2 Formalisierung und Mathematisierung von Logik – Mathematische Logik im 19. Jahrhundert

Die philosophischen Aushandlungen und physikalischen Neuentdeckungen des 18. und 19. Jahrhunderts ebneten den Weg für die Ausdehnung naturwissenschaftlicher Erkenntnisproduktion ab dem 19. Jahrhundert, was sich in neuen Messmethoden und Apparaturen zeigt, aber auch neue Untersuchungsgegenstände und -objekte traten ins Interesse der Wissenschaft. Daraus entstand ein erkenntnistheoretischer Wettstreit, wie die Natur, die physische Realität denn nun am besten zu untersuchen und zu verstehen sei, der bis heute anhält. Auf den folgenden Seiten werden jene Diskussionen und Entwicklungen des 19. Jahrhunderts in den Blick genommen, anhand derer die Mathematisierung der Logik aufgezeigt werden kann.

Die gegenwärtige Bestimmung der Logik entstand durch die Integration der Mathematik in die Definition von Logik, im Gefolge der Arbeiten von George Boole, Ernst Schröder und Gottlob Frege im 19. und frühen 20. Jahrhundert und beruht auf Symbolen und einer formal-mathematischen Sprache. Die Grundlagen zu dieser Transformation legten die oben beschriebenen Vordenker, die davon überzeugt waren, dass sich die Natur mathematisch ausdrückt und nur durch Mathematik analysiert und interpretiert werden kann. Die boolesche Algebra ist ein weiterer Einschnitt in diesem Transformationsprozess. Die boolesche Algebra ist nach George Boole (1815–1864) benannt und geht auf dessen Logikkalkül von 1847 zurück, in dem er erstmals algebraische Methoden auf die Klassenlogik und Aussagenlogik anwandte. In seiner algebraischen Logik weist Boole auf die Analogie zwischen algebraischen Symbolen und logischen Formen in der Aussagenlogik hin und zeigt, wie die Symbole der Quantität von denen der Operation getrennt werden können. Booles symbolische Methode des logischen Schließens ermöglicht es, aus willkürlichen Sätzen mit einer beliebigen Anzahl von Begriffen Schlussfolgerungen zu ziehen, die logisch in den Prämissen enthalten sind.

2.1 Kalküle – Suche nach einer formalen Sprache

Ein Kalkül hat im deutschsprachigen Raum mehrere Bedeutungen, etwa eine Berechnung anstellen, berechnend sein, einer Absicht oder einer Strategie folgen. Eben diese Mehrdeutigkeit des Wortes Kalkül soll in der Mathematik durch die Übersetzung in eine formale Sprache verhindert werden: Ein formales System basiert auf der Absicht, klare Aussagen zu treffen und die Aussagenlogik zu schematisieren. In der Mathematik beschreiben Kalküle formale Systeme von Regeln, die, richtig angewendet, zu korrekten Ergebnissen führen und mit denen sich aus gegebenen Aussagen oder grundlegenden Axiomen weitere Aussagen ableiten lassen.

Der Mathematiker George Boole wendete das Kalkül auf die Logik selbst an und nahm eine formalistische Definition der Aussagenlogik vor. Die Aussagenlogik befasst sich mit Aussagesätzen, in der jede Aussage zunächst daraufhin geprüft wird, aus welchen einfacheren Aussagen sie zusammengesetzt ist. Sie definiert die Beziehungen zwischen Aussagesätzen mithilfe der Negation, Disjunktion, Konjunktion und Implikation. Die klassische Aussagenlogik definiert sich über semantische Bedingungen: Jede Aussage hat genau einen von zwei Wahrheitswerten, die meist als *wahr* und *falsch* bezeichnet werden. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist eindeutig bestimmt durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen und die Art, wie diese zusammengesetzt sind. Als Algebra wird das Rechnen mit Unbekannten in Gleichungen bezeichnet. In der Mathematik ist eine boolesche Algebra (oder ein boolescher Verband) eine spezielle algebraische Struktur, die die Eigenschaften der logischen Operatoren UND, ODER, NICHT sowie die Eigenschaften der mengentheoretischen Verknüpfungen Durchschnitt, Vereinigung, Komplement verallgemeinert. Gleichwertig zur booleschen Algebra sind Boolesche Ringe, die von UND und ENTWEDER-ODER oder exklusiv-ODER beziehungsweise Durchschnitt und symmetrischer Differenz ausgehen.

Booles Algebra gründet sich darauf, dass er die Theorie der Logik mit dem Aufbau von Sprache gleichsetzt. Sprache beruht für ihn auf Symbolen, ebenso wie mentale Prozesse, die über die logischen Kombinationsmöglichkeiten der repräsentierten Symbole entscheiden. Hieraus bezieht er die Überzeugung, dass Analogien bestehen zwischen den Symbolen und Operationen der Algebra und der Logik mentaler Prozesse:

> The theory of logic is thus intimately connected with that of language. A successful attempt to express logical propositions by symbols, the laws of whose combinations should be founded upon the laws of the mental processes which they represent, would, so far, be a step toward a philosophical language. […] Assuming the notion of a class, we are able, from any conceivable collection of objects, to separate by a mental act, those which belong to the given class and to contemplate them apart from the rest. Such, or a similar act of election, we may conceive to be repeated. (Boole 1847, 5)

Boole erkennt die Anwendbarkeit logischer Gesetze auf die bisher auf Syllogismen basierende Aussagenlogik: Jeder wahren Aussage und Aussagenverknüpfung kann der Wert 1 zugeordnet werden, jeder falschen der Wert 0. Zusammengesetzte Aussagen lassen sich als zweiwertige Wahrheitsfunktionen beschreiben: »In virtue of the principle, that a proposition is either true or false, every elective symbol employed in the expression of the hypotheticals admits only of the values 0 and 1, which are the only quantitative forms of an elective symbol.« (Ebd., 82) Die boolesche Algebra ist wegweisend für die Mathematische Logik, die ab Mitte des 19. Jahrhunderts in der europäisch-westlichen Wissenschaftslandschaft sehr schnell vermehrt zur Anwendung gelangt. Booles Algebra gilt heute als Vorreiter der modernen Informationstechnologie, die, ausgehend von binären Zahlen und Booles logischen Elementen, etwa bei Telefonvermittlungen und elektronischen Computern Anwendung fand. Ein bekanntes Beispiel sind die in Suchfunktionen zum Einsatz kommenden booleschen Operatoren AND, OR und NOT, mit denen Suchbegriffe logisch verknüpft werden können. Und auch das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten wirkt in Booles Vorstellung einer Algebraisierung der Logik bereits hinein: »It is in fact possible, setting out from the theory of Probabilities (which is purely quantitative), to arrive at a system of methods and processes for the treatment of hypotheticals exactly similar to those which have been given.« (Ebd.) Boole versuchte sich an einer allgemeinen Methode der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die es ermöglichen würde, aus den gegebenen Wahrscheinlichkeiten eines beliebigen Systems von Ereignissen die Folgewahrscheinlichkeit eines jeden anderen Ereignisses zu bestimmen.

Boole legte mit der Einführung symbolischer Logikkalküle den Grundstein für die Lösung der Probleme, vor die David Hilbert Ende des 19. Jahrhunderts die Logik in der Mathematik stellen sollte. Denn auf die auf mathematische Füße gestellte Entscheidbarkeit in der klassischen Logik folgt die Frage nach ihrer Vollständigkeit und ihrer Widerspruchsfreiheit. Booles Algebraisierung der Logik basiert auf der Implementierung einer Zeichenebene und den Gesetzen, wie diese kombiniert werden können; über diese Logikkalküle kommt die symbolische Logik in die moderne Mathematik und reduziert hierdurch logisches Denken auf einen reinen Rechenvorgang. Seine Frau Mary Boole, selbst Mathematikerin, wies nach dem frühen Tod Booles darauf hin, dass die boolesche Algebra auf den Prämissen einer indischen Logik beruhe, ein Hinweis der von neueren Untersuchungen unterstützt wird.[2]

Im Anschluss an die booleschen Logikkalküle treibt Ende des 19. Jahrhunderts der Mathematiker Ernst Schröder (1841–1902) die Idee Leibniz' einer universalen und absoluten Algebra voran, indem er durch die Reform und Weiterentwicklung der mathematischen, hier algebraischen, Logik Booles die Logik als eigene Disziplin etabliert. Zunächst definiert Schröder die Mathematik nicht mehr länger als Lehre der Maßeinheiten, sondern als ›Lehre von den Zahlen‹ und weicht damit von der traditionellen Auffassung der Mathematik als Größenlehre ab. Er führt den Zahlbegriff ein, lässt ihn aber weitgehend offen, weil »dieser selbst eine fortschreitende und noch nicht abgeschlossene Erweiterung oder Entwicklung erfährt« (1873, 2, zit. n. Peckhaus 1994, 360). Was genau Zahlen selbst beinhalten, lässt Schröder größtenteils offen, »[d]ie Zahl sei jedenfalls ein willkürlich von uns geschaffenes Zeichen zur Erreichung unterschiedlichster, nur schwer unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringender Zwecke« (ebd., 361), wie es der Wissenschaftshistoriker Volker Peckhaus formuliert. Und er fährt fort: »Später wird Richard Dedekind die Formel prägen: ›Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen‹ (Vorwort zu Dedekind 1888, zit. nach der 10. Aufl., III).« (Ebd.)

2 So arbeitet etwa Subhash Kak in seinem Text *George Boole's Laws of Thought and Indian logic* die Einflüsse der Navya Nyāya (*Indische Theorie der Logik*) in Booles Arbeit heraus. In der Navya Nyāya wird davon ausgegangen, dass Wissen durch drei Charakteristika und ihre wechselseitigen Beziehungen beschrieben wird: »›Qualifizierer‹ (prakāra); […] das, was qualifiziert werden muss (viśesya), und ›Verwandtschaft‹ (samsarga).« (Kak 2018, 2573) Kak zufolge ist es die Theorie der indischen Logik – Navya Nyāya –, die Boole zu seinen Annahmen der mathematischen Analyse anhand von Symbolen brachte und dazu, mit 0 beziehungsweise mit der Negation zu rechnen. Auf diese Weise konnte eine dreiwertige Wahrheitstabelle erstellt werden, in der P, N und U für »positiv«, »negativ« und »nicht negierbar« standen. Auch Boole, so Kak, ging es nicht nur um die Übersetzbarkeit in eine formale Sprache, sondern vielmehr auch um eine Erkenntnistheorie, wie sie ebenfalls in der Tradition der indischen Logik zu finden ist, nämlich die Gesetze des Denkens nicht durch Endlichkeit zu beschränken. Aufgrund seiner Annahme, physikalische Zustände in adäquate Symbole und Kategorien übertragen zu können, formalisierte er die klassische Logik und Aussagenlogik neu und entwickelte ein Entscheidungsverfahren für unzusammenhängende Kalküle. Dabei ging es Boole weniger um die verwendeten Symbole als viel mehr um die Gesetze, mit denen ihre Kombination beschrieben werden kann (vgl. Boole 1847, 3)

Die Ambivalenz zwischen dem Wunsch, Begrifflichkeiten in statische Zahlen und logische Abläufe zu übersetzen, und dem Offenlassen dessen, was mit Zahlen überhaupt beschrieben werden kann, fällt auch Edmund Husserl auf, der sich an einer philosophischen Antwort auf die Errungenschaften, die Mathematik und Logik betreffen, versucht:

> Seit Anfang dieses Jahrhunderts ist die Zahl solcher mathematisch-logischen Arbeiten ins Unabsehbare gewachsen. Die eine verspricht uns ein vollkommen consequentes System der Mathematik; die andere eine Klarstellung des Verhältnisses der allgemeinen Arithmetik zur Geometrie; […] wieder andere und deren Zahl ist Legion – behandeln die Axiome der Geometrie, insbesondere Euclides XI. Axiom, versuchen es zu beweisen oder vorgebliche Beweise zu widerlegen, oder endlich durch fictive Constructionen von Geometrien ohne dieses Axiom, dessen Entbehrlichkeit und bloss inductive Gewissheit, gegenüber den Behauptungen seiner a priori'schen Notwendigkeit darzuthun. (Husserl 1887, 3f.)

Einerseits beschreibt Husserl die langjährigen Entwicklungen einer mathematischen Analyse, die »nicht etwa ausschließlich von Seiten der Mathematiker, sondern viel mehr noch von Seiten der Metaphysiker und Logiker« (ebd.) initiiert wurden, andererseits nimmt Husserl eine Kontextualisierung der mathematischen Sprache, vor allem aber der Mathematischen Logik in philosophische Begriffe vor. Welche epistemologische Bedeutung hat das Formalisieren durch Zahlen? Was wird in einer Zahl, durch eine Zahl zusammengefasst? »›[D]ie Zahl‹«, gibt Husserl – Hobbes zitierend – an, »›ist 1 und 1, oder 1, 1 und 1, u.s.w.; was dasselbe ist[,] als sagten wir: die Zahl ist Einheiten‹« (1874, 11). Eine ähnliche Definition der ganzen Zahl als Vielheit von Einheiten findet sich auch bei Leibniz, sodass Husserl resümiert: »Die gewöhnlichste Bestimmung lautet: Die Zahl ist eine Vielheit von Einheiten. Statt ›Vielheit‹ sagt man auch Mehrheit, Inbegriff, Aggregat, Sammlung, Menge etc.; lauter Ausdrücke, die gleichbedeutend oder sehr nahe verwandt sind, obschon nicht ohne merkliche Nüancen.« (Ebd., 12)

Für Husserl steht die Frage nach den Ursprüngen der Begriffe im Raum und er will eben diese Nuancen, die den Begriffen unterliegen, kritisch betrachten. Zusammenfassend lässt sich mit Husserl sagen, dass die Mathematik mit dem Finden und Definieren einheitlicher Bezeichnungen und einer formalen Sprache, hierbei ist konkret die Definition der Zahl gemeint, nach einem Jahrhundert des Tarierens und Ausprobierens insbesondere auf einem Gebiet Erfolge feiern konnte: dem der angewandten Logik. Husserl bietet mit seiner Analyse *Über den Begriff der Zahl* (1887) und in seinen *Logischen Untersuchungen* (1900/01) eine kritische Perspektive auf die Mathematik und ihre Versprechen wie auch ihre Grenzen hinsichtlich der Ausgestaltung einer modernen Logik. Damit wendet sich Husserl hauptsächlich gegen den im 19. Jahrhundert weit verbreiteten Psychologismus. Ihn sah er als Produkt des Empirismus, eine Methode, die zu sehr vom Subjekt und seinen psychischen Prozessen ausgehe und in den logischen Gesetzen nur Tatsachengesetze, Denkgewohnheiten und denkökonomische Praktiken gesehen habe und die daher zum Relativismus, Nominalismus und Fiktionalismus geführt habe.[3]

Ein weiterer leidenschaftlicher Kritiker des Psychologismus war Gottlieb Frege, der sich, wie Husserl, gegen eine Auffassung logischer Gesetze als ›Gesetze des Denkens‹ stellte:

> [D]as Wort »Denkgesetz« verleitet zu der Meinung, diese Gesetze regierten in derselben Weise das Denken, wie die Naturgesetze die Vorgänge in der Aussenwelt. Dann können sie nichts anderes als psychologische Gesetze sein; denn das Denken ist ein seelischer Vorgang. Und wenn die Logik mit diesen psychologischen Gesetzen zu thun hätte, so wäre sie ein Theil der Psychologie. (1893, XV)

2.2 Die axiomatische Revolution und mathematischer Formalismus

Die hier beschriebenen Entwicklungen in der Mathematik und der Physik und der sich hieraus entwickelnde Empirismus im 18. und 19. Jahrhundert stellten die Logik auf eine harte Probe. Im 19. Jahrhundert wurde sie immer weiter formalisiert und konnte sich letztlich als eigene Disziplin etablieren. Die mathematische Axiomatik, seit Aristoteles eng mit den Grundlagensätzen der Logik, aussagenlogischen Grundsätzen, verknüpft, bleibt davon nicht unberührt. Die axiomatische Revolution im 19. Jahrhundert wird durch die Auseinandersetzung rund um die Axiomatik der euklidischen Geometrie und die

3 Die Nennung Husserls an dieser Stelle folgt dem Versuch, die Ideengeschichte der Mathematischen Logik in ihrer ganzen Breite darzustellen. Die Geschichte der Logik ist eng mit den Facetten der jeweiligen Erkenntnistheorie verknüpft, das zeigen auch die Arbeiten des Philosophen Husserl. Im Anschluss an seine Kritik am Psychologismus entwickelte Husserl die Phänomenologie. Sein Wunsch war es, weniger vom Subjekt und seinen psychischen Prozessen auszugehen und mehr auf den Wesenssinn der Objekte und deren sachlichen Gehalt zu schauen.

Frage nach der Formalisierung von Raum ausgelöst. Der Mathematiker Bernhard Riemann (1826–1866), der die nach ihm benannte riemannsche Geometrie begründete, berechnete den Raum erstmals nicht allein mittels zusammengesetzter Flächen, sondern bezog in seine Gleichung auch gekrümmte, mannigfaltige Räume ein. Bei Riemann sind die gekrümmten Räume noch in die Axiomatik der euklidischen Geometrie eingepasst, aber die jahrtausendalte euklidische Geometrie musste alsbald erweitert und an die wachsenden mathematisch-physikalischen Ansprüche angepasst werden. Einige Jahre später verwendete Albert Einstein die riemannsche Geometrie für seine Relativitätstheorie, in der er Gravitation als geometrische Eigenschaft definiert, als gekrümmte vierdimensionale (heißt nicht euklidische) Raumzeit.

Die große axiomatische Grundlagenkrise rund um die Jahrhundertwende wurde von Gottlob Freges *Begriffsschrift. Eine der Arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* aus dem Jahr 1879 initiiert. Dabei ging es generell um eine neue Axiomatik, zum einen, um die Einhegung nicht euklidischer Geometrien zu gewährleisten, und zum anderen, um die Grundgesetze der Arithmetik, also das Rechnen mit Zahlen, anders zu formalisieren. Anders formal in dem Sinne, dass für Frege der grundlegende Unterschied zwischen seiner Herangehensweise und Booles Logik darin besteht, dass Erstere von den Begriffen ausgeht und nicht, wie bei Boole, von den Urteilen und deren Inhalten. Erneut ging es darum, eine komplexe, aber formal angelegte Sprache zu finden, um weitere theoretische Überlegungen einer deduktiven Logik in dieser Sprache auszudrücken. Um eine neue ›Sprache‹ zu finden, stellte Frege nichts weniger als die mathematischen Axiome zur Disposition, also die Grundsätze, auf die sich jedes mathematische System gründet und die als unumstößlich gelten. Auch für seine Überlegungen spielt die euklidische Geometrie eine wichtige Rolle. Die hierin beschriebenen Axiome und Postulate können als die Uraxiome der Mathematik betrachtet werden. Ihren Stellenwert nehmen Euklids geometrische Axiome nicht nur deswegen ein, weil sie die ersten uns heute bekannten überlieferten Axiome sind. Auch die Art und Weise, wie sie aufgestellt wurden, war lange Zeit einzigartig und aufgrund dessen Ausgangspunkt in den von Frege eingeforderten Diskussionen über die Erweiterung und Neuausrichtung mathematischer Axiome. Da sich die Mathematik seit Euklid stark verändert, vor allem aber in viele verschiedene Bereiche ausdifferenziert hatte, gibt es heute nicht mehr nur ein mathematisches System – die Geometrie mit ihren Axiomen –, sondern verschiedene Systeme (wie die Geometrie, Arithmetik, Algebra etc.) mit unterschiedlichen formalen Grundlagen, die auf jeweils eigenen Axiomen basieren. Das heißt, eine einheitliche Axiomatik für alle Belange der Mathematik ist schwer zu behaupten. Sätze, die in dem einen Mathematiksystem richtig erscheinen, werden in einem anderen System falsifiziert. Ihre Ausgestaltung, also die Frage, wie Axiome beschaffen sein müssen, ob wirklich alle von ihnen noch gebraucht würden und wie aussagekräftig sie sich bezüglich eines Wahrheitsgehaltes bedingen, das alles stand bis in die 30er-Jahre des 20. Jahrhunderts zur Debatte.

Ausgehend von der Aussagenlogik, entwickelte Frege die Prädikatenlogik. »Wie diese (Aussagenlogik) auf der Analyse der sprachlichen Funktion der aussagenlogischen Operatoren wie ›nicht‹, ›und‹, ›oder‹ usf. aufbaut, so gründet sich ihre Erweiterung (Prädikatenlogik) auf die Theorie der sogenannten prädikatenlogischen Operatoren ›alle‹ und ›einige‹.« (Kutschera 1967, 111) Mit der Prädikatenlogik schwenkte Frege von der bisher in der Aussagenlogik betrachteten Satzstruktur, die sich mit den Prämissen und Konklusionen eines Satzes beschäftigte, hin zu der Betrachtung ihrer Subjekt-Prädikat-Satzstruktur. Diese untersucht unteilbare Aussagen auf ihre innere Struktur. »Ein zentrales Konzept der Prädikatenlogik ist das Prädikat. Ein Prädikat ist eine Folge von Wörtern mit Leerstellen, die zu einer wahren oder falschen Aussage wird, wenn in jede Leerstelle ein Eigenname eingesetzt wird. Zum Beispiel ist die Wortfolge »… ist ein Mensch«, ein Prädikat, weil durch Einsetzen eines Eigennamens – etwa ›Sokrates‹ – ein Aussagesatz, im Beispiel ›Sokrates ist ein Mensch‹, entsteht.« (Ebd.).

Frege nahm mit seiner Auslegung einer formalen Logik eine Erweiterung der deduktiven Methode vor. Ein Schüler von ihm, der Philosoph Rudolf Carnap, erweiterte wiederum Freges Logik mit einer Einführung in die *Induktive Logik und die Wahrscheinlichkeit (1959)* um die Logik der Wahrscheinlichkeit. Frege wollte die Arithmetik auf ein mengentheoretisches Axiomensystem aufbauen und darin alle mathematischen Begriffe auf logische zurückführen. An diesem Versuch aber scheiterte er, schon die ersten in der *Begriffsschrift* aufgestellten Axiome waren inkonsistent. Daraus entwickelte sich dann der Grundlagenstreit, der sich hauptsächlich um die Frage drehte, wie viel Formalismus und Logik die Mathematik braucht, um noch als Mathematik zu gelten. Somit ging es um Vagheit, Konsistenz beziehungsweise Inkonsistenz, den Anspruch einer universellen Formalisierung und der Vollständigkeit beziehungsweise der Unvollständigkeit (zu Gödel s. Kap. 2) und damit um die philosophische und erkenntnistheoretische Ausprägung der Mathematik. In diesem Streit bildeten sich drei Hauptströmungen heraus: der Logizismus, der Formalismus und der Intuitionismus.

Der Logizismus, maßgeblich von Schröder und Frege vertreten, geht davon aus, dass sich die Mathematik allein auf die Logik zurückführen lässt. Der Formalismus besagt, dass die Mathematik von der Form her aufzufassen sei. Das heißt, die Wahrhaftigkeit einer mathematischen Folgerung entspringe ihrer Form nach der Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit ihres Axiomensystems. Der Intuitionismus wird mit einer »philosophischen Grundhaltung gegenüber der Mathematik insgesamt, die Beschränkung der Logik, ein veränderter Aufbau mathematischer Theorien und die Anwendung der intuitionistischen formalen Logik« (Tapp 2006, 118) charakterisiert. Wichtige Vertreter aus der Mathematik sind Poincaré, Weyl und Heyting, aber auch der Physiker Albert Einstein kann hierzu gezählt werden, wenn er schreibt:

> [D]ie allgemeinsten Gesetze, auf welche das Gedankengebäude der theoretischen Physik gegründet ist, erheben den Anspruch, für jegliches Naturgeschehen gültig zu sein. Aus ihnen sollte sich auf dem Wege reiner gedanklicher Deduktion die Abbildung, d.h. die Theorie eines jeden Naturprozesses einschließlich der Lebensvorgänge finden lassen, wenn jener Prozeß der Deduktion nicht weit über die Leistungsfähigkeit menschlichen Denkens hinausginge. […] Zu diesen elementaren Gesetzen führt kein logischer Weg, sondern nur die auf Einfühlung in die Erfahrung sich stützende Intuition. […] Mit Staunen sieht er das scheinbare Chaos in eine sublime Ordnung gefügt, die nicht auf das Walten des eigenen Geistes, sondern auf die Beschaffenheit der Erfahrungswelt zurückzuführen ist […]. (Einstein 1918, 30f., zit. n. Greif 2014, 27)

Die Auseinandersetzung zwischen diesen drei Strömungen war es, die eine weitere mathematische Revolution möglich machte. Am Ende des Grundlagenstreits konnte sich die Mathematik durch ihre Befreiung von einer allzu dogmatischen Axiomatik zur modernen Mathematik entwickeln. Der Formalismus konnte den Ausgang dieser Auseinandersetzung maßgeblich durch seinen bekanntesten Vertreter, den Mathematiker David Hilbert, für sich nutzen. Durch die Entdeckung des Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes in den 1930er-Jahren bekam der Intuitionismus neuen Aufschwung, konnte sich aber nicht gegen den Formalismus durchsetzen.

Das 19. Jahrhundert brachte die Logistik, die Logik als eigene Disziplin hervor. Diese führt die klassische (aristotelische) Logik fort in dem Sinne, Formalismen für Begriffsverbindungen aufzustellen. Aristoteles' Ausgangspunkt ist die Parallele, »daß menschliches Denken und Reden nicht je eigene Wege geht, sondern sich an bestimmte allgemeine Formen und Formeln hält« (Hirschberger 1980, 653). Das Verbindende zwischen Denken und Reden ist die Sprache, die durch die Aussagenlogik und die Wahrheitswerte von wahr oder falsch formalisiert werden. Die Geburt der modernen Logik erfolgt durch die sukzessive Übersetzung des gesprochenen Wortes in eine symbolische Sprache.

> Während bei Leibniz die Characteristica universalis noch eine Beziehung zu den Wesenheiten einschloß, hat die moderne Logik sich zu einer reinen Kombinationstechnik entwickelt, wo das Ist nicht mehr auf das Sein verweist, sondern nur noch die rein innerlogische, syntaktische Funktion ausspricht wie etwa das Ist in einer algebraischen Gleichung oder in einer Aussage über die Züge in einem Schachspiel. (Ebd.)

Es war auch das Jahrhundert, in dem sich die Philosophie und die Wissenschaft von den christlich geprägten Einschränkungen des Mittelalters und der Orientierung an einer alles erklärenden Letztinstanz und dem Gottesbeweis emanzipierte. Zudem wurden in diesem Jahrhundert neue Methoden entwickelt, die zu Methodenstreits und zu der Frage, welche Möglichkeiten der (Natur-)Erkenntnis überhaupt möglich sind.

Die Mathematische Logik zu Beginn des 20. Jahrhunderts fußt auf dem Gedanken, dass die Regeln der Algebra und der Arithmetik allem anderen vorausgehen und damit auch die Beschaffenheit von Logik bestimmen. Die mathematische Sprache, die diese Regeln ausdrücken soll, rekurriert auf Symbole und deren Beziehungen zueinander. Durch die Aufwertung der Mathematischen Logik als nicht nur das universale Prinzip in der Natur, sondern auch das grundlegende Prinzip, das den menschlichen Denkprozessen im Gehirn entspricht, wird eine weitere Analogie salonfähig gemacht: Die Abläufe im Gehirn werden sukzessive der Mathematischen Logik unterworfen.

3 Vom Wahren und Wahrscheinlichen – Sozialstatistik

Das 17. und 18. Jahrhundert verabschiedeten sich sukzessive von den Prämissen einer philosophischen Logik. Eine Neuausrichtung dessen, was unter Logik verstanden wird, wurde im Bereich der Mathematischen Logik vor allem von George Boole, Gottlob Frege und Ernst Schröder im 19. und frühen 20. Jahrhundert vorangetrieben. Die oben beschriebene Weiterentwicklung wissenschaftlicher Methoden und erkenntnistheoretischer Ansätze führt im 19. Jahrhundert zu einem neuen Blick auf den Menschen, der zum Subjekt