2 DENKEN IN MATHEMATISCHEN MÖGLICHKEITSRÄUMEN

In der diskutierten Literatur wird auf verschiedene epistemische und forschungspraktische Kennzeichen von Simulationen hingewiesen. Vor allem die Prozesshaftigkeit von Simulationen und ihre Erweiterungsfunktion mathematischer Erkenntnis sowie die Grenzüberschreitungen zwischen Theorie und Experiment, indem mit Theorie experimentell umgegangen wird, werden thematisiert.[1] Dennoch ist es schwierig, den Erkenntniswert, die epistemische Neuheit sowie die Folgen für die wissenschaftliche Erfahrung und das damit verbundene wissenschaftliche Weltbild zu erfassen. Unter Umständen liegt dies daran, dass Simulationen aus der falschen Blickrichtung untersucht werden. Der Blick richtet sich dabei ausgehend von den traditionellen Verfahren – Theorie, Modell, Messung, Beobachtung – auf die Simulation. Vielleicht ist dies der Grund, dass der Computer im Kontext der Computersimulationen so augenfällig marginalisiert, dass die Simulation allzu bereitwillig dem Modell untergeordnet und dass versucht wird, die grenzüberschreitende Funktion von Simulationen klassisch zu fassen. Ein Wechsel der Blickrichtung ist dringend erforderlich, damit Simulationen aus der Perspektive des Computers als notwendiger Bedingung computerbasierter Wissenschaft hinterfragt werden können.

1 Vielleicht könnte man noch hinzufügen, dass Simulationen datenbasierte Schnittstellen zwischen Theorie und Experiment respektive Messung sind (vgl. Gramelsberger 2004: 48ff), dass sie Bilder von Theorien generieren (vgl. Gramelsberger 2001: 148ff) und dass sie semiotisch gesehen Technologien des Überschreibens sind (vgl. Gramelsberger 2001, 2004a).

Ein solcher Perspektivwechsel soll nun vorgenommen werden. Das Ziel ist es dabei, den epistemischen Kern des Wandels der Wissenschaft im Zeitalter des Computers zu erfassen, diesen Kern als Medienwende in der Mathematik zu beschreiben, die den mathematischen Anschauungs- und Handlungsraum erweitert, und Simulationen respektive Computerexperimente dabei als neue symbolische Form von Forschung in Anlehnung an Ernst Cassirers *Philosophie der Symbolischen Formen* zu verstehen (vgl. Cassirer 1923, 1929). Vor dem Hintergrund des Wechsels der Blickrichtung ergeben sich drei Fragen: Nach der Rolle des Computers, nach dem Verhältnis von mathematischem Modell und Simulation und schließlich nach dem Status der klassischen erkenntnisgenerierenden Verfahren im Zeitalter des Computers.

Extreme Welten I

Der Computer wird als Instrument angesehen, das theoretische Modelle in dynamische wandelt, das dank seiner unglaublichen Schnelligkeit die numerischen Möglichkeiten erhöht und das aus diesem quantitativen Vorteil einen qualitativen generiert. Qualitativ, indem mit theoretischen Modellen durch Visualisierung auf Phänomenebene, im Sinne eines Beobachtens des simulierten Systemverhaltens, gearbeitet werden kann. Vor allem hierin wird die Erweiterungsfunktion des Computers gesehen, ähnlich dem Mikroskop. Er gibt neue Einblicke in neue Welten.[2] Doch auch wenn der Computer in seiner Erweiterungsfunktion hoch geschätzt wird, noch fehlt eine konkrete Analyse dieses „third type of empirical extension“ (Humphreys 2004: 5), die den Computers als das ermöglichende Medium berücksichtigt. Denn die grundlegende Bedingung dieser neuen Wahrnehmungsform ist die Algorithmierung der theoretischen Modelle, also die Codierung von Theorie. Eine Analyse des Codes oder der Praktiken des wissenschaftlichen Programmierens findet man jedoch in keinem der Beiträge über Computersimulationen.[3] Dies kann nur be-

2 Dieser „third type of empirical extension“ (Humphreys 2004: 5) ist es, der Wissenschaftsphilosophen inspiriert, Empiristen hingegen herausfordert. Denn der Computer wird als Weltengenerator wahrgenommen, aber als einer, der lediglich virtuelle Welten generiert – im Unterschied zu Mess- und Experimentierinstumenten. Daher widmet Paul Humphreys einen Großteil seines Buches dem wissenschaftlichen Empirismus in seiner instrumentenvermittelten Form, um diese Einschätzung zu relativieren.

3 Einige konkrete Hinweise zur wissenschaftlichen Programmierung lassen sich bei Martina Merz und Mikaela Sundberg finden und in sehr allgemeiner Beschreibung bei Eric Winsberg (vgl. Merz 1999, 2002; Sundberg 2005; Winsberg 1999, 1999a).

deuten, dass entweder davon ausgegangen wird, dass das mathematische Modell sich ohne größere Probleme in ein Programm übersetzen lässt. Oder dass der Computer nur als eine theoretische Größe im Sinne der Ermöglichung der Berechenbarkeit verstanden wird und es daher zulässig erscheint, nur sehr allgemein über bestimmte Eigenschaften zu sprechen. Doch beide Marginalisierungen sind nicht zutreffend, und dies soll anhand des Antagonismus zwischen der epistemischen Komplexität wissenschaftlicher Forschung und der jeweils unterschiedlich gelagerten Extremalität mathematischer wie programmierter Modelle näher untersucht werden.

Die Grundvoraussetzung für Simulationen, so wird es einhellig gesehen, sind die mathematischen Modelle. Dies gilt es weder theoretisch noch forschungspraktisch in Zweifel zu ziehen, doch mathematische Modelle sind extreme Gebilde, die einer anderen Logik folgen als die programmierten Modelle, und dies nicht nur aus Gründen der Numerik oder der effizienten Berechenbarkeit. Dieser Unterschied wird deutlich, wenn man die Praktiken der mathematischen Modellierung mit denen der wissenschaftlichen Programmierung vergleicht. In dem schon etwas älteren, aber in seiner Konzeption einzigartigen Buch, *Angewandte Mathematik. Gegenstand, Logik, Besonderheiten* von 1976 (deutsche Übersetzung von 1984), analysieren die Mathematiker Ilja Blechmann, Anatolij D. Myskis und Jakow G. Panovko die Vorgehensweise der Modellierung in der angewandten Mathematik, zumeist an Beispielen aus der Physik.[4]

„Die spekulativen [theoretischen] physikalischen Modelle simulieren das reale Objekt mit Hilfe abstrakter Darstellungen in physikalischer Sprache, und das nicht selten unter breiter Nutzung der Sprachen und der Mittel der Mathematik. Sie liefern eine mehr oder weniger vereinfachte Beschreibung des Objekts. […] Zum Beispiel werden in der Mechanik bei der spekulativen Modellbildung solche Begriffe wie Massenpunkte, absolut starre Körper, elastisches oder plastisches Medium, zähe Flüssigkeit u.a. verwendet. Diese Abstraktionen erlangten die Bedeutung von fundamentalen Modellen in der Mechanik. Bei der Modellierung von Aufgabenstellungen verwendet man Vorstellungen der absolut glatten oder der absolut unebenen Fläche, der Unbegrenztheit des betrachteten Objekts […] oder zweckmäßige Vereinfachungen kinematischer Art (zum Beispiel: die Flüssigkeitsströmung in einem Rohr ist eindimensional; die Querschnitte eines Balkens bleiben bei der Biegung eben)“ (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 145, 146).

4 Es geht den Autoren um eine Grundlegung des rationalen Schließens in der angewandten Mathematik in Abgrenzung zum deduktiven Schließen der reinen Mathematik. Dabei entspricht der Begriff des rationalen Schließens George Polyas Begriff des plausiblen Schließens (vgl. Polya 1954).

Diese Idealisierungen der Physiker kreieren bereits im Hinblick auf ihre Mathematisierung extreme Welten, welche sich in mathematischen Verfahren, beispielsweise der Bestimmung von Minima und Maxima einer Funktion, in der Periodisierung von Bewegungen oder in der Linearisierung von Beziehungen zweier Größen fortsetzen. Diese Idealisierungen im physikalischen und später im mathematischen Modell dokumentieren die begrenzten Darstellungsmöglichkeiten der Mathematik als Modellierungssprache, deren Elemente „eine geometrische Form, eine Funktion, ein Vektor, eine Matrix, eine skalare Größe oder sogar eine konkrete Zahl" sind (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 146). Es wird zwar von den Autoren behauptet, dass das physikalische Modell mehr oder weniger die Struktur des mathematischen vorgibt. Doch dabei wird übersehen, dass dies vor einem sich seit Jahrhunderten vollziehenden Co-Evolutionsprozess stattfindet, der Naturlehre in mathematische Physik transformierte. Physikalisch zu denken und zu modellieren bedeutet automatisch, sich in der Sprache der Mathematik zu bewegen und die Phänomene und Objekte aus der Perspektive der Grammatik dieser Sprache zu sehen.[5] Was sich dabei mathematisch nicht fassen lässt, entzieht sich (zumindest fürs Erste) der Untersuchbarkeit und Beschreibbarkeit, solange nicht eine neue mathematische Darstellungsform gefunden ist. Die Geschichte des Differentialkalküls, wie von Herman H. Goldstine eindrucksvoll rekonstruiert, ist ein gutes Beispiel dafür (vgl. Goldstine 1977, 1980). Ein vielleicht noch besseres Beispiel ist die Relativitätstheorie. Provokant schreibt Albert Einstein 1938: „Es gibt keine induktive Methode, welche zu den Grundbegriffen der Physik führen kann. Die Verkennung dieser Tatsache war der Grundirrtum so mancher Forscher des 19. Jahrhunderts" (Einstein 1938: 1). Auch wenn Einsteins Behauptung aus epistemologischen Gründen hinterfragt werden kann, so macht sie doch deutlich, dass hier auf der selbstverständlichen Grundlage der Mathematisierung der Physik argumentiert wird. Das ist kein Zufall, denn wie Einstein selbst berichtet, war es die Vereinheitlichung von mathematisch formulierten Inertialsystemen, die letztendlich dazu führte, dass „die Zeit ihren absoluten Charakter [verlor] und […] den ‚räumlichen' Koordinaten als algebraisch (nahezu) gleichartige Bestimmungsgröße zugeordnet" wurde (Einstein 1938: 2).

Die Grammatik der mathematischen Sprache hat die Naturwissenschaft voll im Griff und produziert extreme Welten, die unter dem Be-

5 Ein weiteres Motiv der Idealisierung und Abstraktion ist sicherlich die von René Descartes geforderte Einfachheit als Voraussetzung der Analyse von Phänomenen (vgl. Descartes 1637).

griff der mathematischen Modelle gehandelt werden.[6] Losgelöst vom extrasymbolischen Kontext einer Physik, einer Chemie oder einer Meteorologie, lassen sich weitere Idealisierungen vornehmen, die der einfacheren mathematischen Zugänglichkeit der Modelle verpflichtet sind. „Manchmal können in den Gleichungen das eine Glied beibehalten und das andere vernachlässigt werden; nichtlineare Abhängigkeiten können linearisiert, komplizierte geometrische Formen durch einfachere ersetzt werden usw." (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 148). Allerdings sind die Folgen eines ‚un-sachgemäßen' Umgangs mit den mathematischen Modellen nicht nur anwendungsferne Idealisierungen wie in Eulers Bewegungsgleichung, sondern es können auch „gewisse ‚Monster' auftreten, d.h. *parasitäre* Ergebnisse mit dem Charakter von rein logischen Folgerungen, die keine reale Interpretation zulassen" (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 65).[7] Auch wenn sich zahlreiche unsachgemäße Fälle mathematischer Modellierung finden lassen, so ist die Adäquatheit des Modells in Hinblick auf das zu untersuchende Objekt oder Phänomen erste Priorität. Da es keine allgemeine Methode zur Überprüfung der Adäquatheit eines Modells gibt, behilft man sich mit verschiedenen mathematischen Strategien. Blechmann, Myskis und Panovko sprechen von „Regeln der begleitenden Selbstkontrolle" des mathematischen Modells. Dazu gehören die Kontrollen der Dimensionen, der Größenordnungen, des Charakters der Abhängigkeiten, des Definitionsgebiets der Randbedingungen, der mathematischen Abgeschlossenheit und extremer Situationen. Bei einer sorgfältigen Analyse bestätigt sich nicht nur die Adäquatheit, sondern es zeigt sich auch, dass das Modell Nebenadäquatheit aufweisen kann. Das bedeutet, „es ermöglicht eine richtige

6 Von der Semantik der mathematischen Sprache zu sprechen würde falsche Vorstellungen wecken, denn diese Semantik taugt lediglich zur Konkretisierung von Kalkülsystemen anhand erzeugter Zeichenfolgen. Der Gewinn der ersten Medienwende der Mathematik vom Material zum Zeichen führte im 16. und 17. Jahrhundert zur Loslösung von extrasymbolischen Bezügen, die üblicherweise als Semantik eines natürlich-sprachlichen Zeichensystems bezeichnet werden. Die Semantik eines künstlichen Zeichensystems wie das der Mathematik wird hingegen rein intrasymbolisch geregelt. Durch diese Formalisierung, die Voraussetzung der Kalkülisierung ist, ist überhaupt die Mechanisierung der Mathematik in Form berechenbarer Funktionen denkbar (vgl. Krämer 1991, Gramelsberger 2001, 2005a).

7 Ein solches ‚Monster' wurde bereits erwähnt, nämlich dass, basierend auf Hermann von Helmholtz' Postulat von 1858, in idealisierten Fluiden Wirbel existieren können, die aber weder vergehen noch entstehen können. Dies führte zu eigenartigen Schlussfolgerungen wie etwa der: Wirbel seien in universalen Fluiden wie dem Äther „‚as permanent as the solid hard atoms assumed by Lucretuis', [as] Kelvin wrote to Helmholtz in a letter in 1867" (Eckert 2006: 20).

qualitative und quantitative Beschreibung nicht nur der Charakteristiken, für die es gebildet wurde, sondern auch noch einer Reihe anderer unabhängiger Nebencharakteristiken, deren Untersuchung sich erst im weiteren als notwendig erweisen kann“ (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 155).[8]

Diese kurze und sicherlich bezüglich der Adäquatheitsprüfung unbefriedigende Darstellung – beispielsweise können im Laufe der Modellierung unberücksichtigte Faktoren eine große Rolle spielen – zeigt, dass mathematische Modelle idealisierte Darstellungen generieren, die man als extreme Welten bezeichnen kann. Die Vereinheitlichung des zugrundeliegenden wissenschaftlichen Kontexts hat jedoch noch weitere Folgen. Mathematische Modelle bestehen aus den bereits genannten mathematischen Elementen und aus Beziehungen zwischen diesen Elementen. Wovon sie dabei vollständig abstrahieren, ist die epistemische Komplexität der zugrundeliegenden wissenschaftlichen Kontexte. Diese zeigt sich in den unterschiedlichen epistemischen Quellen der mathematisierten Beziehungen. Diese Quellen können physikalische (first principles) und phänomenologische Gesetze sein. Letztere sind zwar hinreichend begründet, haben aber nur einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich, wie beispielsweise das Hooksche Gesetz. Quellen können aber auch halbempirische Hypothesen sein, die auf theoretischen Überlegungen basieren, jedoch nur empirisch überprüfbar sind. Schließlich fließen in die mathematischen Modelle auch rein empirische Hypothesen ein, die aus experimentellen Untersuchungen stammen und nur lokale Gültigkeit besitzen.[9] Die Rede vom mathematischen Modell als dem theoretischen Modell einer wissenschaftlichen Simulation ist also mit Vorsicht zu genießen. Das mathematische Modell ist ein Sammelsurium theoretischer, phänomenologischer und empirischer Versatzstücke, deren unterschiedliche Gültigkeitsbereiche durch die mathematische Struktur nivelliert

8 Diese Nebenadäquatheit eines mathematischen Modells erweist sich als wichtiger Faktor. „Je größer die Nebenadäquatheit, desto breiter ist der Anwendungsbereich des Modells und desto ‚zuverlässiger‘, ‚dauerhafter‘ ist das Modell. Die Nebenadäquatheit eines Modells erhöht sich mit Verstärkung der Rolle, die in ihm universelle physikalische Gesetze (wie zum Beispiel der Energieerhaltungssatz), geometrische Sätze, im untersuchten Bereich bewährte Anwendungsformen der mathematischen Analysis u.a. spielen“ (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 155).

9 Die Strömungsdynamik als empirische Wissenschaft wurde bereits als typisches Beispiel genannt: „In 1896 a textbook on ballistics lists in chronological order 20 different ‚laws of air resistance,’ each one further divided into various formulae for different ranges of velocity. […] No physical theory could provide a logical framework for justifying these empirical ‚laws’“ (Eckert 2006: 26).

werden. Zwar ist sich jeder gute Modellierer dieser Nivellierung bewusst und wird ihr auch in Form von Limitierungen des Modells Rechnung tragen – beispielsweise indem er das Modell adäquat bezeichnet und damit auf gängige Idealisierungen und Abstraktionen verweist (z.B. elastisches Modell oder Modell des laminaren Flusses). Doch mit den rein empirischen Annahmen verändert sich die epistemische Struktur des mathematischen Modells, sofern funktionale Module in das Modell integriert werden, die das aktuale, vor Ort beobachtete oder gemessene Verhältnis von Eingabe- und Ausgabeparamatern modellieren. Wie sich Änderungen der Eingabeparameter auswirken können, ist bei diesen Modulen nicht bekannt, da keine Kenntnis der Transformationsprozesse zwischen Eingabe- und Ausgabeparamatern vorhanden sind. Die Auswirkungen dieser rein empirischen Annahmen auf das Gesamtmodell sind daher nur schwer einzuschätzen.

Ein weiterer Aspekt der epistemischen Komplexität der zugrundeliegenden wissenschaftlichen Kontexte zeigt sich in der Wahl der bestimmenden Zustandsgrößen eines Modells und in der Hierarchie dieser Größen. Die Wahl der bestimmenden Größen charakterisiert den Zustand des Modells. Die Veränderungen dieser Größen ergeben dessen räumliche und zeitliche Entwicklung. So wurden für das grundlegende Modell der globalen Zirkulation der Atmosphäre von Vilhelm Bjerknes sieben bestimmende Zustandsgrößen identifiziert (vgl. Bjerknes 1904). Zu diesen Zustandsgrößen können weitere hinzukommen, um das Modell realitätsnaher zu gestalten. Beispielsweise können neben rein mechanischen Größen physikalische oder chemische Zustandsgrößen in das Modell integriert werden. Doch diese Zustandsgrößen besitzen ihre eigene epistemische Komplexität, die sich in Form räumlich und zeitlich unterschiedlicher Skalierungen zeigt. Zustandsgrößen können lokal oder global wirken, sie können langsam oder schnell veränderliche Größen sein. Aus dieser Durchmischung von Wirkungsreichweiten und Veränderungstempi beziehen die Modelle ihre Skalenprobleme. Vor allem Klimamodelle sind von solchen Skalenproblemen betroffen, denn die atmosphärischen Bewegungsvorgänge reichen von Mikroturbulenzen im Sekunden- und Millimeterbereich bis zu Planetarischen Wellen im Jahresgang und in Größenordnungen von Tausenden von Kilometern. Diese unterschiedlichen Bewegungen ergeben in ihrem Zusammenwirken die globalen und regionalen Bewegungsmuster der Atmosphäre. Eine adäquate Analyse des mathematischen Modells untersucht daher die Grundgrößen sowie deren Abängigkeiten und erstellt eine Hierarchie der Zustandsgrößen eines Modells. Anhand dieser Hierarchie lassen sich Entscheidungen über die weitere Handhabung treffen: Langsam veränderliche Größen können als Parameter vorgegeben und schnell veränderliche durch Mittelwerte berücksichtigt werden, während die normal veränderlichen Zustandsgrößen im Modell berechnet werden. Durch eine solche Analyse lässt sich ein mathematisches Modell wesentlich vereinfachen, insofern „sich ein geschlossenes System mathematischer Beziehungen ergibt, durch das die Grundvariablen verknüpft sind. Diese Beziehungen bilden dann das mathematische Modell erster Näherung. Ein mathematisches Modell in den Grundveränderlichen und Grundabhängigkeiten stellt die einfachste Variante dar und hat im allgemeinen eine bedeutend geringere Dimension, (d.h. es wird durch eine kleinere Zahl wesentlicher Freiheitsgrade charakterisiert) als ein Modell, das ohne Berücksichtigung der Hierarchie der Veränderlichen aufgestellt wurde" (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 179, 180).

Worin genau liegt nun die Arbeit der mathematischen Modellierer? In der Regel werden mehrere mathematische Modelle generiert, die unterschiedlich komplex sind und unterschiedlichen mathematischen Zwecken dienen. Blechmann, Myskis und Panovko ziehen einen illustrativen Vergleich zum Modedesign. „Es gibt die künstlerischen Modegestalter, d.h. diejenigen, die für irgendwelche abstrakten Personen Modelle kreieren, und die Schneider, die nach Modealben mehr oder weniger erfolgreich den Schnitt für den betreffenden Kunden auswählen" (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 204). Hieran zeigt sich die Art der mathematischen Modellierungspraktik, nämlich zwischen verschiedenen Abstraktionsniveaus zu wechseln. Die Modellierungspraktik besteht darin, mit Hilfe kalkülisierter Zeichensysteme Beziehungsmuster zu kreieren und diese dann qualitativ zu untersuchen, auch in Hinblick auf die Adäquatheit hinsichtlich des konkreten Untersuchungsbereichs. Diese qualitative Untersuchung schließt die Deduktion von Aussagen, Schlussfolgerungen und Lösungen mit ein, wie sie die Analysis ermöglicht. Um solche qualitativen Modelluntersuchungen vornehmen zu können, wenden Mathematiker wiederum extreme Praktiken an, die zu weiteren Vereinfachungen führen. So kann beispielsweise die Zahl der Freiheitsgrade eines Modells begrenzt werden.[10] Oder es kann nützlich sein „zu verfolgen, welche Form die Ausgangs- als auch die Zwischenbeziehungen wie auch die Ergebnisse der Modelluntersuchung annehmen, wenn die Mo-

10 Um die Freiheitsgrade eines Modells einzuschränken lässt sich beispielsweise bei der Modellierung von Schiffsbewegungen für niederfrequente Schwingungen das Schiff als starrer Körper behandeln. Dadurch werden die Freiheitsgrade des Modells auf sechs begrenzt. Für hochfrequente Schwingungen wird das Schiff als elastischer Balken modelliert, was unendlich viele Freiheitsgrade zur Folge hat. Im ersten Fall erhält man als Resultat ein Schwanken, im zweiten Fall eine Vibration des Schiffes.

dellparameter oder deren charakteristische Kombinationen ihre zulässigen Grenzwerte annehmen – meistens null oder unendlich. In solchen extremen Situationen vereinfacht sich die Aufgabe oder sie entartet, wobei die Beziehungen übersichtlicher werden und daher leichter kontrollierbar werden können“ (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 202). Einer der häufigsten Aussagetypen mathematischer Vereinbarungen in Modelluntersuchungen lautet wohl, „wir definieren: x = 0“.[11]

Extreme Welten II

Doch es wären keine mathematischen Modelle, wenn sich diese nicht auch quantitativ untersuchen ließen. Hier beginnt der Bereich der Simulation, auch wenn dabei Computer noch nicht zwingend ins Spiel kommen müssen. Überschlagsrechnungen oder Berechnungen für sehr einfache Fälle lassen sich allemal mit Bleistift und Papier oder mit Rechenschiebern ausführen. Wie auch immer die Berechnungen vollzogen werden, die mathematischen Modelle geben keine Rechenvorschriften dafür an. Ein Mathematiker oder ein mathematisch geschulter Wissenschaftler hat diese im Kopf. Hier liegt der maßgebliche Unterschied zwischen einem mathematischen Modell und dem Modell, das einer Simulation zugrunde liegt. Letzteres ist das Modell einer Rechenvorschrift für ein bestimmtes mathematisches Modell. Es ist eine komplett neue Darstellung des mathematischen Modells aus Perspektive seiner quantitativen Berechenbarkeit. Hier zeigt sich in der Forschungspraxis der Perspektivwechsel, den Wissenschaftler vollziehen, wenn sie als Untersuchungsmethode ihrer mathematischen Modelle deren numerische Berechnung wählen. Denn nun kommen Bedingungen der Berechnung ins Spiel, die heutzutage Bedingungen der automatischen elektronischen Rechenmaschinen, also der Computer sind. Diese Bedingungen sind nicht nur hinreichend, sondern notwendig, um ein mathematisches Modell numerisch zu simulieren. Ein wissenschaftlicher Programmierer muss daher weniger Beziehungsmuster zwischen Zustandsgrößen kreieren und diese qualitativ untersuchen, als vielmehr diese Beziehungsmuster in die Bedingungen der Berechenbarkeit einpassen und dadurch prak-

11 Die Verkehrung des Blicks auf die Welt aus extremer Perspektive zeigt sich an folgender Anekdote. „Wie verfährt denn der Mathematiker [auf die Frage, wie man einen Löwen in der Wüste fängt]? […] Er definiert zunächst, was es heißt einen Löwen zu fangen. Das bedeutet, den Löwen von sich durch ein Gitter abzutrennen. Ich setze mich hinter das Gitter, und der Löwe ist, nach Definition, gefangen“ (Blechmann, Myskis, Panovko 1984: 136).

tikable Rechenvorschriften mit möglichst geringen strukturellen Verlusten gegenüber dem mathematischen Modell erzeugen. Seine Aufgabe ist also eine andere, als die der mathematischen Modellierer, und sie greift auf ein anders gelagertes Repertoire an Praktiken zurück. Neben mathematischen Bedingungen gilt es informatische zu berücksichtigen.[12] Diese informatischen Bedingungen umfassen die Diskretisierung des mathematischen Modells (Rechenvorschriften), die dynamischen Formierung dieser Rechenvorschriften in einen maschinentauglichen Ablauf (Programm) und die numerische Explizierung für die konkrete Berechnung (Computerexperiment).

Bevor auf einige der Praktiken der wissenschaftlichen Programmierung näher eingegangen wird, muss auf ein fundamentales Problem der Diskretisierung hingewiesen werden. „Da die Diskretisierung nicht eindeutig ist, muß die gewählte Differenzenapproximation nicht unbedingt zur richtigen Lösung führen. Die Eindeutigkeit einer Differenzenlösung oder einer anderen finiten Approximation kann heute in der Regel nur für lineare Probleme nachgewiesen werden“ (Krause 1996: 15). Dies bedeutet, dass es für die meisten Fälle keinen Beweis gibt, dass das mathematische Modell (meist in Form von Differentialgleichungen) und das Modell der Rechenvorschrift (oft in Form von Differenzengleichungen) identisch sind. Das Modell der Rechenvorschrift muss daher als ein neues Modell angesehen werden, von dem man nur hoffen kann, dass es mit dem mathematischen Modell strukturell korrespondiert. Da es zudem verschiedene Diskretisierungsverfahren gibt, muss ein Modellierer sich für das seiner Meinung und Erfahrung nach am besten geeignete Verfahren entscheiden. Doch das Wissen um die Diskretisierung von Differentialgleichungen gehört nicht unbedingt zum Handwerkszeug eines Natur- oder Ingenieurswissenschaftlers. Diskretisierungen sind aufwendige Verfahren, die oft viele Monate bis einige Jahre Modellierungs- und Programmierungszeit in Anspruch nehmen können, wie beispielsweise für die Dynamik der globalen Atmosphärenmodelle. Daher wird in der Forschungspraxis öfter auf fertige Programme und Subroutinen, sogenannte PDE Partial Differential Equation Löser, für bestimmte Probleme zurückgegriffen.

12 Beide Bereiche lassen sich in der Forschungspraxis kaum trennen und werden heute in Ausbildungsgängen wie Technomathematik oder Scientific Computing gelehrt. Doch die Trennung zwischen mathematischer Modellierung und wissenschaftlicher Programmierung bleibt in den Arbeitsschritten erhalten, die einer Simulation vorausgehen.

„So findet man z.B. schon 1988 […] über 950 verschiedene Finite-Elemente Codes. […] Da man davon ausgehen muß, daß er [Anwender von PDE-Lösern] in seinem eigenen Studium kaum Ausbildung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen erhalten hat, und seine Kenntnisse über PDEs daher nicht sehr groß sind, muß man mit zwei sich gegenseitig verstärkenden Schwierigkeiten rechnen: Einmal muß man annehmen, daß ein guter Überblick über die aktuelle Methodenlandschaft fehlt, so daß nicht selten in unbekümmerter Weise die exotischsten Gleichungskombinationen aufgestellt werden, für die dann anschließend nur sehr schwer geeignete Software zu finden ist (wenn es sie denn überhaupt gibt). Zum zweiten verleitet die fehlende Kenntnis dazu, die jeweils zuerst gefundene halbwegs funktionierende numerische Methode zu verwenden, was zu einer ineffizienten und unsicheren Numerik führen kann sowie in der Folge zur Verschwendung personeller Ressourcen und Rechenzeit" (Fuhrmann, Kleis, Mackens 1996: 119, 120).

Wie gut auch immer das mathematische Modell sein mag, bereits die Diskretisierung kann es in ein unzulängliches Modell verwandeln. Da das Diskretisierungsverfahren jedoch eine notwendige Voraussetzung der Simulationen ist, sind die anschließenden Berechnungen mit Vorsicht zu genießen. Doch bis zur Berechnung ist es ein weiter Weg. Die Diskretisierung muss in ein Computerprogramm übersetzt werden, sofern auf keine fertigen Softwareprogramme zurückgegriffen wird. Auch wenn Programmierer heute keine Rechenvorschriften mehr in Maschinensprache formulieren, so ist die Aufgabe der Codierung immer noch dieselbe wie vor gut sechzig Jahren. „These equations and conditions, which are usually of an analytical and possibly of an implicit nature, must be replaced by arithmetical and explicit procedures. [… This] step has, at least, nothing to do with mechanization: It would be equally necessary if the problems were to be computed ‚by hand'. […] Coding begins with the drawing of the flow diagrams" (Goldstine, von Neumann 1947: 99, 100). Die Codierung transformiert das statische Konzept der Rechenvorschrift eines mathematischen Modells in dynamische Abläufe. Dazu werden die bislang durch mathematische Zeichenkonventionen dargestellten Operationen in abarbeitbare Anweisungen übersetzt, wobei jede Anweisung sich aus der vorherigen ergeben muss. Codierung bedeutet die Ausbuchstabierung der mathematisch notierten Operationen in Form maschinentauglicher Anweisungen. Zwar muss sich jede Anweisung eines Programms aus der vorherigen ergeben, doch sind hier keine logischen Folgerungen oder Deduktionen gemeint, sondern explizite Prozeduren der Art ‚do (if … then … else … end if)^n end do, return'. Hier liegt ein weiterer, sehr entscheidender Unterschied zum mathematischen Modell. Die Codierung des Modells der Rechenvorschrift folgt zwar der logischen Struktur des mathematischen, aber eben nicht in einem deduktiven Sinne. Die mathematische Struktur wird in Hinblick auf die Berechnung des Modells informatisch rekonstruiert.

Die Ausbuchstabierung der mathematischen Operationen in maschinentaugliche Anweisungen wiederum verlangt die Ausbuchstabierung der veränderlichen Zustandsgrößen und Parameter eines Modells für den kompletten, diskreten Berechnungsraum. Das bedeutet, dass die Zustandsgrößen und Parameter – im mathematischen Modell einfache Symbole wie etwa Q_{mli} für das Schmelzen des Eises in einer Wolke – nun für sämtliche Knotenpunkte eines Berechnungsrasters berücksichtigt werden müssen. Beide Arten der Ausbuchstabierung sind im Ergebnis extrem, denn sie lösen die eleganten Notationen, die sich unter Umständen auf ein Blatt Papier schreiben lassen, in Tausende von Codezeilen und Tausende von Berechnungspunkten auf.[13] Generieren sich die extremen Welten der mathematischen Modelle aus den Formalismen, die in extrem abgekürzter und allgemeiner Form notiert werden, so lösen die extremen Welten der codierten Rechenvorschriften diese Abkürzungen in zahllose Einzelanweisungen und Konkretisierungen auf. Dabei tritt ein semiotisches Paradox zu Tage, denn der symbolische Umgang mit Unendlichkeiten muss in endliche Anweisungen aufgelöst werden oder durch Abbruchkriterien erzwungen werden, wenn man am Ende effektive Rechenvorschriften für die konkrete Ausführung haben möchte. Unendlichkeit wird durch Iteration und Rekursion faktisch simuliert. Die extremen Welten der codierten Rechenvorschriften sind durch semiotische Explizitheit und iterative Selbstbezüglichkeit charakterisiert.

Doch es ist nicht nur die Menge der einzelnen Anweisungen und Berechnungspunkte, in die ein komplexes Problem wie das der Klimaprojektion zerlegt werden muss, um ein codiertes Modell seiner Rechenvorschriften zu erhalten. Die einzelnen Anweisungen müssen in Form einer komplexen Choreographie von Abläufen, Schleifen und Entscheidungspfaden strukturiert werden. Diese Choreographie zerlegt die Si-

13 Diese Aufteilung darf nicht willkürlich sein, wie bereits Vilhelm Bjerknes 1904 angemahnt hat. „Alles wird darauf ankommen, daß es gelingt, in zweckmäßiger Weise dies als ein ganzes, überwältigend schwieriges Problem in eine Reihe von Partialproblemen zu zerlegen, deren keines unüberwindliche Schwierigkeiten darbietet. […] Vor allem wird dabei [bei der Diskretisierung mithilfe der endlichen Differenzenrechnung] die erste Zerlegung grundlegend sein. Sie muß einer natürlichen Teilungslinie im Hauptproblem folgen. Eine solche natürliche Teilungslinie läßt sich auch angeben. Sie folgt der Grenzlinie zwischen den speziell dynamischen und den speziell physikalischen Prozessen, aus welchen die atmosphärischen Prozesse zusammengesetzt sind. Die Zerlegung längs dieser Grenzlinie gibt eine Zerlegung des Hauptproblems in rein hydrodynamische und rein thermodynamische Partialprobleme“ (Bjerknes 1904: 4).

multanität der Prozesse, die ein Phänomen wie den Zustand der Atmosphäre ausmachen, in nacheinander abarbeitbare Teilprozesse, die Zeitschritt für Zeitschritt für die Menge aller Berechnungspunkte das Phänomen iterativ erzeugen. Erst diese Choreographie ergibt das Programm. Das, was John von Neumann 1947 graphisch mit Flow Charts darstellte, indem er ein Programm als eine Folge von Operationsboxen zeichnete, die linear oder in Schleifen durchlaufen werden, wird in einem Programm durch explizite Anweisungen vorgegeben. Welche Pfade dabei durchlaufen werden und ob diese der mathematischen wie der beobachteten und gemessenen empirischen Struktur nahekommen, hängt von der Qualität der Programmierung ab. Die in Abbildung 15 (Dateiendurchlauf) und Abbildung 16 (Flow Chart der Prozesse der cloud.f90 Datei) dargestellte Zerlegung und Choreographie eines Atmosphärenmodells vermitteln einen Eindruck von der Komplexität des wissenschaftlichen Programmierens.

Auf dem Weg zur Simulation beziehungsweise zum Computerexperiment ist jedoch noch ein weiterer Schritt von Nöten. Denn erst die numerische Explizierung der codierten Rechenvorschriften macht diese überhaupt berechenbar. Jede Konstante und jeder Parameter müssen numerisch expliziert werden, wie das Codebeispiel des Schmelzvorganges in stratiformen Wolken zeigte. Jede Zustandsgröße bedarf für jeden Berechnungspunkt der numerischen Initialisierung, in der Regel auf Basis von Messwerten. Diese numerische Explizierung ist heikel, denn hier kommt der Nicht-Eindeutigkeit der finiten Approximation eine besondere Bedeutung zu. Der Vorteil der computerbasierten Simulationsmodelle liegt zwar in ihrer komplexeren Struktur und damit in der Ent-Extremalisierung der mathematischen Modelle. Computerbasierte Modelle und deren Simulation erlauben es, mehr Zustandsgrößen und relevante Parameter zu berücksichtigen, Abhängigkeiten nicht eliminieren oder linearisieren zu müssen, komplexere geometrische Formen wählen zu können und nicht nur extreme Bedingungen studieren zu müssen. Kurz gesagt: Der Computer ermöglicht es, die Freiheitsgrade eines Systems beliebig zu erweitern. Doch durch diese Komplexität und die unendlichen Möglichkeiten der Wechselwirkungen in einem System mit vielen Freiheitsgraden wird die numerische Lösung sensitiv abhängig von ihrer numerischen Initialisierung. Geringfügige Änderungen in der Initialisierung können zu vollkommen anderen Resultaten führen und von der eigentlichen Lösung wegführen. Da es keinen Nachweis der Eindeutigkeit der finiten Approximation gibt, kann man nicht beurteilen, ob die Resultate des berechneten Systems dem mathematischen Modell überhaupt entsprechen. Forschungspraktisch wird mit diesem prinzipiellen Problem wie bereits dargestellt verfahren. „Der Laxsche Äquivalenzsatz sagt aus, daß der Nachweis der numerischen Stabilität die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Lösung darstellt, wenn die Differenzenapproximation konsistent formuliert ist. Unter einer konsistenten Formulierung versteht man, daß die Differenzenapproximation wieder in die zu approximierende Differentialgleichung übergeht, wenn die Abstände der Gitterpunkte gegen Null streben. Eine Differenzenapproximation wird numerisch stabil genannt, wenn bei der Auflösung der resultierenden Differenzengleichungen Abbruch-, Rundungs- und Verfahrensfehler nicht beliebig anwachsen" (Krause 1996: 15). Doch die Tücke steckt im Detail. Denn die Stabilität, welche ein Indiz für die Konsistenz der finiten Approximation ist, lässt sich nur empirisch durch Konvergenztests nachweisen. Da das Lösungsverhalten der finiten Approximation eines komplexen Systems von den Anfangs- und Randbedingungen abhängig ist, lässt sich dieser Nachweis der Konvergenz nur für das spezifische Setting eines einzelnen Computerexperiments führen, nicht generell für das zugrunde liegende Modell der Rechenvorschriften. Daher wird jeder Simulationslauf eines Computerexperiments mit einem Testlauf in höherer Auflösung auf seine Stabilität hin überprüft. „Anfangsbedingungen gelten jedoch vielfach als kontingent, als nicht zum Kern von Modellen, Gesetzen und Theorien gehörend. Statische und dynamische Instabilitäten beziehen sich auf Anfangsbedingungen sowie auf die Lösung von Differentialgleichungen, auf Trajektorien" (Schmidt 2008: 93). Dies bedeutet, dass nicht nur die Diskretisierung ein gutes mathematisches Modell in ein unzulängliches Simulationsmodell verwandeln, sondern auch die Wahl der Anfangs- und Randbedingungen die Ergebnisse unbrauchbar machen kann. Auch wenn es mittlerweile für zahlreiche Probleme mehr oder weniger gute PDE-Löser gibt, für die Wahl der Anfangs- und Randbedingungen sowie für Parametrisierungen gibt es keinerlei Anleitung für eine adäquate Darstellungsweise. Jede kleinste Änderung im experimentellen Setting erfordert eine neue Überprüfung, jedes Ergebnis ist nur in Hinblick auf seine numerische Initialisierung gültig. „Damit ist ein möglicherweise paradox erscheinender Doppelaspekt der Berechenbarkeit gekennzeichnet: Einerseits weist die nach-moderne Physik auf prinzipielle Grenzen der (quantitativen) Berechenbarkeit hin und fördert damit die Erkenntnisskepsis, andererseits erweitert sie (partiell quantitative und insbesondere qualitative) Prognosehorizonte und tritt erkenntnisoptimistisch auf" (Schmidt 2008: 267).[14]

14 Allerdings bezieht sich Jan Schmidt hier nicht auf die Konvergenztests, sondern auf nichtlineare Zeitreihenanalysen und Analysen der Attraktorgeometrie zur qualitativen Überprüfung der gewonnenen Resultate (vgl. Schmidt 2008).

Die Ent-Extremalisierung der mathematischen Modelle, indem durch die Simulation komplexere Systeme modelliert und untersucht werden können, wird durch einen neuen Typ an Extremalität erkauft.[15] Die extremen Welten I der mathematischen Modelle werden in abgemilderter Form in extreme Welten II transformiert, wobei diese Transformation zwar nicht beliebig ist, aber eben auch nicht korrespondierend im Sinne einer eindeutigen Abbildung. Der Charakter der extremen Welten II generiert sich aus der iterativen Selbstbezüglichkeit der ausbuchstabierten Operationen in Form maschinentauglicher Anweisungen, deren Neuordnung basierend auf komplexen Choreographien und aus der numerischen Explizierung jeder einzelnen Konstante wie auch Variable für jeden Berechnungspunkt. Auf diese Weise werden die bereits durch die mathematischen Modelle abstrahierten Phänomene in mehr oder weniger willkürliche Prozessabläufe zerlegt und während des Durchlaufs durch die einzelnen Prozesse wieder zusammengesetzt.[16] Da es lediglich Erfahrungswerte gibt, wie eine adäquate Zerlegung eines Problems, wie ein optimales Ablaufschema und wie eine gute numerische Explizierung auszusehen hat, betritt die computerbasierte Wissenschaft hier Neuland. Neben den prinzipiellen Problemen der quantitativen Berechenbarkeit sind es die informatischen Praktiken, die Wissen neu organisieren, indem sie mathematisch formuliertes Wissen numerisch zugänglich machen. Hier liegt die Bedeutung des Computers als Instrument der automatisierten Extrapolation. Dabei handelt es sich um mehr als nur um einen anderen Umgang mit mathematischen Modellen. Es handelt sich um eine neue mathematische Sprache. „Now mathematics has again been given a powerful new language, the language of algorithms and data structures, and with it a new vision of mathematical reality" (Greenleaf 1992: 196).[17]

15 Johannes Lenhard beschreibt die Folgen dieser beiden Formen der Extremalität für die Wissenschaft als ‚artificiality-for-essence' und ‚artificiality-for-performance' (vgl. Lenhard 2010).

16 Kehrte sich in der Neuzeit und der Moderne die auf Aristoteles gründende Methode der Auflösung und Zusammensetzung der Phänomene in eine induktiv-deduktive Rekonstruktion der Phänomene um und führte zum hypothetisch-deduktiven Forschungsstil, so findet mit den Computerexperimenten und ihren Visualisierungen eine neue Art der Auflösung und Zusammensetzung der Phänomene statt.

17 Newcomb Greenleaf bezieht sich in seinem Artikel *Algorithmics: A New Paradigm for Mathematics* zwar vor allem auf die Bedeutung der algorithmischen Sprache für die reine Mathematik, insbesondere bezüglich deduktiver Beweisverfahren und berechenbarer Funktionen. Doch die Wirkung dieser neuen Sprache der Mathematik zeigt sich am deutlichsten in der angewandten Mathematik und hier als Basis der Computerexperimente (vgl. Greenleaf 1992).

Erweiterung der mathematischen Anschauung

Folgt man den bisherigen Überlegungen, so ist die Relation zwischen Untersuchungsobjekt, mathematischem Modell$_m$ und Lösung (respektive Simulation via computerbasiertem Simulationsmodell$_c$) – wie sie den Überlegungen von Blechmann, Myskis und Panovko (1) sowie den meisten Autoren zum Thema der wissenschaftlichen Simulation zugrunde liegt (2) – zu einfach gedacht.[18] Aus Perspektive des Computers als dem bedingenden Medium betrachtet, stellt sich die Beziehung etwas komplexer dar (3), wie in Abbildung 22 dargestellt. Die Relation für (1) würde im Idealfalle bedeuten, dass das mathematische Modell und das Untersuchungsobjekt strukturell isomorph sind und dass aus dem mathematischen Modell eine eindeutige Lösung deduziert werden kann. Dies ist, wenn überhaupt, nur für sehr einfache Systeme der Fall. Da Simulationen in der Regel komplexe Systeme zum Untersuchungsobjekt haben, sieht die Relation für (2) etwas komplizierter aus. Das mathematische Modell und das Untersuchungsobjekt können zwar als strukturell isomorph angesehen werden, dies hängt von der jeweiligen wissenschaftstheoretischen Position ab. Da das mathematische Modell in ein computertaugliches transformiert werden muss, wird hier meist angenommen, dass sich beide Modelle im Sinne einer strukturellen Abbildung entsprechen. Die Lösung wird als Simulation gewertet, die keine eindeutig deduzierte ist, sondern nur eine, mit Unsicherheitsfaktoren behaftete approximierte.

Trägt man aber nun der Medienwende durch den Computer respektive der Algorithmierung Rechnung, so verkompliziert sich die Relation ein weiteres Mal, wie in (3) dargestellt. Selbst wenn man in allen Punkten der Position (2) folgt, so ist es doch sinnvoll den Übergang von Modell$_m$ zu Modell$_c$ näher zu untersuchen.[19] Dabei sind vor allem zwei Aspekte interessant: die Art des Übergangs zwischen I und II sowie dessen Erweiterungsfunktion bezüglich der mathematischen Anschauung.

18 Interessanterweise sorgt der erste Übergang vom Untersuchungsobjekt zum Modell$_m$ bei Wissenschaftsphilosophen und -theoretikern seit vielen Jahrzehnten für Diskussion, während der zweite Übergang von Modell$_m$ zu Modell$_c$ als relativ unproblematisch angesehen wird. Es wird hier nicht argumentiert, dass der Übergang von Modell$_m$ zu Modell$_c$ nicht zur Kenntnis genommen würde. Aber er wird in seiner Auswirkung unterschätzt.

19 Dieser Übergang von Modell$_m$ zu Modell$_c$ ist hier als Transformation der extremen Welt I der mathematischen Modelle in die extreme Welt II der codierten Modelle der Rechenvorschriften, die das in-silico Experimentalsystem konstituieren, bezeichnet.

(1) Untersuchungsobjekt $\rightarrow$ Modell_{m} $\rightarrow$ Lösung

(2) Untersuchungsobjekt $\rightarrow$ $\text{Modell}_{m} \approx \text{Modell}_{c}$ $\rightarrow$ Simulation

(3) Untersuchungsobjekt $\rightarrow$ extreme $\text{Welt}_{I} \parallel$ extreme Welt_{II} $\rightarrow$ Simulation

Abbildung 22: Übergang vom mathematischen zum computerbasierten Modell aus unterschiedlichen Blickwinkeln (Gramelsberger 2009)

Der Übergang von der extremen Welt I der mathematischen Modelle in die extreme Welt II der codierten Modelle der Rechenvorschriften ist kein Abbildungsverhältnis. Der Übergang initiiert eine semiotische Transformation der mathematisch symbolisierten Operationen in explizite und choreographierte Anweisungen. Diese semiotische Transformation lässt sich auch als Wechsel von der intrasymbolischen Denotation in die intrasymbolische Indexikalisierungen verstehen. Intrasymbolische Denotation meint die Denotation von Operationen mittels mathematischer Symbole, beispielsweise durch ein Integralzeichen oder ein Differentialzeichen. Sofern sich das mathematische Zeichen auf eine mathematische Operation bezieht und nicht auf einen extrasymbolischen Kontext, ist die Denotation als eine intrasymbolische zu verstehen, wie sie der Formalisierung und Kalkülisierung von Zeichensystemen entspricht.[20] Intrasymbolische Indexikalisierung hingegen meint das Anzeigen einer Operation durch ein Zeichen (Code), die von einer Maschine tatsächlich ausgeführt wird. In dieser doppelten Funktion der Zeichen eines Computerprogramms – als Symbol, wenn der Code gelesen wird, wie auch als Index, wenn der Code ausgeführt wird – liegt die Bedeutung der Algorithmen als neue Sprache der Mathematik. Algorithmen sind insofern eine neue Sprache, als sie eine andere Darstellungsweise der mathematischen Operationen und Elemente bedingen, denn die symbolisierten Operationen müssen mit automatischen Rechenmaschinen ausführbar sein. Dazu bedarf es der Diskretisierung und der Ausbuchstabierung der Operationen in einzelne, abarbeitbare Anweisungen, der Choreographie der Abarbeitungsabläufe sowie der numerischen Explizierung. Man wird also vergeblich nach Integral- oder Differentialzeichen im Code Ausschau halten, denn die mathematischen Operationszeichen müssen in strukturierte Indexzeichen übersetzt werden, die wiederum den Ablauf der Maschinenanweisungen zur Folge haben. Die Ge-

20 Die verwendeten Zeichen besitzen keine extrasymbolische Bedeutung mehr, denn „die Grundidee der Formalisierung besteht darin, das Manipulieren von Symbolreihen von ihrer Interpretation abzutrennen" (Krämer 1988: 176).

samtheit dieser Anweisungen und Indexzeichen stellt die Übersetzung des mathematischen Operationszeichens dar.

Die Frage, die sich dabei aufdrängt, ist die, ob die symbolisierten Operationen mit ihren Indexikalisierungen, also ihren Handlungsumsetzungen, identisch sind. Ob die Rechenvorschriften, die Mathematiker im Kopf haben und die sie auf Papier anwenden mit den maschinentauglichen Rechenvorschriften identisch sind, in anderen Worten: Ob die Übersetzungen geglückt sind. Dies mag für einfache Operationen in bestimmten Operationsräumen wie die Addition oder die Subtraktion im Operationsraum der ganzen Zahlen zutreffen. Für kompliziertere Operationen und insbesondere für Operationen, die mit Unendlichkeiten hantieren, sind Symbolisierung und Indexikalisierung nicht mehr identisch – wie die Nichteindeutigkeit der finiten Approximationsverfahren dokumentiert. Doch ohne eine Identität, die in mathematischen Welten immer nur eine strukturelle sein kann, kann der Übergang vom mathematischen Modell in das Computermodell kein Abbildungsverhältnis sein. Es ist ein mehrdeutiger Übergang, der das mathematische Modell mit seinem codierten Modell der Rechenvorschriften locker koppelt. Diese Art der Kopplung wurde bereits bezüglich des Zusammenhangs zwischen einem in-silico Experimentalsystem (codiertes Modell der Rechenvorschrift) und seinen computerexperimentellen Resultaten als kohäsiv beschrieben. Der Begriff der Kohäsion lässt sich auch gut auf die Kopplung zwischen mathematischem Modell und dem Modell der Rechenvorschriften (in-silico Experimentalsystem) anwenden. Da Kohäsion hergestellt werden muss, im Unterschied zur Kohärenz, die sich zwingend aus dem Verfahren wie der Deduktion ergibt, bedarf es geeigneter Praktiken. In der computerbasierten Mathematik sind dies Konvergenztests zur Prüfung der Stabilität, die gemäß des Laxschen Äquivalenzsatzes wiederum ein Indiz für die Konsistenz der finiten Approximation ist. Nichtlineare Zeitreihenanalysen oder Analysen der Attraktorgeometrie wären weitere Praktiken zur Herstellung von Kohäsion zwischen mathematischem Modell und Simulationsmodell, die jedoch immer nur anhand der Interpretation der berechneten Resultate möglich sind.

Die Transformation eines mathematischen Modells in ein codiertes Modell seiner Rechenvorschriften führt zwar einerseits weitere Limitierungen ein und transformiert die bereits extremen Welten I in neue extreme Welten II. Diese Limitierungen verstärken dabei den Antagonismus zwischen epistemischer Komplexität und den extremen Welten I und II durch die numerische Ersetzung algebraischer Strukturen und deren Berechnung. Bereits 1628 wies René Descartes in den *Regeln zur Ausrich-*

tung der Erkenntniskraft auf diese Form der Reduktion durch die Arithmetik hin.

„Wir dagegen [können] an dieser Stelle sogar von den Zahlen abstrahieren, ebenso wie kurz zuvor von den geometrischen Figuren und von jedem beliebigen Gegenstand. Wir tun das einerseits, um zum Überdruß langes und überflüssiges Rechnen zu vermeiden, andererseits vor allem, damit die Teile des Gegenstandes, die zur Natur der Schwierigkeiten gehören, immer getrennt bleiben und nicht durch unnütze Zahlen verhüllt werden. Wenn z.B. die Basis des rechtwinkligen Dreiecks gesucht wird, dessen Seiten 9 und 12 gegeben sind, wird der Rechner sagen, sie sei gleich $\sqrt{225}$ oder 15; wir aber werden 9 und 12 durch a und b setzen und die Basis als $\sqrt{a^2 + b^2}$ finden. So bleiben die beiden Teile a^2 und b^2 getrennt, die in der Zahl miteinander verschmolzen sind“ (Descartes 1628/1972: 75). Und weiter schreibt Descartes: „Dies alles unterscheiden wir, die wir eine evidente und deutliche Erkenntnis suchen, nicht aber die Rechner, die zufrieden sind, wenn ihnen das gesuchte Ergebnis unterläuft, selbst wenn sie nicht sehen, wie es von den Daten abhängt, obgleich allein darin die Wissenschaft eigentlich besteht“ (Descartes 1628/1972: 77).

Doch andererseits ermöglicht erst diese Transformation in die Computernumerik die Erweiterung der mathematischen Anschauung und konstituiert den „third type of empirical extension“ (Humphreys 2004: 5), der zunehmend für die Forschung genutzt wird.[21] Auch wenn der Zusammenhang zwischen Resultat und Datenstruktur beim ersten Blick auf die Simulationsergebnisse verborgen bleibt und in der Datenanalyse rekonstruiert werden muss – was aufgrund der Nichteindeutigkeit der finiten Approximation nicht einfach ist – so eröffnen die Computerexperimente doch neue mathematische Möglichkeitsräume. Diese neuen Möglichkeitsräume erweitern in ihrer visualisierten Sichtbarkeit die mathemati-

21 Diese Transformation wurde bereits vor der Einführung der Computer zu Zwecken der Berechnung per Hand durchgeführt, beispielsweise um mechanische Quadraturen auszuführen. „Mechanical quadratures, a technique now called ‚numerical integration‘, was an alternative to Newton´s calculus. It solves a differential equation solely by numerical methods, with no reference to the original ellipse or any other curve” (Grier 2005: 121). So genannte ‚computing plans‘ für numerische Integrationen wurden bereits 1757 aufgestellt, um das Erscheinungsdatum des Halleyschen Kometen zu berechnen. David Grier verortet daher den Beginn der Simulation im 18. Jahrhundert und lokalisiert ihn im Aufkommen arbeitsteiliger Berechnungen und erster Berechnungspläne (vgl. Grier 2005). Allerdings gewinnen diese Berechnungspläne erst durch die elektronischen Computer an weitreichender Bedeutung für die Wissenschaft. Die Erstellung von Rechenvorschriften respektive Berechungsplänen wird erst ab den 1940er Jahren zu einem maßgeblichen Teil der Forschungspraxis.

sche Anschauung, allerdings weniger aufgrund ihrer Sichtbarkeit als aufgrund dessen, was sie zeigen. Doch was zeigt sich?

Die neuen Möglichkeitsräume zeigen, oder besser enthüllen, das, was die Wissenschaft seit der Neuzeit zum Ziel hat: den Blick ins Innere der Phänomene. „Every natural action depends on things infinitely small, or at least too small to strike the sense," schrieb Bacon 1620 im *New Organon*. „No one can hope to govern or change nature until he has duly comprehended and observed them" (Bacon 1620: II. Buch VI). Dieser Blick ins Innere wurde in der Neuzeit als ‚Blick für Kausales' anhand instrumentenbasierter Beobachtung und Messung sowie der Mathematisierung von Theorie inauguriert und gestaltete das Sehen und Denken um. Doch diese Neukonfiguration des Blicks und des Denkens, also der zweite Typ der empirischen Extension und die physiko-mathematische Forschungslogik, gingen noch nicht tief genug. Daher monierte Osborn Reynolds 1877 zu recht: „Now the reason why mathematicians have thus been baffled by the internal motions of fluids appear to be very simple. Of the internal motions of water or air we can see nothing. On drawing the disc through the water there is no evidence of the water being in a motion at all, so that those who have tried to explain these results have had no clue; they have had not only to determine the degree and direction of the motion, but also its character" (Reynolds 1877: 185). Sowohl der experimentelle Blick, wie von Reynolds vorexerziert, als auch der mathematische Blick mussten tiefer vordringen, wollten sie den Blick ins Innere der Phänomene tatsächlich erweitern. Was zunächst im 19. und 20. Jahrhundert experimentell möglich wurde und zur hypothetisch-deduktiven Forschungslogik führte, wurde mit dem Aufkommen der Computer komplettiert. Komplettiert insofern nun auch die Mathematik, als Kulturtechnik des Rechnens, der Koordination von Experiment, Messung und Theorie in denselben Darstellungsraum folgte. Denn durch die diskrete Metrik des Computers bewegt sich die computerbasierte Mathematik ausschließlich in dem durch Koordinaten metrisierten, rein symbolischen Raum der Mannigfaltigkeiten, dessen Sprache die Algorithmen sind.[22] Leitete „das Projekt der neuzeitlichen Wissenschaft […] seine Macht aus dem spezifisch technologischen Charakter der Darstellungsräume her. Die Kräfte und die Art von Überlegungen,

22 Diese Transformation in einen Raum der Mannigfaltigkeiten leistete bereits der Funktionsbegriff, der 1694 erstmals bei Leibniz auftaucht und in den folgenden Diskussionen mit Jakob Bernoulli und später durch Leonhard Euler allmählich Gestalt annimmt (vgl. Leibniz 1694; Euler 1748; Cassirer 1910). Der Computer stellt nun das passende Medium für den automatisierten Umgang mit Mannigfaltigkeiten dar.

die sie freisetzen, ebenso wie die Regeln, denen sie gehorchen, sind weniger die von cartesischen Subjekten als vielmehr die von technologisch-epistemischen Texturen" (Rheinberger 2001: 243, 244). So leitet das Projekt der (post)modernen Wissenschaft seine Macht zwar ebenfalls aus dem spezifisch technologischen Charakter seiner Darstellungsräume her, allerdings hat sich dieser technologische Charakter durch den Computer grundlegend verändert. Diese Veränderung betrifft nicht nur die Computerexperimente, sondern ist grundsätzlicher Natur, denn jedes Messinstrument und jeder Detektor im experimentellen Umfeld ist mittlerweile mit Computerchips ausgestattet. Dies macht den Blick auf die Simulation aus Perspektive der traditionellen Verfahren – Theorie, Modell, Messung, Beobachtung – unmöglich, da die klassischen Verfahren so nicht mehr existieren, sondern ebenfalls in den veränderten technologischen Charakter der wissenschaftlichen Darstellungsräume eingepasst wurden. Die Computerisierung dieser Darstellungsräume entwickelte sich im Laufe der letzten sechzig Jahre zur grundlegenden Prämisse aktueller Forschung, ob in den in-silico Experimentalsystemen, in den globalen Messkampagnen oder in den Experimentalsystemen der Labore.[23]

Doch die Frage, was sich zeigt, ist noch nicht ganz beantwortet. Die große mathematische Leistung der Neuzeit war die Auflösung der geometrischen Anschaulichkeit durch die Arithmetik. „Die anschauliche geometrische Linie löst sich kraft dieses Verfahrens in eine reine Wertfolge von Zahlen auf, die durch eine bestimmte arithmetische Regel miteinander verknüpft sind" (Cassirer 1910: 95). Dies bedeutet, wie Ernst Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* schreibt, dass die Raumbegriffe durch Zahlenbegriffe und infolge dessen durch Reihenbegriffe substituiert werden.

„Die Umsetzung der Raumbegriffe in Zahlenbegriffe erhebt daher zugleich das Ganze der geometrischen Forschung auf ein neues gedankliches Niveau. Die substantiellen Formbegriffe der antiken Geometrie, die in starre Absonderung einander gegenüberstanden, verwandeln sich kraft dieser Übertragung in reine ‚Reihenbegriffe', die nach bestimmten Grundprinzipien auseinander erzeugbar werden. […] Erst die Umbildung des Gehalts der Geometrie schafft Raum für eine neue Logik der Mannigfaltigkeiten, die über die Grenzen der Syllogistik hinausgreift" (Cassirer 1910: 93). „Die Auflösung der Raumbegriffe in Reihenbegriffe bleibt der leitende Gesichtspunkt; aber das System der Reihenbegriffe muß derart vertieft und verfeinert werden, daß dadurch nicht

23 Die Experimentallabore sind interessante Hybride traditioneller Experimentalsysteme kombiniert mit computerbasierten Technologien der Messung und Auswertung.

nur, wie bisher, ein enger Ausschnitt, sondern das Gesamtgebiet der möglichen räumlichen Gestaltungen übersehbar und beherrschbar wird. Diese Forderung ist es, kraft deren die Cartesische Geometrie sich mit innerer Notwendigkeit zur Infinitesimal-Geometrie erweitert" (Cassirer 1910: 96).

Dieses Gesamtgebiet der möglichen Gestaltungen der Mannigfaltigkeiten konstituiert den mathematischen Möglichkeitsraum, der sich erst durch die enorme Rechenkraft des Computers entfaltet. Dabei müssen diese Gestaltungen nicht unbedingt anschaulich sein, insbesondere wenn sie höher dimensionale Objekte oder andere, für unsere Anschauungsgewohnheiten exotische Gebilde sind. Doch im wissenschaftlichen Anwendungskontext geht es um die Erforschung und die Anschaulichkeit dieser Möglichkeitsräume, da in physikalisch fundierten Kontexten die erzeugten Reihenbildungen als Trajektorien Auskunft über die Dynamik der zu untersuchenden Prozesse in Raum und Zeit geben. In dieser Traditionslinie stehend geben Computer Einblick in das Innere der Phänomene, indem sie das Innere aus Mannigfaltigkeiten rekonstruieren und es nach außen kehren, es umstülpen. Durch diese von Innen nach Außen gekehrten Ansichten entsteht ein interessanter Verfremdungseffekt, der sich darin zeigt, dass sich gegenwärtig das verändert, was wissenschaftlich als real gilt. Ebenso wie sich durch die charakteristische, symbolische Form der neuzeitlichen Forschung der wissenschaftliche Erfahrungsbegriff veränderte, wandelt er sich aktuell erneut.