die Rissausbreitung in Abhängigkeit der Form des Initialrisses und der Art der eingebrachten Last zu identifizieren. Zu Beginn wird, wie von [Wie11] ausgeführt, bei der Simulation des Risswachstums von einem durchgehenden Initialriss ausgegangen (siehe Abbildung 6-7 a)). Aufgrund der bereits erwähnten ungleichmäßigen Beanspruchungsverteilung entlang der Rissfront kommt es zu einem einseitigen Vorlaufen des Risses an der Innenseite der Probe. Im weiteren Verlauf der Simulation nähert sich die Form der Rissfront denen aus experimentellen Untersuchungen bekannten Rissfrontverläufen an (vgl. Abbildung 6-6).



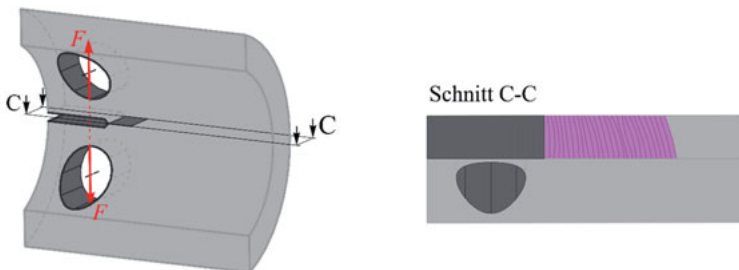
**Abbildung 6-7:** Einfluss der Form des Initialrisses auf die Rissausbreitung in einer Axialrissrohrprobe  
 a) durchgehender Initialriss  
 b) viertelkreis-förmiger Eckeninitialriss

Des Weiteren wurde ein viertelkreis-förmiger Eckenriss wie in Abbildung 6-7 b) an der Starterkerbe als Initialriss angenommen und ebenfalls eine Rissausbreitungssimulation durchgeführt. Die Rissverläufe zeigen durchweg sehr gute Übereinstimmungen mit den aus den experimentellen Untersuchungen bekannten Verläufe. Durch die Betrachtung der Spannungsverteilung entlang der Rissfronten ist der sich einstellende Rissfrontverlauf plausibel zu erklären. Die in Abbildung 6-8 dargestellten Spannungsbilder geben die Spannungsverteilung entlang der Rissfront wieder, wobei die Kenntnis der Höhe der vorliegenden Spannungen an dieser Stelle irrelevant sind. In Abbildung 6-8 a) ist zunächst die Spannungsverteilung des Submodells bei einem durchgehenden Initialriss dargelegt. Es ist zu erkennen, dass die Beanspruchung an der Innenseite des Risses deutlich höher ist als an der Außenseite. Unter der Annahme, dass der Riss von der Ecke an der Innenseite startet, zeigen die Spannungsbilder (Abbildung 6-8 b)) bereits zu Beginn des Risswachstums eine gleichmäßigere Spannungsverteilung entlang der Rissfront, was bei einem natürlichen Risswachstum so zu erwarten ist. Bei beiden Simulationen stellt sich im Laufe der Rissausbreitung eine nahezu gleichmäßige Spannungsverteilung entlang der Rissfront (Abbildung 6-8 c)) ein.



**Abbildung 6-8:** Spannungsbilder der Rissfront-Submodelle  
a) 1. Schritt bei durchgehendem Initialriss  
b) 1. Schritt bei viertelkreis-förmigem Initialriss  
c) 37. Schritt bei viertelkreis-förmigem Initialriss

Ein weiterer Ansatz, um eine Axialrissrohrprobe für die Ermittlung von Materialkennwerten zu nutzen, ist ein modifiziertes Axialrissprobenkonzept 2.0, welches von WIEDEMEIER entwickelt worden ist [WDK17]. Anhand von Optimierungen bei der Einleitung der Kraft in die Axialrissrohrprobe soll es ermöglicht werden, den zweiachsigen Biegeanteil auf einen einachsigen zu reduzieren. Die Krafteinleitung wird dahingehend angepasst, dass die Kraftwirkungsline mittig zum Probenquerschnitt C-C eingeleitet wird (siehe Abbildung 6-9), so dass der Hebelarm  $b$  entsprechend Abbildung 6-5 verschwindet.



**Abbildung 6-9:** Risswachstumssimulation einer Axialrissrohrprobe nach dem erweiterten Axialrissrohrprobenkonzept 2.0 von WIEDEMEIER

Trotz dieser Maßnahme zeigen die Rissverläufe in Abbildung 6-9, ähnlich wie bei den beiden vorangegangenen Risswachstumsuntersuchungen mit einer unsymmetrischen Lasteinleitung bei der Axialrissrohrprobe (Abbildung 6-7), ein leichtes Vorlaufen der Rissfront an der Innenseite. Dies deutet daraufhin, dass es noch weitere Einflüsse bei dieser Probengestaltung geben muss, die ein einseitiges Vorlaufen der Rissfront begünstigen.

### 6.1.2 Bestimmung einer Masterkurve für Axialrissrohrproben

Ein weiteres Einsatzgebiet für numerische Risswachstumssimulationen bietet die Bestimmung von Geometriefaktorfunktionen für einzelne Probengeometrien. In den nun folgenden Berechnungen liegt der Fokus darauf, eine Masterkurve für Axialrissrohrproben zu definieren. Diese Funktion soll, unabhängig der vorliegenden Radien, für alle Axialrissrohrproben einsetzbar sein und somit die Bestimmung der bruchmechanischen Materialkennwerte anhand dieser Proben vereinfachen. Bei den hier angenommen Berechnungen wird weiterhin von einer ungleichmäßigen Krafteinleitung über die Kontaktflächen der Lasteinleitungsbohrung ausgegangen (vgl. Abbildung 6-5).

Für die Bestimmung einer Geometriefaktorfunktion sind neben der Form und der Lage des Initialrisses auch die geometrischen Abmessungen der Probe sowie die vorherrschende Beanspruchung an der Rissfront relevant. Die Masterkurve soll unter Beachtung dieser Kriterien so bestimmt werden, dass sie auf weitere Axialrissrohrproben übertragbar ist. Für die Bestimmung der Geometriefaktorfunktion kann der Ansatz:

$$Y = \frac{K_I}{\sigma_{\text{Lig}} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} \quad (6-1)$$

verwendet werden.

Im Speziellen wird hier ein Ansatz überprüft, der von einer geschickten Wahl der Nennspannung  $\sigma_{\text{Lig}}$  des Restligamentes ausgeht. Die Idee, die hiermit verfolgt wird, ist, dass durch eine Aufschlüsselung der Spannung in einzelne Spannungsanteile der Einfluss der geometrischen Abmessungen aus dem Geometriefaktor herausgezogen werden kann. Dafür wird die Spannung  $\sigma_{\text{Lig}}$  in die Anteile  $\sigma_{\text{Zug}}$ ,  $\sigma_{\text{Bx}}$  und  $\sigma_{\text{Bz}}$  zerlegt. Analog zu den Angaben aus Abbildung 6-5 lassen sich die Spannungen mit:

$$\sigma_{\text{Zug}} = \frac{F}{t \cdot w(x)} \quad (6-2)$$

$$\sigma_{\text{Bx}} = \frac{F \cdot b}{W_{\text{Bx}}(x)} \quad \text{mit } W_{\text{Bx}}(x) = \frac{t^2 \cdot w(x)}{6} \quad (6-3)$$

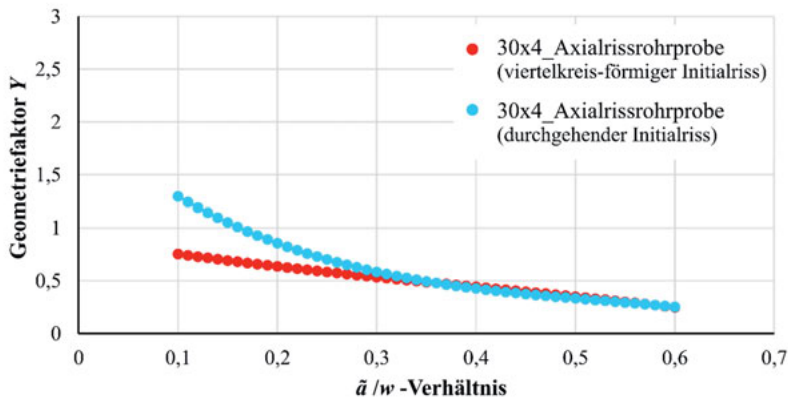
$$\sigma_{\text{Bz}} = \frac{F \cdot d}{W_{\text{Bz}}(x)} \quad \text{mit } W_{\text{Bz}}(x) = \frac{t \cdot w(x)^2}{6} \quad (6-4)$$

berechnen. Die Widerstandsmomente  $W_{\text{Bx}}(x)$  und  $W_{\text{Bz}}(x)$  beziehen sich dabei auf die Länge  $w(x)$  sowie die Dicke  $t$  des Restligamentes in der Probe. Aufgrund der gekrümmten Rissfronten ist eine eindeutige Länge des Restligamentes  $w(x)$  beziehungsweise der Risslänge  $a$  nicht gegeben. Aus diesem Grund werden zu jedem Simulationsschritt die entsprechenden Rissflä-

chen ausplanimetriert und somit eine gemittelte Risslänge  $\bar{a}$  bestimmt. Über diese Größenangabe kann die Restligamentlänge  $w(x)$  sowie der Hebelarm  $d(x)$  (siehe Abbildung 6-5) bestimmt werden. Die Kraft  $F$  ergibt sich aus der äußeren Belastung auf die Probe, welche durch eine ein Drittel zu zwei Drittel Krafteinleitung erfolgt. Durch die explizite Beachtung der einzelnen Spannungsanteile und den damit verbunden geometrischen Einflüssen kann der Geometriefaktor mit:

$$Y_{Axi} = \frac{K_I}{\sigma_{Lig} \cdot \sqrt{\pi \cdot \bar{a}}} = \frac{K_I}{(\sigma_{Zug} + \sigma_{Bx} + \sigma_{Bz}) \cdot \sqrt{\pi \cdot \bar{a}}} \quad (6-5)$$

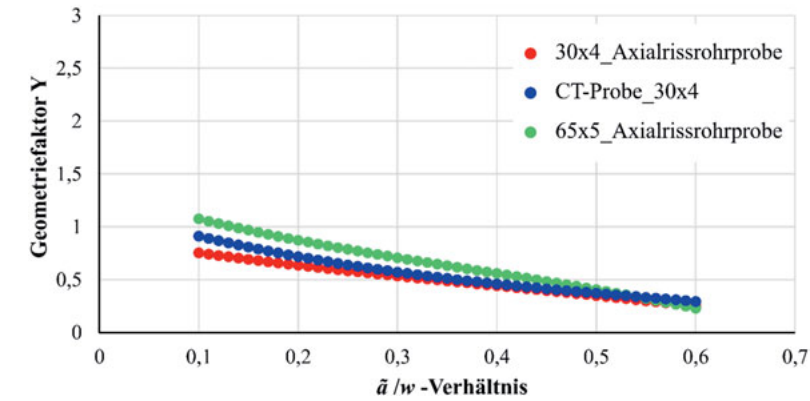
für jeden Risswachstumsschritt ermittelt werden. Der einfließende Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  ergibt sich hierbei jeweils aus dem Mittelwert aller  $K_{I,k}$  ( $k$  = Anzahl der Knotenpunkte) über die momentane Rissfront  $n$ .



**Abbildung 6-10:** Geometriefaktorfunktionen nach einer neuen Berechnungsgrundlage, für Axialrissrohrprobe 30 x 4 mit unterschiedlichen Ansätzen für die Initialrissflächen

Da, wie bereits in Kapitel 6.1.1 erwähnt, experimentelle Untersuchungen an Axialrissrohrproben aufgezeigt haben, dass das Risswachstum von einem Eckenriss aus startet, wurde bei den Simulationen zunächst ebenfalls von einem viertelkreis-förmigen Initialriss ausgegangen. Aufgrund der Komplexität bei der Auswertung über die gesamte Rissfront eines jeden einzelnen Risswachstumsschrittes wurden zusätzlich Simulationen mit durchgehenden Initialrissen an den Kerben als Referenz herangezogen. Mit diesen beiden Ausgangssituationen und dem Berechnungsansatz für den Geometriefaktor nach Gleichung (6-5) sind die in Abbildung 6-10 aufgezeigten Geometriefaktorfunktionen bestimmt worden. Die beiden Kurvenverläufe zeigen ab einem  $\bar{a}/w$ -Verhältnis von 0,3 bereits sehr gute Übereinstimmungen auf. Bei kleineren  $\bar{a}/w$ -Verhältnissen zeigen sich noch kleine Differenzen, die höchstwahrscheinlich mit der Bestimmung der Risslänge  $\bar{a}$  und den gemittelten Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  im Zusammenhang stehen. Um eine Aussage für die Bestimmung einer allgemeinen Masterkurve für die Geometriefaktorfunktion von Axialrissrohrproben treffen zu können, müssen noch weitere Geometriefaktorfunktionen mit anderen Probenabmessungen berechnet werden. Als eine wei-

tere Referenzfunktion wird zunächst eine CT-Probe mit Abmessungen analog zu den bereits untersuchten Axialrissrohrproben 30 x 4 herangezogen. Um den geometrischen Einfluss bei der Geometriefaktorbestimmung einfließen zu lassen, wird zudem eine Axialrissrohrprobe mit den Abmessungen 65 x 5 (Außendurchmesser = 65mm, Dicke = 5mm) berechnet. Bei der Risswachstumssimulation der CT-Probe startet die Simulation ausgehend von einem durchgehenden Initialriss, und bei den Axialrissrohrproben 65 x 5 sowie 30 x 4 wird von einem viertelkreis-förmigen Initialriss ausgegangen. Diese Überlegung bezüglich der Initialrisse wurde aufgrund der Erkenntnisse aus experimentellen Untersuchungen getroffen.



**Geometriefaktorfunktionen**

Axialrissrohrprobe 30x4:	$Y = -0,9788 \cdot \left(\frac{\tilde{a}}{w}\right) + 0,8356$
Axialrissrohrprobe 65x5:	$Y = -1,613 \cdot \left(\frac{\tilde{a}}{w}\right) + 1,2041$
CT-Probe 30x4:	$Y = -1,189 \cdot \left(\frac{\tilde{a}}{w}\right) + 0,9601$

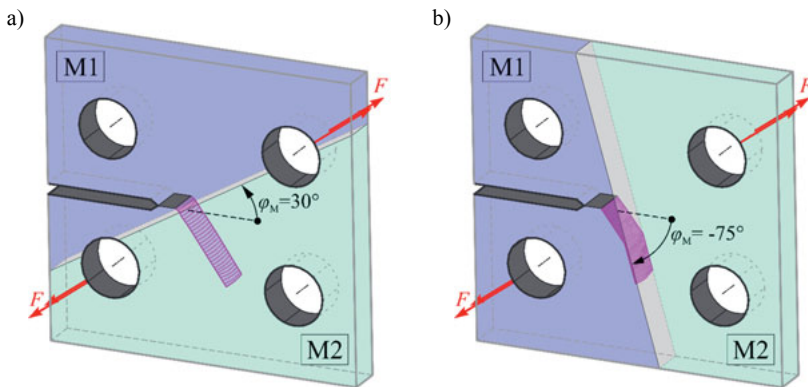
**Abbildung 6-11:** Geometriefaktorfunktionen nach der neuen Berechnungsgrundlage für unterschiedliche Axialrissrohrproben im Vergleich zu einer CT-Probe

Abbildung 6-11 fasst die Ergebnisse der Risswachstumssimulationen in Bezug auf die Geometriefaktoren zusammen. Die Kurvenverläufe der Axialrissrohrproben zeigen gute Übereinstimmungen mit der ebenfalls simulierten Referenz-CT-Probe auf. Die ermittelten Geometriefaktorfunktionen befinden sich in einem akzeptablen Toleranzbereich von ca. 2%.

Der hier verfolgte Ansatz zur Berechnung der Geometriefaktorfunktion von Axialrissrohrproben bietet somit eine gute Ausgangslage für die Bestimmung einer Masterkurve für Axialrissrohrproben.

## 6.2 Einfluss einer Materialgradierung auf das Risswachstum in einem Zahnrad

Die Herausforderung bei realen Strukturen und Bauteilen ist unter anderem dadurch gegeben, dass nicht davon ausgegangen werden kann, dass sich ein Riss stets in einer vorgegebenen Richtung ausbreitet und so unter optimalen Bedingungen auf eine mögliche Gradierungsgrenze trifft, wie diese in den Beispielen unter Kapitel 5.5.2 aufgezeigt ist. In vielen Fällen erstreckt sich der Riss beliebig gedreht oder abgelenkt durch das Bauteil und trifft dementsprechend aus unterschiedlichen Richtungen auf eine mögliche Gradierungsgrenze. Vereinfacht lassen sich solche Einflüsse an Compact Tension Mixed Mode-Proben (CTMM-Proben) aufzeigen.



**Abbildung 6-12:** Rissausbreitungsverhalten in einer CTMM-Probe mit einer bruchmechanischen Gradierung

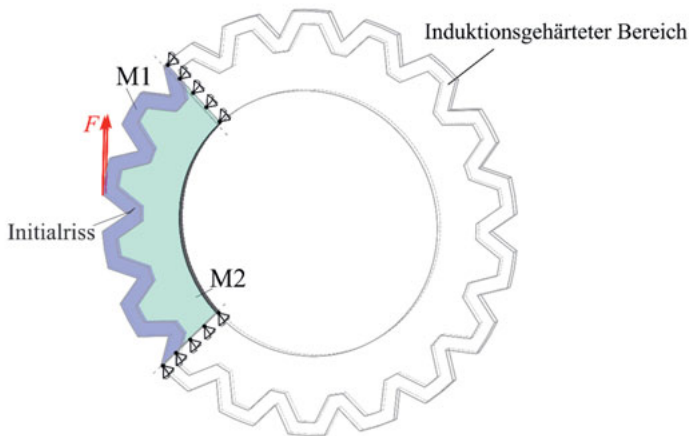
- Rissausbreitung ausgehend von einem bruchmechanisch *schlechteren* Material in ein bruchmechanisch gesehen *besseres* Material mit  $\varphi_M = 30^\circ$
- Rissausbreitung ausgehend von einem bruchmechanisch *schlechteren* Material in ein bruchmechanisch gesehen *besseres* Material mit  $\varphi_M = -75^\circ$

Abbildung 6-12 zeigt, wie Risse in einer CTMM-Probe aufgrund der vorherrschenden Beanspruchungen aus der Initialrissebene abknicken, noch bevor sie auf eine eventuell vorliegende Materialgradierung treffen. Bei der Betrachtung der hier aufgezeigten Rissausbreitung wird, stets beim Risswachstum beginnend, von dem bruchmechanisch *schlechteren* Material (M1) ausgegangen. Aufgrund der eingeschlagenen Risswachstumsrichtung wächst der Riss in Abbildung 6-12 a) auch bei Erreichen der Gradierung ungehindert in diese Richtung weiter. Da der globale Winkel der Gradierungsgrenze  $\varphi_M = 30^\circ$  in Bezug auf die eingeschlagene Rissrichtung sehr „steil“ ist, wirkt sich diese Materialgradierung nicht auf die Rissausbreitungsrichtung aus. In Abbildung 6-12 b) wurde ein weiterer Gradierungswinkel mit  $\varphi_M = -75^\circ$  realisiert. Hier zeigt sich, dass im Zusammenspiel mit der Risswachstumsrichtung unter dem Winkel  $\varphi_0$  und dem Gradierungswinkel  $\varphi_M$  eine Beeinflussung auf die Rissausbreitungsrichtung

durch die Materialgradierung gegeben ist. Der Riss wächst bei Erreichen der Materialgradierung entlang der Materialgrenze weiter.

Inwieweit sich eine Materialgradierung in einem realen Bauteil auswirkt, ist aufgrund der errungenen Erkenntnisse abhängig von der vorliegenden Bauteilbeanspruchung, der Materialkennwerte und der Orientierung des Risses bei Erreichen der Materialgradierungsgrenze zur Lage dieser Grenze. Dass dieses Rissverhalten, wie sie in den Simulationen an den CTMM-Proben aufgezeigt werden (Abbildung 6-12), auch in realen Bauteilen und Strukturen vorzufinden sind, soll anhand eines Beispiels dargelegt werden.

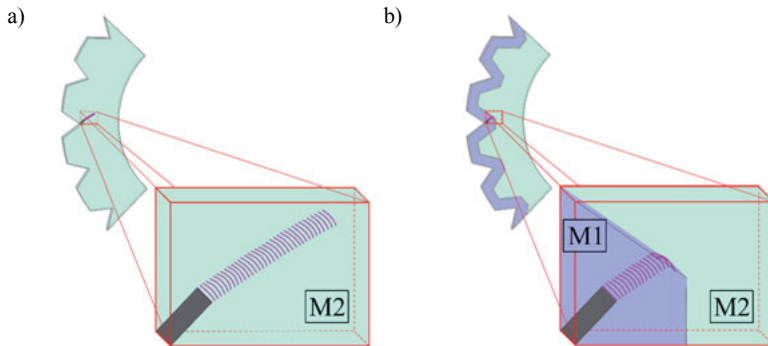
Wie unter Kapitel 4.2.3 bereits erläutert, stellen induktionsgehärtete Zahnräder einen großen Anteil an serienmäßig gefertigten, gradierten Strukturen dar. Aus diesem Grund soll ein solches Zahnrad als Demonstratorobjekt für eine Risswachstumssimulation mit einer scharfen, bruchmechanischen Materialgradierung dienen. Das Modell eines gradierten Zahnrades ist in Abbildung 6-13 schematisch aufgezeigt.



**Abbildung 6-13:** Modell eines funktional gradierten Zahnrades mit Teilausschnitt des FE-Modell

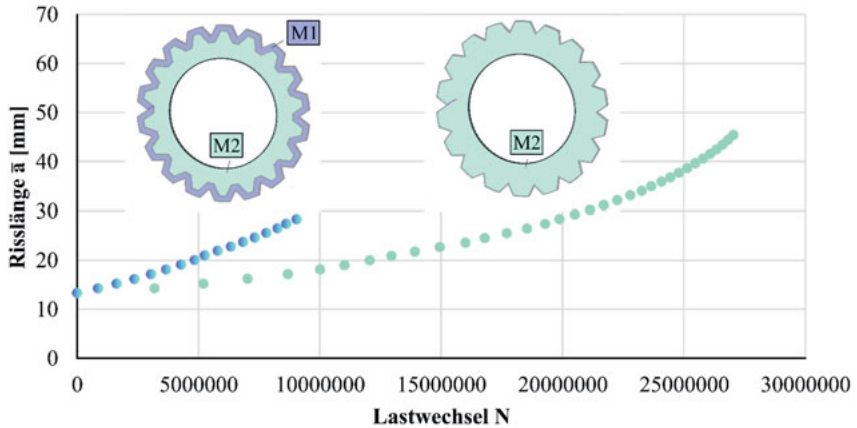
Durch die Ausnutzung von vorhandenen Symmetrien der Struktur kann eine Vereinfachung beziehungsweise Reduzierung des Aufwandes während der Risswachstumssimulation ermöglicht werden. Damit ein eindeutiges Zuordnen des Risswachstums in dem Zahnrad rein optisch gegeben ist, wird an dieser Stelle die Reduzierung des Modells auf ein Viertel der gesamten Struktur beschränkt. Bei der Materialzuordnung und der Belastungshöhe werden fiktive Materialkennwerte sowie eine entsprechend hohe Kraftaufbringung angenommen, damit eine möglichst weit fortgeschrittene Rissausbreitung realisiert werden kann. In dem lila eingefärbten Bereich des Zahnradausschnittes ist ein bruchmechanisch *schlechteres* Material mit  $\Delta K_{I,th} = 100 \text{ N/mm}^{3/2}$  hinterlegt. Diese Annahme entspricht dem induktiv gehärteten Bereich an den Zahnflanken. Der von dem Induktionsverfahren unberücksichtigte Bereich, hier türkis dargestellt, zeigt das bruchmechanisch *bessere* Material mit  $\Delta K_{I,th} = 200 \text{ N/mm}^{3/2}$ . Für die Risszähigkeit gilt in beiden Bereichen  $K_{IC} = 7000 \text{ N/mm}^{3/2}$ . Die Belastung ist für  $F = 1000 \text{ N}$

festgelegt. Aufgrund der zu erwartenden höheren Beanspruchung im Kerbbereich wird von einem Anriss in einer Zahnücke unmittelbar an einem Zahnfuß ausgegangen.



**Abbildung 6-14:** Ergebnisse der Risswachstumssimulationen in einem Zahnrad  
a) Zahnrad mit homogenen, isotropen Materialkennwerten  
b) gradiertes Zahnrad

Um den Einfluss einer bruchmechanischen Materialgradierung auf das Rissausbreitungsverhalten in einem induktionsgehärteten Zahnrad zu verdeutlichen, ist zusätzlich der Rissverlauf in einem Zahnrad mit homogenen Materialeigenschaften (Abbildung 6-14 a)) simuliert und aufgezeigt. Die Ergebnisse der Risswachstumssimulationen mit und ohne Materialgradierung zeigen, dass sich die Rissausbreitungsrichtungen trotz identischer Geometrien und Belastungen bei unterschiedlichen Materialeigenschaften erheblich voneinander unterscheiden können. In beiden Simulationen starten die Rissausbreitungen, ausgehend von einem Initialriss, welcher unter einem Winkel von  $\varphi_0 = 45^\circ$  eingebracht ist. Ohne lokale Änderung der Materialeigenschaften (siehe Abbildung 6-14 a)) wächst der Riss beanspruchungsgesteuert unter einem Winkel von  $\varphi_0 \approx 32^\circ$  zur Initialrissebene durch das Zahnrad, bis es zu einer instabilen Rissausbreitung kommt. Bei der Betrachtung des gradierten Zahnrades (siehe Abbildung 6-14b)) ist zu erkennen, dass sich das Rissausbreitungsverhalten zunächst analog zu dem in Abbildung 6-14 a) verhält. Auch hier knickt der Riss bereits zu Beginn der Simulation aus der Initialrissebene ab und wächst kontinuierlich in dieser eingeschlagenen Richtung weiter. Lokal betrachtet trifft der Riss dann mit einem Winkel von  $\varphi_0 \approx -65^\circ$  zur Gradierungsgrenze auf die Materialgradierung. In Folge der unterschiedlichen Materialkennwerte und der nun „günstig“ liegenden Gradierungsebene knickt der Riss im weiteren Verlauf von der zuvor eingeschlagenen Ausbreitungsrichtung ab und wächst entlang der Gradierungsgrenze weiter. Neben der Änderung der Risswachstumsrichtung ist auch die zu erwartende Lebensdauer eines gradierten Zahnrades mit Riss beeinflusst.



**Abbildung 6-15:** Darstellung der Lastwechselzahlen bei einer Risserweiterung in einem homogenen, isotropen sowie funktional gradierten Zahnrad

Die Verläufe der erreichten Lastwechselzahlen in Abhängigkeit der wahren Risslänge  $\bar{a}$  sind in Abbildung 6-15 dargestellt. Der Risspfad erstreckt sich über eine Risslänge, ausgehend von  $\bar{a} = 13$  mm für die Initialrisslänge, bis zur instabilen Rissausbreitung des gradierten Zahnrades von  $\bar{a} \approx 28$  mm beziehungsweise bis zum Programmabbruch bei der Simulation des Zahnrades mit homogenen Materialkennwerten bei einer Risslänge von  $\bar{a} = 45$  mm. In dem hier betrachteten Rahmen der Rissausbreitung ist zu erkennen, dass die zu erwartenden Lastwechselzahlen bei einem gradierten Zahnrad mit Riss deutlich reduziert werden. Unter Beachtung der gleichen Risslänge  $\bar{a} = 28$  mm erreicht die Simulation mit gradiertem Zahnrad nur halb so viele Lastwechsel wie das Zahnrad mit homogenen Materialkennwerten. Da es bei der Simulation des homogenen Zahnrades noch nicht zu einer instabilen Rissausbreitung gekommen ist, liegt hier dementsprechend ein Faktor von mindestens drei zwischen den ertragbaren Lastwechseln vor. Die hier eingebrachte Materialgradierung erwirkt neben einer Änderung der Rissausbreitungsrichtung dementsprechend auch eine Reduzierung der ertragbaren Lastwechsel.

Somit kann gezeigt werden, dass eine eingebrachte Materialgradierung zu bisher noch nicht in Betracht gezogenen Versagensfällen einer Struktur führen können. Ein unvorhersehbares, plötzliches Rissabknicken während des Risswachstums ist in Zusammenhang mit einer Materialgradierung durchaus möglich. Deshalb ist es notwendig, bei Strukturen, welche bislang ohne eine funktionale Materialgradierung gefertigt wurden, zu überprüfen, welche Auswirkungen in Bezug auf das Risswachstumsverhalten zu erwarten sind. Eine Risswachstumssimulation mit dem hier genutzten modifizierten Simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> kann entsprechende Aufschlüsse über das zu erwartende Rissverhalten liefern.

## 7 RESÜMEE

Risse in Bauteilen und Strukturen treten trotz neuester Forschungstechnologien immer wieder auf und können zu verheerenden Katastrophen führen. Detektierbare Risse sicher zu beurteilen, ist daher ein wichtiger Aspekt, der hohe Ansprüche an die Ingenieurkenntnisse stellt. Die Verwendung von Simulationsprogrammen wie zum Beispiel ADAPCRACK3D, welche ein Risswachstum in beliebigen Strukturen bestimmen können, liefern hier einen großen Mehrwert. Durch kontinuierliche Weiterentwicklungen im Bereich Leichtbau erlangen immer mehr sogenannte funktional gradierte Werkstoffe an Bedeutung. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass in einer Struktur lokal unterschiedliche Materialkennwerte vorliegen können, ohne dass es zu einem Fügen einzelner Strukturkomponenten kommt. Insbesondere im Hinblick auf lokal unterschiedlich vorherrschende Beanspruchungen in Strukturen und Bauteilen bieten diese „neuen“ Werkstoffe viel Potenzial für eine Leichtbauoptimierung. In Bezug auf das Rissausbreitungsverhalten in eben solchen Werkstoffen bedarf es noch weiterer Kenntnisse, um den Einfluss von lokal unterschiedlichen Materialeigenschaften sicher beurteilen zu können.

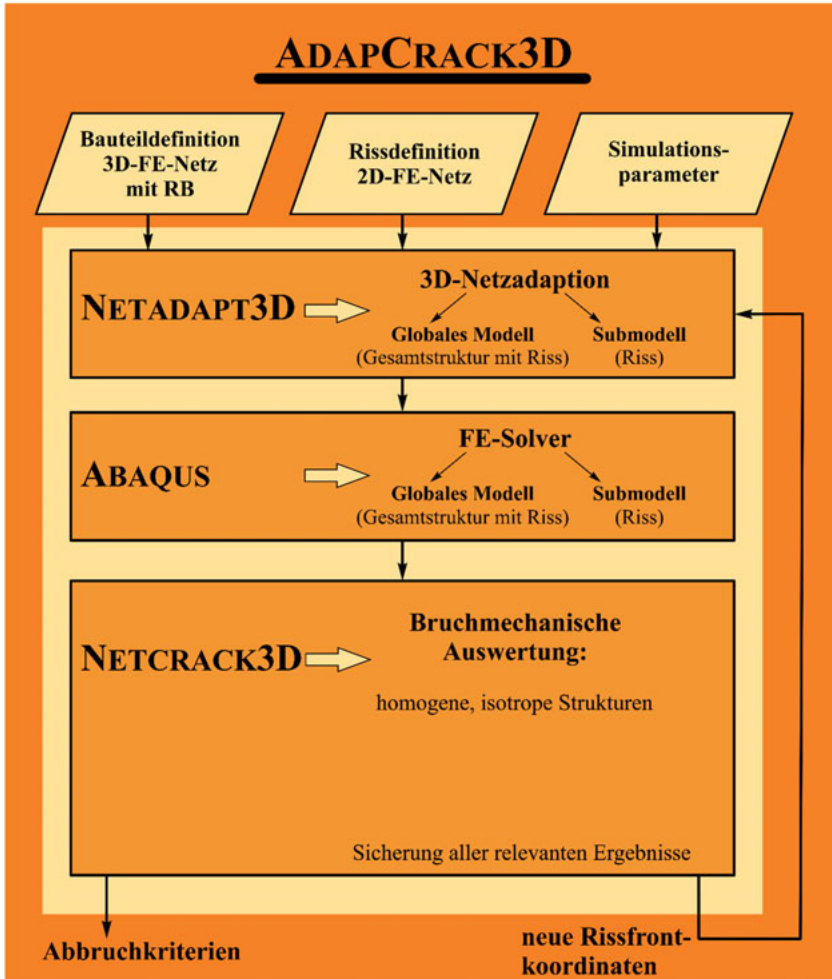
Der Kern dieser Arbeit befasst sich mit Risswachstumssimulationen in beliebigen dreidimensionalen Strukturen. Neben Risswachstumsberechnungen in homogenen, isotropen Strukturen sind auch erste Untersuchungen an bruchmechanisch gradierten Geometrien die Zielsetzung. In diesem Kontext ist ein modifiziertes Riss simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> entstanden, welches sich durch seine Robustheit und den Einsatz für homogene, isotrope als auch funktional gradierte Strukturen auszeichnet. In Bezug auf die Modifizierung haben sich dabei zwei wesentliche Aufgabenbereiche herauskristallisiert. Um eine möglichst effiziente Simulation zu gewährleisten, muss ein Simulationsprogramm eine entsprechende Robustheit gegenüber Berechnungsschwankungen, welche im kleineren Ausmaße vorliegen können, aufzeigen und diese gegebenenfalls minimieren. Erste Untersuchungen zeigen, dass die Programmstabilität des hier verwendeten Simulationsprogramms überwiegend durch die Gestaltung der Rissfront und dem damit gekoppelten Submodell zusammenhängt. Durch den Einsatz von Ausgleichsfunktionen ist es möglich, kleinere Berechnungsschwankungen zu minimieren und dadurch die Programmstabilität erheblich zu steigern. Da sich die ersten Berechnungen ungenauigkeiten nach der Finiten-Elemente-Analyse bei der Bestimmung der an der Rissfront vorherrschenden Spannungsintensitätsfaktoren äußern, erwirken die nun implementierten, abgestimmten Ausgleichsfunktionen oder auch ADD-ON Funktionen eine Glättung der Werte der Spannungsintensitätsfaktoren über die Rissfront. Bedingt durch diesen Modifizierungsansatz, ist es möglich, die Risswachstumssimulation stabiler und somit effektiver zu gestalten. Die aufgeführten Beispiele an CT- und Axialrissrohr-Proben zeigen stabile, ausgeprägte Risswachstumssimulationen bis hin zum instabilen Risswachstum auf. Dass der Einsatz von den ADD-ON Funktion auch auf komplexe, dreidimensionale Rissausbreitungsvorgänge übertragbar ist, zeigt sich anhand der Simulationen unter anderem mit einem Pennyshape-Crack in Kapitel 5.5.1 sowie an den Simulationen von Strukturen mit halbkreisförmigem Außenriss in Kapitel 6.

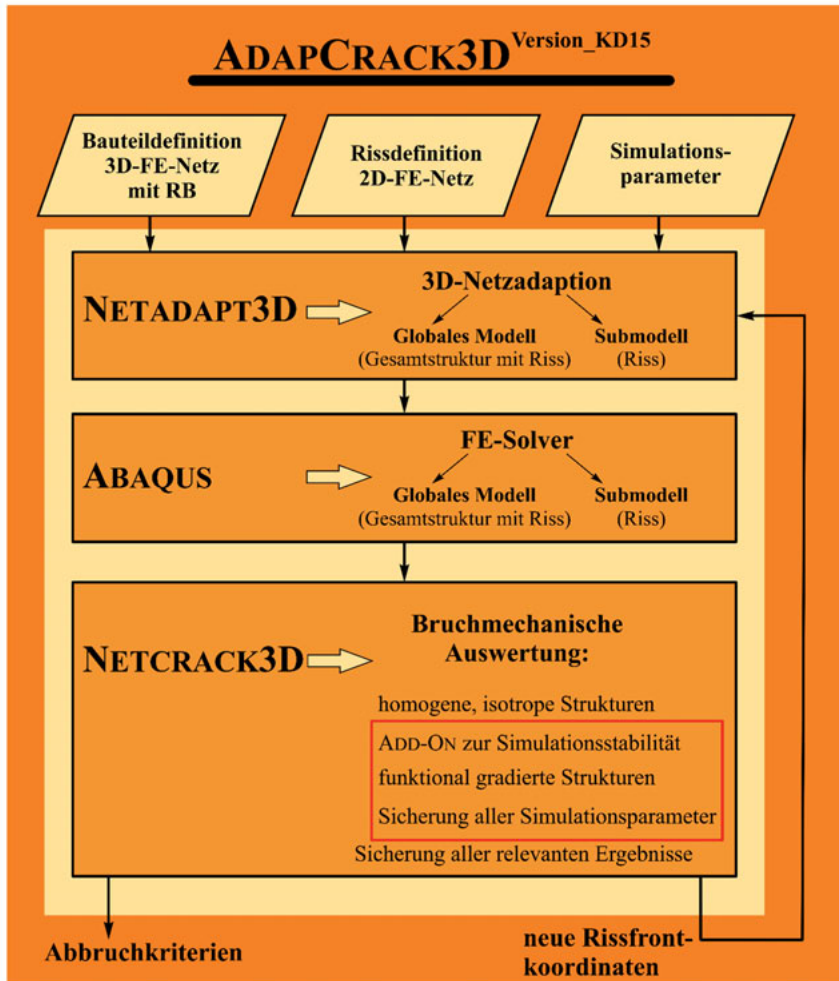
In Bezug auf den zweiten wesentlichen Aufgabenbereich, der Bestimmung des Risswachstumsverhaltens in bruchmechanisch gradierten Strukturen, ist ein neues 3D-Konzept (siehe Kapitel 4.4) entstanden. Mit diesem Konzept ist es möglich den Einfluss einer Materialgradierung im Hinblick auf das Rissausbreitungsverhalten zu berechnen. Durch die Implementierung dieses neuen Konzeptes in das Riss simulationsprogramm ADAPCRACK3D<sup>VERSION\_KD15</sup> ist es nun möglich, Risswachstumsberechnungen in bruchmechanisch gradierten Strukturen durchzuführen, wobei die lokal vorliegenden Materialkennwertänderungen ebenfalls Berücksichtigung finden. Somit kann der Einfluss einer Materialgradierung insbesondere auf die Rissausbreitungsrichtung automatisch und individuell bestimmt werden. In Kapitel 5.5.2 und 6.2 wird anhand von gradierten CT- sowie CTMM-Proben aufgezeigt, dass sich Risse, entgegen den Erwartungen, nicht immer analog zu denen in homogenen, isotropen Proben verhalten. In Abhängigkeit der lokalen Materialkennwerte sowie des Abknickwinkels  $\varphi_0$  und des Materialgradierungswinkels  $\varphi_M$  kann es bei Erreichen einer Gradierungsgrenze zu Abweichungen des ursprünglichen Risspfades kommen. Bei einem Übergang von einem bruchmechanisch *schlechteren* in ein *besseres* Material kann es vorkommen, dass der Riss bei Erreichen der Materialgrenze an dieser entlangwächst, bis es letztendlich zum Versagen des Bauteils kommt. Erste Untersuchungen zeigen, dass auch die ertragbaren Lastwechselzahlen aufgrund einer lokalen Materialgradierung wesentlich beeinflusst werden. Während eine Änderung des Risspfades von der vorliegenden Materialkennwertkombination, der vorherrschenden Beanspruchung und der Lage der Materialgradierungsgrenze abhängig ist, wirken sich diese Gegebenheiten immer auch auf die ertragbaren Lastwechselzahlen aus. Nach den an bekannten Probengeometrien simulierten Risswachstumsberechnungen sind abschließend die in Kapitel 6 gewonnen Erkenntnisse auf praxisorientierte Anwendungen übertragen worden. Hierbei handelt es sich zum einen um die numerische Ermittlung von Geometriefaktoren für Axialrissrohrproben. Aufgrund der erhöhten Robustheit des genutzten Simulationsprogramms für homogene Strukturen sind umfangreiche Simulationen an Axialrissrohrproben aufgezeigt. Hierbei ist es gelungen, durch einen neuen Ansatz zur Ermittlung der Geometriefaktorfunktionen eine Masterkurve für Axialrissrohrproben zu bestimmen. Des Weiteren wird in Kapitel 6.2 ein induktionsgehärtetes Zahnrad als Beispiel für eine bruchmechanisch gradierte Struktur aufgezeigt. Aufgrund der lokalen Materialkennwertänderung wirkt sich die Materialgradierung auf die Rissausbreitungsrichtung aus und bewirkt somit ein frühzeitiges Versagen der Struktur.

Um die gewonnen Erkenntnisse aus dieser Arbeit zu stützen, sollten weitere Untersuchungen an realen Bauteilen und Strukturen durchgeführt werden. Darüber hinaus ist eine Anpassung des Vernetzungsalgorithmus in dem hier verwendeten Simulationsprogramm in Betracht zu ziehen. Aufgrund der komplexer werdenden Rissfronten beziehungsweise Rissflächen, welche insbesondere durch lokale Materialgradierungen an einzelnen Rissfrontbereichen auftreten können, ist eine realitätsnahe, automatische Darstellung derzeit nicht immer gegeben. Um auch den Aspekt eines Festigkeitsversagens zu berücksichtigen, ist eine Implementierung von Festigkeitsnachweisen in dem Riss simulationsprogramm erstrebenswert. Eine Sicherung von ausreichender Nutzungs- oder Lebensdauer könnte somit im Hinblick auf Festigkeits- und bruchmechanisches Versagen gegeben werden.

## ANHANG

## A1

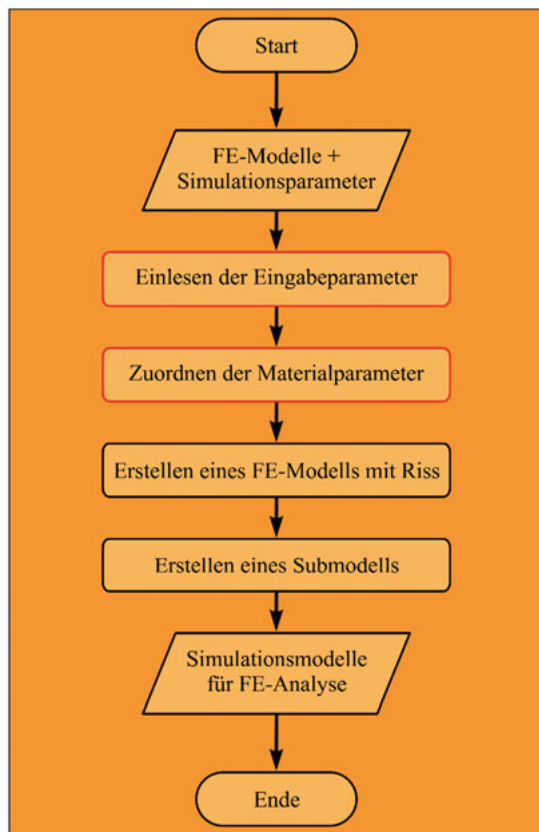
A1 - 1: Funktionalität von *ADAPCRACK3D*

A1 - 2: Funktionalität von *ADAPCRACK3D<sup>Version\_KD15</sup>*

**A2****Algorithmus 1: Netadapt3D**

Über das Modul NETADAPT3D werden die Simulationsparameter sowie die Finite-Elemente-Modelle eingelesen. Alle benötigten Materialparameter/-kennwerte werden den einzelnen Teilbereichen des globalen Finite-Elemente-Modells zu geordnet. Des Weiteren wird anhand des Finite-Elemente-Modells des Risses ein globales Modell mit Riss erstellt und in Abhängigkeit der eingebrachten Rissfront ein Submodell kreiert. Diese Modelle werden abschließend dem FE-Solver ABAQUS übergeben. Ab dem zweiten Simulations-schritt werden darüber hinaus auch die neuen Rissfrontkoordinaten in das globale Modell mit Riss eingelesen.

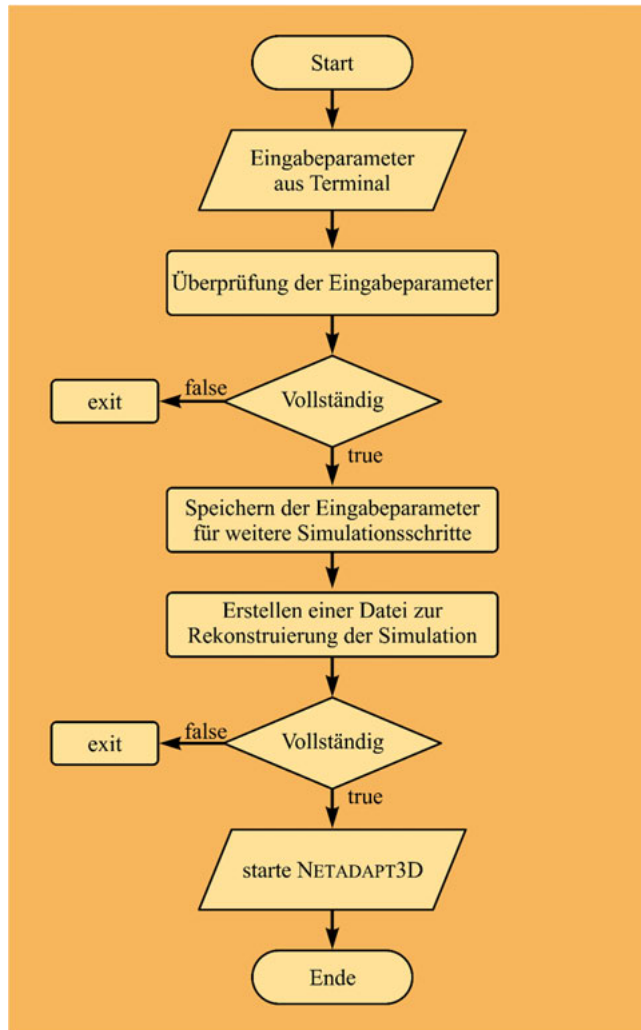
1. Lese alle FE-Modelle und Simulationsparameter ein
2. Lese alle Eingabeparameter ein
3. Ordne die Materialparameter den Knotenpunkten des globalen FE-Modells zu
4. Erstelle eine globales FE-Modell mit Riss
5. Erstelle ein Submodell anhand der Rissfrontknotenpunkte
6. **return** Simulationsmodelle und -parameter

A2 - 1: Funktionsablauf in dem Modul *NETADAPT3D*

**Algorithmus 2: Einlesen der Eingabeparameter**

Über die Verwendung der Eingabemaske werden dem Anwender des Riss simulationsprogramms alle benötigten Eingabeparameter zur Verfügung gestellt. Diese Eingabeparameter müssen dem Programm zugeführt werden. Über den in der Eingabemaske hinterlegten Algorithmus wird sichergestellt, dass die Informationen von dem Programm eingelesen werden können. Gleichzeitig werden alle Parameter auf Vollständigkeit hin überprüft und die benötigten Informationen dem Programm während der Simulation stets zur Verfügung gestellt.

1. Lese die Eingabeparameter aus dem Terminal
2. **if** nicht alle Eingabeparameter vollständig
3.     gebe an welcher Parameter fehlt
4.     Programmabbruch
5. **else** erstelle eine Eingabedatei
6.     speichere alle Eingabeparameter in der Eingabedatei
7.     erstelle eine Simulationsdatei
8.     speichere relevante Eingabeparameter in Simulationsdatei
9. **if** Simulationsdatei nicht im richtigen Format geschrieben
10.     gebe Hinweis was falsch ist
11.     Programmabbruch
12. **else if** Bedingung für Materialeingabeparameter != bruchmechanische Kriterien
13.     gebe Hinweis welche Eingabe falsch ist
14.     Programmabbruch
15. **endif**
16. starte NETADAPT3D

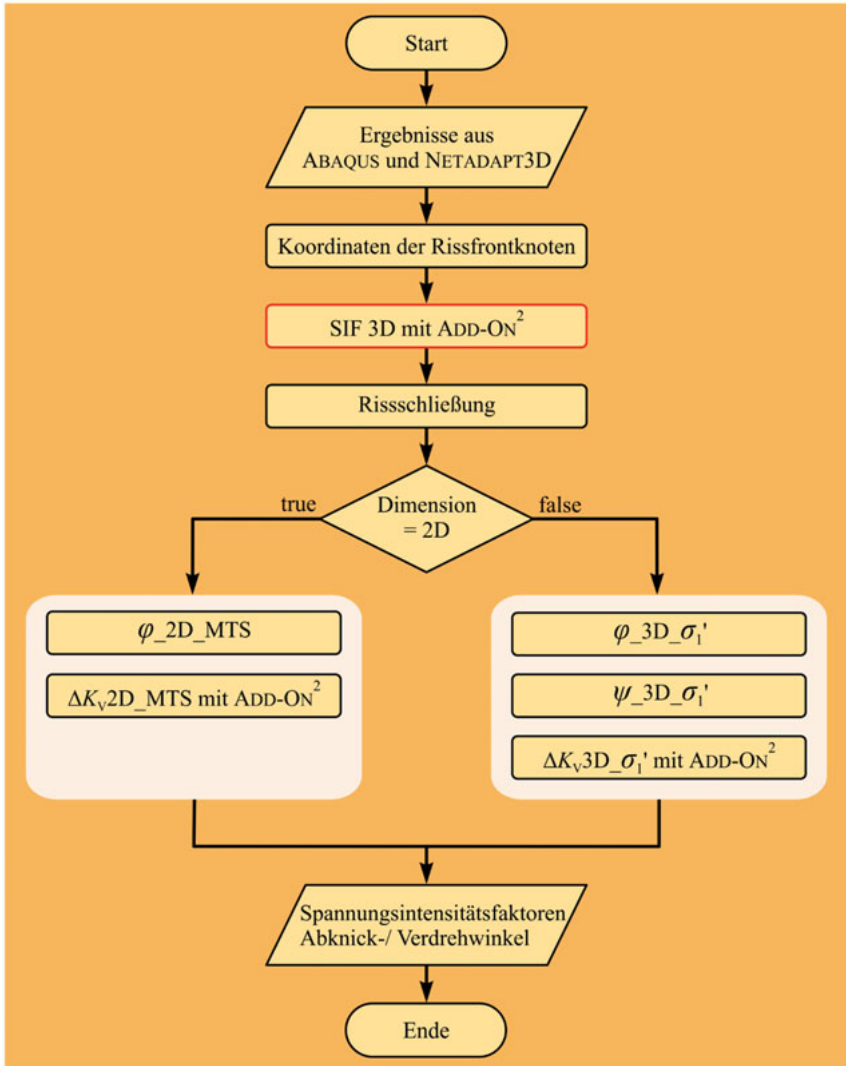
A2 - 2: Funktionsablauf im Algorithmus *Einlesen der Eingabeparamete*

## A3

**Algorithmus 3: Case 2:  $\sigma_1'$  + ADD-ON<sup>2</sup>**

Hier findet die bruchmechanische Auswertung der Ergebnisse aus der FE-Analyse statt. Alle relevanten Größen die benötigt werden, um eine Aussage über das Rissausbreitungsverhalten treffen zu können, werden zunächst berechnet. Dazu gehören die an den Rissfrontknotenpunkten  $k$  vorherrschenden Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  sowie die Abknick- und Verdrehwinkel  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  und die Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_V$ . Um eine stabile Simulation zu erzeugen, wird für die Werte der Spannungsintensitätsfaktoren zusätzlich eine Ausgleichsfunktion ermittelt und die berechneten Werte entsprechend angepasst, bevor diese für die Lebensdauerberechnung übergeben werden.

1. Lese die Ergebnisse aus ABAQUS und die Submodelldatei aus NETADAPT3D ein
2. definiere Koordinatensysteme für jeden Rissfrontknoten
3. berechne die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  mit ADD-ON<sup>2</sup>
4. überprüfe Risschließung
5. **if** gewählte Dimension = 2D
  6. berechne Abknickwinkel  $\varphi_{0\_2D\_MTS}$
  7. berechne Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_{V2D\_MTS}$  mit ADD-ON<sup>2</sup>
8. **else**
  9. berechne Abknickwinkel  $\varphi_{0\_3D\_}\sigma_1'$
  10. berechne Verdrehwinkel  $\psi_{0\_3D\_}\sigma_1'$
  11. berechne Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_{V3D\_}\sigma_1'$  mit ADD-ON<sup>2</sup>
12. **return** alle  $K_I[k]$ ,  $K_{II}[k]$ ,  $K_{III}[k]$ ,  $\Delta K_V[k]$ ,  $\varphi_0[k]$ ,  $\psi_0[k]$

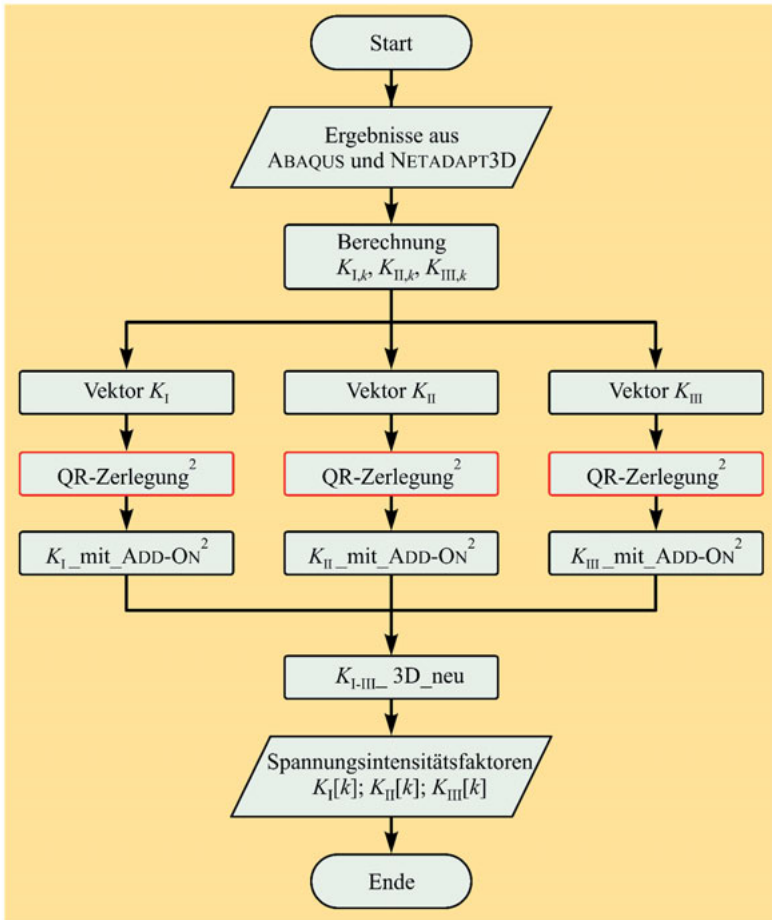


A3 - 1: Funktionsablauf im Algorithmus Case 2:  $\sigma_1' + ADD-ON^2$

**Algorithmus 4: SIF 3D mit ADD-ON<sup>2</sup>**

Anhand der Ergebnisse aus der FE-Analyse werden in der bruchmechanischen Auswertung die an der Rissfront vorherrschenden Spannungsintensitätsfaktoren für jeden Rissfrontknoten berechnet. Die Berechnung erfolgt für diesen Fall über das  $\sigma_1'$ -Kriterium. Nachdem die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{I-III}$  berechnet wurden, werden die Werte in Abhängigkeit der Mode-Zustände geglättet. Dafür wird mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Ausgleichsfunktion erzeugt. Somit können numerische Ungenauigkeiten bei der Berechnung ausgeglichen werden. Für die Bestimmung der Ausgleichsfunktion wird die *QR-Zerlegung* unter Verwendung der Householder-Matrix genutzt. Abschließend werden die so angepassten Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{I-III}$  für die weitere bruchmechanische Auswertung genutzt.

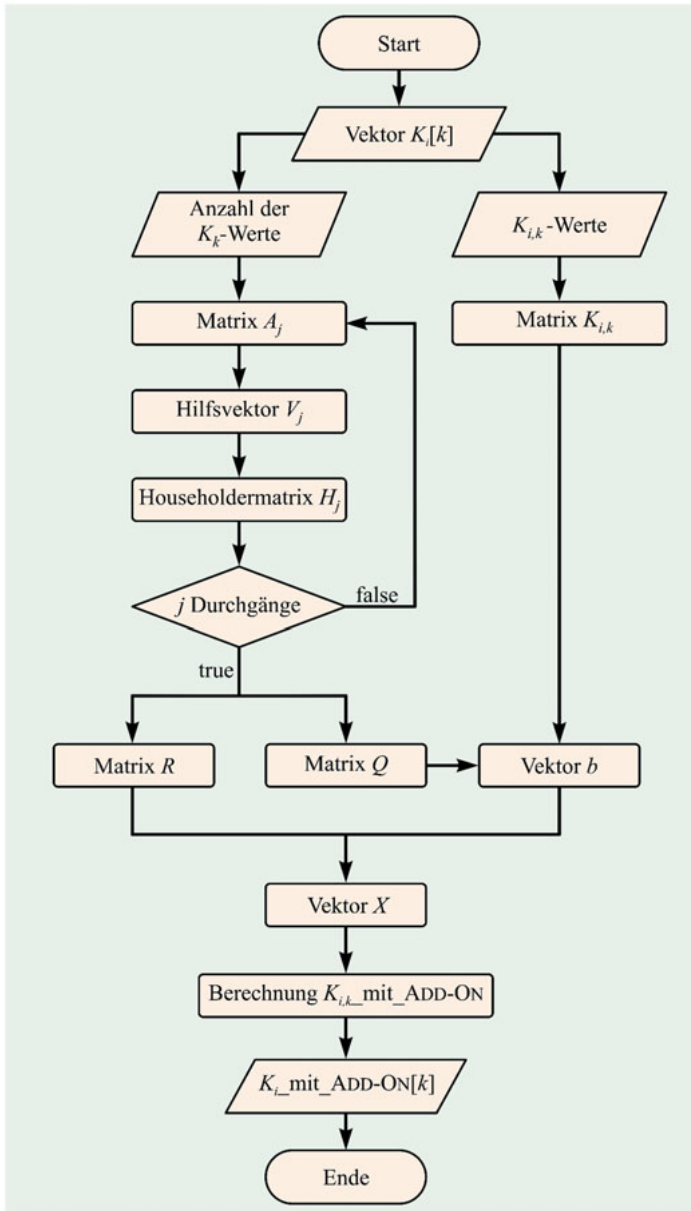
1. Lese die Ergebnisse aus ABAQUS und die Submodelldatei aus NETADAPT3D ein
2. berechne alle Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$
3. lege 3 Vektoren für die  $K_j[k]$  mit  $j = I, II, III$  an
4. erstelle eine Matrix  $A_i$  in Abhängigkeit der Länge der Rissfrontknotenpunkte
5. fülle die Matrix  $A_i$  mit (1; Knotennummer; Knotennummer<sup>2</sup>)
6. führe eine *QR-Zerlegung*<sub>2</sub> von  $A_i$  in Abhängigkeit der Vektoren  $K_j[k]$  durch
7. überprüfe die Werte  $K_{I\_mit\_ADD-ON^2}[k]$
8. **if**  $K_{I,k\_mit\_ADD-ON^2} < 0$
9.     setze  $K_{I,k\_mit\_ADD-ON^2} = 0$
10. **endif**
11. überschreibe alle  $K_j[k]$  mit den Werten von  $K_{i\_mit\_ADD-ON^2}[k]$
12. erstelle eine neue Matrix mit allen  $K_j[k]$
13. **return** alle  $K_I[k]$ ,  $K_{II}[k]$ ,  $K_{III}[k]$

A3 - 2: Funktionsablauf im Algorithmus *SIF 3D mit ADD-ON<sup>2</sup>*

**Algorithmus 5: QR-Zerlegung<sup>2</sup>**

Für die Berechnung der neu angepassten Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{I-III\_mit\_ADD-ON^2}$  wird die Methode der *QR-Zerlegung* unter Verwendung der Householder-Matrix genutzt. Zunächst wird die orthogonale Matrix  $Q$  von der  $A$  Matrix gebildet. Die Matrix  $A$  wird in Abhängigkeit der Anzahl der Rissfrontknotenpunkte und des Grades der Ausgleichsfunktion erstellt. Mit der Matrix  $Q$ , welche über die Householder-Matrix berechnet wird, und der resultierenden rechten oberen Dreiecksmatrix  $R$  werden die angepassten neuen Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{I-III}$  bestimmt.

1. lies SIF-Vektoren  $K_I[k]$ ,  $K_{II}[k]$ ,  $K_{III}[k]$  ein
2.   **for** alle Vektoren  $K_i[k]$  mit  $i = I, II, III$
3.     **for** alle Matrix  $A_i$  mit  $j = 1$  bis 3
4.       fülle einen Vektor  $a_j$  mit erster Spalte von Matrix  $A_i$
5.       berechne  $V_j = a_j + \text{sign}(a_{jj}) \cdot \text{euklidische Norm } a_i$
6.       definiere den Einheitsvektor  $I$
7.       bestimme die Householder-Matrix  $H_j = I - (2 \cdot V_j \cdot V_j^T) / (V_j^T \cdot V_j)$
8.       generiere  $A_{j+1} = H_j \cdot A_j$
9.     **endfor**
10.   erstelle Dreiecksmatrix  $R = H_3 \cdot A_3$
11.   berechne orthogonale Matrix  $Q = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3$
12.   setze  $b = Q^T \cdot \text{Vektor } K_i[k]$
13.   lösche die letzte Zeile von  $b$
14.   erstelle Vektor für  $X = b / R$
15.   berechne  $K_{i\_mit\_ADD-ON^2} = A \cdot X$
16. **endfor**
17. **return**  $K_{I-III\_mit\_ADD-ON^2}[k]$

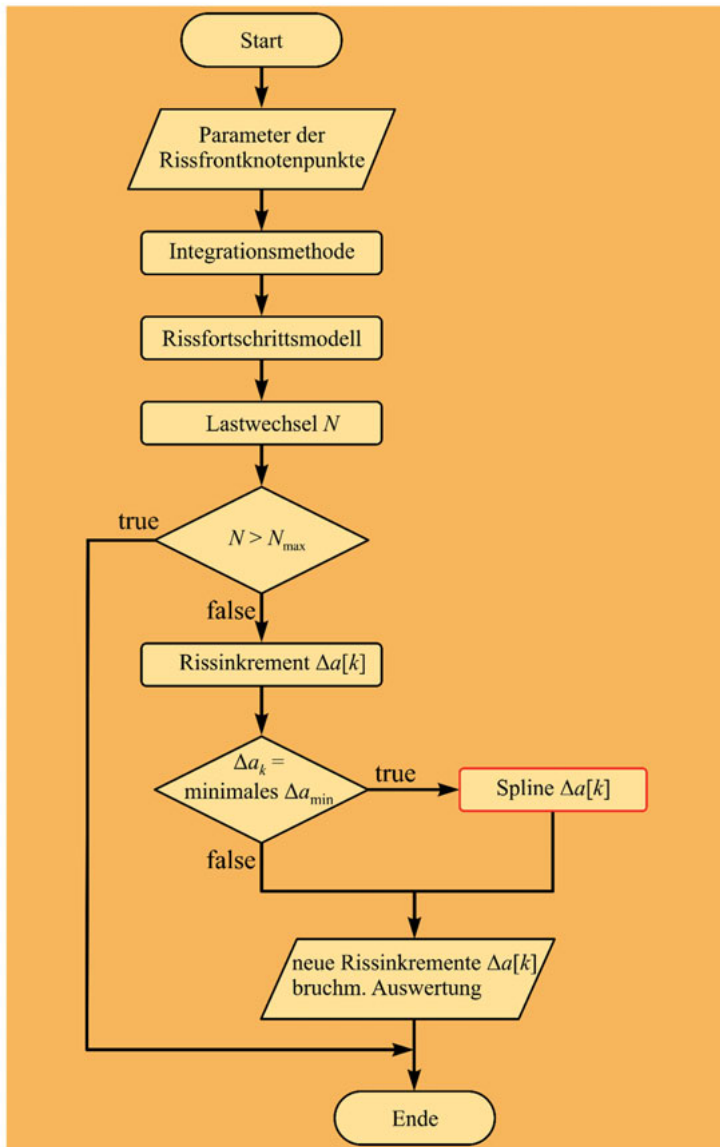
A3 - 3: Funktionsablauf im Algorithmus *QR-Zerlegung*<sup>2</sup>

## A4

**Algorithmus 6: Lebensdauer**

Nachdem die Rissgeschwindigkeit  $da/dN$  in dem Modul NETCRACK3D ermittelt wurde, werden in der darauf folgenden Lebensdauer-Funktion die zu erwartenden Lastwechsel  $N$  und die daraus resultierenden Risserweiterungen  $\Delta a$  bestimmt. Um den Zusammenhang mit der alten und der neuen Rissfront zu berücksichtigen, sind diverse Integrationsmethoden und Rissfortschrittsmodelle in dem Programm hinterlegt. Aufgrund der numerischen Bedingung, dass jeder Rissfrontknotenpunkt bei jedem Simulationsschritt wachsen muss, ist hier auch die Bedingung für das Risswachstum festgelegt.

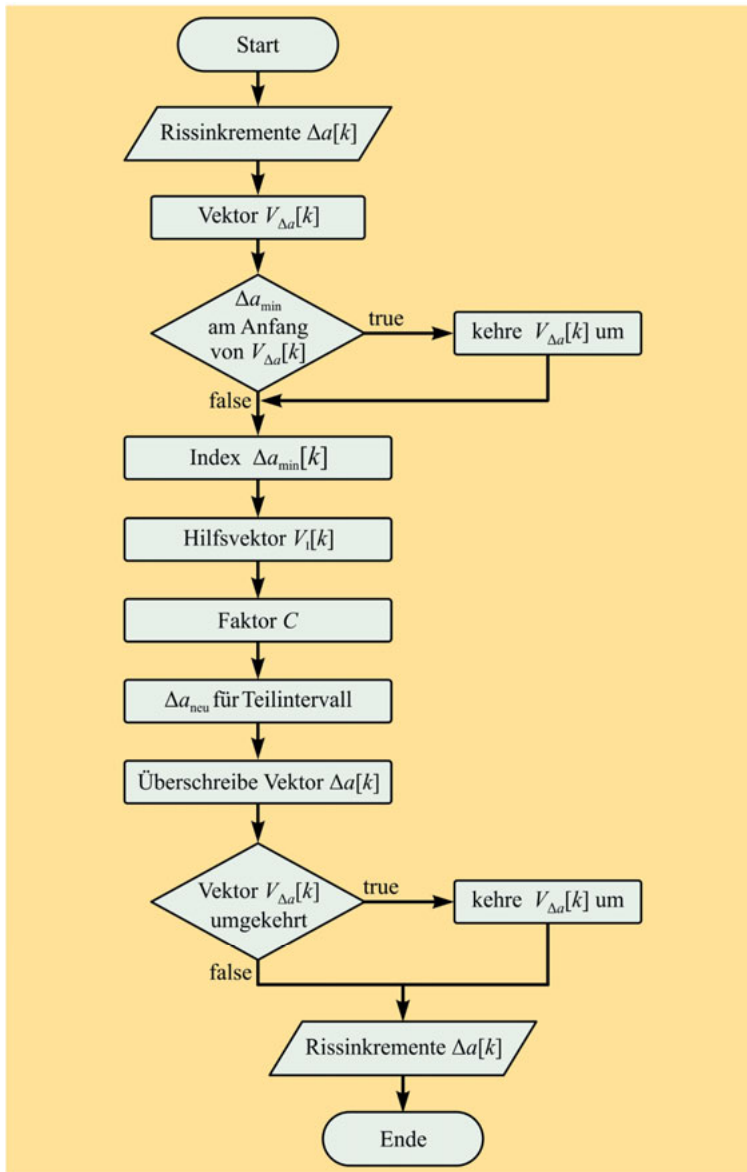
1. Lese Rissfrontknotenpunkte mit den zugehörigen Informationen ein
2. führe eine Integrationsmethode durch (Zusammenhang alte und neue Rissfront)
3. nutze ein Rissfortschrittmodell
4. berechne die Lastwechsel  $N$
5. **if**  $N > N_{\max}$ .
6.     **return** maximale Lastwechselzahl erreicht
7. **endif**
8. berechne alle Rissverlängerungen  $\Delta a[k]$
9. **if** mindestens ein  $\Delta a_k = \text{minimales Rissinkrement } \Delta a_{\min}$
10.     führe *Spline* Berechnung durch
11. **endif**
12. **return** Rissinkremente  $\Delta a[k]$  und Lastwechsel  $N$

A4 - 1: Funktionsablauf im Algorithmus *Lebensdauer*

### **Algorithmus 7: Spline**

In dem Modul Neterack3D findet zum Abschluss der bruchmechanischen Auswertung die Bestimmung der Lastwechsel und der Rissfrontknotenpunkterweiterung statt. Für den Sonderfall, dass nicht alle Rissfrontknoten ausbreitungsfähig sind, wird eine Spline-Funktion genutzt, um eine möglichst glatte Rissfronterweiterung zu gewährleisten. Diese Funktion wirkt sich in erster Linie auf die Zuordnung der Rissfortschrittsinkremente der einzelnen Rissfrontknotenpunkte aus. Zwischen den nicht wachstumsfähigen und den wachstumsfähigen Rissfrontknoten wird ein Intervallbereich definiert, für den ein Polynom bestimmt wird, sodass es zu keinen „*Sprünge*“ in den benachbarten Rissfortschrittsinkrementen  $\Delta a_{\min}$  kommt.

1. Lies die Rissinkremente aus der Lebensdauerberechnung in einen Vektor  $V_{\Delta a}[k]$  ein
2. **if** Werte in  $V_{\Delta a}[k]$  in absteigender Reihenfolge
3.     kehre  $V_{\Delta a}[k]$  um
4. **endif**
5. zähle die Werte für alle  $V_{\Delta a}[k]$  = minimales Rissinkrement  $\Delta a_{\min}$
6. **if** Anzahl der Werte  $\Delta a_{\min} > 3$
7.     es sei  $x$  die Position des letzten  $\Delta a_{\min}$  in  $V_{\Delta a}[k]$
8.     definiere die Stützzahlen für das Teilintervall  $[b, c]$
9.     generiere einen Vektor  $V_1[k]$  von  $(x-b)$  bis  $(x+c)$  aus  $V_{\Delta a}[k]$
10.    bestimme die Differenz =  $diff_1$  der letzten beiden Werte aus  $V_1[k]$
11.    berechne  $diff_2 = (\text{max. Index aus } V_1[k]) - (\text{min. Index aus } V_1[k])$
12.    löse den Quotienten  $C = diff_1 / (2 * diff_2)$
13.    **for** alle  $h$  von  $(x-b)$  bis  $(x+c)$
14.        $diff\_h = h - (x-b)$
15.       erstelle einen Vektor für  $\Delta a_{\text{neu}}[k]$
16.        $\Delta a_{\text{neu}}[k] = \text{min. Rissinkrement} + C \cdot (diff\_h)^2$
17.    **endfor**
18.    überschreibe den Vektor  $V_{\Delta a}[k]$  mit den neuen  $\Delta a_{\text{neu}}[k]$
19. **endif**
20. **if**  $V_{\Delta a}[k]$  umgekehrt
21.     drehe den Vektor wieder zurück
22. **endif**
23. **return** neue Rissinkremente  $\Delta a[k]$

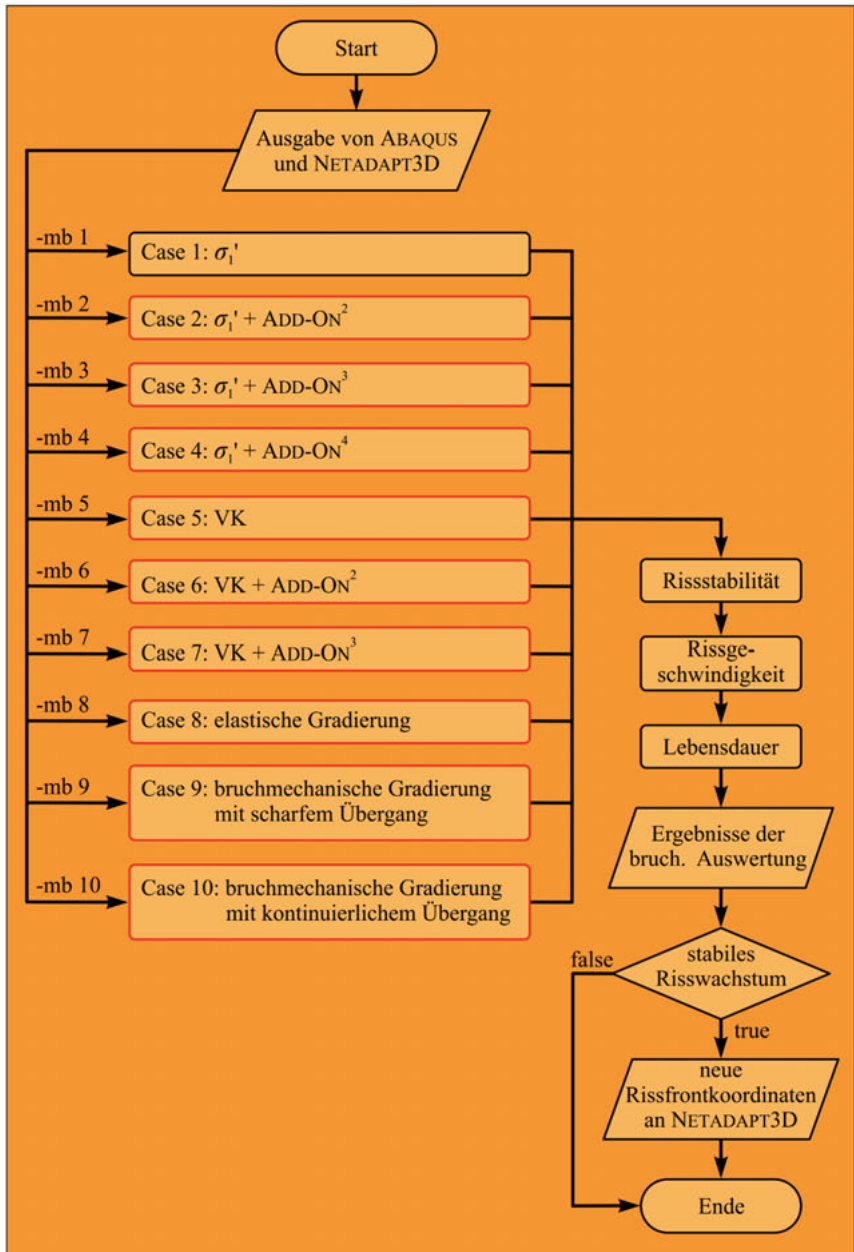
A4 - 2: Funktionsablauf im Algorithmus *Spline*

## A5

**Algorithmus 8: NETCRACK3D**

In dem Modul NETCRACK3D findet die bruchmechanische Auswertung der Ergebnisse aus dem FE-Solver ABAQUS statt. Hier können verschiedene Ansätze für die bruchmechanische Auswertung gewählt werden. Grundsätzlich wird zwischen homogenen, isotropen und bruchmechanisch gradierten Strukturen unterschieden. Darüber hinaus kann für Berechnungen von homogenen Strukturen zwischen zwei bruchmechanischen Konzepten ausgewählt werden. Hierbei kann die Verwendung einer zusätzlichen ADD-ON Funktion gesondert dazu gewählt werden. Unterschieden wird bei diesen Extrafunktionen zwischen einer quadratische, einer kubische und einer biquadratische Ausgleichsfunktion. Abschließend findet die Lebensdauerberechnung mit der Bestimmung der neuen Rissfrontknotenpunkte statt.

1. Lese die Ergebnisse aus ABAQUS und die Submodell-Datei aus NETADAPT3D ein
2. **if** Ergebnisdateien nicht vollständig
3.   gebe Hinweis was fehlt
4.   Programmabbruch
5. **else** lese das bruchmechanischen Kriterium aus Simulationsdatei
6.   starte bruchmechanische Auswertung
7.   schreibe Ergebnisse aus der Berechnung in Ergebnisdatei
8.   berechne Grenzen der stabilen Rissausbreitung
9.   bestimme die Rissgeschwindigkeiten und Lastspielzahl
10.   ermittle die Lebensdauer
11.   **if** stabile Rissausbreitung
12.     **return** neue Rissfrontkoordinaten zu NETADAPT3D
13.   **endif**
14.   **return** Ergebnisse der bruchmechanischen Auswertung

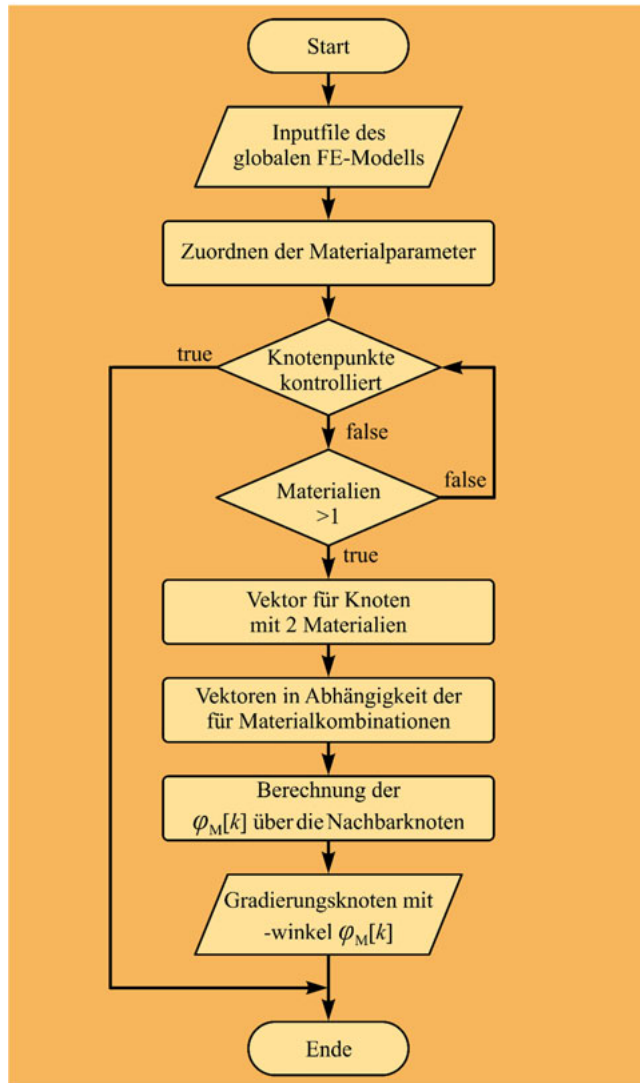
A5 - 1: Funktionsablauf des Moduls *NETCRACK3D*

## A6

**Algorithmus 9: Materialparameter**

Um eine bruchmechanische Gradierung bei der Berechnung der Rissausbreitung zu berücksichtigen muss der Ort und die Lage der Gradierung bestimmt werden. Diese Lokalisierung findet über die globale Zuordnung der Materialien statt.

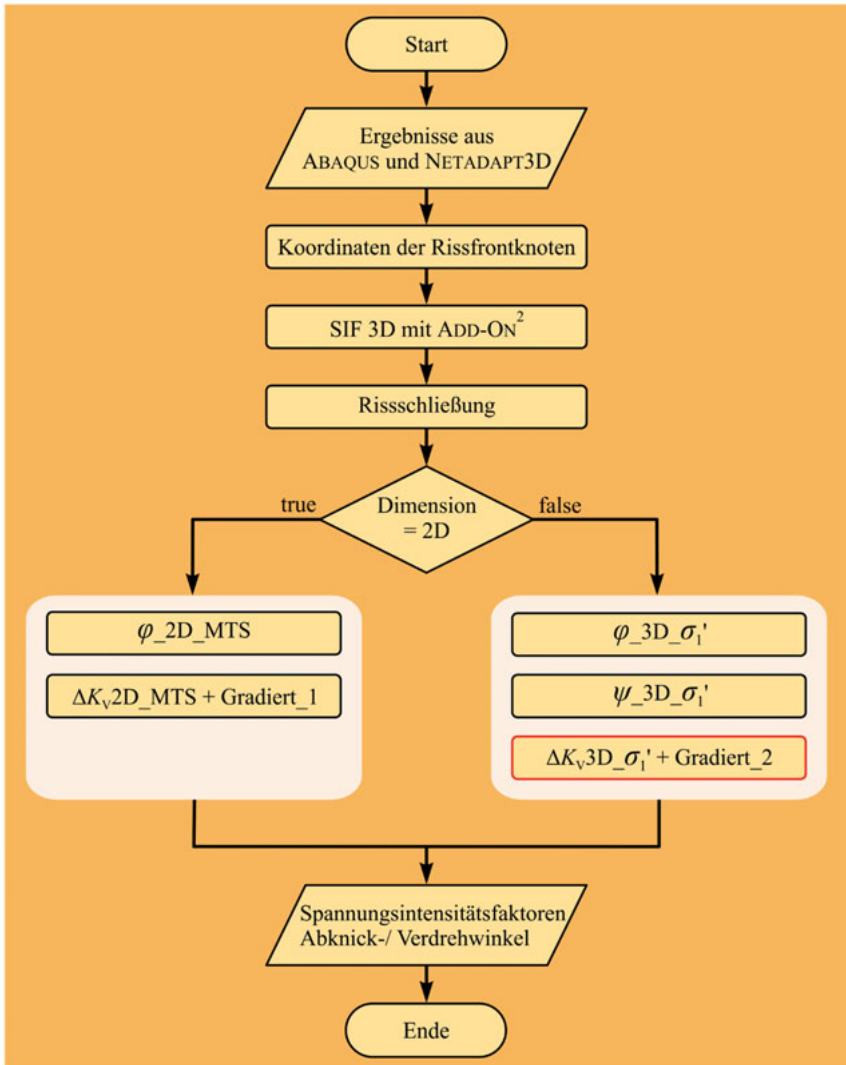
1. Lese Knotenpunkte  $k_{FEM}$  mit den zugewiesenen Materialparametern
2. erstelle eine Matrix  $G_M$
3. **if** dem Knoten zwei Materialien zugewiesen wurden
4.     schreibe den Knotenpunkt  $k$  mit allen Koordinaten und Materialparametern in  $G_M$
5. **endif**
6. sortiere die entsprechenden Knotenpunkte in die Matrix  $G_M$  in Abhängigkeit der Materialkombinationen  $c$
7. **for** alle Knotenpunkte  $k$  in der Matrix  $G_M[c]$
8.     berechne den Abstand  $d$  zu allen Nachbarknoten aus der Matrix  $G_M[c]$
9.     **for**  $d = \text{Minimum}$
10.         berechne den Winkel des aktuellen Knotenpunkt  $P$  und des Nachbarn  $N$
11.         **if** die Koord.  $x_N$  des Nachbarknoten  $>$  als  $x$  des aktuellen Knoten
12.             setze die Koord. des Nachbarknoten auf  $X_{\max} = x_N$  und  $Y_{\max} = y_N$
13.             setze die Koord. des aktuellen Knotenpunktes auf  $X_{\min} = x$  und  $Y_{\min} = y$
14.         **else** setze  $X_{\min} = x_N$ ,  $Y_{\min} = y_N$  und  $X_{\max} = x$ ,  $Y_{\max} = y$
15.     **endfor**
16.      $a = X_{\max} - X_{\min}$  und  $b = Y_{\max} - Y_{\min}$
17.     **if**  $Y_{\min} < Y_{\max}$
18.          $\varphi_{M,k} = 90 - (\tan(a/b) * (180/\pi))$
19.     **else**  $\varphi_{M,k} = (\tan(a/b) * (180/\pi))$
20.     **if**  $\varphi_{M,k} = -90$
21.         setze  $\varphi_{M,k} = 90$
22.     **endif**
23.     speichere alle Winkel  $\varphi_M[k]$  ab
24.     überprüfe alle Winkel  $\varphi_M[k]$  in aus einer Gradierungsgrenze
25.     **if** kein Gradierungswinkel für einen Knotenpunkt berechnet
26.         setze den Gradierungswinkels auf den gleichen wie von dem Nachbarknoten
27.     **endif**
28.     **if** 10-mal hintereinander kein Gradierungswinkel berechnet
29.         gebe Hinweis und breche die Simulation ab
30.     **endif**
31. **endfor**
32. **return** alle Knotenpunkten  $k$  in den Gradierungen  $c$  mit Gradierungswinkel  $\varphi_M[k]$

A6 - 1: Funktionsablauf im Algorithmus *Materialparameter*

**Algorithmus 10: Case 9:  $\sigma_1'$  + Gradierung\_1**

Hier findet die bruchmechanische Auswertung der Ergebnisse aus der FE-Analyse statt. Alle relevanten Größen die benötigt werden, um eine Aussage über das Rissausbreitungsverhalten treffen zu können, werden zunächst berechnet. Dazu gehören die an den Rissfrontknotenpunkten  $k$  vorherrschenden Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  sowie die Abknick- und Verdrehwinkel  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  und die Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_V$ . Da es sich bei dieser Simulation um eine Rissausbreitung in einer bruchmechanisch gradierten Struktur handelt, muss der Einfluss einer solchen Gradierung bei der Berechnung der Rissausbreitung berücksichtigt werden. Dieser Materialgradierungseinfluss fließt mit in die Berechnung des Vergleichsspannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_V$  ein und liefert im Anschluss den Abknickwinkel  $\varphi_0$  unter Berücksichtigung des Gradierungswinkels  $\varphi_M$ .

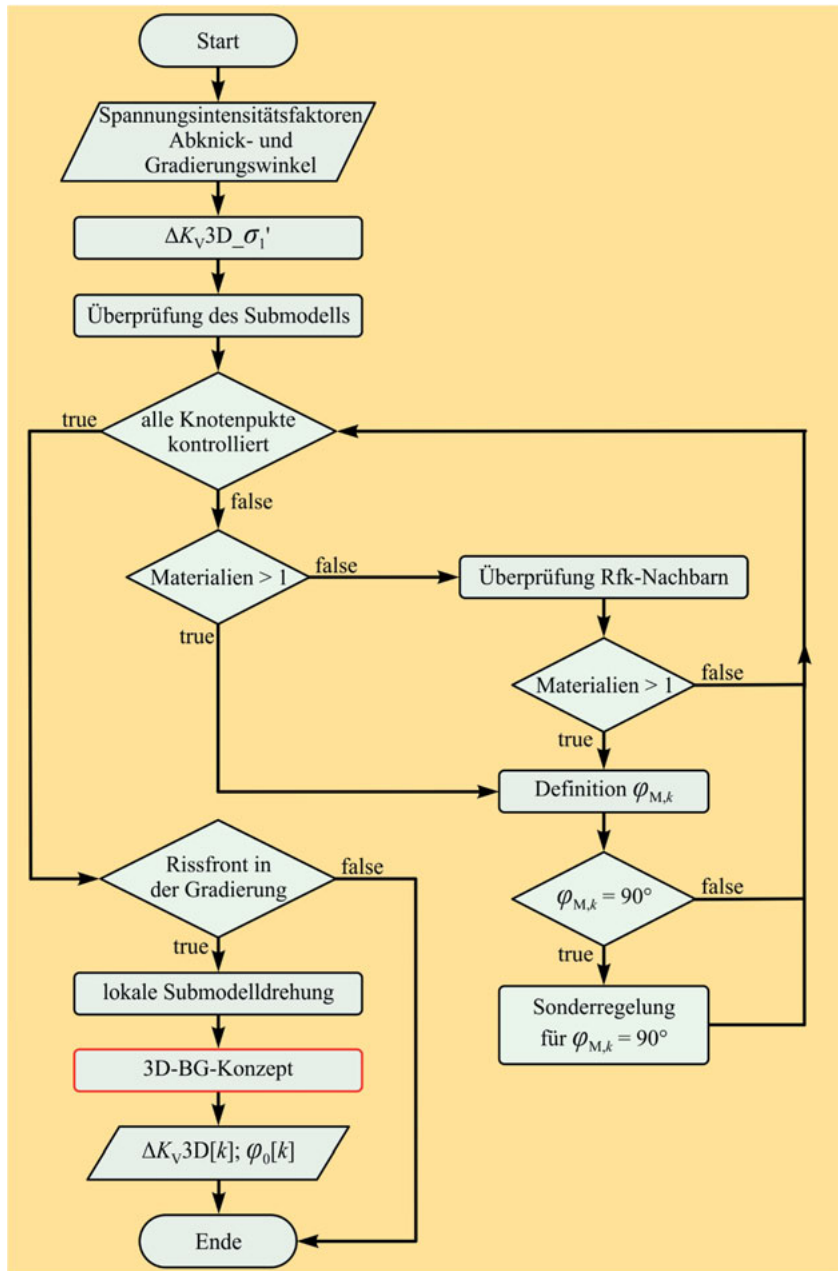
1. Lese die Ergebnisse aus ABAQUS und die Submodelldatei aus NETADAPT3D ein
2. definiere Koordinatensysteme für jeden Rissfrontknoten  $k$
3. berechne die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I[k]$ ,  $K_{II}[k]$  und  $K_{III}[k]$  mit ADD-ON<sup>2</sup>
4. überprüfe Risssschließung
5. **if** gewählte Dimension = 2D
  6. berechne Abknickwinkel  $\varphi_{0\_2D\_MTS}$
  7. berechne Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_{V2D\_MTS}$  + Gradierung\_1
8. **else**
  9. berechne Abknickwinkel  $\varphi_{0\_3D\_}\sigma_1'$
  10. berechne Verdrehwinkel  $\psi_{0\_3D\_}\sigma_1'$
  11. berechne Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_{V3D\_}\sigma_1'$  + Gradierung\_2
12. **return** alle  $K_I[k]$ ,  $K_{II}[k]$ ,  $K_{III}[k]$ ,  $\Delta K_V[k]$ ,  $\varphi_0[k]$ ,  $\psi_0[k]$

A6 - 2: Funktionsablauf im Algorithmus Case 9:  $\sigma_1'$  + Gradierung\_2

**Algorithmus 11:  $\Delta K_V 3D\_ \sigma_1^e$  + Gradierung\_2**

Für die Beschreibung der Beanspruchung an der Rissfront werden Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_V$  berechnet. Für diese Anwendung wird für die Bestimmung der  $\Delta K_V[k]$  der Rissfrontknotenpunkte das  $\sigma_1^e$ -Kriterium herangezogen. Im Anschluss wird geprüft, in wie weit sich der Einfluss der Materialgradierung auf die Rissausbreitung auswirkt. Diese Berücksichtigung erfolgt über das neu implementierte 3D-Konzept.

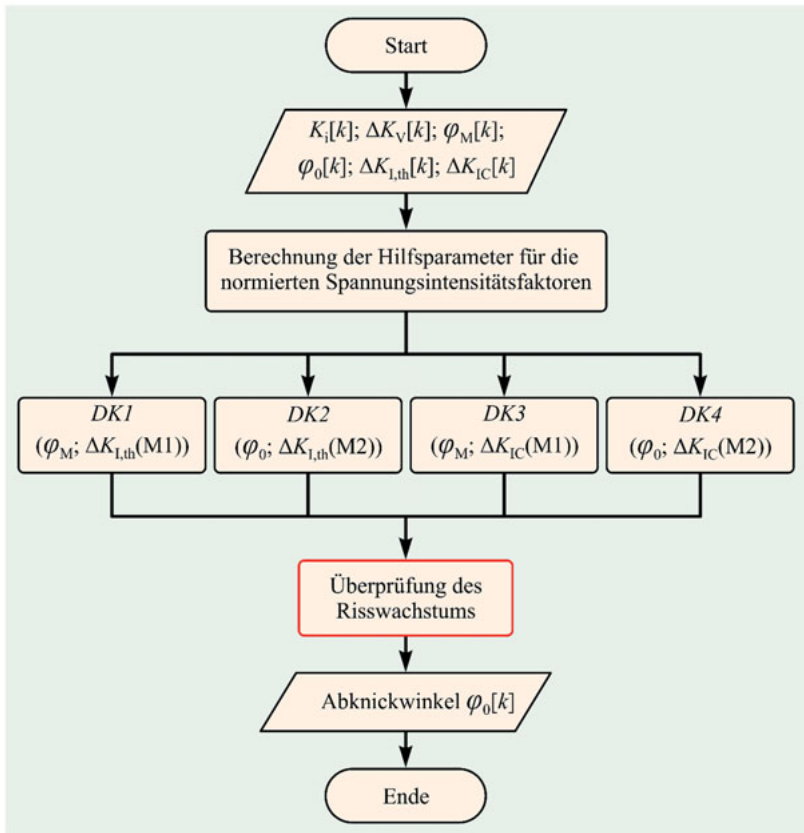
1. Lese  $K_I[k]$ ,  $K_{II}[k]$ ,  $K_{III}[k]$ ,  $\varphi_0[k]$  sowie das  $R$ -Verhältnis und  $\varphi_M[k]$
2. Berechne die  $\Delta K_V[k]$  der Rissfrontknoten  $k$
3. Überprüfe alle Rissfrontknoten  $k$
4. **if** mehr als ein Material dem Rissfrontknoten  $k$  zugeordnet
5.     lese den zugehörigen Winkel  $\varphi_{M,k}$  aus Matrix  $G_M[c]$  ein
6.     **if**  $\varphi_{M,k} == 90 \ \&\& \ \varphi_{0,k} < 0$
7.         setze  $\varphi_{M,k} = - \varphi_{M,k}$
8.     **endif**
9.     berücksichtige die lokale Drehung des Submodells
10.    **if**  $\varphi_{M,k} < 0$
11.          $\varphi_{M,k} = \varphi_{M,k} + \text{lokale Drehung des Submodells}$
12.     **else**  $\varphi_{M,k} = \varphi_{M,k} - \text{lokale Drehung des Submodells}$
13.     führe *3D-BG Berechnung* durch
14.    **else** Überprüfe die Nachbarknoten
15.         **if** ein anderes Material oder zwei Materialien dem Nachbarknoten zugewiesen
16.             lese den zugehörigen Winkel  $\varphi_{M,k}$  ein
17.             **if**  $\varphi_{M,k} == 90 \ \&\& \ \varphi_{0,k} < 0$
18.                 setze  $\varphi_{M,k} = - \varphi_{M,k}$
19.             **endif**
20.             berücksichtige die lokale Drehung des Submodells
21.             **if**  $\varphi_{M,k} < 0$
22.                  $\varphi_{M,k} = \varphi_{M,k} + \text{lokale Drehung des Submodells}$
23.             **else**  $\varphi_{M,k} = \varphi_{M,k} - \text{lokale Drehung des Submodells}$
24.             führe *3D-BG Berechnung* durch
25.         **endif**
26. **return**  $\Delta K_V[k]$ ,  $\varphi_0[k]$

A6 - 3: Funktionsablauf im Algorithmus  $\Delta K_V3D_{\sigma_I'} + \text{Gradierung}_1$

**Algorithmus 12: 3D-BG**

Mit dem neu implementierten 3D-Konzept wird der Einfluss einer bruchmechanischen Gradierung in der Struktur berücksichtigt. Nachdem die Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_V[k]$  für jeden Rissfrontknoten  $k$  berechnet wurden, kann unter Verwendung der  $\Delta K_V[k]$  und den vorliegenden Materialfunktionen  $\Delta K_{I,th}$  und  $\Delta K_{IC}$  eine Aussage über die Rissausbreitung in Abhängigkeit der Materialgradierung getroffen werden.

1. Lese  $\Delta K_I[k]$ ,  $\Delta K_{II}[k]$ ,  $\Delta K_{III}[k]$ ,  $\Delta K_V[k]$ ,  $\varphi_0[k]$ ,  $\varphi_M[k]$ ,  $\Delta K_{I,th}(M1,M2)$ ,  $\Delta K_{IC}(M1,M2)$
2. **for** alle Rissfrontknoten  $k$
3.     berechne das Verhältnis  $A = \Delta K_{II,k} / (\Delta K_{I,k} + \Delta K_{II,k} + \Delta K_{III,k})$
4.     berechne das Verhältnis  $B = \Delta K_{III,k} / (\Delta K_{I,k} + \Delta K_{II,k} + \Delta K_{III,k})$
5.     setze Winkel  $\varphi_1 = \varphi_{M,k}$  und Winkel  $\varphi_2 = \varphi_{0,k}$
6.      $l = 0,5 \cdot \cos(\varphi_1/2)$
7.      $m = \cos(\varphi_1/2)^2$
8.      $n = 1,5 \cdot (A / (1-B-A)) \cdot \sin(\varphi_1)$
9.      $o = 4 \cdot (B / (1-B-A))^2$
10.     $x = 0,5 \cdot \cos(\varphi_2/2)$
11.     $y = \cos(\varphi_2/2)^2$
12.     $z = 1,5 \cdot (A / (1-B-A)) \cdot \sin(\varphi_2)$
13.     $w = 4 \cdot (B / (1-B-A))^2$
14.    berechne relevanten Faktor  $DK1 = \Delta K_{I,th}(M1) / (l \cdot (m-n+((m-n)^2+o)^{1/2}))$
15.    berechne relevanten Faktor  $DK2 = \Delta K_{I,th}(M2) / (x \cdot (y-z+((y-z)^2+w)^{1/2}))$
16.    berechne relevanten Faktor  $DK3 = \Delta K_{IC}(M1) / (l \cdot (m-n+((m-n)^2+o)^{1/2}))$
17.    berechne relevanten Faktor  $DK4 = \Delta K_{IC}(M2) / (x \cdot (y-z+((y-z)^2+w)^{1/2}))$
18.    Überprüfe die relevanten Faktoren
19.    **return**  $\varphi_{0,k}$
20. **endfor**
21. **return** alle  $\varphi_0[k]$

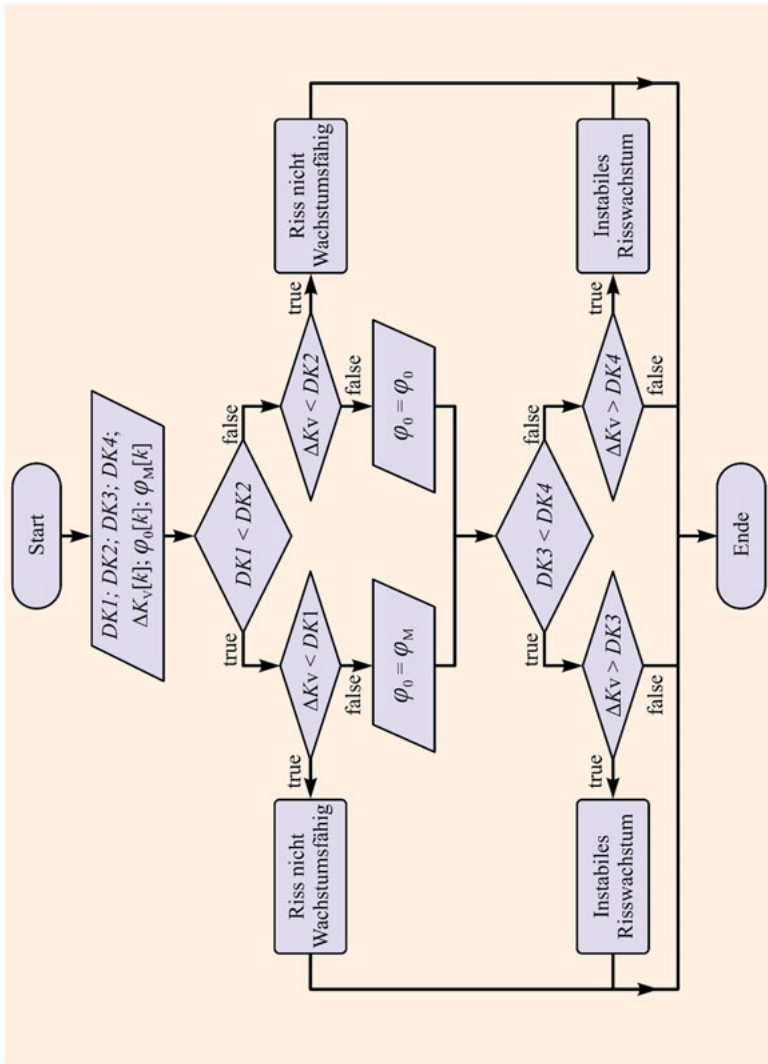


A6 - 4: Funktionsablauf im Algorithmus 3D-BG

**Algorithmus 13: Überprüfung in 3D-BG**

Nachdem die relevanten Spannungsintensitätsfaktoren  $DK1$ ,  $DK2$ ,  $DK3$  und  $DK4$  berechnet wurden, werden diese mit der tatsächlich vorherrschenden Spannungsintensität verglichen. Somit kann eine Aussage über das Rissausbreitungsverhalten an der Gradierungsgrenze getroffen werden.

1. Lese  $\Delta K_V[k]$ ,  $DK1$ ,  $DK2$ ,  $DK3$  und  $DK4$  sowie  $\varphi_0[k]$  und  $\varphi_M[k]$  ein
2. **if**  $DK1 < DK2$
3.     **if**  $\Delta K_{V,k} < DK1$
4.         **return** Riss ist nicht wachstumsfähig
5.     **else** setze  $\varphi_{0,k} = \varphi_{M,k}$
6. **else**
7.     **if**  $\Delta K_{V,k} < DK2$
8.         **return** Riss ist nicht wachstumsfähig
9.     **else** setze  $\varphi_{0,k} = \varphi_{0,k}$
10. **if**  $DK3 < DK4$
11.     **if**  $\Delta K_{V,k} > DK3$
12.         **return** Instabiles Risswachstum
13. **else**
14.     **if**  $\Delta K_{V,k} > DK4$
15.         **return** Instabiles Risswachstum
16. **return**  $\varphi_0[k]$



A6 - 5: Funktionsablauf im Algorithmus Überprüfung in 3D-BG

**Algorithmus 14: Push back**

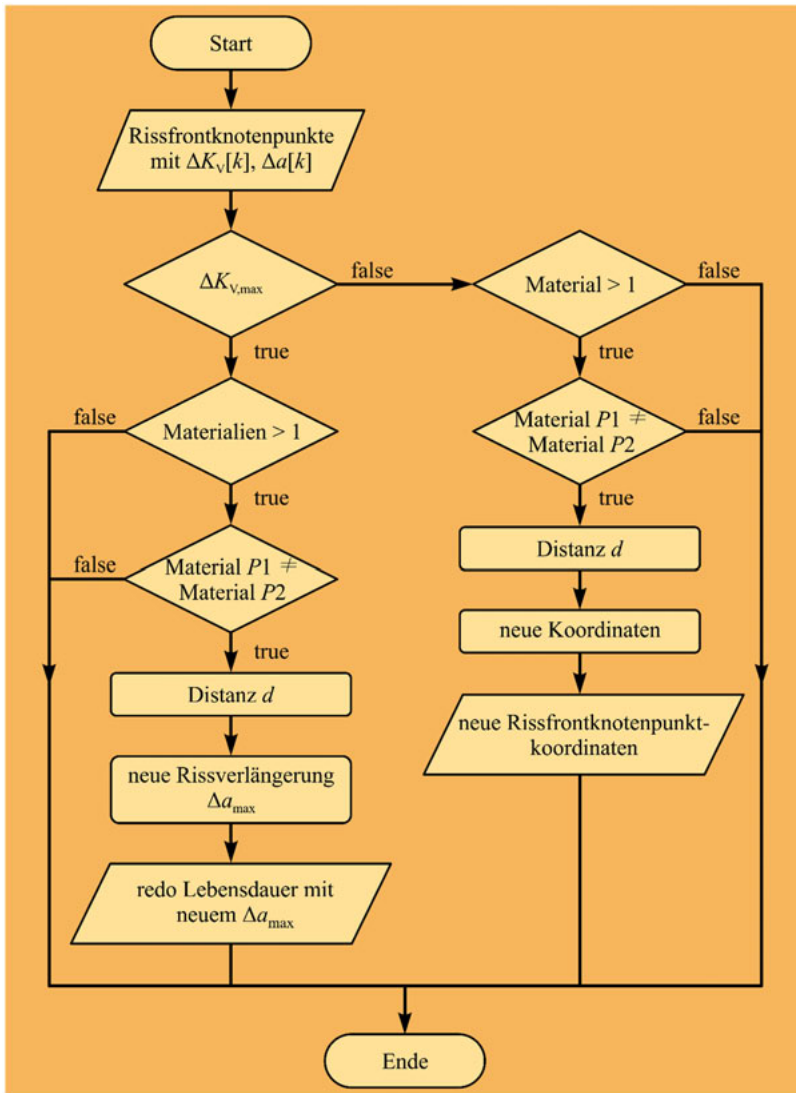
Nach der bruchmechanischen Auswertung und der Lebensdauerberechnung werden den Rissfrontknoten neue Risswachstumsinkremente  $\Delta a[k]$  zugeordnet. Um sicher zu gehen, dass jeder Rissfrontknoten, bedingt durch die numerische Simulation, die Gradierungsgrenze nicht überspringt, findet zum Abschluss des Moduls NETCRACK3D eine Überprüfung der neuen Rissfrontknoten statt. In Abhängigkeit der vorliegenden Materialeigenschaften wird überprüft, ob der Rissfrontknoten mit dem errechneten Rissinkremente die Materialgrenze überspringen würde. Sollte dieser Fall eintreten, wird der Rissfrontknoten nur bis zu der Gradierungsgrenze verschoben.

1. Lese die Rissfrontknotenpunkte mit den vorherrschenden  $\Delta K_V[k]$  und  $\Delta a[k]$  ein
2. überprüfe die neue Position des Rissfrontknotenpunktes mit  $\Delta K_{V,max}$
3. **if** 2 Materialien an dem Knotenpunkt der neuen Position
4. Keine Verschiebung des neuen Knotenpunktes nötig, da bereits auf der Gradierungsgrenze
5. **elseif** Materialunterschied an der alten und der neuen Knotenpunktposition
6. führe *Distanz*  $d$  für die alten Knotenpunktposition zur Gradierungsgrenze  $G_{M,c}$  aus
7. setze  $\Delta a_{max} = d$
8. starte die Funktion *life* erneut mit dem neuen  $\Delta a_{max}$
9. **endif**
10. **for** alle Rissfrontknotenpunkte  $k$  außer dem Knotenpunkt mit  $\Delta K_{V,max}$
11. überprüfe die neue Position der Knotenpunkte  $k$
12. **if** 2 Materialien an dem Knotenpunkt der neuen Position
13. Keine Verschiebung des neuen Knotenpunktes nötig, da bereits auf der Gradierungsgrenze
14. **elseif** Materialunterschied an der alten und der neuen Knotenpunktposition
15. berechne  $d$  der alten Knotenpunktposition zur Gradierungsgrenze
16. bestimme die neue Knotenpunktposition in Abhängigkeit von  $d$
17. **endif**
18. **endfor**
19. **return** neue Rissfrontkoordinaten

**Algorithmus 15: Berechnung Distanz  $d$** 

Unterverwendung der Koordinatenform und der Hesseschen Normalform kann der Abstand eines beliebigen Punktes zu einer Ebene bestimmt. Dafür muss zunächst eine gegebene Parameterform der Punkte, welche die Ebene aufspannen, über die Normalenform in die Koordinatenform transponiert werden. Im Anschluss wird dann der Abstand des aktuellen Knotenpunktes zu der aufgespannten Ebene (partielle Gradierungsebene) unter Verwendung der Hesseschen Normalform berechnet.

1. Lese den Rissfrontknotenpunkt  $k$  und alle Punkte der Gradierungsgrenze  $G_M[c]$  ein
2. finde die nächsten 3 Knotenpunkte  $P_1, P_2, P_3$  in der Gradierungsgrenze
3. setze  $\bar{x} = k$ ;  $\bar{a} = P_1$ ;  $\bar{b} = (P_2 - P_1)$ ;  $\bar{c} = (P_3 - P_1)$
4. bestimme den Normalenvektor  $\bar{n} = \bar{b} \times \bar{c}$
5.  $dot\_produkt\_n = \bar{n} \circ [\bar{x} - \bar{a}]$
6. berechne Länge des Normalenvektors  $|\bar{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$
7. bestimme die Differenz  $d_k$  des Knotenpunktes  $k$  zur Gradierungsgrenze
8.  $d_k = dot\_produkt\_n / |\bar{n}|$
9. **return  $d$**

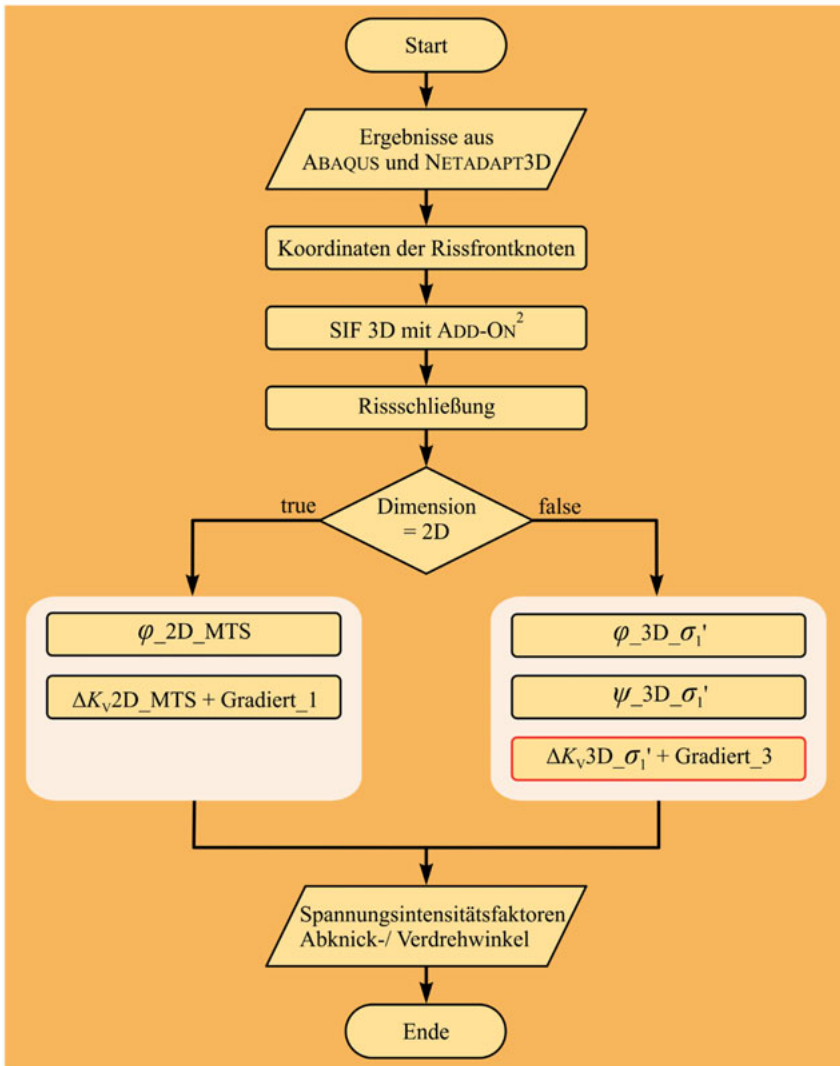
A6 - 6: Funktionsablauf im Algorithmus *Push back*

## A7

**Algorithmus 16: Case 10:  $\sigma_1'$  + Gradierung\_3**

Hier findet die bruchmechanische Auswertung der Ergebnisse aus der FE-Analyse statt. Alle relevanten Größen, die benötigt werden, um eine Aussage über das Rissausbreitungsverhalten treffen zu können, werden zunächst berechnet. Dazu gehören die an den Rissfrontknotenpunkten  $k$  vorherrschenden Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  sowie die Abknick- und Verdrehwinkel  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  und die Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_V$ . Da es sich bei dieser Simulation um eine Rissausbreitung in einer bruchmechanisch gradierten Struktur handelt, muss der Einfluss einer solchen Gradierung bei der Berechnung der Rissausbreitung berücksichtigt werden. Dieser Materialgradierungseinfluss fließt mit in die Berechnung des Vergleichsspannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_V$  ein und liefert im Anschluss den Abknickwinkel  $\varphi_0$  unter Berücksichtigung des Gradierungswinkels  $\varphi_M$ . Darüber hinaus wird auch der Übergangsbereich der Materialgradierung berücksichtigt, in dem von einem exponentiell ansteigendem Gradierungswinkel  $\varphi_0$ , bzw. von exponentiell veränderten Materialparametern  $\Delta K_{I,th}$  und  $\Delta K_{IC}$  im Übergangsbereich ausgegangen wird.

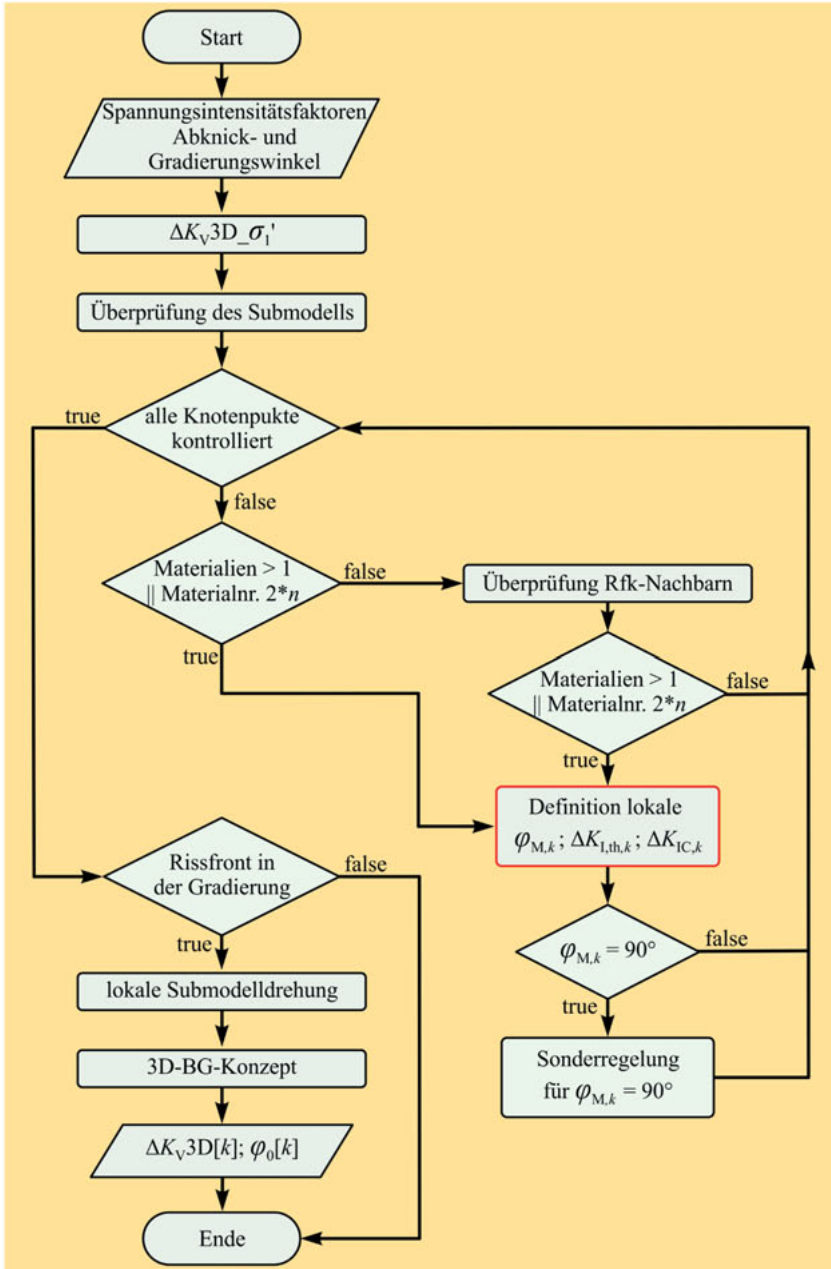
1. Lese die Ergebnisse aus ABAQUS und die Submodelldatei aus NETADAPT3D ein
2. definiere Koordinatensysteme für jeden Rissfrontknoten  $k$
3. berechne die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I[k]$ ,  $K_{II}[k]$  und  $K_{III}[k]$  mit ADD-ON<sup>2</sup>
4. überprüfe Risssschließung
5. **if** gewählte Dimension = 2D
6.     berechne Abknickwinkel  $\varphi_{0\_2D\_MTS}$
7.     berechne Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_{V2D\_MTS}$  + Gradierung\_1
8. **else**
9.     berechne Abknickwinkel  $\varphi_{0\_3D\_}\sigma_1'$
10.     berechne Verdrehwinkel  $\psi_{0\_3D\_}\sigma_1'$
11.     berechne Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren  $\Delta K_{V3D\_}\sigma_1'$  + Gradierung\_3
12. **return** alle  $K_I[k]$ ,  $K_{II}[k]$ ,  $K_{III}[k]$ ,  $\Delta K_V[k]$ ,  $\varphi_0[k]$ ,  $\psi_0[k]$

A7 - 1: Funktionsablauf im Algorithmus Case 10:  $\sigma_1'$  + Gradierung\_3

**Algorithmus 17:  $\Delta K_V 3D\_ \sigma_1'$  + Gradierung\_3**

Für die Beschreibung der Beanspruchung an der Rissfront werden Vergleichsspannungsfaktoren  $\Delta K_V$  berechnet. Für diese Anwendung wird für die Bestimmung des  $\Delta K_V$  der Rissfrontknotenpunkte das  $\sigma_1'$ -Kriterium herangezogen. Im Anschluss wird geprüft, inwieweit sich der Einfluss einer Materialgradierung mit Übergangsbereich auf die Rissausbildung auswirkt. Die Berücksichtigung erfolgt über das neu implementierte 3D-Konzept und einer exponentiellen Funktionsbeschreibung zur Bestimmung der Materialkennwerte sowie des Gradierungswinkels in dem Übergangsbereich.

1. Lese alle  $SIF[k]$ ,  $\varphi_0[k]$ , Gradierungsknoten  $G_M[c]$ ,  $\Delta K_{I,th}$ ,  $\Delta K_{IC}$ ,  $R$ -Verhältnis ein
2. Berechne die  $\Delta K_V[k]$  der Rissfrontknoten  $k$
3. Überprüfe alle Rissfrontknoten  $k$
4. **if** mehr als ein Material am Rissfrontknoten  $k$  oder Materialnr. = gerade Zahl
5.      $\varphi_{M,k}$ ,  $\Delta K_{I,th,k}$  und  $\Delta K_{IC,k}$  = Definition der lokalen Knotenpunktparameter
6.     **if**  $\varphi_{M,k} == 90$  &&  $\varphi_{0,k} < 0$
7.         setze  $\varphi_{M,k} = - \varphi_{M,k}$
8.     **endif**
9.     berücksichtige die lokale Drehung des Submodells
10.    **if**  $\varphi_{M,k} < 0$
11.          $\varphi_{M,k} = \varphi_{M,k} +$  lokale Drehung des Submodells
12.    **else**  $\varphi_{M,k} = \varphi_{M,k} -$  lokale Drehung des Submodells
13.         führe 3D-BG Berechnung durch
14.    **else** Überprüfe die Nachbarknoten
15.         **if** ein anderes Material oder zwei Materialien dem Nachbarknoten zugewiesen
16.             Definition des lokalen  $\varphi_{M,k}$ ,  $\Delta K_{I,th,k}$  und  $\Delta K_{IC,k}$
17.             **if**  $\varphi_{M,k} == 90$  &&  $\varphi_{0,k} < 0$
18.                 setze  $\varphi_{M,k} = - \varphi_{M,k}$
19.             **endif**
20.             berücksichtige die lokale Drehung des Submodells
21.             **if**  $\varphi_{M,k} < 0$
22.                  $\varphi_{M,k} = \varphi_{M,k} +$  lokale Drehung des Submodells
23.             **else**  $\varphi_{M,k} = \varphi_{M,k} -$  lokale Drehung des Submodells
24.                 führe 3D-BG Berechnung durch
25.         **endif**
26. **return**  $\Delta K_V[k]$ ,  $\varphi_0[k]$

A7 - 2: Funktionsablauf im Algorithmus  $\Delta K_V3D_{\sigma_I'} + \text{Gradierung}_3$

**Algorithmus 18: Definition der lokalen Knotenpunktparameter**

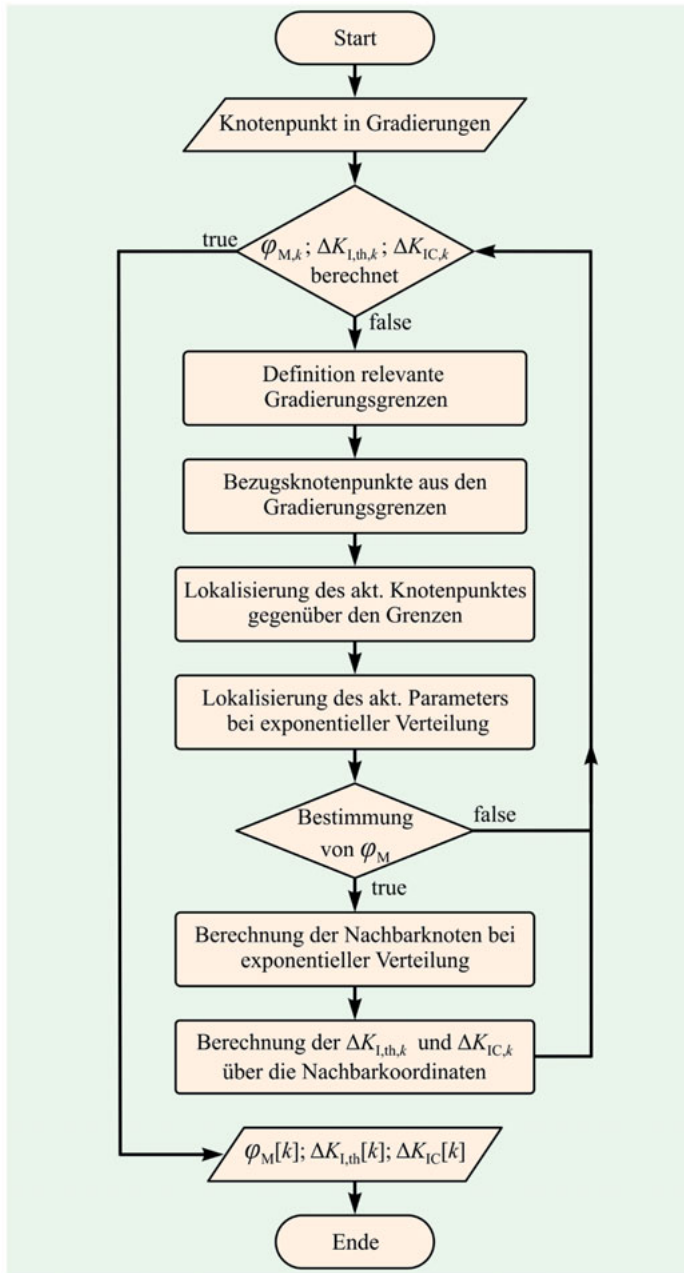
Bei der Berücksichtigung eines Übergangsbereiches zwischen lokal unterschiedlichen Materialparametern, werden die für den aktuellen Knotenpunkt relevanten Parameter individuell bestimmt. In Abhängigkeit der Breite des Grenzbereiches und des verwendeten Funktionsansatzes, in diesem Fall ein exponentieller Verlauf, werden der lokale Gradierungswinkel  $\varphi_M$  sowie die Materialkennwerte  $\Delta K_{I,th}$  und  $\Delta K_{IC}$  berechnet.

1. Lese alle  $SIF[k]$ ,  $\varphi_M[k]$ , Gradierungsknoten  $G_M[c]$ ,  $\Delta K_{I,th}$ ,  $\Delta K_{IC}$ , ein
2. setze Koordinaten des aktuellen Knotenpunktes  $k = x, y, z$
3. suche Knotenpunkt  $P1$  aus der ersten relevanten Gradierungsgrenze mit Matrix  $G_M[c]$
4. schreibe alle Knotenpunkte aus der selben virtuellen Ebene in Vektor  $kn$  raus
5. bestimme den Knoten aus  $kn$  mit dem minimalen Abstand zu  $k$  |
6. setze Koordinaten des Knotenpunktes  $P1$  in der ersten Gradierung  $= x_1, y_1, z_1$
7. bestimme den am nächsten liegenden Knotenpunkt  $P2^*$  aus der nächsten Gradierungsgrenze Matrix  $G_{M,c}$
8. setze die Koordinaten für  $P2^* = x_{P2}, y_{P2}, z_{P2}$
9. **if**  $y_1 = 0$
10.     setze  $y_1 = 1$
11. **endif**
12. Abstand der Gradierungsgrenzen  $d = x_{P2} - x_1$
13.  $x_{rel} = x_1 + 2 \cdot d$
14.  $y_{rel} = d \cdot \tan((\varphi_M(y_2)/180) + y_1)$
15. **for** lokales  $\varphi_{M,k}$
16.      $x_2 = x_{rel}$
17.      $y_2 = y_{rel}$
18.      $x_{new}, y_{new} = \text{smooth}(x_1, x_2, y_1, y_2)$
19.      $\varphi_{M,k} = \tan((y_1 - y_{new}) / (x_1 - x_{new}))$
20.     **return**  $\varphi_{M,k}$
21. **endfor**
22. **for**  $\Delta K_{I,th,k}$
23.      $x_2 = x_{rel}$
24.      $y_1 = \Delta K_{I,th}$  von  $PI$ ;  $y_2 = \Delta K_{I,th}$  von  $y_{rel}$
25.      $x_{new}, y_{new} = \text{smooth}(x_1, x_2, y_1, y_2)$
26.     **return**  $\Delta K_{I,th,k} = y_{new,k}$
27. **endfor**
28. **for**  $\Delta K_{IC,k}$
29.      $x_2 = x_{rel}$
30.      $y_1 = \Delta K_{IC}$  von  $PI$ ;  $y_2 = \Delta K_{IC}$  von  $y_{rel}$
31.      $x_{new}, y_{new} = \text{smooth}(x_1, x_2, y_1, y_2)$
32.     **return**  $\Delta K_{IC,k} = y_{new,k}$
33. **endfor**

**Algorithmus 19: Exponentielle Parameterverteilung (smooth)**

Für die Materialparameterverteilung in der Gradierungsgrenze wird von einer exponentiellen Verteilung ausgegangen. Davon betroffen sind die Thresholdwerte  $\Delta K_{I,th}$ , die Risszähigkeiten  $\Delta K_{IC}$  und der Gradierungswinkel  $\varphi_M$ . Über die Lage des aktuellen Knotenpunktes zu den Gradierungsgrenzen können die Materialparameter über eine Exponentialfunktion bestimmt werden.

1. Lese die Parameter  $x_1, x_2, y_1, y_2$
2.  $a = \text{pow}((y_1/y_2), (1/(x_1 - x_2)))$
3.  $c = y_1 / (\text{pow}(a, x_1))$
4.  $x_{\text{new}} = x + \text{Rissinkrement}$
5.  $y_{\text{new}} = c \cdot \text{pow}(a, x_{\text{new}})$
6. **return**  $x_{\text{new}}, y_{\text{new}}$

A7 - 3: Funktionsablauf im Algorithmus *Definition der lokalen Knotenpunktparameter*

## LITERATURVERZEICHNIS

- [AM86] ARGYRIS, J.; MLEJNEK, H.-P.: *Die Methode der Finiten Elemente in der Elementaren Strukturmechanik*. Band I: Verschiebungsmethode in der Statik. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1986.
- [AST08] ASTM: *Annual Book of ASTM Standards 2008*. Section 3: Metals Test Methods and Analytical Procedures, Volume 03.01, Metals – Mechanical Testing; Elevated and Low-Temperature Tests; Metallography, E647-08, 2008.
- [BBF+03] BAHR, H.-A.; BALKE, H.; FETT, T.; HOFINGER, I.; KIRCHHOFF, G.; MUNZ, D. NEUBRAND, A.; SEMENOV, A.S.; WEISS, H.-J.; YANG, Y.Y.: *Cracks in functionally graded materials*. In: Materials Science and Engineering, Elsevier Science Publishers B.V., Issues A362, 2003, pp. 2-16.
- [Bel12] BELZER, S.: *Die genialsten Erfindungen der Natur. Bionik für Kinder*. S. Fischer Verlag, Frankfurt a.M., 2012
- [Ben90] BENKOWSKY, G.: *Induktionserwärmung. Härten, Glühen, Schmelzen, Löten, Schweißen*. 5. Auflage, Technik GmbH Berlin Verlag, Berlin, 1990.
- [BJR03] BUCHHOLZ, F.-G.; JUST, V.; RICHARD, H.A.: *Computergestützte Simulation und experimentelle Ergebnisse zur 3D-Rissausbreitung in einer 3PB-Probe mit geneigter Rissebene*. In: DVM-Berichte 235, Fortschritte der Bruch- und Schädigungsmechanik, Deutscher Verband für Materialforschung und –prüfung e. V. Berlin, 2003, pp. 297-306.
- [BK14] BACH, F.-W.; KERBER, K.: *Prozesskette Präzisionsschmieden*. Springer Verlag, Berlin, 2014.
- [Bös65] BÖSE, H.: *Einführung in die Ausgleichsfunktion*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1965.
- [Bra07] BRAESS, D.: *Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2007.
- [BS08] BARGEL, H.-J.; SCHULZ, G.: *Werkstoffkunde*. 10. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [BS14] BRILL, S.; SCHIBISCH, D.M.: *Induktives Härten versus Einsatzhärten – ein Vergleich*. In: Elektrowärme International, Fachbericht 3, 2014, pp. 67-75.
- [BS17] BASSHUYSEN VAN, R.; SCHÄFER, F.: *Handbuch Verbrennungsmotor. Grundlagen, Komponenten, Systeme, Perspektiven*. 8. Auflage, Springer Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2017.

- [Buc08] BUCHHOLZ, F.-G.: *Virtuelle Risssschließungsintegral-Methoden: 30 Jahre Weiterentwicklungen und Anwendungen in der Bruchmechanik*. In: DVM-Bericht 240, Zuverlässigkeit von Bauteilen durch bruchmechanische Bewertung: Regelwerke, Anwendungen und Trends, Stuttgart, 2008, pp. 163-167.
- [CC03] CHI, S.-H.; CHUNG, Y.-L.: *Cracking in coating-substrate composites with multi-layered and FGM coatings*. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 70, 2003, pp. 1227-1243.
- [Clo90] CLOUGH, R.W.: *Original formulation of the finite element method*. Finite Elements in Analysis and Design, Volume 7, Elsevier Science Publishers B.V., 1990, pp. 89-101.
- [Dil05] DILTHEY, U.: *Schweißtechnische Fertigungsverfahren 1. Schweiß- und Schneidtechnologien*. 3. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2005.
- [DR08] DAHMEN, W.; REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 2. Auflage, Springer Verlag, 2008.
- [DSS17] DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA CORP.: *Simulia Abaqus 6.14. Documentation* (www.abaqus.software.polimi.it/v6.14/, Stand 07.2017)
- [EPW06] EVERSHEIM, W.; PFEIFER, T.; WECK, M.: *100 Jahre Produktionstechnik*. Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen von 1906 bis 2006. Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [ER70] ERDOGAN, F.; RATWANI, M.: *Fatigue and Fracture of Cylindrical Shells Containing a Circumferential Crack*. In: International Journal of Fracture Mechanics, Volume 6, 1970, pp. 379-392.
- [Erd96] ERDOGAN, F.: *Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials*. Final Technical Report for U.S. Air Force Office of Scientific Research, 1996.
- [ES63] ERDOGAN, F.; SIH, G.C.: *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*. In: Journal of Basic Engineering, Volume 85, 1963, pp. 519-525.
- [Fis74] FISCHER, H.W.: *Ermittlung von Schätzwerten- Eine Einführung in die Grundlagen der Fehler- und Ausgleichsrechnung*. In: ATM + Messtechnische Praxis, Ausgabe 9, Oldenbourg Verlag, München, Volume 461, 1974, pp. 99-104.
- [FM90] FORMAN, G.R.; METTU, S.R.: *Behaviour of Surface and Corner Cracks subjected to Tensile and Bending Loads in Ti-6AL-4V Alloy*. NASA Technical Memorandum, Volume 102165, Houston, 1990.
- [FR03] FULLAND, M.; RICHARD, H.A.: *Application of the FE-Method to the simulation of fatigue crack growth in real structures*. In: Steel Research, Volume 74, 2003, pp.584-590.

- [FRS+06] FULLAND, M.; RICHARD, H.A.; SANDER, M.; KULLMER, G.: *Fatigue crack propagation in the frame of a hydraulic press*. In: CD-Rom Proceedings of International Conference on Crack Path 2006, Parma, 2006.
- [FSR00] FULLAND, M.; SCHOELLMANN, M.; RICHARD, H.A.: *ADAPCRACK3D – Development of the program for the simulation of three-dimensional crack propagation processes*. In: S.N. Atluri, F.W. Brust (Eds.): *Advances in Computational Engineering & Sciences*, Volume I, Tech Science Press, Palmdale, USA, 2000, pp. 948-953.
- [Ful03] FULLAND, M.: *Rißsimulationen in dreidimensionalen Strukturen mit automatischer adaptiver Finite-Elemente-Netzgenerierung*. Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik, Volume 280, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [GA97] GU, P.; ASARO, R.J.: *Cracks in functionally graded materials*. In: *International Journal Solids Structures*, Volume 34, 1997, pp. 1-17.
- [GJ10] GÖRKE, S.; JÖRRES, S.: *Skriptum zur Vorlesung "Numerik I"*. Universität Paderborn, 2010.
- [Gob09] GOBRECHT, J.: *Werkstofftechnik-Metalle*. 3. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, 2009.
- [Gri21] GRIFFITH, A.A.: *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Volume 221, 1921, pp. 163-198.
- [Hah76] HAHN, H.G.: *Bruchmechanik – Einführung in die theoretischen Grundlagen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1976.
- [Har08] HARBRECHT, H.: *Skriptum zur Vorlesung "Algorithmische Mathematik"*. Universität Paderborn, 2008.
- [Har68] HARDTWIG, E.: *Fehler-und Ausgleichsrechnung*. B I-Hochschultaschenbuch, Volume 262/262a\*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968.
- [HBH13] HOMBERG, W.; BIERMANN, D.; HEIM, H.-P.: *Functionally Graded Materials in Industrial Mass Production. Fundamentals*. Verlag Wissenschaftliche Scripten, Auerbach, 2013.
- [HHJ+05] HÄUBLER, A.; HEILIGER, A.; JEHNERT, H.; PETER, H.-J.; SCHWENK, W.; WILDING, B.: *Das Eldec-SDF-Randschichthärtens. Ein revolutionäres Induktionsverfahren*. In: *ATZ*, Volume 5, 2005, pp. 406-414.
- [HHS12] HEINZ, P.; HERRMANN, M.; SOBEK, W.: *Herstellungsverfahren und Anwendungsbereich für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen*. Forschungsinitiative Zukunft Bau, F2811, Fraunhofer IRB Verlag, Stuttgart, 2012.

- [IKZ02] IKZ: *Was ist eigentlich der Unterschied zwischen den Verbindungstechniken Schweißen, Löten und Kleben?* Ausgabe 6, IKZ-Praxis für die Haus-technik, Strobel Verlag, Arnsberg, 2002.
- [Irw57] IRWIN, G.R.: *Analysis of Stresses and Strain Near the End of a Crack Traversing In a Plate*. In: *Journal of Applied Mechanics*, Volume 24, 1957, pp. 361-364.
- [Irw58] IRWIN, G.R.: *Fracture*. In: FLÜGGE, S.: *Handbuch der Physik*, Band 6, Springer Verlag, Berlin, 1958, pp.551-590.
- [IS10] ILSCHNER, B.; SINGER, R.F.: *Werkstoffwissenschaften und Fertigungstechnik. Eigenschaften, Vorgänge, Technologien*. 5. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg, 2010.
- [ITE+12] ICKERT, L.; THOMAS, D.; ECKSTEIN, L.; TRÖSTER, T.: *Beitrag zum Fortschritt im Automobilleichtbau durch belastungsgerechte Gestaltung und innovative Lösungen für lokale Verstärkungen von Fahrzeugstrukturen in Mischbauweise*. FAT-Schriftreihe 244, Forschungsvereinigung Automobil-technik E.V., Verband der Automobilindustrie (VDA), 2012.
- [JDK+84] JÄNICHE, W.; DAHL, W.; KLÄRNER, H.-F.; PITSCH, W.; SCHAUWINHOLD, D.; SCHLÜTER, W.; SCHMITZ, H.: *Werkstoffkunde Stahl. Band 1 Grundlagen*. Verein Deutscher Eisenhüttenleute, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [Jin03] JIN, Z.-H.: *Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials*. In: Gao, D.Y. et al.: *Advances in Mechanics and Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [Kle12] KLEIN, B.: *FEM. Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. 9. Auflage, Springer Vieweg Verlag, 2012.
- [Kle13] KLEIN, B.: *Leichtbau-Konstruktion. Berechnungsgrundlagen und Gestaltung*. 10. Auflage, Springer Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2013.
- [KNR03] KIEBACK, B.; NEUBRAND, A.; RIEDEL, H.: *Processing techniques for functionally graded materials*. In: *Materials Science and Engineering*, Volume A362, Elsevier Science Publishers B.V., 2003, pp. 81-105.
- [KP02] KIM, J.-H.; PAULINO, G.H.: *Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method*. In: *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 69, 2002, pp. 1557-1586.
- [KP04] KIM, J.-H.; PAULINO, G.H.: *Simulation of propagation in functionally graded materials*. In: *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Volume 1, 2004, pp. 63-94.

- [KPP+12] KALWEIT, A.; PAUL, C.; PETERS, S.; WALLBAUM, R.: *Handbuch für technisches Produktdesign. Material und Fertigung. Entscheidungsgrundlagen für Designer und Ingenieure*. 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2012.
- [KR09] KULLMER, G.; RICHARD, H.A.: *Bruchmechanische Untersuchung zum Einfluss der Verspannung von Rissflächen mit Spannschrauben auf die Risswachstumsgeschwindigkeit im Deckel einer Innenhochdruckumformmaschine*. In: DVM-Bericht 241, Bruchmechanische Werkstoff- und Bauteilbewertung: Beanspruchungsanalyse, Prüfmethoden und Anwendungen, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2009, pp. 273-282.
- [KRS+16] KULLMER, G.; RESCHETNIK, W.; SCHRAMM, B.; RICHARD, H.A.: *Fatigue crack growth near regions with differing stiffness*. In: Procedia Structural Integrity, Volume 2, Elsevier Science Publishers B.V., 2016, pp. 2994-3001.
- [KSR05] KULLMER, G.; SANDER, M.; RICHARD, H.A.: *Schadensanalysen von Verschlusskörpern einer Innenhochdruckumformmaschine*. In: DVM-Bericht 237, Technische Sicherheit, Zuverlässigkeit und Lebensdauer; Themenschwerpunkt: Bruchmechanische Schadensanalyse, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2005, pp. 55-64.
- [KSR16] KULLMER, G.; SCHRAMM, B.; RICHARD, H.A.: *Fatigue crack paths under the influence of changes in stiffness*. In: Frattura ed Integrità Strutturale, Volume 37, 2016, pp. 368-378.
- [Kun08] KUNA, M.: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen*. Finite Elemente in der Bruchmechanik. Vieweg Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [MAM16] MIRAHMADI, H.; AZIMI, M.; MIRJAVADI, S.S.: *Calculation of stress intensity factor for functionally graded cylinders with two radial cracks using the weight function method*. In: Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Volume 85, Elsevier Science Publishers B.V., 2016, pp. 447-456.
- [Mot91] MOTZ, H.D.: *Ingenieur-Mechanik: Technische Mechanik für Studium und Praxis*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1991.
- [Mur87] MURAKAMI, Y.: *Stress Intensity Factors Handbook*. Volume 1, Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [NLR+13] NIENDORF, T.; LEUDERS, S.; RIEMER, A.; RICHARD, H.A.; TRÖSTER, T.; SCHWARZE, D.: *Highly Anisotropic Steel Processed by Selective Laser Melting*. In: Metallurgical and Materials Transactions, Volume B44, 2013, pp. 794-796.
- [NR97] Neubrand, A.; Rödel, J.: *Gradient Materials: An Overview of a Novel Concept*. In: Zeitschrift für Metallkunde: International Journal of Materials Research and Advanced Techniques, Volume 88, Hanser Verlag, München, 1997, pp. 358-371.

- [NS16] NAEBE, M.; SHIRVANIMOGHADDAM, K.: *Functionally graded materials: A review of fabrication and properties*. In: Applied Materials Today, Volume 5, 2016, pp. 223-245.
- [NSS14] NAZAROV, S.A.; SPECUVIUS-NEUGEBAUER, M.; STEIGEMANN, M.: *Crack Propagation in anisotropic composite Structures*. In: Asymptotic Analysis, Volume 86, 2014, pp. 123-153.
- [Pap09] PAPULA, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Band 1, 12. Auflage, Vieweg Teubner Verlag, 2009.
- [Pau02] PAULINO, G.H.: *Fracture of functionally graded materials*. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 69, Issues 14-16, 2002, pp. 1519-1520.
- [PKL+15] PARK, J.; KIM, M.; LEE, Y.; LEE, H.S.; KO, H.: *Fingertip skin-inspired microstructured ferroelectric skins discriminate static/dynamic pressure and temperature stimuli*. In: Science Advances, Volume 1, 2015, el1500661.
- [Poo10] POOK, L.P.: *Five decades of crack path research*. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 77, 2010, pp. 1619-1630.
- [Poo80] POOK, L.P.: *The significance of mode I branch cracks for combined mode failure*. In: Radon, J.C.: Fracture and Fatigue. Elasto-Plasticity, Thin Sheet and Micromechanisms Problems. Pergamon Press, Oxford, 1980, pp. 143-153.
- [Poo85] POOK, L.P.: *Comments on fatigue crack growth under mixed modes I and III and pure mode III loading*. In: Miller, K.J.; Brown, M.W.: Multiaxial Fatigue, ASTM STP 853, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1985, pp. 249-263.
- [PS13]. PLABMANN, W.; SCHULZ, D.: *Handbuch Elektrotechnik. Grundlagen und Anwendungen für Elektrotechniker*. 6. Auflage, Springer Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2013.
- [Rad88] RADAJ, D.: *Wärmewirkungen des Schweißens. Temperaturfeld, Eigenspannungen, Verzug*. Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [RBK+03] RICHARD, H.A.; BUCHHOLZ, F.-G.; KULLMER, G.; SCHÖLLMANN, M.: *2D- and 3D-Mixed Mode Fracture Criteria*. In: Buchholz, F.-G.; Richard, H.A.; Aliabadi, M.H. (Eds.): Advances in Fracture Mechanics, Trans Tech Publications, Zürich, 2003, pp. 251-260.
- [RFB+03] RICHARD, H.A.; FULLAND, M.; BUCHHOLZ, F.-G.; SCHÖLLMANN, M.: *3D Fracture Criteria for Structures with Cracks*. In: Steel Research, Volume 74, 2003, pp. 491-497.
- [RFS+02] RICHARD, H. A.; FULLAND, M.; SCHÖLLMANN, M.; SANDER, M.: *Simulation of fatigue crack growth using ADAPCRACK3D*. In: A. F. Blom (Ed.): Fatigue 2002, Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Fatigue Congress, Stockholm, Sweden, 2002, pp. 1405-1412.

- [RFS+04] RICHARD, H.A.; FULLAND, M.; SANDER, M.; KULLMER, G.: *Bruchmechanische Untersuchungen zum ICE-Radreifenbruch*. In: DVM-Bericht 236, Fortschritte der Bruch- und Schädigungsmechanik. Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 2004, pp. 105-119.
- [RFS+05] RICHARD, H.A.; FULLAND, M.; SANDER, M.; KULLMER, G.: *Fracture in a rubber-sprung railway wheel*. In: Engineering Failure Analysis, Volume 12, 2005, pp. 986-999.
- [RFS05] RICHARD, H.A.; FULLAND, M.; SANDER, M.: *Theoretical crack path prediction*. In: Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures, Volume 28, 2005, pp. 3-12.
- [RHB06] RÖSLER, J.; HARDERS, H.; BÄKER, M.: *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. 2. Auflage, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [Ric68] RICE, J.R.: *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*. In: Journal of Applied Mechanics, Volume 35, Düsseldorf, 1968, pp. 379-386.
- [Ric85] RICHARD, H.A.: *Bruchvorhersage bei überlagerter Normal- und Schubbeanspruchung von Rissen*. VDI Forschungsheft, Volume 631, 1985, S. 1-60.
- [Rie15] RIEMER, A.: *Einfluss von Werkstoff, Prozessführung und Wärmebehandlung auf das bruchmechanische Verhalten von Laserstrahlschmelzbauteilen*. Forschungsberichte des Direct Manufacturing Research Centers, Volume 3, Shaker Verlag, Aachen, 2015.
- [RK77] RYBICKI, E.F.; KANNINEN, M.F.: *A Finite Element Calculation Of Stress Intensity Factors By A Modified Crack Closure Integral*. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 9, 1977, pp.931-938.
- [RLS+12] RABOLD, F.; LEIBELT, T.; SCHMATZ, S.; KUNA, M.: *PROCRACK: Ein Programmsystem zur Simulation des Ermüdungsrisswachstums*. In: DVM-Bericht 244, Bruchmechanische Werkstoff- und Bauteilbewertung: Beanspruchungsanalyse, Prüfmethode und Anwendungen, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2012, pp. 171-180.
- [RN95] RÖDEL, J.; NEUBRAND, A.: *Gradientenwerkstoffe – Konzepte, Anwendungen und Herausforderungen*. In: Ziegler, G.: Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde, Volume 10, DGM Informationsgesellschaft Verlag, Bayreuth, 1995, pp. 15-25.
- [Röd96] RÖDEL, J.: *Verfahren zur Herstellung von Gradientenwerkstoffen. Vorrichtung zur Durchführung des Verfahrens und mittels des Verfahrens hergestellte Gradientenwerkstoffe*. Patent: DE 4435146 A1, 1996.
- [RS12] RICHARD, H.A.; SANDER, M.: *Ermüdungsrisse. Erkennen, sicher beurteilen, vermeiden*. 3. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.

- [RSF+01] RICHARD, H.A.; SCHÖLLMANN, M.; FULLAND, M.; SANDER, M.: *Experimental and numerical simulation of mixed-mode crack growth*. In: M. de Freitas (Ed.): 6<sup>th</sup> International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture, Lisboa, Portugal, 2001, pp. 623-630.
- [RSB+03] RICHARD, H.A.; SCHÖLLMANN, M.; BUCHHOLZ, F.-G.; FULLAND, M.: *Comparison of 3D-Fracture criteria*. In: DVM-Berichte 235, Fortschritte der Bruch- und Schädigungsmechanik, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e. V. Berlin, 2003, pp. 327-340.
- [RSK+04] RICHARD, H.A.; SANDER, M.; KULLMER, G.; FULLAND, M.: *Finite-ElementeSimulation im Vergleich zur Realität*. In: Materialprüfung, Volume 9, 2004, pp.441-448.
- [RSS14] RICHARD, H.A.; SCHRAMM, B.; SCHIRMEISEN, N.-H.: *Cracks on Mixed Mode loading – Theories, Experiments, Simulations*. In: International Journal of Fatigue, Volume 62, 2014, pp. 93-103.
- [RW13] RUGE, J.; WOHLFAHRT, H.: *Technologie der Werkstoffe. Herstellung, Verarbeitung, Einsatz*. 9. Auflage, Springer Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2013.
- [San08] SANDER, M.: *Sicherheit und Betriebsfestigkeit von Maschinen und Anlagen*. Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [Sch01] SCHÖLLMANN, M.: *Vorhersage des Risswachstums in ebenen und räumlichen Strukturen mittels Simulation*. Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik, Volume 269, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2001.
- [Sch12] SCHIRMEISEN, N.-H.: *Risswachstum unter 3D-Mixed-Mode-Beanspruchungen*. Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik, Volume 335, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2012.
- [Sch14] SCHRAMM, B.: *Risswachstum in funktional gradierten Materialien und Strukturen*. Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik, Volume 339, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2014.
- [Ser17] SERLO: <https://assets.serlo.org/>; 17.08.2017.
- [SFK+01] SCHÖLLMANN, M.; FULLAND, M.; KULLMER, G.; RICHARD, H.A.: *Einsatz der Finite-Elemente-Methode zur Simulation des Stablen Risswachstums In Räumlichen Strukturen*. In: DVM-Bericht 233, Anwendung der Bruch- und Schädigungsmechanik, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2001, pp. 199-212.
- [SFR00] SCHÖLLMANN, M.; FULLAND, M.; RICHARD, H. A.: *Three-dimensional fatigue crack growth simulation under complex loading with ADAPCRACK3D*. In: M. Fuentes, M. Elices, A. Martín-Meizoso, J.-M. Martínez-Esnaola (Eds.): Fracture Mechanics: Applications and Challenges, ESIS Publication 26, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 2000, CD-Rom-Proceedings, section 9 (numerical methods), paper 5, pp. 1-8.

- [SFR03] SCHÖLLMANN, M.; FULLAND, M.; RICHARD, H.A.: *Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3D structures* In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 70, 2003, pp. 221-230.
- [SHN+09] SEVIK, M.; HUTAR, P.; NAHLIK, L.; KNESL, Z. *An evaluation of the stress intensity factor in*. In: Applied and Computational Mechanics, Volume 3, 2009 pp. 401–410.
- [SIZ03] STAHL-INFORMATIONEN-ZENTRUM: *Weich- und Hartlöten von bandverzinktem Feinblech*. Merkblatt 235, 2. Auflage, 2003.
- [SIZ05] STAHL-INFORMATIONEN-ZENTRUM: *Wärmebehandlung von Stahl – Nitrieren und Nitrocarburieren*. Merkblatt 447, 2005.
- [SIZ05a] STAHL-INFORMATIONEN-ZENTRUM: *Wärmebehandlung von Stahl – Härten, Anlassen, Vergüten, Bainitisieren*. Merkblatt 450, 2005.
- [SIZ08] STAHL-INFORMATIONEN-ZENTRUM: *Einsatzhärten*. Merkblatt 452, 2008.
- [SIZ09] STAHL-INFORMATIONEN-ZENTRUM: *Wärmebehandlung von Stahl – Rand-schichthärten*. Merkblatt 236, 2009.
- [SIZ12] STAHL-INFORMATIONEN-ZENTRUM: *Kleben von Stahl und Edelstahl Rostfrei*. Merkblatt 382, 2012.
- [Sob07] SOBEK, W.: *Entwerfen im Leichtbau*. Themenheft Forschung, Universität Stuttgart, Volume 3, 2007.
- [SR12] SCHRAMM, B.; RESCHETNIK, W.: *Charakterisierung einer bruchmechanischen Materialgradierung in Abhängigkeit der Übergangszone*. Universität Paderborn, Fakultät Maschinenbau, Fachgruppe Angewandte Mechanik unveröffentlichte Masterarbeit, 2012.
- [SRK16] SCHRAMM, B.; RICHARD, H.A.; KULLMER, G.: *Theoretical, experimental and numerical investigation crack growth in fracture mechanical graded structures*. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 167, 2016, pp. 188-200.
- [SSF+10] STEIGEMANN, M.; SPECOVIVUS-NEUGEBAUER, M.; FULLAND, M.; RICHARD, H.A.: *Simulation of crack paths in functionally graded materials*. In: Engineering Fracture Mechanics 77, 2010, pp. 2145-2157.
- [SSN+12] SPECOVIVUS-NEUGEBAUER, M.; STEIGEMANN, M.; NAZAROV, S.A.; RICHARD, H.A.: *Das Energie-Kriterium – neue Entwicklungen zu einer alten Idee*. In: DVM-Bericht 244, Bruchmechanische Werkstoff- und Bauteilbewertung: Beanspruchungsanalyse, Prüfmethode und Anwendungen, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2012, pp. 1-10.
- [Ste12] STEINKE, P.: *Finite-Elemente-Methode. Rechnergestützte Einführung*. 4. Auflage, Springer Vieweg Verlag, Heidelberg, 2012.
- [Ste15] STEIGEMANN, M.: *Power-law solutions of anisotropic multi-material elasticity problems*. In: Journal of Elasticity, Volume 118, 2015, pp. 63-87.

- [Ste17] STEIGEMANN, M.: <http://mcrack.martin-steigemann.net/>, 06/2017.
- [STH10] SOBEK, W.; TRUMPF, H.; HEINLEIN, F.: *Recyclinggerechtes Konstruieren im Stahlbau*. In: Stahlbau 79, Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin, 2010, pp. 424-433.
- [TM77] TANAKA, K.; MATSOUKA, S.: *A tentative explanation for two parameters, C and m, in Paris equation of fatigue crack growth*. In: International Journal of Fracture, Volume 13, 1977, pp. 563-583.
- [TP05] THEOTOKOGLU, E.E.; PAULINO, G.H.: *A crack in the homogeneous half plane interacting with a crack at the interface between the nonhomogeneous coating and the homogeneous half-plane*. In: International Journal of Fracture, Volume 134, 2005, pp. L11-L118.
- [TPI73] TADA, H.; PARIS, P.C.; IRWIN, G.R.: *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del Research Corporation, Missouri, 1973.
- [TT10] THEOTOKOGLU, E.E.; TOURLOMOUSIS, I.I.: *Crack kinking in sandwich structures under three-point bending*. In: Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Volume 53, Elsevier Science Publishers B.V., 2010, pp. 158-164.
- [UE06] UHLMANN, E.; ELSNER, P.: *Gradiententechnologie- Die Zukunft der Fertigungstechnik*. Begleitband zum 3D-Erfahrungsforum Innovation Werkzeug- und Formenbau, Produktionstechnisches Zentrum Berlin, Universitätsverlag der TU-Berlin, 2006, pp. 243-250.
- [Vil17] VILLAMIL, P.D.: *Statische und dynamische Analyse von Tragwerken aus funktional gradierten Materialien*. Shaker Verlag, Aachen, 2017.
- [WCI10] WAWRZYNEK, P.A.; CARTER, B.J.; INGRAFFEA, A.R.: *Advances in Simulation of Arbitrary 3D Crack growth using FRANC3D/NG*. In: Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea, Volume 23, 2010, pp. 607-613.
- [WDK17] WIEDEMEIER, B.; DIBBLEE, K.; KULLMER, G.: *Entwicklung eines verbesserten Axialrissprobenkonzeptes auf Basis numerischer Simulationen*. 35. CADFEM ANSYS Simulation Conference, 15.-17.11.2017, Koblenz-Kongress, Koblenz, 2017.
- [Wei07] WEIBACH, W.: *Werkstoffkunde, Strukturen, Eigenschaften, Prüfung*. 16. Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2007.
- [Wie11] WIEDEMEIER, B.: *Einsatzmöglichkeiten bruchmechanischer Konzepte bei der Entwicklung und Verbesserung von Rohrprodukten aus hochfesten Werkstoffen*. Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik, Volume 332, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2011.

- [WMJ+13] WITTEL, H.; MUHS, D.; JANNASCH, D.; VOBIEK, J.: *Roloff/Matek Maschinenelemente. Normung Berechnung Gestaltung*. 21. Auflage, Springer Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2013.
- [WMN02] WANG, B.L.; MAI, Y.-W.; NODA, N.: *Fracture Mechanics Analysis Model for Functionally Graded Materials with Arbitrarily Distributed Properties*. In: International Journal of Fracture, Volume 116, 2002, pp. 161-177.

# Online-Buchshop für Ingenieure

■ ■ VDI nachrichten

BUCHSHOP

Online-Shops



**Fachliteratur und mehr -  
jetzt bequem online recher-  
chieren & bestellen unter:  
[www.vdi-nachrichten.com/](http://www.vdi-nachrichten.com/)  
Der-Shop-im-Ueberblick**



**Täglich aktualisiert:  
Neuerscheinungen  
VDI-Schriftenreihen**



Im Buchshop von [vdi-nachrichten.com](http://vdi-nachrichten.com) finden Ingenieure und Techniker ein speziell auf sie zugeschnittenes, umfassendes Literaturangebot.

Mit der komfortablen Schnellsuche werden Sie in den VDI-Schriftenreihen und im Verzeichnis lieferbarer Bücher unter 1.000.000 Titeln garantiert fündig.

Im Buchshop stehen für Sie bereit:

**VDI-Berichte** und die Reihe **Kunststofftechnik**:

Berichte nationaler und internationaler technischer Fachtagungen der VDI-Fachgliederungen

**Fortschritt-Berichte VDI:**

Dissertationen, Habilitationen und Forschungsberichte aus sämtlichen ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen

**Newsletter „Neuerscheinungen“:**

Kostenfreie Infos zu aktuellen Titeln der VDI-Schriftenreihen bequem per E-Mail

**Autoren-Service:**

Umfassende Betreuung bei der Veröffentlichung Ihrer Arbeit in der Reihe Fortschritt-Berichte VDI

**Buch- und Medien-Service:**

Beschaffung aller am Markt verfügbaren Zeitschriften, Zeitungen, Fortsetzungsreihen, Handbücher, Technische Regelwerke, elektronische Medien und vieles mehr – einzeln oder im Abo und mit weltweitem Lieferservice

VDI nachrichten

BUCHSHOP

[www.vdi-nachrichten.com/Der-Shop-im-Ueberblick](http://www.vdi-nachrichten.com/Der-Shop-im-Ueberblick)

## Die Reihen der Fortschritt-Berichte VDI:

- 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
  - 2 Fertigungstechnik
  - 3 Verfahrenstechnik
  - 4 Bauingenieurwesen
- 5 Grund- und Werkstoffe/Kunststoffe
  - 6 Energietechnik
  - 7 Strömungstechnik
- 8 Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik
  - 9 Elektronik/Mikro- und Nanotechnik
  - 10 Informatik/Kommunikation
  - 11 Schwingungstechnik
- 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
  - 13 Fördertechnik/Logistik
- 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
  - 15 Umwelttechnik
  - 16 Technik und Wirtschaft
  - 17 Biotechnik/Medizintechnik
  - 18 Mechanik/Bruchmechanik
  - 19 Wärmetechnik/Kältetechnik
- 20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE CAQ, CIM ...)
  - 21 Elektrotechnik
  - 22 Mensch-Maschine-Systeme
  - 23 Technische Gebäudeausrüstung

ISBN 978-3-18-335018-6