Demokratieprinzip versus Erfolgswertgleichheit. Verfahren der Mehrheitstreue bei Parlamentswahlen

Fred Hermsdorf

Um nach einer Wahl die Zusammensetzung eines Parlamentes zu berechnen, existieren mehrere unterschiedliche Methoden, um aus einer Stimmenverteilung innerhalb der gesamten großen Wählergemeinschaft eine Verteilung der beteiligten Parteien in dem zahlenmäßig kleineren Parlament zu ermitteln. Da aber – ebenso wie die Anzahl der Wähler – auch die Anzahl der Parlamentarier eine ganze Zahl ist, haben alle diese Verfahren in irgendeinem Bereich Schwächen, die bei bestimmten, oftmals sehr engen Wahlergebnissen zu öffentlichen Diskussionen führen und auch gelegentlich die Forderung nach einem Wechsel der Methode laut werden lassen. Das grundsätzliche Problem ist damit aber nicht gelöst. Besser erscheint es, die einzelnen Schwächen der Verfahren zu diskutieren und dann – in ihrer Kenntnis – eine Entscheidung zu treffen. Die Auswahl einer Berechnungsmethode ist immer mit einer Bewertung verbunden.

Bei der Beurteilung von Methoden wird bisher die Wahlgleichheit (jede Stimme soll den gleichen Einfluss auf die Mandatsverteilung haben) als vorrangig angesehen. Das Demokratieprinzip (die Mehrheit entscheidet) wurde dabei hinten angestellt, weil beide Forderungen oftmals nicht gleichzeitig erfüllbar sind.

Zu bedenken ist aber folgende Lage. Die Zahl der Parteien, die den Einzug in die deutschen Parlamente geschafft haben, ist in den letzten Jahren angestiegen. Damit ist es wahrscheinlicher geworden, dass nicht eine einzige Partei die absolute Mehrheit der Parlamentssitze erringt, sondern dass bei der Regierungsbildung auf Koalitionen zurückgegriffen werden muss. Der Wähler hat durch seine Stimmabgabe verschiedene (vielleicht zurzeit politisch nicht machbare) Koalitionen ermöglicht. Das sind alle die Parteikonstellationen, die die Mehrheit der abgegebenen gültigen Stimmen auf sich vereinigen. Wünschenswert ist natürlich, dass sich alle diese Koalitionsmöglichkeiten auch in dem Kreis der gewählten Abgeordneten wiederfinden. Dazu ist aber die Wahl einer passenden Methode zur Berechnung der Sitzverteilung in den Parlamenten notwendig, wenn man keine Sonderregelungen in den Wahlgesetzen vorsehen möchte. Bei zwei oder drei Parteien im Parlament hat die Auswahl der Berechnungsmethode praktisch keinen Einfluss auf die Abbildung der möglichen Koalitionen im Parlament. Ab vier Parteien können aber die gängigen Berechnungsmethoden dies nicht mehr garantieren.

Für die Methode der Mehrheitstreue, die das Demokratieprinzip vorrangig berücksichtigt, sollen in diesem Beitrag bestimmte Eigenschaften untersucht und dadurch die Diskussion über ihre Anwendbarkeit erleichtert werden. Der Gesetzgeber kann aber durch keine noch so ausgefeilte mathematische Betrachtung von seiner Verantwortung bei der Auswahl eines Berechnungsverfahrens entlastet werden.

Zeitschrift für Parlamentsfragen (ZParl), Heft 1/2009, S. 86 – 95

1. Methode[1]

Betrachtet werden die n Parteien, die auf Grund ihrer Stimmengewinne bei einer Wahl den Einzug in das Parlament geschafft haben. Jede dieser Parteien habe bei einer Wahl s_i Stimmen erhalten (i=1,...,n).

Ist $S = \sum_{1}^{n} s_i$ die Gesamtzahl der Stimmen aller Parteien, dann gilt für jede mögliche Mehrheit

$2 \sum_{Mj} s_i > S$, wobei M_j eine Auswahl der Indizes 1 bis n ist.

In Worten: Die Anzahl der Stimmen für jede Mehrheit ist größer als die Hälfte aller Stimmen zusammen. Jedes M_j beschreibt eine mögliche Koalition und legt genau eine Ungleichung fest. M_j wird dabei so klein wie möglich gewählt, das heißt, lässt man eine Partei aus der Koalition weg (ein Index entfällt), dann hat diese keine Mehrheit mehr. Somit werden nur die so genannten minimalen Mehrheiten betrachtet. Dies ist aber auch ausreichend, denn nimmt man zu einer mehrheitsfähigen Koalition noch eine Partei hinzu, so hat diese natürlich auch die Mehrheit.

Ein kleines Beispiel soll den Begriff der minimalen Mehrheit verdeutlichen:
Sei etwa $s_1 + s_2 + s_4 > S$ und $s_1 + s_4 > S$, dann ergibt {1,2,4}[2] eine Mehrheit und $M_j = \{1,4\}$ eine minimale Mehrheit, weil die Stimmen für die Partei 2 bei der Mehrheitsbildung nicht benötigt werden. Für die tatsächliche Berechnung wird dadurch die Zahl der Ungleichungen auf das unbedingt notwendige Maß reduziert. Außerdem werden die folgenden mathematischen Betrachtungen einsichtiger.

Aus dem Wahlergebnis bestimmt man alle möglichen Mj. Es ist unmittelbar klar, dass weitere Informationen zur Ermittlung der Mj nicht notwendig sind.

Damit von vornherein sichergestellt wird, dass jede rechnerisch mögliche Koalition in einem Parlament mit h Abgeordneten eine Mehrheit hat, muss für die Zahl der Sitze x_i der einzelnen Parteien gelten:

$2 \sum_{Mj} x_i > h$ für alle existierenden M_j und $\sum_{1}^{n} x_i = h \quad (x_i >= 0,\ i = 1,\dots,n)$.

Eine nachträgliche – auf die später tatsächlich regierende Koalition bezogene – Anpassung der Sitze ist damit nicht notwendig. Die nach dieser Methode berechneten Sitzverteilungen entsprechen somit dem Demokratieprinzip.

Der Name des Verfahrens leitet sich aus der Einhaltung dieser Ungleichungen für die berechneten Sitzverteilungen ab, denn sie gewährleisten, dass diese Sitzverteilungen alle möglichen Mehrheiten widerspiegeln, das heißt mehrheitstreu sind.

1 Die Methode wurde zwar schon in einer früheren Ausgabe dieser Zeitschrift vorgestellt, vgl. *Fred Hermsdorf*, Mehrheitstreue und Proportionalität: Zur Berechnung von Sitzverteilungen in Parlamenten, in: ZParl, 27. Jg. (1996), H. 1, S. 5 – 12. Da aber in der folgenden Darstellung wiederholt auf einige Gleichungen beziehungsweise Ungleichungen zurückgegriffen wird, wird sie noch einmal vollständig wiederholt.

2 Die geschweiften Klammern werden immer dann verwendet, wenn minimale Mehrheiten, dargestellt durch die Indizes oder den Namen der entsprechenden Partei, angegeben werden.

Bei der Methode wird außerdem noch verlangt, dass die x_i möglichst innerhalb der Quote liegen. Unter Quote versteht man folgenden Wert:
Es ist für jedes i = 1, ..., n
$(h * s_i) / S = g_i + r_i$ wobei g_i eine nichtnegative ganze Zahl und $0 <= r_i < 1$ ist.
x_i liegt innerhalb der Quote, wenn $g_i <= x_i <= g_i + 1$ gilt.

In Worten: Die Quote sorgt dafür, dass sich die Sitzverteilung an der Proportionalität orientiert. g_i ist der abgerundete, $g_i + 1$ der aufgerundete Anteil der exakten Proportionalität.

Ein Zahlenbeispiel soll der Verdeutlichung der hier verwendeten Begriffe dienen. Sei $h = 250$, $s_i = 40000$ und $S = 230000$. Dann ist (250 * 40000) / 250000 = 43,48. Die exakte Proportionalität, das heißt die Zahl der Sitze, die der Partei s_i zustehen, ist 43,48. Wegen der Nachkommastellen ist das aber so nicht möglich. Ergibt ein Berechnungsverfahren jetzt entweder 43 oder 44 (43+1) Sitze, dann liegt dieses Ergebnis innerhalb der Quote, denn diese beiden Zahlen stehen in unmittelbarer Nähe zur exakten Proportionalität.

Existiert dafür keine Sitzverteilung, dann wird eine Verteilung nahe der Quote ermittelt, das heißt, in diesem Fall soll gelten $g_i – 1 <= x_i <= g_i + 2$, bzw. $g_i – 2 <= x_i <= g_i + 3$ (und so weiter).

Treten bei der Berechnung immer noch Freiheitsgrade auf, kann man die „Rundungen" durch eine weitere Forderung – etwa wie beim Verfahren *Hare/Niemeyer* – eindeutig festlegen.

Anders als bei den bisher gängigen Berechnungsmethoden ist das Verfahren der Mehrheitstreue also durch Forderungen an die Eigenschaften der Sitzverteilung und nicht durch Rechenvorschriften zu ihrer Bestimmung definiert. Den Mathematiker interessiert in solchen Fällen zuerst die Frage, ob für jede, und falls nicht, für welche Parlamentsgrößen Lösungen berechnet werden können. Dazu werden in den folgenden Abschnitten Aussagen gemacht. Die Art der Berechnung wird bei positiver Antwort erst darauf folgend angegangen.

Vorausschickend soll angemerkt werden, dass zur Berechnung der Sitzverteilung nach der Methode der Mehrheitstreue mehrere Möglichkeiten existieren, für die allerdings allein ein Taschenrechner kaum reicht. Ein kleines Computerprogramm, das zu der jetzigen Zeit wohl auch bei der Berechnung nach den anderen Methoden benutzt wird, löst dieses Problem aber auf einfache Weise.

Werden für die folgenden Betrachtungen Zahlenwerte herangezogen, wird auf die Ergebnisse der Wahlen zum Bundestag seit 1990 zurückgegriffen.

Tabelle 1: Ergebnisse der Bundestagswahlen 1990 bis 2005 (Wählerstimmen)

	1990	1994	1998	2002	2005
CDU/CSU	20.358.096	19.517.156	17.329.388	18.482.731	16.631.049
SPD	15.545.366	17.140.354	20.181.269	18.488.668	16.194.665
FDP	5.123.233	3.258.407	3.080.955	3.538.815	4.648.144
Grüne	559.207	3.424.315	3.301.624	4.110.355	3.838.326
PDS/Linke	1.129.578	2.066.176	2.515.454		4.118.194

Quelle: Eigene Zusammenstellung auf Basis der Veröffentlichungen des Bundeswahlleiters.

Im Jahr 2002 erhielt die PDS nur zwei Direktmandate und wurde deswegen auf Grund des geltenden Wahlgesetzes bei der Berechnung der Sitzverteilung nicht weiter berücksichtigt.

2. *Einhaltung der Mehrheiten*

Wie schon in früheren Beiträgen erwähnt, kann nicht zu jeder Parlamentsgröße eine Sitzverteilung ermittelt werden, die alle durch das Wahlergebnis ermöglichten Mehrheiten widerspiegelt. Inwieweit dieses Verhalten die Einsatzmöglichkeiten der Methode einschränkt, wird in diesem Abschnitt behandelt. Die zusätzlich geforderte Einhaltung der Quote wird im nächsten Abschnitt untersucht.

Bei der Beschreibung der Methode könnte der Eindruck entstehen, dass die Zahl der möglichen minimalen Mehrheiten sehr groß ist. Die folgende Überlegung zeigt, wie man sich darüber leicht einen Überblick verschaffen kann. Man wird sehen, dass die Anzahl der minimalen Mehrheiten überschaubar ist. Die für die Untersuchung zu leistende Arbeit ist dabei eher zeitaufwendig als schwierig.

Beleuchtet wird der Fall von fünf Parteien – nicht ganz zufällig, wenn man die augenblickliche Parteienlandschaft in der Bundesrepublik betrachtet. Die Parteien werden mit P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 bezeichnet. Ohne die Allgemeingültigkeit der Betrachtung zu verletzen, können wir uns die Parteien so geordnet denken, dass $s_1 >= s_2 >= s_3 >= s_4 >= s_5 > 0$ gilt. Neben dieser Ordnung der Parteien nach ihrer Stimmenzahl muss – um die folgenden Schlussfolgerungen nachzuvollziehen – nur bedacht werden, dass, falls eine beliebige Kombination von Parteien mehr als S/2 Stimmen auf sich vereint, der Rest der Parteien weniger als S/2 Stimmen errungen hat (die Summe aller Stimmenzahlen ergibt genau S). Ausdrücklich soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass bei den folgenden Betrachtungen die tatsächlichen Stimmenzahlen nicht in die Überlegungen eingehen. Die Vorgehensweise zur Bestimmung aller Konstellationen bei fünf Parteien mit ihren zugehörigen minimalen Mehrheiten (Koalitionen) soll an einem Fall demonstriert werden:

Sei $s_1 < S/2$, $s_1 + s_2 > S/2$ aber $s_1 + s_3 <= S/2$ (keine Partei hat eine absolute Mehrheit und nur die beiden stimmenstärksten Parteien können eine Zweierkoalition bilden).
Damit gilt:

a) $M_1 = \{1,2\}$ (dies folgt direkt aus $s_1 + s_2 > S/2$ und $s_2 <= s_1 < S/2$);
b) $s_3 + s_4 + s_5 < S/2$ (dies ergibt sich aus $s_1 + s_2 > S/2$);
c) $s_2 + s_4 + s_5 >= S/2$ (ergibt sich entsprechend aus $s_1 + s_3 <= S/2$);

Unterfall 1 (die erste der beiden Möglichkeiten von c), das heißt „>" wird ausgewählt): $s_2 + s_4 + s_5 > S/2$ (und damit $s_1 + s_3 < S/2$);

damit ist
$M_2 = \{2,4,5\}$, $M_3 = \{2,3,5\}$, $M_4 = \{2,3,4\}$, $M_5 = \{1,4,5\}$, $M_6 = \{1,3,5\}$ und $M_7 = \{1,3,4\}$ (M_2 ergibt sich unmittelbar aus den Ungleichungen $s_2 + s_4 + s_5 > S/2$ und $s_4 + s_5 <= s_2 + s_5 <= s_2 + s_4 <= s_1 + s_3 < S/2$).

Aus $s_3 >= s_4$ und einer Betrachtung aller in M_3 enthaltenen Zweierkoalitionen (wie eben) folgt daraus unmittelbar M_3. Bei M_4 bis M_7 wird entsprechend vorgegangen. Aus b) ergibt sich, dass es weitere minimale Dreierkoalitionen nicht geben kann. Eine minimale Viererkoalition ist aber auch nicht möglich, weil in jeder Viererkoalition schon eine minimale Zweier- oder Dreierkoalition enthalten ist.

Das hier betrachtete Beispiel entspricht genau der Wahl von 2005: Sortiert man die Parteien dieser Wahl nach ihrer Stimmenstärke, dann gilt: P_1 = CDU/CSU, P_2 = SPD, P_3 = FDP, P_4 = Linke, P_5 = Grüne und mögliche Mehrheiten sind unter Berücksichtigung der oben ermittelten M_j {CDU/CSU, SPD}, {SPD, Linke, Grüne}, {SPD, FDP, Grüne}, {SPD, FDP, Linke}, {CDU/CSU, Linke, Grüne}, {CDU/CSU, FDP, Grüne}, {CDU/CSU, FDP, Linke}.

Unterfall 2 (die zweite der beiden Möglichkeiten von c), das heißt „=" wird ausgewählt): $s_2 + s_4 + s_5 = S/2$ (und damit $s_1 + s_5 = S/2$).

Derartige Fälle (eine Kombination von Parteien hat in der Summe genau dieselbe Stimmenzahl wie eine andere davon verschiedene, aus anderen Parteien bestehende Kombination) treten bei wirklichen Wahlen wohl kaum auf. Deswegen wird hier auf eine weitere Untersuchung verzichtet, die aber entsprechend erfolgen könnte.

Trifft man alle Fallunterscheidungen analog, so ergeben sich bei 5 Parteien nur 21 verschiedene Möglichkeiten. Lässt man weiterhin noch die wohl seltenen Fälle wie oben Unterfall 2 weg, so bleiben nur sieben Möglichkeiten übrig:

1) $s_1 > S/2$
2) $s_1 + s_2 > S/2$, $s_1 + s_3 < S/2$
3) $s_1 + s_2 > S/2$, $s_1 + s_3 > S/2$, $s_1 + s_4 < S/2$, $s_2 + s_3 < S/2$
4) $s_1 + s_2 > S/2$, $s_1 + s_3 > S/2$, $s_1 + s_4 < S/2$, $s_2 + s_3 > S/2$
5) $s_1 + s_2 > S/2$, $s_1 + s_3 > S/2$, $s_1 + s_4 > S/2$, $s_1 + s_5 < S/2$
6) $s_1 + s_2 > S/2$, $s_1 + s_3 > S/2$, $s_1 + s_4 > S/2$, $s_1 + s_5 > S/2$, $s_1 < S/2$
7) $s_1 + s_2 < S/2$

Die Wahlen von 1990, 1994 und 1998 entsprechen dem Fall 5. Bei der Wahl von 2002 haben abgesehen von Direktmandaten nur vier Parteien den Einzug in den Bundestag geschafft. Deswegen findet sich dieses Wahlergebnis natürlich nicht in einer der hier angegebenen Möglichkeiten wieder. Analoge Untersuchungen für vier Parteien ergeben aber entsprechende Ergebnisse. Die Wahl von 2005 entspricht dem Fall 2.

Berechnet man zu jedem der Fälle 1 bis 7 ein beliebiges Beispiel (eine beliebige, aber auf den Fall passende Stimmenverteilung) und ermittelt dabei die kleinste Parlamentsgröße, für die eine Sitzverteilung unter Einhaltung der Mehrheitsbedingungen existiert, kann der Beginn des Bereiches von Parlamentsgrößen abgeschätzt werden, ab dem für jeden der Fälle lückenlos mehrheitstreue Sitzverteilungen existieren müssen. Ausgenutzt werden dabei die zwei Eigenschaften der Ungleichungen, die die Mehrheitstreue fordern: (1) wenn Sitzverteilungen für die Parlamentsgrößen h_1 und h_2 existieren, dann auch für $h_1 + h_2$; (2) wenn h eine gerade Zahl ist und für diese Parlamentsgröße h eine Sitzverteilung existiert, dann auch für $h-1$ und $h+1$.

Berechnet man weiterhin zu jedem der Fälle für eine beliebige, aber passende Stimmenverteilung alle Parlamentsgrößen unterhalb der gerade gefundenen Abschätzung, lässt sich leicht feststellen, ob dieser geschätzte Beginn noch unterschritten werden kann.

Wie oben angemerkt sind in diesem Abschnitt für die Unterscheidung der einzelnen Fälle die exakten Stimmenzahlen der einzelnen Parteien nicht entscheidend. Damit gilt eine für eine beliebige Stimmenverteilung gefundene Aussage über die Mehrheitstreue auch für alle anderen Stimmenverteilungen desselben Falles. In der folgenden Tabelle werden die Zahlenwerte für die oben aufgeführten sieben Fälle zusammengefasst, die durch die in diesem Abschnitt dargestellten Überlegungen ermittelt werden können.

Tabelle 2: Zahlen der Fälle 1 bis 7 in Bezug auf die Mehrheitstreue

Fall	Zahl der verschiedenen Koalitionen (Ungleichungen)	Kleinste Parlamentsgröße, für die eine Sitzverteilung existiert	Untere Schranke, ab der ein lückenloser Bereich von Sitzverteilungen existiert (Abschätzung)	Untere Schranke, ab der ein lückenloser Bereich von Sitzverteilungen existiert (exakt)
1	1	1	1	1
2	7	7	25	13
3	5	9	41	17
4	3	3	5	5
5	4	5	13	9
6	5	7	25	13
7	10	5	13	9

Quelle: Eigene Berechnungen.

Bemerkt sei noch, dass auch die analog zu Unterfall 2 weggelassenen Fälle diese Zahlenwerte nicht verschlechtern. Betrachtet man die Spalten 3 und 5, so sieht man, dass es Bereiche gibt, in denen nur lückenhaft mehrheitstreue Sitzverteilungen existieren. Diese Bereiche betreffen naturgemäß jeweils immer nur sehr kleine Parlamentsgrößen. Um das Verfahren auch für diesen Bereich anzuwenden, kann man eine Strategie benutzen, die von *Friedrich Pukelsheim* und *Sebastian Maier*[3] vorgeschlagen wird, um unerwünschte Effekte bei der Ermittlung von Sitzverteilungen zu überwinden: die Anpassung der Parlamentsgröße (dort auch als Erhöhungsstrategie bezeichnet) auf die nächste (höhere) Größe, die eine mehrheitstreue Sitzverteilung ermöglicht.

Fazit: Die Berücksichtigung der Mehrheitstreue ist als Ergebnis dieses Abschnitts bei der Größe der aktuell vorhandenen Parlamente durchaus erfüllbar.

3. Einhaltung der Quote

Wie aus dem letzten Abschnitt ersichtlich ist, kann man schon bei relativ kleinen Parlamentsgrößen Verteilungen unter Einhaltung aller Mehrheitsverhältnisse berechnen. Nichts ist bisher über die Einhaltung der Quote ausgesagt, denn für die bisherigen Überlegungen spielten die tatsächlichen Stimmenzahlen keine Rolle. In diesem Abschnitt wird eine Abschätzung angegeben, die bei vorliegenden Wahlergebnissen die Bestimmung von Parlamentsgrößen erlaubt, ab welcher lückenlos die Forderung nach Einhaltung der Quote neben der Einhaltung der Mehrheitstreue erfüllt wird.

Dass die Einbeziehung der Quote oder zumindest ihrer Nähe sehr wichtig ist, kann man schon aus der Betrachtung der Wahlergebnisse 1990 bis 1998 sehen. Wie oben bemerkt, stellen sie alle den Fall 5 dar. Bei diesem Fall gibt es folgende Koalitionen M_j:

$M_1 = \{1,2\}$, $M_2 = \{1,3\}$, $M_3 = \{1,4\}$ und $M_4 = \{2,3,4\}$.

3 *Friedrich Pukelsheim / Sebastian Maier*, Parlamentsvergrößerung als Problemlösung für Überhangmandate, Pattsituationen und Mehrheitsklauseln, in: ZParl, 39. Jg. (2008), H. 2, S. 312 – 322.

Die stimmenschwächste Partei P_5 kommt gar nicht vor und würde ohne Berücksichtigung der Quotenforderung auch keine Sitze erhalten, weil sie zur Bildung von Mehrheiten nicht benötigt wird. Die Forderung nach Einhaltung der Quote bringt die Größenverhältnisse, die sich aus den Stimmenzahlen ergeben, ins Spiel und bezieht damit alle Parteien in die Berechnung der Sitzverteilung ein.

Unter Berücksichtigung der Bezeichnungen des Verfahrens setzen wir

$x_i = g_i + y_i$ (i=1,...n) mit $y_i = 0$ oder 1

(die Verteilung der Sitze ergibt sich durch Auf- oder Abrundung vom ganzzahligen Teil der exakten Proportionalität),

und es ist

$$\sum_1^n y_i = h - \sum_1^n g_i.$$

(das Parlament besitzt insgesamt h Sitze, wobei jede der Parteien P_i i=1,...,n mindestens g_i Sitze erhält).

Die Ungleichungen, die die Mehrheitstreue fordern, nehmen dann folgende Form an:

$$2 \sum_{Mj} y_i > h - 2 \sum_{Mj} g_i .$$

Daraus ergibt sich sofort:

$$2 \sum_{Mj} y_i > h - 2 \sum_{Mj}((h * s_i) / S - r_i) = h\ (1 - 2 \sum_{Mj} s_i/S) + 2 \sum_{Mj} r_i.$$

Der Ausdruck $(1 - 2 \sum_{Mj} s_i/S)$ ist wegen $2 \sum_{Mj} s_i > S$ immer negativ und die Summe $\sum_{M} r_i$ ist wegen $0 <= r_i < 1$ beschränkt durch die Anzahl der Elemente aus M_j und diese Zahl ist immer beschränkt durch die Anzahl der Parteien – 1.

Betrachten wir jetzt eine beliebig ausgewählte Ungleichung (ein beliebiges M_j):

Ab einer bestimmten Größe von h wird die rechte Seite der Ungleichungen negativ, das heißt

$$0 > h_0\ (1 - 2 \sum_{Mj} s_i/S) + 2 \sum_{Mj} r_i \quad \text{für ein genügend großes } h_0.$$

Ab diesem Werte h_0 lässt sich für diese Ungleichung immer eine Sitzverteilung finden, die sowohl die Mehrheitstreue als auch die Quote einhält, denn die linke Seite der Ungleichung, das heißt

$$2 \sum_{Mj} y_i \quad \text{mit } y_i = 0 \text{ oder } 1$$

ist bei jeder zulässigen Sitzverteilung immer eine nichtnegative Zahl (!) und damit auf jeden Fall größer als die negative rechte Seite der Ungleichung.

Kehren wir jetzt zu allen Ungleichungen zurück und berechnen für ein bestimmtes Wahlergebnis für jede Ungleichung einzeln das entsprechende h_0, so ergibt sich als erste

Abschätzung für eine Parlamentsgröße, ab der sowohl die Mehrheitstreue als auch die Quote immer eingehalten werden, der größte aller so gefundenen Werte von h_0.[4]
Man kann das Verfahren der Mehrheitstreue also auch so interpretieren, dass – wann immer erfüllbar – die Verteilung der Restsitze unter der Forderung erfolgt, die Mehrheitstreue einzuhalten.

Wie die bisherige grobe Abschätzung noch verbessert werden kann, zeigen folgende zwei Überlegungen. Dabei können wir immer voraussetzen,

dass $\sum_{1}^{n} r_i >= 1$ ist.

Ist die Summe nämlich gleich Null, dann ergeben die exakten Proportionalitäten die Sitzverteilung, und Rundungen sind überflüssig. Allerdings ist dieser Glücksfall wohl nur theoretisch möglich.

(1) Schon der zweitgrößte Wert von h_0 ergibt eine Abschätzung. Nach den oben angeführten Überlegungen erfüllt ab dieser Parlamentsgröße jede zulässige Sitzverteilung Mehrheitstreue und Quote für alle Ungleichungen bis auf eine, nämlich die mit dem größten Wert von h_0. Für diese Ungleichung (M_j) ergibt sich aus

$$2 \sum_{Mj} s_i > S \text{ und } (h * s_i) / S = g_i + r_i \text{ } (i = 1,...n): \quad 2 \sum_{Mj} r_i > h - 2 \sum_{Mj} g_i.$$

Da aber $\sum_{1}^{n} r_i$ gleich der Anzahl der aufzurundenden Sitze ist, kann man – soweit notwendig – die Sitze der Parteien aufrunden, die in M_j enthalten sind. Damit ist dann
$2 \sum_{Mj} y_i >= 2 \sum_{Mj} r_i$ und somit $2 \sum_{Mj} y_i > h - 2 \sum_{Mj} g_i$ auch für diese Ungleichung erfüllt.

(2) Weiterhin müssen zwei verschiedene minimale Mehrheiten (M_j) immer mindestens eine Partei (einen Index) gemeinsam haben, denn schon für eine Mehrheit gilt $2 \sum_{Mj} s_i > S$.

Wäre jetzt bei zwei verschiedenen Mehrheiten (M_j und M_p) kein Index gemeinsam, dann gälte

$$2 \sum_{1}^{n} s_i >= 2 \sum_{Mj} s_i + 2 \sum_{Mp} s_i > 2S, \text{ im Widerspruch zu } \sum_{1}^{n} s_i = S.$$

Ermittelt man aus den beiden Ungleichungen mit den größten Werten von h_0 eine dieser Parteien (einen gemeinsamen Index) und setzt das entsprechende y_i auf 1 (diese Sitzzahl dieser Partei wird aufgerundet), dann verringert sich auch der bisher zweitgrößte Wert von h_0, denn der Wert von h_0 für die entsprechende Ungleichung errechnet sich jetzt aus

$$0 > h_0 \left(1 - 2 \sum_{Mj} s_i/S\right) + 2 \sum_{Mj} r_i - 2.$$

4 Die linke Seite der Ungleichung ist durch jede Wahl der y_i mit $\sum_{1}^{n} y_i = h - \sum_{1}^{n} g_i$ sowie $y_i = 0$ oder 1 erfüllt, wenn h nur genügend groß wird, also auch durch die Verteilung der Restsitze nach *Hare/ Niemeyer*. Damit wird bei diesem Verfahren bei großem h sowohl die Mehrheitstreue als auch die Quote eingehalten.

Inwieweit die so gefundene Abschätzung die tatsächlichen Gegebenheiten noch zu schlecht widerspiegelt, kann man hier nicht wie oben allgemein, sondern nur bei tatsächlichen Wahlen nachprüfen, denn die gesamten Überlegungen dieses Abschnittes beziehen sich auf ein konkretes Wahlergebnis. Berechnet man aber die Sitzverteilung für die Wahlen 1990 bis 2005 bei wachsender Parlamentsgröße bis zu der eben gefundenen Abschätzung, so wird deutlich, dass der Bereich, in dem bei Sitzverteilungen lückenlos sowohl die Mehrheitstreue als auch die Quote eingehalten werden können, schon unterhalb dieser Abschätzung beginnt. In der folgenden Tabelle werden die so ermittelten Werte für die Wahlen zum Bundestag 1990 bis 2005 angegeben.

Tabelle 3: Quote und Mehrheitstreue bei den Wahlen zum Bundestag 1990 bis 2005

Wahljahr	Abschätzung, ab denen Parlamentsgröße, Quote und Mehrheitstreue eingehalten werden	Exakte Werte, ab denen Parlamentsgröße, Quote und Mehrheitstreue eingehalten werden	Maximale Abweichung von der Quote ab der unteren Schranke des lückenlosen Bereiches bei Einhaltung der Mehrheitstreue
1990	194	37	1(9)
1994	191	89	1(9)
1998	275	95	1(9)
2002*	155	65	1(5)
2005	70	15	1(13)

* Nur vier Parteien.
Quelle: Eigene Berechnungen.

Zum besseren Verständnis der Tabelle wird kurz der Weg zusammengefasst, der zur Ermittlung der Werte in Spalte 2 und 3 führt. Für Spalte 2 wird auf die Wahlergebnisse in Tabelle 1 nach Ermittlung aller entsprechenden minimalen Mehrheiten die oben angegebene Abschätzung angewandt. Für Spalte 3 werden für alle Wahlergebnisse in Tabelle 1 für alle Parlamentsgrößen bis zu den jeweiligen Werten in Spalte 2 dieser Tabelle nach der Methode der Mehrheitstreue Sitzverteilungen berechnet und so der Beginn des Bereiches gefunden, ab dem lückenlos Quote und Mehrheitstreue eingehalten werden.

Durch Vergleich der Spalten 2 und 3 in Tabelle 3 wird offensichtlich, dass die in diesem Abschnitt hergeleitete Abschätzung zwar eine große Hilfe bei den Überlegungen und den daraus folgenden Berechnungen darstellt, die Verteilung der Restsitze gemäß der Forderung nach Einhaltung der Mehrheitstreue und der Quote aber schon bei kleineren Parlamentsgrößen erfüllbar ist.

Vergleicht man die Werte von Spalte 5 in Tabelle 2 mit den Angaben der Spalte 3 in Tabelle 3, so stellt man fest, dass in einem bestimmten Bereich Sitzverteilungen existieren, die die Mehrheitstreue einhalten, die Quote aber nicht. Aus diesem Grund wird in Spalte 4 der Tabelle 3 die maximale Abweichung von der Quote angegeben, die in diesem Bereich auftritt (zur Verdeutlichung wird der Beginn des Bereiches, der in Spalte 5 der Tabelle 2 angegeben ist, in Klammern wiederholt).

Fazit: Die Einschränkungen bei Anwendung der Methode der Mehrheitstreue bei Parlamentswahlen in Bezug auf die Quote sind also nicht sehr bedeutsam.

4. *Demokratieprinzip und Erfolgswertgleichheit im Widerstreit*

Der Niedersächsische Staatsgerichtshof hat in seinem Urteil vom 20. September 1977 über „Sitzzuteilungsverfahren" festgestellt, dass „in Gestalt der Wahlgleichheit und des Demokratieprinzips gleichrangige Verfassungsgrundsätze in einen Widerstreit gerieten, dessen Ausgleich in den Wertungsspielraum des Gesetzgebers falle. Der Gesetzgeber sei jedoch zumindest berechtigt gewesen, in diesem Fall dem Demokratieprinzip den Vorrang zu geben"[5]. Zumindest lässt sich aus diesen Worten schließen, dass die Wahlgleichheit nicht ausschließliches Kriterium bei der Auswahl einer Sitzzuteilungsmethode sein muss. Der Gesetzgeber kann durchaus Voraussetzungen schaffen, dass bei Wahlen das Demokratieprinzip bevorzugt wird. Diese Aussage ist um so bemerkenswerter, als in der Begründung des Urteils bei der Betrachtung, dass zwei Wahlvorschläge zusammen die Mehrheit der Stimmen, aber auf Grund der Berechnungsmethode nicht die Mehrheit der Sitze erhalten, ausgeführt wird: „Denn in diesem Fall wäre nicht auszuschließen, dass das Wahlergebnis davon abhängen würde, aus welchen von mehreren denkbaren Gruppierungen sich die Koalition zusammensetzt."[6] Wie hier gezeigt wurde, entspricht diese Aussage nicht den Gegebenheiten. Das Verfahren der Mehrheitstreue berechnet allein aufgrund des Wahlergebnisses eine alle Mehrheiten widerspiegelnde Sitzverteilung. Die Kenntnis, welche Koalition die Regierung stellt, ist nicht erforderlich.

Bei der Betrachtung der Wahlgleichheit wird der Erfolgswert, also die normierte Relation von errungenen Mandaten einer Partei zu der Zahl der auf sie entfallenen Stimmen, als Gütemerkmal einer Methode benutzt. Die Abweichung vom Idealwert muss aber irgendwie gemessen werden, um die Güte der berechneten Sitzverteilung zu bewerten.

Für das Verfahren von *St. Laguë/Schepers* lässt sich allgemein beweisen, das bei Anwendung des (euklidischen) Abstandes die berechnete Verteilung am wenigsten vom Idealwert abweicht. Allerdings ist dieser Abstandsbegriff nicht der einzig mögliche. So könnte man zum Beispiel auch den Abstand heranziehen, der sich aus der (betragsmäßig) größten Abweichung der Einzelwerte ableitet. Damit ergeben sich bei der Untersuchung der Berechnungsverfahren in Bezug auf den erzielten Erfolgswert im Vergleich zum Idealwert andere Ergebnisse. Das zeigt, dass eine allgemeine mathematische Aussage über die „beste" Berechnungsmethode kaum möglich ist.

Oftmals werden aber Erfolgswerte für konkrete Beispiele herangezogen, um Berechnungsverfahren zu vergleichen. In diesem Sinne steht dem nichts im Wege, dabei zukünftig auch die Methode der Mehrheitstreue einzubeziehen.

5 StGH 1/77, NdsStGHE 1, S. 335; Nds. StGH, in: DVBl. 1978, S. 139, Abs. 23 (Sitzzuteilungsverfahren), http://www.wahlrecht.de/wahlpruefung/19770920.htm (Abruf am 29. August 2008).

6 Nds. StGH, a.a.O. (Fn. 5), S. 139, Abs. 105.