Multimodalität in der Mathematik
Der Beweis des Vier-Farben-Satzes multimodal gelesen

Multimodality in Mathematics
A Multimodal Reading of the Proof of the Four-Color-Theorem

Lisa Bauer

Abstract

DE Im folgenden Beitrag soll die Grenze zwischen Text und Bildern in der Mathematik anhand einer exemplarischen Fachpublikation von einem linguistisch informierten, multimodalen Standpunkt aus analysiert werden.
Die erste Veröffentlichung eines Beweises für den Vier-Farben-Satz (1976) bietet sich in besonderem Maße für diese Untersuchungsperspektive an, einerseits aufgrund der vielfältigen Verwendung von Diagrammen und andererseits wegen ihrer fachhistorischen Bedeutung als erster wichtiger computergestützter Beweis.
Anhand einer detaillierten Analyse des Artefaktes wird herausgearbeitet, dass keine eindeutige Grenze zwischen Wörtern und Diagrammen gezogen werden kann, sondern ein schrittweiser Übergang vorhanden ist.
Dafür werden die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Zwischenstufen zwischen geschriebenem Wort und Diagramm im Hinblick auf ihre Verwendung, Ansprache und Integration in den Text präzise herausgearbeitet, aber auch die Rolle der Übersetzung von Diagrammen im Programmtext betrachtet.

EN The following chapter analyses the boundary between text and images in an exemplary publication in mathematics from a linguistically informed, multimodal perspective.
The first publication of a proof for the four-color-theorem (1976) is particularly well-suited for this investigation due to its extensive use of diagrams and its historical significance as the first major computer-assisted proof. Through a detailed analysis of the artefact, it becomes evident that no clear boundary can be drawn between words and diagrams; instead, a gradual transition is observed.
To this end the intermediate steps between written word and diagram are precisely cared out with regard to the similarities and differences in their application, their mode of addressing the reader and their integration into the text. Additionally, the role of translating diagrams into programming text is considered.

Der Vier-Farben-Satz besagt, dass jede Landkarte mit vier verschiedenen Farben so koloriert werden kann, dass keine zwei Gebiete mit einer gemeinsamen Grenzlinie dieselbe Farbe haben. Dies war in der Mathematik seit 1852 ein ungelöstes Problem, bis es 1976 von Kenneth Appel und Wolfgang Haken bewiesen wurde. Der Beweis erregte großes Aufsehen, da zum ersten Mal ein wichtiger mathematischer Satz mit Hilfe eines Computers bewiesen wurde, ohne dass die gesamte Argumentation von Menschen überprüft werden konnte.[1] Im Hinblick auf die historisch etablierten Anerkennungsprozesse für neue Beweise in der Mathematik stellte dies einen fundamentalen Bruch dar.[2] Von manchen Wissenschaftler:innen wurde der Beweis jahrzehntelang nicht anerkannt und bis in die 2000er Jahre wurden mehrere alternative Beweise publiziert,[3] die allerdings ebenfalls auf einen Computer angewiesen sind.

Der ursprüngliche Artikel von Appel und Haken enthält nicht nur die Beschreibung der Arbeit mit dem Computer, sondern besteht zu einem großen Teil aus konventionellem mathematischem Text, der viele Diagramme als bildliche Elemente nutzt, sowie aus langen Listen von Diagrammen. Sowohl der Übergang zwischen Fachtext und Bildern[4] als auch der Übersetzungsvorgang von den Diagrammen zum Programmcode und die Reintegration dessen in den Text sollen hier näher analysiert werden, um an diesem Beispiel das Potenzial des multimodalen Ansatzes näher zu beleuchten.

Methodisch soll dabei auf das Konzept der Multimodalität zurückgegriffen werden, wie es bspw. von Wildfeuer, Bateman und Hiippala skizziert wurde.[5] In diesem Kontext wird eine Zeichenmodalität durch ihre materielle Basis, ihre Form sowie ihre Diskurssemantik charakterisiert.[6] Im vorliegenden Beispiel ist die materielle Basis immer gleich: Der auf Papier

1 Mackenzie 1999, S. 8.
2 Ebd., S. 45.
3 Robertson, Sanders et al. 1996; Gonthier 2008.
4 Die Frage, ob Diagramme als Bilder zu betrachten sind, wird in der Literatur unterschiedlich beantwortet, teilweise auch in Abhängigkeit davon, was alles als Diagramm gefasst wird. So rechnet Nöth (2016, S. 196f.), im Anschluss an Peirce sogar mathematische Formeln dem Bereich der Diagramme zu, die er wiederum als ikonisch aber nicht als Bilder klassifiziert, da sie nur eine logische Ähnlichkeitsbeziehung zu ihrem Objekt haben. Andere Autoren betonen allerdings die bildlichen Aspekte von Diagrammen im engeren Sinne, so bezeichnet Schnotz (1995, S. 85) Diagramme als »logische Bilder«. Krämer (2016, S.25) gesteht Diagrammen »operative Bildlichkeit« zu, verwendet auch im umgangssprachlichen Sinne den Begriff »Bilder«, unterscheidet sie aber von »gewöhnlichen Bildern«. In der hier betrachteten Primärquelle werden sie als »figure« oder »drawing«, d.h. Abbildung bzw. Zeichnung, angesprochen. Insgesamt sollen der Einfachheit halber im Folgenden Diagramme als eine spezielle Art von bildlichen Darstellungen, im Anschluss an Krämers Argumentation auch kurz als »Bilder« gefasst werden — im Bewusstsein der grundlegenden Problematik, aber auch im Hinblick auf die Primärquelle und darauf, dass selbst bei einfachen mathematischen Objekten, wie einem Dreieck, eine Unterscheidung zwischen Bild und Diagramm fraglich ist.
5 Wildfeuer, Bateman und Hiippala 2020, S. 135–143.
6 Ebd., S. 143.

und Microfiche bzw. heute digitalisiert vorliegende Artikel, der im Medium einer entsprechenden Fachzeitschrift erschien und Teil des Wissenschaftsdiskurses der Mathematik ist.[7] Trotzdem gehören Text und Diagramme innerhalb des Artikels zu unterschiedlichen Zeichenmodalitäten, da sich ihre Form, ihr Zeicheninventar und dessen Kombinationsmöglichkeiten sowie die jeweilige semiotische Reichweite unterscheiden. Auf der einen Seite steht der schriftliche Text, der in gesprochene Sprache übersetzbar ist und aus einem abgeschlossenen Inventar von Buchstaben, Zahlen und Satzzeichen besteht, die linear aneinandergereiht werden, um Wörter oder komplexere Zahlen und Sätze zu bilden. Seine semiotische Reichweite innerhalb des mathematischen Diskurses erscheint fast unbegrenzt. Auf der anderen Seite stehen bestimmte rein illustrative Diagramme,[8] die nur mit Hilfe des Textes sinnvoll interpretierbar und räumlich strukturiert, ohne abgeschlossenes Zeicheninventar, sind. Sie visualisieren Daten und Objekte, die auch in schriftlicher Form dargestellt sind oder zumindest dargestellt werden können und dienen als »kognitive Werkzeuge«.[9] Zwischen diesen beiden Polen, die mehr oder weniger eindeutig entsprechenden Zeichenmodalitäten zugeordnet werden, entfaltet sich allerdings ein Feld von Zwischenstufen. Wie später anhand von Beispielen gezeigt wird, spielt sich dies hauptsächlich im Bereich der Neudefinition von Begriffen und Eigennamen ab. In der Mathematik ist es üblich, natürlichsprachlichen Wörtern eine neue, mathematisch exakt definierte Bedeutung zu geben.[10] Die so gebildeten (*Fach-)Wörter* werden dann ganz normal weiter verwendet, tragen aber nur noch die festgelegte Bedeutung und sind zumindest theoretisch durch ihre Definition ersetzbar.[11] Solche Begriffe stehen in der Regel für abstrakte Eigenschaften, bestimmte Arten mathematischer Objekte oder seltener für Prozeduren.[12] Durch ihre fehlende Unschärfe und die Gleichwertigkeit mit einer konkreten Definition nähern sie sich Eigennamen an, die von Peirce als im Grundsatz indexikalisch, ersetzbar durch die Geste des Zeigens auf den Namensträger, aufgefasst werden.[13] Die Allgemeinheit

7 Appel und Haken 1977 bzw. Appel, Haken und Koch 1977.
8 Vgl. Krämer 2016, S. 37–41, I.2.3 und S. 43–47, I.2.5.
9 Krämer 2016, S. 83f. wählt die Bezeichnungen »kognitives Werkzeug« bzw. »Denkzeug«; Schnotz 1997, S.89–91, spricht von einem »mentalen Modell«.
10 Vgl. Beutelspacher 2009 [1991], S. 6; Schmidt 2003, S. 604–611.
11 Vgl. Beutelspacher 2009 [1991], S. 6.
12 Vgl. ebd., S. 13 »Objekte und Eigenschaften«; eine Prozedur findet sich in Appel und Haken 1977, S. 437.
13 Vgl. Thibaud 1987, S. 527–534.

ihrer Bedeutung trennt sie aber von Eigennamen im eigentlichen Sinne. Näher kommen *Kürzel* den Eigennamen, die in mathematischen Texten verwendet werden, um einzelne, individualisierte Objekte zu benennen.[14] Solche Namen sind meist nicht ganze Worte, sondern Buchstabenkürzel, auch Konstellationen von Buchstaben und Zahlen, wobei Kombinationsprinzipien und Form unterschiedlich ausfallen können. Die semiotische Reichweite dieser Buchstabenkürzel umfasst alle einzelnen mathematischen Objekte. Mathematische *Formeln* sind in der Regel aus solchen Kürzeln aufgebaut. Aber im Artikel tauchen auch rein bildlich strukturierte *Konstellationen* aus Zahlen und anderen Zeichen auf. Einen Schritt weiter weg vom Text führt eine spezielle Art von Diagrammen, die im Wesentlichen aus einem abgeschlossenen Zeicheninventar zusammengesetzt und deren Interpretation dadurch eindeutig festgelegt ist. Mit diesen speziellen Diagrammen kann jedes Element einer bestimmten Art von mathematischen Objekten[15] repräsentiert werden. Alle diese Zeichenformen tragen insofern ikonische Aspekte, als dass sie auf charakteristische Eigenschaften des bezeichneten Objekts verweisen, von deren sprachlicher Benennung mittels Akronymisierung bis hin zur Visualisierung bestimmter räumlicher Aspekte als Diagramm. Auf diese Weise machen sie abstrakte, mathematische Objekte konkret greifbar und gebrauchbar.[16] Das symbolische Stehen für etwas anderes, nämlich ein abstraktes Objekt, kommt dabei nicht nur Fachwörtern und Buchstabenkürzeln, sondern auch den Diagrammen mit abgeschlossenem Zeicheninventar zu. Diese Diagramme, die im Folgenden kurz als *ideographische Diagramme* bezeichnet werden sollen, visualisieren die entsprechenden Objekte eben nicht einfach, sondern haben eine klare Bedeutung, und zwar bedeuten sie insbesondere Inhalte, die rein textlich nicht sinnvoll darstellbar sind.[17] Durch die Beschreibung dieser Zwischenstufen soll herausgearbeitet werden, dass im vorliegenden Beispiel verschiedene Zeichenmodalitäten in einer multimodalen Konstellation nicht nur nebeneinander stehen und durch Verweise eng miteinander verschränkt sind, sondern dass es auch einen schrittweisen Übergang zwischen ihnen

14 Vgl. Beutelspacher 2009 [1991], S. 17f.
15 Appel und Haken 1977, S. 435, »configurations«.
16 Vgl. Krämer 2016.
17 Prinzipiell sind die Diagramme in Textform übertragbar, wie es die Autoren ja auch tun, wenn sie die entsprechenden Daten in maschinenlesbare Form übersetzen. Allerdings sind sie in dieser Form praktisch für Menschen nicht sinnvoll zu erfassen, was dadurch bestätigt wird, dass im Artikel nicht einmal der Versuch einer Darstellung ohne Hilfe von Diagrammen unternommen wird.

gibt, wobei die erwähnten Zwischenstufen bei allen Unterschieden sehr viele Ähnlichkeiten in ihrer Funktion und Verwendung aufweisen.

Im Folgenden soll nach einem kurzen Blick auf den Artikel von Appel und Haken als Ganzes zunächst die Verwendung des Computers und ihre Darstellung im Text betrachtet werden. Danach sollen die Zwischenstufen zwischen Text und Diagrammen im Detail dargestellt, und anschließend ihre Verwendung, Kombination und Integration in den Text verglichen werden.

1 Der Aufsatz als Ganzes und die Rezeptionssituation

Der Aufsatz erschien aufgeteilt in zwei Teile von 62 und 77 Seiten Länge mit einem beigefügten Microfiche von 254 Seiten. Der größte Teil des eigentlichen Artikels wird von langen Listen von Diagrammen eingenommen. Das Layout folgt insgesamt den Konventionen mathematischer Fachartikel, wobei die Diagramme offenbar von Hand gezeichnet und mit der Schreibmaschine beschriftet wurden.[18] Auf diese Weise scheint auch der Inhalt des Microfiches im Ganzen entstanden zu sein, was sich in einem weniger geglätteten Gesamteindruck äußert. Die Beigabe eines Microfiches ist ungewöhnlich und lässt sich durch die überdurchschnittliche Textlänge erklären. Es enthält die Beweise diverser Lemmata[19] sowie weitere Listen von Diagrammen.

Innerhalb der beiden Teile des Haupttextes lassen sich Blöcke mit verschiedenen Texttypen identifizieren. Die Einleitung[20] des ersten Teils besteht aus einer inhaltlichen und historischen Einführung ins Thema. Insbesondere wird die soziale Interaktion der Autoren mit anderen Mathematikern beschrieben, wobei die Autoren in der dritten Person mit ihren Nachnamen benannt werden. Danach beginnt der eigentliche mathematische Text. Dieser ist in der wir-Form gehalten, was eine für einen mathematischen Fachtext übliche Wahl darstellt, die eine die Leser:innen einschließende Gemeinschaft imaginiert.[21] Erst mit dem abschließenden

18 Dies war zum Erscheinungszeitpunkt nicht unüblich, würde heutzutage aber wohl mit dem Computer erledigt.

19 Als Lemma werden mathematische Aussagen bezeichnet, die z.B. in Beweisen als Hilfsmittel verwendet werden. Vgl. Beutelspacher 2009 [1991], S. 12.

20 Appel und Haken 1977, S. 429–435, »1. Introduction«.

21 Die wir-Form wird bspw. in Beutelspacher 2009 [1991], S. 71 empfohlen, ebenso in Schmidt 2003, S. 98, und beide Male als die:den Leser:in inkludierend gedeutet.

Reflexionsteil[22] wird der Ton wieder distanzierter und Passivkonstruktionen gewinnen die Oberhand. Auch der zweite Teil beginnt mit einer Einleitung,[23] die teilweise in der wir-Form gehalten ist. Allerdings ist erkennbar, dass hier explizit die Autoren selbst sprechen und ein:e Leser:in nicht mitgemeint ist.[24] Dies weicht vom Vorgehen im ersten Teil ab, ist aber ebenfalls nicht untypisch.[25] Der folgende Abschnitt,[26] der beschreibt, wie die computerbasierten Berechnungen implementiert und durchgeführt wurden, erscheint dagegen außergewöhnlich. Denn während in modernen mathematischen Texten an dieser Stelle Pseudocode[27] in den Text integriert würde, der Fokus also auf dem verwendeten Algorithmus läge,[28] wird hier das Vorgehen im Stil eines physikalischen Versuchsaufbaus beschrieben.[29] Der Rest des Haupttextes folgt dann wieder mathematischen Konventionen und ist in der einschließenden wir-Form gehalten.

Auf sozialer Ebene richtet sich der Artikel als wissenschaftlicher Fachtext in erster Linie an andere Wissenschaftler:innen, die dem Text als Leser:innen gegenübertreten. Von den Autoren wird durch die vorherrschende Wahl der wir-Form eine Art Gemeinschaft mit diesen Leser:innen formuliert, die an die Situation in einem Vortrag oder einer ähnlichen mündlichen Erklärsituation denken lässt, in der die Vortragenden die Zuhörer:innen mit auf den Weg durch ihren Beweis nehmen.[30] Gleichzeitig ist ein bildlicher Aspekt immer gegenwärtig: Die vielen Diagramme können nicht mündlich kommuniziert werden. An einer Stelle wird auch explizit ein:e Leser:in als Zeichnende:r angesprochen.[31] Teilweise ist dieser scheinbare

22 Appel und Haken 1977, S. 486, »5. Possible improvements«.
23 Appel, Haken und Koch 1977, S. 491f.
24 Ebd., S. 491: »We do not claim to have been first […]. In particular we understand that F. Allaire […]«.
25 Schmidt 2003, S. 98.
26 Appel, Haken und Koch 1977, S. 492f.
27 Als Pseudocode wird eine Mischung aus natürlicher Sprache und Programmcode bezeichnet, die verwendet wird, um Algorithmen und Programme leserfreundlich darzustellen.
28 Gonthier 2008, S. 1384.
29 Diese Assoziation bringt z.B. Mackenzie 1999, S. 8.
30 Die Imagination einer solchen Situation wird nirgends explizit gemacht, die Gemeinschaft mit dem:der Leser:in, der:die mitgenommen werden soll, wurde bereits erwähnt (vgl. Beutelspacher 2009 [1991], S. 71). Darüber hinaus ist es auffällig, dass Mathematiker:innen, die über Mathematik und die mathematische Arbeit schreiben, dies häufig in Dialogform tun, besonders prominent Lakatos 2015 [1976], aber z.B. auch Davis, Hersh et al. 2012 [1995], S. 41–45 und S. 325–330.
31 Appel, Haken und Koch 1977, S. 504.

Widerspruch durch die gedachte Präsenz einer Wandtafel o.ä. aufzulösen, auf der Diagramme und Formeln notiert werden können.[32] Jenseits einer solchen imaginierten schriftlich-mündlichen Kommunikationssituation[33] enthält der Artikel aber auch Teile, wie die endlosen Listen von Diagrammen, die nur in rein schriftlicher Form sinnvoll sind. Die tatsächliche Kommunikationssituation besteht aus einem Text, der von zur Gemeinschaft der Fachleute gehörigen Leser:innen rezipiert wird, wobei diese Leser:innen gleichzeitig auch Notierende, Zeichnende sind, die die vom Text vorgegebenen Schritte selbst nachvollziehen und je nach Bedarf auch nachzeichnen.[34] Dadurch kommt ein interaktives Element in den Text, das für mathematische Fachtexte grundsätzlich nicht ungewöhnlich ist.[35]

2 Programmcode und Computer

Der Grund, warum die Veröffentlichung des Artikels so viele Reaktionen hervorrief, ist nicht sein Umgang mit Diagrammen, sondern der Umstand, dass der präsentierte Beweis mit Hilfe von Computern geführt wurde. Die Arbeit mit einem Computer stellte zum Erscheinungszeitpunkt des Artikels eine große Neuerung dar, deren Folge kontroverse Diskussionen über die Gültigkeit des vorgelegten Beweises waren, die sich teilweise über Jahrzehnte hinzogen.[36] Die Verwendung von Computern wird von den Autoren mehrfach thematisiert. In der Einleitung zum ersten Teil wird sie an sich gerechtfertigt. Außerdem wird eine Kette experimenteller Interaktionen mit der Maschine beschrieben. Im zweiten Teil erfolgt die Darstellung des zentralen Beweisschritts mit dem Computer. Die hierfür nötigen Berechnungen werden stilistisch als eine Art physikalisches Experiment beschrieben, wobei ein Fokus auf die physischen Rahmenbedingungen gelegt wird. Insbesondere werden spezielle Rechnertypen und deren Standorte in zwei konkreten Rechenzentren[37] benannt, die benötigten Speicherkapazitäten,

32 Vgl. Schmidt 2003, S. 441; aber auch Jörissen 2020 sowie zur Arbeit mit Diagrammen Krämer 2016, S. 80–85.
33 Zum Begriff der Kommunikationssituation: Wildfeuer, Bateman und Hiipala 2020, S. 103.
34 Vgl. Appel, Haken und Koch 1977, S. 504.
35 Das aktive Lesen eines mathematischen Fachtextes wird z.B. auch in Beutelspacher 2009 [1991], S. 87, dargestellt, auch Schmidt 2003, S. 449.
36 Vgl. Mackenzie 1999, S. 39–45.
37 Appel, Haken und Koch 1977, S. 493.

die Rechendauer für ausgewählte Fälle, sowie die Zusammenarbeit mit dem technischen Personal der Rechenzentren beschrieben. Die letztlich verwendeten Algorithmen werden nur sehr grob umrissen und für Details auf andere Aufsätze verwiesen. Der konkrete Programmcode, der damals verwendet wurde, ist nicht zugänglich, weder wird im Artikel auch nur der Versuch unternommen, diesen zumindest teilweise zu reproduzieren, noch wurde er anderweitig überliefert.[38] Dieser Umstand stellt schon rein technisch einen Unterschied zu einem späteren Beweis dar, bei welchem der verwendete Code bspw. im Internet der Allgemeinheit zum Download zur Verfügung gestellt und Teile in die zugehörige Publikation als Pseudocode integriert wurden.[39]

Im Gegensatz zum moderneren Ansatz,[40] in dem das Vorgehen am Computer thematisiert wird, bleibt die Übersetzungsleistung im Hintergrund des ursprünglichen Artikels von Appel, Haken und Koch implizit: Startpunkt ist eine Liste von durch Diagramme gegebenen mathematischen Objekten. Diese bildlich gegebene Information wird in Text, den Programmcode, übersetzt und auf dieser Ebene diversen Untersuchungen unterzogen. Anschließend wurden die von der Maschine textlich hervorgebrachten Ergebnisse von den menschlichen Autoren wieder auf der Ebene der mathematischen Objekte interpretiert und mindestens teilweise in neue Diagramme umgesetzt, die sich in Form einer Tabelle im Microfiche finden.[41] Diese Übersetzungsleistung zwischen unterschiedlichen Medien[42] und Zeichenmodalitäten, vom Bild zum Programmtext und wieder zum Bild, wird aber im Artikel nur sehr indirekt adressiert.

Die Arbeit mit dem Computer umfasst weitreichende intermediale Aspekte. Zwar sind auch unterschiedliche Zeichenmodalitäten wie Diagramme, Text, Programmcode beteiligt, die allerdings nur teilweise im Artikel aufgegriffen werden. Anstelle des Programmcodes findet sich im hier betrachteten Artefakt nur eine Leerstelle. Die physikalische Beschreibung betont eher noch, dass die vorgenommenen Berechnungen dem eigentlichen,

38 Die verwendete Programmiersprache (IBM assembler, Appel, Haken und Koch 1977, S. 493) ist allerdings auch deutlich unzugänglicher als moderne, höhere Sprachen.

39 Gonthier 2008, S. 1384; Gonthier 2006.

40 Vgl. ebd., S. 1384f.

41 Appel, Haken und Koch 1977, S. 202–217.

42 Anders als sonst in der Literaturwissenschaft üblich, wird hier im Anschluss an Wildfeuer, Bateman und Hiippala 2020, S. 152, unter einem »Medium« eine »sozial und historisch situierte Praxis« verstanden, bestehend aus einem »Canvas« und einer oder mehrerer in diesem realisierten Zeichenmodalitäten.

mathematischen Fachartikel fremd sind. Später wurden Möglichkeiten gefunden, diese Distanz ein Stück weit zu überwinden und den Code als Pseudocode multimodal zu integrieren. Hier ist das aber noch nicht der Fall. Ein weiterer bemerkenswerter Aspekt ist der Umstand, dass die abstrakten mathematischen Objekte menschlichen Akteur:innen immer über Diagramme zugänglich gemacht werden, während eine grundsätzlich mögliche Übersetzung in Textdaten ausschließlich für die Kommunikation mit einer Maschine verwendet und nicht mit den Leser:innen geteilt wird.[43] Dies unterstreicht die Bedeutung der Diagramme, die im vorliegenden Artikel dementsprechend auch eine zentrale Rolle spielen.

3 Vom Text zum Bild

Im Folgenden sollen nun die in der Einleitung angesprochenen Zwischenstufen vom Text zum Bild dargestellt werden. Dabei liegt ein besonderes Augenmerk auf der Art, wie die verschiedenen Symbole und Ikone variiert werden und miteinander verbunden sind. Im Anschluss an die Diskussion der einzelnen Zwischenstufen werden die wichtigsten Aspekte anschließend in einer Tabelle (Tab. 1) zusammengefasst.

3.1 Vom Wort zur Zeichenkonstellation

3.1.1 Fachwörter und Akronyme

Wie in mathematischen Texten üblich,[44] werden im vorliegenden Artikel von Appel und Haken Fachwörter, die neu definiert werden, kursiv gesetzt und so aus dem übrigen Text herausgehoben.[45] Für Akronyme gilt das nicht, wenn sie als reine Abkürzungen ein bestehendes Fachwort im Text modifizieren.[46] Formeln und onymisierte Kürzel dagegen sind immer kursiv.[47] Von diesen auf typographischer Ebene angesiedelten visuellen Codes abgesehen, befinden sich die angesprochenen Phänomene klar im Bereich von Sprache und Text. Allgemein ist die Ersetzung eines Wortes durch

43 Vgl. Schnotz 1997.
44 Beutelspacher 2009 [1991], S. 6; Schmidt 2003, S. 615–628.
45 Appel und Haken 1977, S. 435f.
46 Z.B. ebd., S. 437.
47 Ebd. 1977, S. 435f.

seinen Anfangsbuchstaben hier mit großem Abstand die häufigste Methode zur Bildung von Symbolen.[48] Dies umfasst sowohl Situationen, in denen die Ersetzung des Symbols durch seine Langform ohne weiteres möglich ist, als auch Fälle, in denen eine Onymisierung, typographische Abwandlungen oder Erweiterungen dies verbieten.

Beispiele für reine Abkürzungen sind die Begriffe »S-situations« und »L-situations«, die für die Phrasen »situations of small discharging« bzw. »situations of large discharging« stehen und auch im Text explizit als »abbreviated« bezeichnet werden.[49] Ähnliches gilt für »T-dischargings«, bei denen der Buchstabe »T« für »transversal« steht.[50] Solche Kurzformen werden nicht immer als Abkürzungen adressiert, auch wenn die Bildungsregeln vergleichbar bleiben. Beispiele hierfür sind »R-edge« (»regular«), »S-edge« (»small«), »L-edge« (»large«), und entsprechend »R-, S-, or L-dischargings«.[51] Sie ähneln definierten Fachbegriffen, die zumindest theoretisch durch ihre Definition ersetzt werden können (»initially good«,[52] »contained in«,[53] »immersion«[54]).[55] Damit stellen sie in Peirces Sinne Symbole dar, die mit ihrer Bedeutung fast nur über Konventionen verbunden sind. Die einzige auftretende Ähnlichkeit, aus der ikonische Aspekte abgeleitet werden könnten, ist sprachlicher oder metaphorischer Natur.

Ähnliches gilt bei der Vergabe von Eigennamen für bestimmte Objekte, auf die dann im Folgenden wieder zurückgegriffen werden kann, vermutlich um Leser:innen die Zuordnung zu erleichtern.[56] Allerdings kann das onymisierte Kürzel in diesen Fällen nicht mehr durch eine entsprechende Langform ersetzt werden. Beispiele wären hier Fälle wie »let E be an

48 Dies folgt mathematischen Konventionen, siehe z.B. Beutelspacher 2009 [1991], S. 18; Schmidt 2003, S. 451.
49 Appel und Haken 1977, S. 438.
50 Ebd., S. 437.
51 Ebd., S. 439.
52 Ebd., S. 478.
53 Ebd., S. 435.
54 Ebd., S. 435.
55 Allgemein sind solche Wortbildungen mit Bindestrich in der Mathematik sehr üblich, siehe Schmidt 2003, S. 617, der die Buchstabenbestandteile als Formelfragmente interpretiert.
56 Beutelspacher 2009 [1991], S. 18.

edge«[57] für eine Kante oder »the vertex V«[58] für einen Eckpunkt.[59] Der Buchstabenname behält die sprachliche Verbindung zu dem ihn charakterisierenden Begriff, verselbstständigt sich aber durch die Onymisierung. Der Akt der Namenseinführung, der zugleich das entsprechende Objekt erst erzeugt, beinhaltet aber auch einen indexikalischen Aspekt, wenn z.B. E die Ecke ist, die an einer konkreten Stelle im Text aufgerufen oder gar in einem Diagramm markiert wurde.

3.1.2 Modifikation von Fachwörtern und Buchstabenkürzeln

Um mehrere gleichartige Objekte voneinander zu unterscheiden,[60] müssen die Autoren häufig deren Eigennamen variieren. Dazu nutzen sie verschiedene Strategien, die teilweise sprachlich fundierten Ordnungsmustern folgen, teilweise aber auch ins Bildliche übergehen. Bei mehreren Objekten vom selben Typ, denen eindeutige Symbole zugewiesen werden sollen, wird oft auf im Alphabet direkt nachfolgende oder, seltener, vorausgehende Buchstaben ausgewichen,[61] bspw. wenn natürliche Zahlen (»numbers«) »n« und »m«[62] oder Punkte (»vertices«) »U, V, W«[63] auftauchen. Hier ist der Buchstabe mit seiner Bedeutung innerhalb des Alphabetsystems und damit der sprachlich-textliche Aspekt das entscheidende Kriterium.

Eine andere Möglichkeit besteht in der Ergänzung von Symbolen durch sogenannte Indizes, wie etwa die Einführung von »W_1« und »W_2«, um zwei »wings«[64] zu unterscheiden.[65] Die durch Indizes modifizierten Buchstaben können zwar noch in Sprache übersetzt werden (»We-Zwei«), allerdings wird dadurch die Platzierung und Größe der jeweiligen Zahl in Relation zum Hauptsymbol nicht deutlich. Diese ist aber auch oft nur

57 Appel und Haken 1977, S. 438.
58 Ebd., S. 439.
59 Die doppelte Ansprache der entsprechenden Objekte durch Sprache und Buchstabenkürzel ist typisch, siehe Schmidt 2003, S. 447.
60 Insgesamt folgen die Autoren hier den normalen, mathematischen Konventionen, siehe z.B. Beutelspacher 2009 [1991], S. 17–20.
61 Vgl. allgemein Schmidt 2003, S. 453.
62 Appel und Haken 1977, S. 480.
63 Appel, Haken und Koch 1977, S. 503.
64 Appel und Haken 1977, S. 483.
65 Die Ersetzung von Zahlen durch Buchstaben, wenn bspw. von »p2«, »p3«, »p4« zu »pk« oder »pi« übergegangen wird (siehe Appel und Haken 1977, S.429), wobei jeweils spezifiziert wird, dass »k« und »i« entsprechende Werte (2, 3 und 4) annehmen, soll hier als reine Abkürzung nicht gesondert betrachtet werden.

eingeschränkt bedeutungstragend und dient konventionalisiert eher der visuellen Abgrenzung von Multiplikationen (»$W \bullet 2$«). Die Möglichkeit der Nummerierung wird nicht nur für Symbole, die Eigennamenfunktion haben, genutzt, sondern ebenso für Kurzformen im Allgemeinen, wobei auch andere Setzungen der Zahlen zum Einsatz kommen. Beispiele wären hier »T1-discharging« und »T2-discharging«[66] oder »good_0« und »good_1«.[67] Besonders das letzte Beispiel fällt ins Auge, da hier ein formal natürlichsprachliches, aber neu definiertes Wort genauso behandelt und modifiziert wird, wie andere mathematische Symbole auch. Wörter, die für definierte Begriffe stehen, können also auf dieselbe Weise benutzt werden, wie Buchstabenkürzel, die als Namen auf bestimmte Objekte verweisen.

Und auch Indizes dienen nicht nur zur Unterscheidung gleichartiger Objekte, sondern können auch genutzt werden, um mit Hilfe des entsprechenden Zahlenwerts zusätzliche Bedeutung zu generieren, etwa wenn ein Eckpunkt, in dem fünf Kanten enden, erst als »5-vertex« bezeichnet wird und später nur noch kurz von einem »V_5« gesprochen wird.[68] Wenn sich verschiedene Nummerierungen überschneiden, bspw. um eine Anzahl von »5-vertices« zu unterscheiden, werden beide Kennzeichnungen kombiniert, wobei die allgemeinere Nummerierung ihren Ort behält, während die sekundäre Nummerierung ausweicht: »$V_5^{(1)}$, $V_5^{(2)}$, $V_5^{(3)}$, $V_5^{(4)}$, $V_5^{(5)}$«.[69] In diesem Fall wird die Möglichkeit zur Aussprache schon deutlich eingeschränkt, Lösungen wie »Fau-Fünf-Eins« ergeben nur vor dem Hintergrund des gedachten Schrift*bildes* Sinn.

Noch einen Schritt weiter in Richtung einer visuellen Variation von Symbolen geht die Ersetzung von Zahlen bei der Indizierung durch Buchstaben, die teilweise zusätzliche Bedeutung tragen können. Dieser Fall liegt vor, wenn der Buchstabe als solcher symbolisch verwendet wird. Ein Beispiel hierfür ist die Ergänzung von »a configuration C« durch einen zweiten Buchstaben zu »Cn« und »Cr«, wobei dieser zweite Buchstaben für »non-reflected« und »reflected« steht.[70] Auffällig ist hier, dass zwar einerseits die Buchstaben, wie in der Wortbildung üblich, hintereinander geschrieben werden, allerdings nicht in der sprachlich korrekten Reihenfolge (Adjektiv vor Nomen), sondern zuerst das Hauptsymbol, dann

66 Appel und Haken 1977, S. 438.
67 Ebd., S. 478.
68 Ebd., S. 437.
69 Ebd., S. 468.
70 Ebd., S. 436.

die sekundären Symbole, die das Hauptsymbol spezifizieren. Damit wird ein außersprachliches Kombinationsmuster auf eine eigentlich sprachliche Symbolbildung angewandt. Dieses Muster, ein Symbol durch folgende Symbole zu spezifizieren, findet sich auch bei der konventionalisierten Klammer-Schreibweise, bei welcher in Klammern eine Liste von Symbolen nachgestellt wird, die für Objekte stehen, von denen das Hauptsymbol abhängt.[71] Dies wird auch explizit so thematisiert, bspw. nachdem eine »discharging procedure« »$\mathcal{P}$« eingeführt wurde und ergänzt wird: »Thus, to be precise, we should denote our discharging procedure by $\mathcal{P}(\mathcal{T},\mathcal{S},\mathcal{L})$«.[72] Daran anschließend findet sich ein weiteres Beispiel, wenn ein Objekt »q«, das mit einer solchen »procedure« verknüpft ist, im weiteren Verlauf zu »q_{TS}« bzw. »q_{TL}« spezifiziert wird.[73]

Die Wahl, welche der drei hier aufgegriffenen Möglichkeiten zur Verknüpfung von Buchstaben in welcher Situation verwendet wird, wird im Text nicht thematisiert. Plausibel ist eine Begründung aus dem typographischen Verwendungszusammenhang des Symbols: Wortartiges Hintereinanderschreiben für Symbole, die hauptsächlich in Text integriert werden, die Klammer-Schreibweise, wenn die logische Abhängigkeit betont wird, Indizierung für Symbole, die noch weiter modifiziert und in Formeln verwendet werden. Insgesamt werden Buchstaben und Zahlen als Bausteine genutzt, aus denen sprachlichen, typographischen und inhaltlichen Kriterien folgend neue, komplexe Symbole zusammengesetzt werden. Ikonisch sind solche Symbole trotz ihrer räumlichen Binnenstrukturierung nur insofern, als sie metaphorisch oder als (variierte) Akronyme auf sprachliche Begriffe oder auf Zahlen verweisen.

3.1.3 Weitere, visuell orientierte Möglichkeiten der Modifikation von Buchstaben

Zusätzliche Optionen zur Kombination von Symbolen bieten diverse Sonderzeichen, bspw. wenn »f« zu »f^+« oder »$f^\sim$« und »c« zu »c'« wird.[74] Hier beruhen mögliche Übersetzungen in Sprache auf Beschreibungen der sichtbaren Zeichen. Eine symbolische Bedeutung trägt etwa das Pluszeichen (»Vergrößerung«).

71 Dies leitet sich von der Schreibweise von Funktionen ab, z.B. »f(x)«.
72 Appel und Haken 1977, S. 458.
73 Ebd., S. 462 bzw. S. 470, der fehlende dritte Buchstabe erklärt sich daraus, dass jeweils ein Spezialfall gemeint ist.
74 Ebd., S.462 (f+), S. 436 (f~), S. 479 (c').

Weitere Möglichkeiten, Kürzel zu variieren, von denen die Autoren des Artikels Gebrauch machen, stellen das Ausweichen auf das griechische Alphabet sowie andere Schrifttypen dar. Die erste Variante wird meist in konventionalisierten Fällen genutzt,[75] in seltenen Fällen aber auch alternativ zu den entsprechenden lateinischen Buchstaben, wenn z.B. »μ« (»mü«) und »ν« (»nü«) statt »m« und »n« für bestimmte »numbers« genutzt werden.[76] Obwohl dies den Rahmen des aus lateinischen Buchstaben zusammengesetzten Textes sprengt, bleibt hier die Möglichkeit zur Aussprache erhalten. Die häufiger genutzte Variation von Schrifttypen verwendet Kleinbuchstaben statt Großbuchstaben oder »kalligraphische« Buchstaben. Bei diesen bleibt für die Aussprache nur die Beschreibung, denkbar wären etwa »klein-Pe« (im Unterschied zu »groß-Pe«) oder »kalligraphisches P« für »$\mathcal{P}$«. In diesem Fall ist die Änderung des Schrifttyps in der Regel konventionalisiert und trägt eine symbolische, teilweise auch metaphorische Bedeutung.[77] So werden Punkte mit Großbuchstaben bezeichnet, Zahlen mit Kleinbuchstaben und umfassende Mengen von Objekten mit kalligraphischen Buchstaben. Damit stellt diese Art der Variation ein Beispiel für die Ableitung von Symbolen von anderen Symbolen durch visuelle Veränderungen dar, wenn etwa bestimmte Objekte (»polygons«) mit Symbolen »P_2«, »P_3« usw. bezeichnet werden. Davon abgeleitet geben »p_2«, »p_3« usw. die Anzahl dieser »polygons« an, die in einer bestimmten Situation vorkommen.[78] Entsprechend bezeichnen »$\mathcal{S}$« und »$\mathcal{L}$« eine Gesamtmenge von »S-situations« bzw. »L-situations«.[79]

Insgesamt entsteht durch die Ähnlichkeiten der verschiedenen Variationen von Buchstabenkürzeln ein Netz zusätzlicher, nichtsprachlicher Verbindungen, das unterschiedliche Objekte visuell in Beziehung setzt und die Orientierung in den abstrakten Modellen, die der Text abruft, erleichtert. Die bedeutungstragenden, visuellen Elemente gehen dabei über eine räumliche Binnenstrukturierung von Symbolkonstellationen hinaus.

75 Bspw. steht »χ« für die »Euler characteristic«, ebd., S. 435.
76 Ebd., S. 462 und S. 469.
77 Siehe auch Beutelspacher 2009 [1991], S. 18, Punkt 2, zur Hierarchie von Objekten und deren Bezeichnungen.
78 Appel und Haken 1977, S. 429.
79 Ebd., S. 458.

3.1.4 Einschub: Formeln

Neben den im Text vorkommenden Symbolen enthält der Artikel auch komplexere, aus Symbolen zusammengesetzte Formeln, die teils in den Haupttext integriert, teils vom Haupttext abgesetzt sind.[80] Diese folgen den allgemeinen Konventionen für mathematische Formeln und sollen hier nicht im Fokus stehen, da sich hierzu in der Literatur verhältnismäßig breite Diskussionen finden.[81] Die Konventionen beinhalten, dass Formeln zwar an sich aussprechbar sein sollen,[82] gleichzeitig aber auch durch Klammern und die Platzierung der Symbole räumlich gegliedert und visuell erfassbar sind.[83] Der Status mathematischer Formeln als Zeichenkonstellationen mit ikonischen und symbolischen Aspekten und ihre Funktion beim Operieren mit mentalen Schemata wurde in der Literatur immer wieder thematisiert.[84] So unterscheidet etwa Volkert zwischen externer und interner Ikonik mathematischer Symbole, wobei die klassischen Formeln mit ihrer räumlichen Zusammensetzung aus Buchstaben und Zahlen in den Bereich der externen Ikonik fallen. Er hält die Repräsentation durch Zeichen für unverzichtbar für die Existenz abstrakter Schemata.[85] Krämer dagegen betont die Operativität und Räumlichkeit von Formeln.[86] Schmidt diskutiert direkt ihre ikonischen und symbolischen Aspekte.[87] Insgesamt lässt sich festhalten, dass Formeln je nach Interpretation sowohl symbolische als auch ikonische Eigenschaften zugeschrieben werden.[88] Im Allgemeinen erscheinen sie als Teil eines Satzes, auch wenn sie visuell vom Fließtext abgegrenzt werden, was Schmidt unter dem Begriff »Formelsatz« fasst.[89] In dieser Funktion können sie in der Regel nach eindeutigen Konventionen in Sprache übersetzt werden und tragen eine entsprechende propositionale Bedeutung. Ihre visuell-räumlichen und operativen Eigenschaften rücken sie in die Nähe von Diagrammen, ihre klare Übersetzbarkeit in Sprache

80 Ebd., S. 437, S. 469, S. 470, S. 479 etc.
81 Z.B. Schmidt 2003, S. 441–601; Volkert 1986, S.54, S. 73f., S. 82–87 etc.; Krämer 2014, S. 347–349.
82 Schmidt 2003, S. 448.
83 Interessanterweise sind bspw. für Nöth 2016 alle Formeln Diagramme, auch einfache Ausdrücke wie »3+4=7«.
84 Über die hier angeführten Beispiele hinaus siehe z.B. Hensel 2011, O'Halloran 1999 oder Rotman 1999.
85 Volkert 1986, S. 339–346, III.1.4 und S. 400–402, III.5.
86 Krämer 2014, S. 348f.
87 Schmidt 2003, S. 596–599.
88 Ebd., S. 456.
89 Ebd., S. 481–489.

wiederum bindet sie an den Text. Insofern stellen sie eine weitere Zwischenstufe zwischen Text und Bild dar, wobei ihre räumliche Binnenstruktur deutlich komplexer ist als bei den bisher thematisierten modifizierten Symbolen.

Interessant ist darüber hinaus, dass den vom Text abgesetzten Formeln ein Name in Form eines Nummerierungszeichens beigegeben ist, auf das im weiteren Text auch zurückgegriffen wird. Dieses ist durch seinen visuell im Kontext des Artikels eindeutigen Aufbau[90] zweifelsfrei als Zeichen für eine Formel identifizierbar. D.h., die Formeln werden wie Diagramme, mathematische Aussagen und mathematische Fachwörter als benennbare, referenzierbare Inhalte behandelt.

3.1.5 Symbole auf dem Weg zum Diagramm

Appel und Haken verwenden in ihrem Artikel noch deutlicher visuell strukturierte Zeichen im Übergangsbereich zum Diagramm, deren Ikonizität direkt visuell begründet und deren Binnenstruktur räumlich motiviert ist. Ein basales Beispiel stellt hier die Zuordnung des griechischen Buchstabens Delta »Δ« zu einer »triangulation«, einem aus Dreiecken bestehenden Objekt dar. Auch folgt die Pluralbildung des Symbols »#«, das konventionalisiert die Bedeutung »Nummer« trägt und dementsprechend im Artikel nicht weiter erklärt wird, als »##«[91] einem visuellen Additionsmuster. Einen interessanten Fall stellen aber auch bestimmte, rein formal nur aus Zahlen und Bindestrichen gebildete Konstellationen dar: So wird eine Kante, deren beide Endpunkte sogenannte »6-vertices« sind,[92] als »6-6 edge«[93] bezeichnet. Innerhalb des Zeichens »6-6« wird die Kante durch den Bindestrich (»-«) sowie ihre beiden Endpunkte durch sie charakterisierende Zahlen (»6«) mit den typographisch zur Verfügung stehenden Mitteln diagrammatisch nachgebildet (vgl. Abbildung 1). Das Zeichen ist nicht nur konventionell, insofern es auf ein abstraktes Objekt verweist, sondern auch ikonisch, da es die räumliche Struktur dieses Objekts nachbildet. Gleichzeitig kann dieses Zeichen noch als »sechs-sechs-Kante« verbalisiert werden und unterbricht den normalen Textfluss nicht mehr, als andere Buchstaben-Zah-

90 Z.B. »(1.1)«, also nach dem Schema Klammer-Zahl-Punkt-Zahl-Klammer, Appel und Haken 1977, S. 429.

91 Ebd., S. 459.

92 D.h., dass in diesen Punkten jeweils insgesamt sechs Kanten enden.

93 Appel und Haken 1977, S. 461.

len-Kürzel dies tun: Es befindet sich genau im Grenzbereich zwischen Buchstabenkürzeln und Diagrammen.

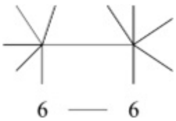


Abb. 1: Veranschaulichung einer »6-6-Kante« (vgl. Appel und Haken 1977, S. 461).

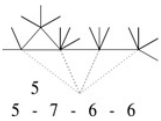


Abb. 2: Veranschaulichung der Zeichenkonstellation »5^5-7-6-6« (vgl. Appel und Haken 1977, S. 461).

Bei der Benennung von Lemmata wird ein ähnliches Schema auf noch komplexere Situationen angewandt, die allerdings im Anschluss zusätzlich verbal beschrieben und in einem Diagramm dargestellt werden. Dabei geht es um Punkte, die mit einem bestimmten anderen Punkt durch Kanten verbunden sind. Wieder werden die aufgeführten Punkte durch die Anzahl der Kanten, die in ihnen insgesamt zusammenkommen, charakterisiert. Das Zeichen »6-6-6« zeigt eine Kette von drei einem nicht genannten Punkt benachbarten Punkten. Jene die Punkte verbindenden Kanten werden durch Bindestriche, die Punkte durch Zahlen repräsentiert.[94] Eine weitere Dimension enthält das Zeichen »5^5-7-6-6«, das nicht nur vier durch Kanten verbundene Punkte »5«, »7«, »6« und »6« zeigt, sondern auch noch einen weiteren Punkt (»^{5}«), der laut dem beschreibenden Text mit den durch »5« und »7« symbolisierten Punkten durch Kanten verbunden ist (vgl. Abbildung 2). Nun ist dieser zusätzliche Punkt innerhalb des Zeichens zwar nicht durch Striche mit den entsprechenden Zahlen verbunden, aber er ist unter Einsatz der im Fließtext zur Verfügung stehenden typographischen Möglichkeiten bestmöglich räumlich platziert, um seine Stellung zwischen den Punkten »5« und »7« zu suggerieren.[95] Ein Bedeutungsüberschuss gegenüber reinem Text ist auch hier durch visuelle Ikonizität gegeben. Durch den räumlichen Binnenaufbau des Zeichens ist in diesem Zusammenhang eine sinnvolle Verbalisierung nicht mehr möglich. Lösungen wie »fünf-fünf-sieben-sechs-sechs« wären irreführend, da sie als »5-5-7-6-6« missverstanden werden könnten. Auch die einzelnen Bausteine des Zeichens sind zwar einerseits zum normalen textlichen Inventar gehörige Symbole, tragen andererseits aber darüber hinaus eine ikonische Bedeutung, die sie von

94 In jedem dieser Punkte enden sechs Kanten.
95 Appel und Haken 1977, S. 461.

diesem Inventar trennt. Dadurch wird die Grenze zum Diagramm weiter aufgeweicht, wenn nicht überschritten, ohne den Bereich der in den Fließtext integrierten Buchstaben-Zahlen-Kürzel zu verlassen.

3.2 Diagramme

Zunächst ist festzuhalten, dass alle Diagramme im engeren Sinne im Seitenaufbau deutlich vom Haupttext getrennt sind. Zum Teil wird dies nur durch ihre zentrierte Ausrichtung und vertikalen Abstand zum Text erreicht,[96] meist aber zusätzlich durch die Beschriftung als »Figure« oder »Table« gekennzeichnet, im Einzelfall auch auf einer eigenen Seite, die als Ganzes eine »Figure« enthält,[97] oder seitenübergreifend im Falle der Tabellen. Dadurch besteht eine formale, visuelle Grenze in der Verwendung von Diagrammen und den meisten bisher behandelten Symbolen, die im ganzen Artikel streng eingehalten wird. Dies scheint der These, dass es einen mehr oder weniger fließenden Übergang zwischen Text und Diagrammen gibt, zu widersprechen. Allerdings sind auch vom Text abgesetzte Formeln visuell vom Text getrennt und gleichzeitig sprachlich in diesen integriert.

3.2.1 Ideographische Diagramme

Im Folgenden soll eine besondere Klasse von Diagrammen behandelt werden, die zusammengesetzt sind aus Punkten, Verbindungslinien zwischen diesen Punkten und Pfeilen. Zwar sind sie wie herkömmliche Diagramme eindeutig räumlich strukturiert, sie unterscheiden sich von diesen aber dadurch, dass sie aus einem festen Reservoir von Symbolen mit fixierter Bedeutung aufgebaut sind und präzise festgelegte mathematische Objekte repräsentieren. Der Aufbau aus einer festgelegten Menge von Bausteinen, der endlose Kombinationsmöglichkeiten erlaubt, die (um sinnvoll zu sein) durch Regeln eingeschränkt werden, erinnert an den Aufbau von Wörtern aus Buchstaben. Dadurch unterscheiden sie sich von herkömmlichen Bildern, deren Zeicheninventar nicht beschränkt ist und deren Inhalt Interpretationsspielraum offenlässt. Trotzdem erlaubt ihnen ihre räumliche Strukturierung wiederzugeben, wie abgebildete Punkte in Bezug zu anderen Punkten verortet werden und welche Verbindungen zwischen welchen

96 Ebd., S. 437 und S. 438.
97 Ebd., S. 440.

Punkten bestehen. Die Diagramme bilden also räumliche Konstellationen ikonisch ab.

Abb. 3: Beispiel für ein ideographisches Diagramm links (Diagramm 2 C, Appel, Haken und Koch 1977, S. 506) sowie rechts eine Veranschaulichung seiner Bedeutung.

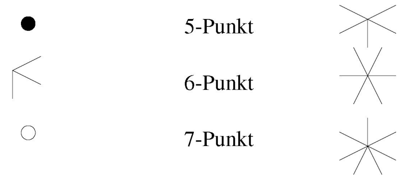


Abb. 4: Links die in Abb. 3 verwendeten Diagrammbausteine aus Appel und Haken 1977, S. 436, in der Mitte ihre sprachliche und rechts ihre anschauliche Bedeutung.

In Abbildung 3 findet sich ein Beispiel für ein einfaches ideographisches Diagramm sowie rechts davon eine grobe Veranschaulichung seiner Bedeutung. Die Bedeutung eines ideographischen Diagramms ist über die Bedeutung der einzelnen visuellen Bausteine, aus denen es aufgebaut ist, explizit festgelegt. Der einzige Bestandteil, der als selbsterklärend angenommen wird, sind die je zwei Punkte verbindenden Linien, die Kanten symbolisieren. Die Bedeutung der verschiedenen Symbole, die unterschiedliche Arten von Punkten repräsentieren, wird in »Figure 1«[98] in einer Tabelle wie in einem Wörterbuch dargestellt, wobei jeweils links ein gezeichnetes Symbol zu sehen ist und rechts die inhaltliche Charakterisierung stichwortartig in schriftlicher Form erfolgt. Einzelne Beispiele solcher Symbole aus »Figure 1«, die in dem Diagramm aus Abbildung 3 verwendet wurden, finden sich in Abbildung 4 zusammen mit ihrer sprachlichen und groben anschaulichen Bedeutung in der mittleren und rechten Spalte. Trotz der Abstraktheit der mathematischen Objekte enthalten die Diagramme keinerlei inhaltliche Vagheit, sondern ihre Bedeutung ist im Detail exakt festgelegt und der Spielraum beim Zeichnen beschränkt. Mögliche visuelle Variationen betreffen im Wesentlichen die genaue Form der Kanten sowie die Orientierung der Zeichnung auf der Seite. Die semantische Reichweite der so gebildeten Diagramme entspricht ihrem Zweck, d.h. sie sind in der Lage, jede denkbare Konstellation von Punkten und Linien, die im Zuge des Beweises auftauchen kann, zu bilden. Dabei dienen sie nominal als Beschreibung

98 Ebd., S. 436.

abstrakter mathematischer Objekte,[99] werden aber in der Praxis meist als diese Objekte direkt bedeutende Symbole verwendet.[100]

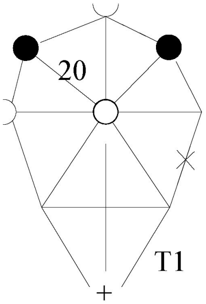


Abb. 5: Darstellung von Diagramm CTL #46 (Appel und Haken 1977, S. 473).

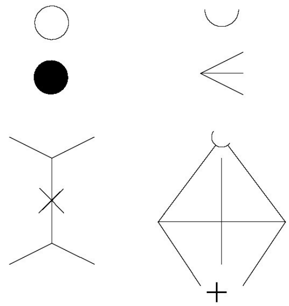


Abb. 6: Liste der in Abb. 5 verwendeten Diagrammbausteine.

Ergänzt werden diese Diagramme immer wieder durch Label, die bestimmte Punkte oder Kanten benennen (»V«, »E«)[101] oder Zahlen, die Kanten näher charakterisieren.[102] Abbildung 5 zeigt ein Beispiel für ein etwas komplexeres Diagramm mit den Labeln »20« und »T1«. Die Diagrammbausteine, die in diesem Diagramm verwendet wurden, sind in Abbildung 6 aufgelistet. Vereinzelt kommen in ideographischen Diagrammen weitere Markierungen hinzu, bspw. Einkreisungen, um Teile der Zeichnung herauszuheben. Darüber hinaus werden teilweise unter oder neben den jeweiligen Diagrammen komplexe benennende Symbole aufgeführt, auf die dann im Text zurückgegriffen werden kann.[103] Alternativ können auch mit dem Objekt, das das Diagramm repräsentiert, verbundene Variablen näher bestimmt oder die aufgeführten Diagramme durchnummeriert werden.[104] Außerdem kommen komplexere Konstellationen vor, in denen mehrere Diagramme miteinander verknüpft werden.[105] Diese werden weiter unten noch gesondert thematisiert.

99 Ebd., S. 435, »we shall describe configurations C mainly by drawings«.
100 Ebd., S. 437 etc.
101 Z.B. ebd., S. 461, Figure 10.
102 Ebd., Figure 13, S. 468.
103 Z.B. »T1 #1«, »T1 #2« etc. in Figure 2, ebd., S. 437.
104 Z.B. ebd. S. 467, Figure 12; oder S. 470, Figure 15.
105 Ebd., S. 458, Figure 5.

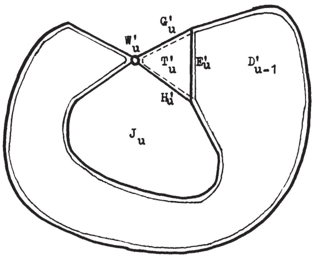


Abb. 7: Ein illustratives Diagramm, Figure F (Appel, Haken und Koch 1977, S. 500).

Vom Ende des ersten Teils ihres Artikels an modifizieren Appel und Haken diese Diagramme auch leicht, indem sie diese durch gestrichelte Linien nach außen hin erweitern oder/und mit einer durchgezogenen Linie nach außen abgrenzen. Auf diese Weise wird der durch das Diagramm dargestellte Bereich vergrößert, aber der grundsätzliche Aufbau beibehalten.

3.2.2 Illustrative Diagramme

Neben den bisher aufgeführten Diagrammen tauchen andere Arten von Diagrammen auf, die eher dem klassischen Bild eines mathematischen Diagramms entsprechen. Dies betrifft v.a. »Figure 16« und »Figure 17«,[106] die Koordinatensysteme mit eingetragenen Punkten und Kurven enthalten, sowie einige Diagramme aus dem zweiten Teil des Artikels.

Die beiden Koordinatensysteme folgen den klassischen Konventionen: Neben zwei durch Zahlen beschrifteten Koordinatenachsen werden bestimmte Punkte markiert und Kurven eingezeichnet. Außerdem existiert eine Art Beschriftung unter dem Diagramm. Diese Form der Darstellung von Daten wurde in der Literatur bereits breit diskutiert, was hier nicht wiederholt werden soll.[107]

Zuletzt sind im zweiten Teil des Artikels diverse Diagramme zu finden, die oberflächlich betrachtet den ideographischen Diagrammen aus dem vo-

106 Ebd., S. 479 und S. 485.
107 Vgl. Krämer 2016, S. 43–47; Bräm und Göldi 2020.

rigen Abschnitt ähneln;[108] ein Beispiel findet sich in Abbildung 7. Anders als bei diesen werden hier die einzelnen Bestandteile mit ihrer jeweiligen Bedeutung nicht explizit eingeführt, sondern Verständlichkeit vorausgesetzt. Konkret geht es um (Kreis-)Flächen, die in Teilflächen unterteilt sind, und als solche zeichnerisch wiedergegeben werden. Diese Teilflächen sowie bestimmte Punkte sind teilweise mit Symbolen gelabelt, auf die im Text verwiesen wird.[109] Die Bedeutung einzelner Gestaltungsmerkmale, wie einer doppelten Linienführung, wird zwar kurz im Text thematisiert, allerdings nur in Klammern und damit vom Haupttext leicht zurückgesetzt.[110]

Insgesamt dienen diese Diagramme im Text, auf den sie im Detail angewiesen sind, als Veranschaulichungen, Illustrationen und Beispiele, um bestimmte Konzepte und Zusammenhänge leichter zugänglich zu machen, was sie deutlich von den ideographischen Diagrammen mit ihrem, unabhängig vom umgebenden Text, exakt festgelegten Bedeutungsinhalt und regelgeleiteten Aufbau unterscheidet. Rein visuell und durch die Verwendung einzelner Bausteine finden sich aber durchaus auch Gemeinsamkeiten.

3.3 Vorläufige Zusammenfassung

Bevor im Folgenden die Verwendung der verschiedenen Arten von Zeichen genauer untersucht wird, soll hier ein kurzer Überblick über die verschiedenen Zwischenstufen gegeben werden, die bisher betrachtet wurden. Insgesamt lassen sich die wichtigsten Punkte in Form einer Tabelle wie folgt zusammenfassen:

108 Appel, Haken und Koch 1977, Figure E, S. 499; Figure F, S. 500; Figure G, S. 501; Figure H, S. 502.
109 Ebd., Figure F, S. 500.
110 Ebd., S. 500.

Tabelle 1: Übersicht

Zwischenstufe	Aussprechbarkeit	im Layout-Teil des Fließtextes	kann Teil eines Satzes sein	sprachlich/ räumlich strukturiert	Zeicheninventar	Bedeutung	Besonderheit
(Fach-)Wort/ Akronym	ja	ja	ja	sprachlich	Alphabet	exakt festgelegt	selten visuell modifiziert
Buchstabenkürzel	ja (eingeschränkt)	ja	ja	teils - teils	verschiedene Alphabete, Zahlen	exakt festgelegt	häufig onymisiert, visuell leicht modifizierbar
Formel	ja (eingeschränkt)	teils	ja	beides	verschiedene Alphabete, Zahlen, Sonderzeichen	exakt festgelegt	sehr flexibel, kann andere Zwischenstufen integrieren
Zeichenkonstellation	teilweise	ja	ja (eingeschränkt)	räumlich	verschiedene Alphabete, Zahlen, Sonderzeichen	aus dem Kontext festgelegt	Diagramm mit typographischen Mitteln
Ideographisches Diagramm	nein	nein	ja	räumlich	feste Liste von Bausteinen	exakt festgelegt	kann Objekte definieren, nicht sinnvoll durch Text ersetzbar
Illustratives Diagramm	nein	nein	nein	räumlich	Konventionen, aber prinzipiell offen	für Interpretationen offen	visualisiert, ist auf sprachlichen Kontext angewiesen

3.4 Verwendung der verschiedenen Zeichenarten

3.4.1 Ansprache im Text

Nachdem das Spektrum der im Artikel auftauchenden Zeichenarten von Fachwörtern und einfachen Akronymen bis hin zu illustrativen Diagrammen dargestellt wurde, stellt sich nun die Frage, wie Appel und Haken im Artikel mit diesen Objekten verfahren. Welche Funktionen haben sie, wie werden sie in den Text eingebunden, gibt es Unterschiede und Parallelen?

Als Ansatz für eine Untersuchung ihrer Funktion im Text bietet sich eine genauere Betrachtung der verschiedenen Verben an, die im Artikel auf die diversen Zeichenarten und Diagramme verweisen. Ihre Verwendung im Hauptteil des Artikels wurde in der untenstehenden Tabelle (Tabelle 2) ausgezählt, wobei zu beachten ist, dass generell viel mehr ideographische als illustrative Diagramme vorkommen, d.h. die Zahlenverhältnisse bei beiden sind ein Stück weit zu relativieren.[111] Eine weitere kleine Einschränkung der Aussagekraft der Tabelle besteht darin, dass die Objektkategorien der Formeln und Zeichenkonstellationen, die oben besprochen wurden, hier nicht gesondert aufgeführt werden. Formeln werden teils als eigenständige Nebensätze verwendet und dementsprechend nicht durch Verben angesprochen, sondern durch Konjunktionen wie »thus«,[112] »so that«,[113] »then«[114] oder »if«[115] eingeleitet. Teilweise werden sie aber auch als Nominalphrasen genutzt, am häufigsten ist hier die Verbkombination »we have [+ Formel]«,[116] die den Aussagestatus von Formeln unterstreicht. Die Zeichenkonstellationen dagegen fungieren entweder als Namen für Lemmata[117] oder tauchen innerhalb eines Fachbegriffs bzw. einer Nominalphrase auf, wie in der Zusammensetzung »6-6 edge«,[118] weshalb auch hier eine Aufschlüsselung nach Verben nicht sinnvoll ist.

111 Allein innerhalb des Haupttextes existieren sechs »Figures« mit illustrativen Diagrammen und 20 »Figures« sowie diverse Tabellen und sonstige Stellen mit ideographischen Diagrammen.
112 Z.B. Appel und Haken 1977, S. 430.
113 Z.B. ebd., S. 468.
114 Z.B. ebd., S. 469.
115 Z.B. ebd., S. 470.
116 Z.B. ebd., S. 430.
117 Z.B. ebd., S. 460.
118 Z.B. ebd., S. 437.

Tabelle 2: Verben, die auf Zeichenarten und Diagramme verweisen

Verb	Verwendung für				
	(Fach-) Wörter/ Akronyme	**onymisierte Kürzel**	**ideographische Diagramme (teils in Tabellen)**	**illustrative Diagramme**	**anderes/ allgemeiner**
say	**9**	**17**	-	-	4
call	**27**	-	-	-	1
refer to	**4**	-	-	-	2
write	**2**	-	-	-	2
let [x be ...]	-	**22**	-	-	-
denote	-	**11**	-	-	-
consider	2	9	-	1	11
mean	**7**	**10**	**7**	-	**8**
indicate	1	1	**17**	**4**	3
occur	-	**15**	**10**	-	10
draw	-	-	**11**	**1**	-

Insgesamt wird hier deutlich, dass Verben mit sprachlicher Bedeutung (»say«, »call«, »write«, »refer to«) auch vor allem auf Fachwörter, Akronyme und entsprechende Phrasen bezogen werden, wobei orale Konnotationen weit häufiger sind als schriftliche.[119] Letzteres erinnert an das oben entworfene Bild einer gedachten, mündlichen Kommunikationssituation, in die Leser:innen mitgenommen werden. Dies findet sich exemplarisch in der Konstruktion »if we want to say that […], we write ›[…]‹«,[120] die allerdings in einer Reihe mit der stärker inhaltlich orientierten Aussage »if we want to indicate that […], we write ›[…]‹«[121] steht. Es wird also geschrieben, um etwas zu sagen oder zu bedeuten. Bei Buchstabenkürzeln und deren Variationen dagegen überwiegen kurze, funktionale Wendungen (»let«, »say [+ Kürzel]«), die häufig wiederholt werden. Explizit wird der Vorgang des Notierens im Unterschied zum Schreiben gemacht (»denote« vs. »write«). Für Diagramme dagegen wird auf visuell orientierte oder herstellungsbezogene Verben zurückgegriffen (»indicate«, »occur«, »draw«). Relativ allgemein ist das Verb »consider«, das sich auf geistige Vorgänge oder Handlungen, aber auch auf sprachliche und bildliche Inhalte beziehen kann. Das in

119 Das Verb »write« kommt insgesamt nur vier Mal vor.
120 Appel und Haken 1977, S. 436.
121 Ebd., S. 436.

allen Zusammenhängen, außer für illustrative Diagramme, verwendete »mean« macht die Gemeinsamkeit der verschiedenen Objekte deutlich: Sie alle sollen bedeuten; sie sind Zeichen, die für etwas anderes, nämlich für abstrakte, mathematische Inhalte stehen. Ob sie dies mit sprachlichen oder bildlichen Mitteln tun, ist für die Erfüllung dieser inhaltlichen Funktion nicht zentral. Bspw. wird das Wort »symbols«[122] sogar ausschließlich für ideographische Diagramme verwendet. Diese Wortwahl ist aber wohl im umgangssprachlichen Sinne zu verstehen und kann nicht auf die Begriffsbildung bei Peirce bezogen werden. Für Fachwörter und Buchstabenkürzel reserviert sind im Artikel darüber hinaus die verbal konnotierten Ausdrücke »expression« und »terminology«, während »drawings« sich nur auf Diagramme bezieht.

Auffällig ist, dass mathematische Objekte sowohl durch Text als auch durch die ideographischen Diagramme definiert werden können, was besonders aussagekräftig ist, da Definitionen in mathematischen Texten wichtige Funktionen innehaben.[123] An sie werden sehr hohe Anforderungen in Bezug auf Eindeutigkeit und Klarheit gestellt.[124] Dass hier »drawings« diese Aufgabe erfüllen können, zeigt das Maß an Exaktheit und Aussagefähigkeit, welches ihnen zugestanden wird. Die klassische bildliche Funktion, durch Veranschaulichung von Zusammenhängen eine Interpretation nahezulegen (»suggest«[125]) oder Beispiele darzustellen, die typischerweise bildlichen Darstellungen in Fachtexten zugeschrieben wird, taucht zumindest sprachlich nur in Bezug auf die illustrativen Diagramme auf.

3.4.2 Vergleichsfälle

Um die Ähnlichkeiten und Unterschiede in der Verwendung von Fachwörtern, Buchstabenkürzeln und Diagrammen herauszuarbeiten, sollen im Folgenden einzelne Beispiele herausgegriffen und kontrastiert werden, in denen Fachwörter, Buchstabenkürzel und ideographische Diagramme in parallelen Zusammenhängen verwendet werden. Dadurch soll die These eines schrittweisen Übergangs von Fachwörtern über Buchstabenkürzel bis hin zu ideographischen Diagrammen gestützt werden.

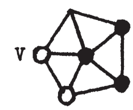
122 Ebd., S. 435 und S. 438.
123 Vgl. Beutelspacher 2009 [1991], S. 6: »Jede Definition ist ein schöpferischer Akt.«; Schmidt 2003, S. 604–607.
124 Beutelspacher 2009 [1991], S. 6.
125 Appel und Haken 1977, S. 479.


means attachment of some T2-situation so as to induce a T-discharging of 20 to the major vertex as indicated by the arrow.


means attachment of some T-situation (T1 or T2) so as to induce a T-discharging as indicated by the arrow.


means a major vertex V, excepting one disposition: V cannot be a V_7 which is adjacent to a V_5 which itself does not belong to the configuration but is adjacent to another vertex of the configuration.


means a major vertex V, excepting the disposition in which the vertex V occurs as in the partial diagram at right.




means that *no* T-discharging crosses the marked 6-6 edge.

L4 means value of the distinguished edge is 40 or 35,
L5 means value of the distinguished edge is 50,
L6 means value of the distinguished edge is 60.

Abb. 8 und 9: Beispiele für Einführung von Diagrammbausteinen (Abb. 8, Appel und Haken 1977, S. 439) und Buchstabenkürzel (Abb. 9, Appel und Haken 1977, S. 459).

Zunächst soll die Einführung bestimmter Diagrammbausteine untersucht werden. Diese firmieren im Text als »abbreviations«.[126] Interessanterweise werden mit demselben Wort insbesondere auch Buchstabenkürzel, die Ausdrücke abkürzen, bezeichnet.[127] Die diagrammatischen »abbreviations« werden ohne Kennzeichnung als »Figure« in Listenform in zwei Spalten — Diagrammbaustein links, Bedeutung rechts — aufgeführt (siehe Abbildung 8). Allerdings wird diese Listenform dadurch aufgebrochen, dass nach dem Diagrammbaustein jeweils ein erklärender Satz mit »means« angeschlossen wird. Die zu bestimmenden Diagrammbausteine sind also Teil eines Satzes

126 Ebd., S. 439, deutsch »Abkürzungen«.
127 Ebd., S. 437; S. 438; S. 459.

und werden in ihrer inhaltlichen Dimension angesprochen. Sie haben eine exakt festgelegte Bedeutung und ähneln darin abstrakteren Symbolen, wie der Vergleich mit ähnlich aufgebauten Listen zeigt, die Buchstabenkürzel einführen.[128] Auch diese werden als Liste dargestellt, links das Buchstabenkürzel, rechts die mit »means« angeschlossene Bedeutung (siehe Abbildung 9). Der einzige Unterschied zu den Diagrammbausteinen besteht in einem leicht geänderten Layout: die Zeilenabstände innerhalb der Liste entsprechen den Zeilenabständen im Text, während den Diagrammbausteinen insgesamt mehr Platz zugestanden wird. Die Ähnlichkeiten in der Einführung von Diagrammbausteinen und Buchstabenkürzeln zeigt ihre enge Verbundenheit in ihrer Funktion als Symbole.

Als ergänzender Exkurs soll an dieser Stelle noch kurz betrachtet werden, wie die Bedeutung der Diagrammbausteine genau festgelegt wird. Dies geschieht durch den Verweis auf Buchstabenkürzel,[129] aber auch durch Negativaussagen: Bestimmte Fälle werden explizit ausgeschlossen, d.h. die diagrammatischen »abbreviations« tragen nicht rein positive Bedeutung. Die ausgeschlossenen Objekte werden meist durch Text beschrieben, in einem Fall aber auch mit Hilfe eines Diagramms aufgeführt. Einerseits verdeutlicht dies, dass die textliche Beschreibung, obwohl präferiert, in bestimmten Fällen an Grenzen stößt und diagrammatisch ergänzt werden muss. Andererseits zeigt sich, dass die diagrammatischen Bausteine einen bestimmten inhaltlichen Bereich nicht nur abdecken, sondern sich auch gegenseitig voneinander abgrenzen. Die Bausteine der ideographischen Diagramme dienen dazu, bestimmte inhaltliche Bedeutungen zu generieren, und dazu gehören auch negative Aussagen.

Interessant als weiteres Beispiel ist der Fall einer Aufzählung, bei der sowohl Buchstabenkürzel als auch Diagramme in einer Reihe aufgeführt werden, ohne den Satzfluss zu unterbrechen:

> »[...] the critical configuration at this point will be CTS## 01, 02, 03 ([...]) and
> [Diagramm] [Diagramm]
> and CTL##1, ...,22, 28, ...,36, 81, ..., 90 and 141 [...]«[130]

Hier ersetzt »[Diagramm]« jeweils ein ideographisches Diagramm. Die Kürzel »CTS« bzw. »CTL« stehen für eine bestimmte Kategorie von Ob-

128 Ebd., S. 458; S. 459.
129 Appel und Haken 1977, S. 439, »attachment of some T-situation«.
130 Ebd., S. 487f.

jekten, wobei die relevanten Einzelfälle mit Hilfe einer Nummerierung[131] identifiziert werden. Der aus einem Buchstabenkürzel bestehende Eigenname eines mathematischen Objekts und ein ideographisches Diagramm werden also gleichberechtigt in einen Satz integriert. Zwar werden die Diagramme im Layout deutlich vom Text abgesetzt, aber der Satzfluss läuft weiter, obwohl die Buchstabenkürzel grundsätzlich ausgesprochen werden können, während die Diagramme rein bildlich-visuell funktionieren. Die Eigennamen wiederum werden in großen Listen festgelegt, in denen jeweils eine Buchstaben-Zahlen-Kombination und ein ideographisches Diagramm einander zugeordnet werden. Der Eigenname verweist also auf das jeweilige Diagramm, welches wiederum auf das zugehörige abstrakte Objekt verweist. Auch wenn das Kürzel eventuell aus typographischen Gründen innerhalb des Textes bevorzugt wird, steht es für ein Diagramm und kann entsprechend mit anderen Diagrammen kombiniert werden.

Als letztes Beispiel soll in diesem Zusammenhang noch die Kombination von Fachwörtern, Symbolen und Diagrammen zu komplexeren Konstellationen mit Hilfe von Funktionspfeilen näher betrachtet werden. Diese Pfeile repräsentieren Funktionen, d.h. die Bewegung von einem Quellobjekt in ein Zielobjekt.[132] Eine solche Konstellation kann als Formel in den Haupttext integriert oder von diesem abgesetzt sein. Als Teil des Haupttextes kann sie als Satzteil in Sprache übersetzt werden, d.h. aus »f: C → D« wird konventionalisiert »ef von ze nach de«.[133] Aber sie kann auch Teil einer »Figure« sein, wobei Diagramme an die Stelle des Quellobjekts »C« und des Zielobjekts »D« treten und eine direkte Aussprache unmöglich machen.[134] Wenn ein Pfeil beschriftet wird, kann sich die Beschriftung entweder als Buchstabenkürzel auf den Namen[135] oder als Fachwort auf die Art der Funktion beziehen.[136] Hier werden Buchstabenkürzel und Diagramme bzw. Buchstabenkürzel und Fachwörter in analogen Situationen verwendet, was die These, dass alle drei Kategorien ähnlich verwendet werden können, stützt. Was allerdings fehlt, ist ein Fall, in dem ein Pfeil

131 Das Symbol ## fungiert als Plural zu #, das für »Nummer« steht.
132 Diese Pfeile unterscheiden sich von den Pfeilen, die in die ideographischen Diagramme integriert sind. Sie verbinden unterschiedliche Objekte, bspw. zwei ideographische Diagramme.
133 Appel und Haken 1977, S. 436, »there is a simplicial immersion f: C → D which respects«.
134 Appel, Haken und Koch 1977, Figure D, S. 499.
135 Ebd., Figure D, S. 499.
136 Appel und Haken 1977, Figure 16*, S. 480, der Pfeil ist mit »1-extension« beschriftet.

mit einem Diagramm beschriftet wäre. Insofern stehen sich Diagramm und Buchstabenkürzel sowie Buchstabenkürzel und Fachwort jeweils näher als Fachwort und Diagramm.

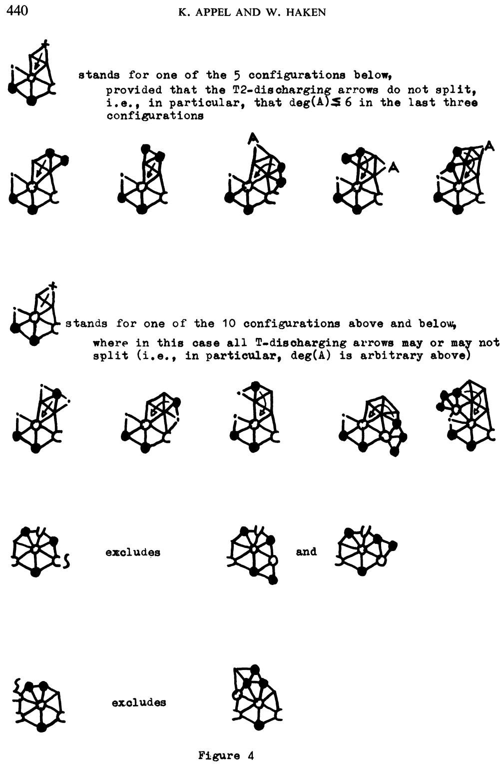


Abb. 10: Beispiel für die Verwendung von ideographischen Diagrammen, Figure 4 (Appel und Haken 1977, S. 440).

Insgesamt lassen sich also verschiedene Beispiele finden, in denen ideographische Diagramme und Buchstabenkürzel auf die gleiche Weise benutzt werden, außerdem gibt es Parallelen in der Verwendung von Buchstabenkürzeln und Fachwörtern, die zwischen Fachwörtern und ideographischen Diagrammen fehlen. Das bedeutet, dass es in der Funktion dieser Zeichenkategorien zwar einerseits Überschneidungen gibt, andererseits aber auch trennende Unterschiede. Folglich nehmen die Buchstabenkürzel einen Platz zwischen Fachwörtern und Diagrammen ein, wie es der Ausgangsthese eines schrittweisen Übergangs entspricht.

Ohne direkte Vergleichsgröße im Bereich der Buchstabenkürzel und Fachwörter, aber dennoch aussagekräftig für die enge Verschränkung von Diagrammen und Text ist »Figure 4«,[137] die hier deshalb gesondert behandelt werden soll. Eine Ansicht der Originalabbildung findet sich in Abbildung 10. Der obere Teil der »Figure« ist folgendermaßen aufgebaut:

> »[Diagramm] stands for one of the 5 configurations below, provided that […] in the last three configurations
> [Diagramm] [Diagramm] [Diagramm] [Diagramm] [Diagramm]
> [Diagramm] stands for one of the 10 configurations above and below […]
> [Diagramm] [Diagramm] [Diagramm] [Diagramm] [Diagramm]«[138]

Dabei steht »[Diagramm]« jeweils für ein ideographisches Diagramm. Wieder werden ideographische Diagramme in Sätze integriert. Interessant ist das Verb »stands for«, das ansonsten im Artikel nicht vorkommt, und nicht den bildlichen, sondern den symbolischen Aspekt des Diagramms ins Zentrum rückt, ähnlich dem schon erwähnten Verb »mean«. Auf die nur aus Diagrammen bestehenden Zeilen wird mehrfach verwiesen. Am Ende des ersten Satzes bleibt sprachlich offen, welche »configurations« gemeint sind. Es ist also den Leser:innen überlassen, den visuellen Bezug herzustellen, wobei der halb unabgeschlossene Satz dazu einlädt, die folgenden Diagramme mit einem »of« in den Satz zu integrieren. Direkter ist der Verweis im zweiten Satz, wo von den »configurations above and below« die Rede ist.

Der zweite Teil der »Figure« ist deutlich kürzer:

> »[Diagramm] excludes [Diagramm] and [Diagramm]
> [Diagramm] excludes [Diagramm]«[139]

Einerseits sind hier wieder Diagramme in einen Satz integriert, andererseits ist auch die Wortwahl auffällig, da sie für bildliche Darstellungen unüblich ist. Eine Zeichnung eines Hauses kann nicht eine Zeichnung eines Hundes ausschließen, beide können nebeneinanderstehen. Gemeint ist »excludes« hier wieder inhaltlich: Jedes Diagramm hat eine exakt definierte Bedeutung, insbesondere ist jedes Diagramm aus klar definierten Bestandteilen zusammengesetzt. Die Menge der abstrakten mathematischen Objekte, die von jedem Diagramm repräsentiert wird, ist eindeutig festgelegt. Vor die-

137 Appel und Haken 1977, S. 440.
138 Ebd., S. 440.
139 Ebd., S. 440.

sem Hintergrund ist es mathematisch korrekt zu sagen, dass die Menge der von dem einen Diagramm repräsentierten Objekte die Menge der von einem anderen Diagramm repräsentierten Objekte explizit ausschließt, ähnlich der Situation für die Diagrammbausteine. Dies zeigt die begriffliche Kraft und Klarheit der ideographischen Diagramme. Die Nähe zu Kürzeln und Fachwörtern wird auch dadurch deutlich, dass die Diagramme als Subjekt und Objekt in Sätzen fungieren können.

Was die übrigen oben identifizierten Zeichenarten angeht, so soll auf die Verwendung von Formeln hier nicht detailliert eingegangen werden, da zu dieser Frage bereits Literatur existiert[140] und eine adäquate Behandlung dieses Themas aufgrund der Flexibilität von Formeln im vorliegenden Rahmen nicht möglich ist. Teils sind sie aus dem Fließtext nicht herausgehoben, teils werden sie visuell abgesetzt, teils tragen sie Label als Namenskürzel, teils nicht, teils haben sie grammatikalisch den Status von (Teil-)Sätzen und teils den von Nominalphrasen.

Die Zeichenkonstellationen, die im untersuchten Artikel eine kleine Besonderheit darstellen, sollen allerdings noch kurz berücksichtigt werden. Diese werden letztlich nicht anders als Buchstabenkürzel oder Akronyme verwendet. Wenn wiederholt von einer »6-6 edge« die Rede ist, so unterscheidet sich das strukturell und sprachlich nicht deutlich von einem »5-vertex«.[141] Auch für die Situationen, in denen Zeichenkonstellationen als Label für Lemmata verwendet werden, existieren Vergleichsfälle, wo Buchstabenkürzel analog benutzt werden.[142] In ihrer konkreten Verwendung nähern sie sich also trotz ihrer visuell-bildlichen Struktur den Buchstabenkürzeln an, mit denen sie die Bausteine, aus denen sie zusammengesetzt sind, gemeinsam haben.

3.4.3 Verweise und Diagramme

Auch auf der Ebene der sprachlichen Verweise sind Fachwörter, Buchstabenkürzel und Diagramme im Artikel eng miteinander verschränkt. Damit ist einerseits die großzügige Integration von Text in die Diagramme gemeint, in Form von Labeln, Untertexten und Seitentexten, andererseits aber auch die Art, wie Bilder über Bildbeschreibungen in den Text geholt

140 Vgl. Schmidt 2003, S. 441–591.
141 Beides in Appel und Haken 1977, S. 467.
142 Vgl. die verschiedenen Lemmata Appel und Haken 1977, S. 462.

werden. Für beides lassen sich viele Beispiele finden. Beschriftungen in Form von Labeln sind in den »Figures« geradezu ubiquitär, sie tauchen sogar innerhalb der Bausteine der ideographischen Diagramme auf.[143] Oft werden Punkte oder Kanten mit einem Buchstaben markiert, der im Text als eine Art Eigenname verwendet wird.[144] Auf diese Weise wird ein konkreter, deiktischer Bezug zwischen Diagramm und Text hergestellt. Der indexikalische Aspekt des Eigennamens wird hier sehr deutlich (»V ist dieser Punkt«). Eine andere Variante stellt die Erweiterung des Diagramms durch zusätzliche Informationen dar, die unter oder neben dem Diagramm, aber visuell diesem zugeordnet, tabellarisch oder stichwortartig ergänzt werden.[145] An dieser Stelle tauchen in der Regel Buchstabenkürzel, Formeln und Fachwörter auf, die auch im Text thematisiert werden. Ganze Sätze oder Halbsätze sind genauso wie Untertitel oder Benennungen in Form von Buchstabenkürzeln meist unter den Diagrammen bzw. diagrammübergreifend platziert. Letztlich enthält die große Mehrheit der auftauchenden Diagramme irgendeine Art von Text oder Label. Insofern stehen hier Bilder eben nicht nur für sich selbst, sondern werden durch beigegebene Textbestandteile erweitert.

Umgekehrt werden die Diagramme sprachlich immer wieder explizit angesprochen, als »drawings«[146] bzw. »drawn«,[147] auf konkrete Teile des Diagramms bezugnehmend mit »arrow«,[148] als »symbols«,[149] »circled«,[150] »marked«,[151] »graphs«[152] etc. Mit dem Verb »mark« wird dabei am häufigsten auf Label, aber auch auf graphische Markierungen, die sogar im Text bildlich aufgegriffen werden können,[153] und ganze Diagrammteile oder Linien[154] verwiesen. Insgesamt entsteht so ein enger Zusammenhang zwischen Text und Diagrammen. Weder wäre der Text allein ohne die Diagramme verständlich oder auch nur sinnvoll formulierbar, wie es bei rein illustrativen Ergänzungen möglich wäre, noch können die Diagramme

143 Ebd., S. 436.
144 Ebd., S. 461, aber auch viele andere.
145 Ebd., S. 480.
146 Ebd., S. 439.
147 Ebd., S. 438.
148 Ebd., S. 438.
149 Ebd., S. 435; S. 438.
150 Ebd., S. 461.
151 Ebd., S. 438 etc.
152 Ebd., S. 479.
153 Ebd., S. 484.
154 Appel, Haken und Koch 1977, S. 497.

ohne den Text mehr als Listen von Objekten wiedergeben. Erst beides zusammen ergibt eine sinnvolle Argumentation.

3.5 Tabellen

Ein Aspekt, der bisher in der Analyse der Zeichenverwendung weitgehend ausgespart wurde, der aber quantitativ den größten Teil des Artikels einnimmt, stellen die diversen Tabellen dar.[155] Die meisten Tabellenseiten bestehen aus sieben Zeilen mit fünf ideographischen Diagrammen je Zeile. Unter jedem Diagramm befindet sich ein Buchstaben-Zahlenkürzel, das als Referenzname des Diagramms dient. Diese Kürzel sind in der Regel aufsteigend durchnummeriert. Besonders auffällig ist die große Tabelle im zweiten Teil des Artikels, die als »Tabelle $\mathcal{U}$«[156] bezeichnet wird, wobei der Buchstabe »$\mathcal{U}$« in seiner Bedeutung zwischen Tabellenname und dem Name der Menge mathematischer Objekte, die in der entsprechenden Tabelle repräsentiert sind, changiert. Eine beispielhafte Seite aus Tabelle $\mathcal{U}$ findet sich in Abbildung 11.

Insgesamt ist es so, dass für die Tabellen die Menge der abzubildenden Diagramme in eine lineare Reihenfolge gebracht werden muss, d.h. eine Menge bildlich strukturierter Objekte muss schrift- und layoutkonform linearisiert werden. Für Tabelle 1 und 2[157] werden die Kriterien, nach denen die enthaltenen Diagramme geordnet sind, im Text in Form von Listen explizit aufgeführt.[158] Inhaltlich dienen die Tabellen dazu, alle Diagramme eines bestimmten Typs aufzulisten, die somit in der mathematischen Argumentation vollständig erfasst sind. Die Gesamtheit aller Diagramme in Tabelle 1 wird bspw. durch den Begriff der »S-situations« bezeichnet,[159] der im Text als Akronym verwendet wird.[160] Die genaue Explikation des Tabellenaufbaus zeigt, dass die räumliche Anordnung der einzelnen Diagramme bedeutungstragend ist und diese Bedeutung den Leser:innen auch mitgeteilt und nicht etwa von diesen erschlossen werden soll. Der Aufbau von Tabel-

155 Im ersten Teil des Artikels verteilen sich 26 der 62 Seiten auf vier Tabellen, im zweiten Teil bestehen 63 der insgesamt 77 Seiten aus einer einzigen, großen Tabelle.
156 Appel, Haken und Koch 1977, S. 505–567.
157 Appel und Haken 1977, S. 441–449 und S. 450–457.
158 Ebd., S. 458f.
159 Ebd., S. 458.
160 Tabelle 2 umfasst die »L-situations«.

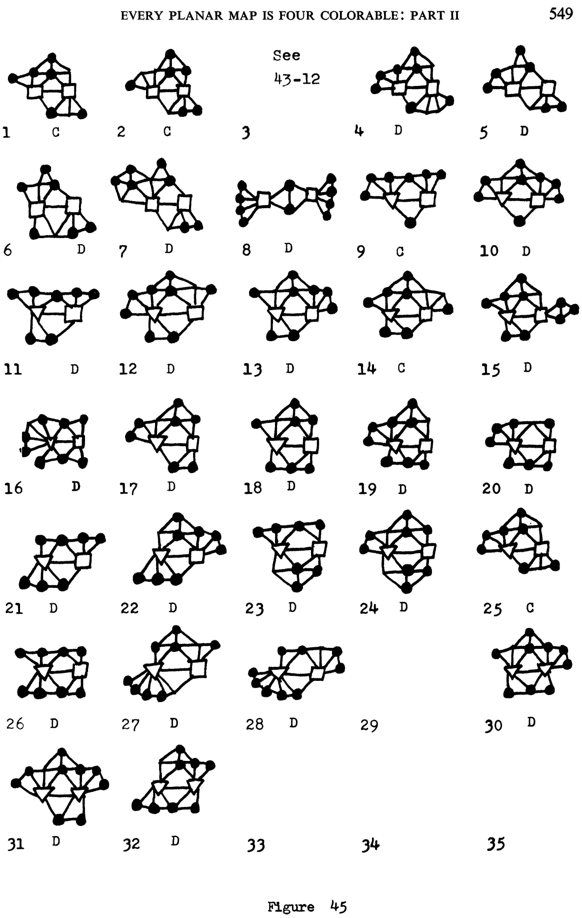


Abb. 11: Beispielseite aus Tabelle $\mathcal{U}$ (Appel, Haken und Koch 1977, S. 549).

le 3 und 4[161] wird demgegenüber nicht thematisiert. Auf diese wird nur im Zuge von Lemmata und bestimmten Beweisen verwiesen. Dementsprechend ist anzunehmen, dass diese beiden Tabellen eher die Funktion von ad hoc generierten Hilfsmitteln in konkreten argumentativen Situationen haben, als die, abstrakte Objekte eigenen Rechts zu konstituieren, wie es bei Tabelle 1 und 2 der Fall ist. Davon deutlich zu unterscheiden ist der Status von Tabelle $\mathcal{U}$,[162] die für die gesamte Argumentation eine zentrale Position

161 Appel und Haken 1977, S. 463–465 und S. 472–477.
162 Appel, Haken und Koch 1977, S. 505–567.

innehat. Wie schon erwähnt changiert die Bedeutung von $\mathcal{U}$ zwischen Tabellenname und dem entsprechenden mathematischen Objekt.[163] Der Aufbau dieser Tabelle wird ebenfalls im Text thematisiert, aber während bei Tabelle 1 und 2 eine klare Liste an Kriterien angegeben wurde, nimmt der Text in diesem Fall eher beschreibenden Charakter an. So werden die Probleme und Fragestellungen bei der Erstellung der Datei thematisiert, und auch teilweise eher informelle Formulierungen gewählt, die für einen mathematischen Fachtext unüblich sind. Auffällig ist hierbei die Betonung visueller Aspekte, die in Textform zu reproduzieren offenbar schwierig ist: »While it is easiest to understand the ordering of the table by just glancing through it, a few remarks seem in order.«[164] Auch bei der Anordnung der Diagramme scheinen visuelle Kriterien leitend gewesen zu sein, »to display similar configurations in the same part of the table« bzw. »Similar looking configurations are usually on the same page«.[165] Dies spiegelt die Schwierigkeit wider, die räumliche Struktur der ideographischen Diagramme in eine lineare Ordnung zu bringen, die letztlich nicht alle Eigenschaften konsistent berücksichtigen kann. Insbesondere werden auch technische Schwierigkeiten mit dem fixen Layout der einzelnen Seiten thematisiert, die zu zusätzlichen Inkonsistenzen in der Anordnung der Diagramme führen: »Occasionally a configuration cannot fit into the appropriate figure and will usually then be found within two pages of its natural position, towards the bottom of the figure.«[166] Insgesamt wird hier ein »attempt to obtain a reasonable visual display«[167] geschildert, inklusive der nachträglichen Korrektur von Irrtümern durch die Autoren, deren Folgen sichtbar bleiben.[168] Die Leser:innen werden also soweit möglich in den Vorgang der Tabellenzeichnung mit einbezogen. Die Schwierigkeiten der textlichen Kommunikation des graphischen Objekts werden durch die Beteiligung der Leser:innen an dessen Erstellung aufgefangen. Wenn die Leser:innen sozusagen mit-zeichnen, können sie die Diagramme und deren Herstellung selbst intuitiv nachvollziehen, sodass ihre sprachliche Explikation nur noch ergänzenden Charakter hat. Gefordert ist eine Art der Immersion, »glancing through«, nicht der neutrale Blick der Unbeteiligten. Noch deutlicher wird dies, wenn im

163 Ebd., S. 491, »In this part, $\mathcal{U}$ is presented (as Table $\mathcal{U}$ consisting of Figures 1–63)«.
164 Ebd., S. 503.
165 Ebd., S. 503.
166 Ebd., S. 503.
167 Ebd., S. 504.
168 Vgl. ebd., S. 504.

Folgenden die Verbindung zum Microfiche-Anhang beschrieben wird. Hier werden die Leser:innen explizit immer wieder als Akteur:innen imaginiert, bestimmte Diagramme »can easily be drawn by the reader«,[169] eine gegebene Information »enables the reader to appropriately number all of the vertices«.[170] Die Leser:innen sollen also selbst aktiv werden, selbst Diagramme zeichnen, selbst die korrekten Label eintragen, statt nur passiv einen Text zu konsumieren. Diese angenommenen Leser:innen sind insofern realistisch, als es in der Tat keinen Sinn ergibt, eine Liste von ca. 1.700 Diagrammen im herkömmlichen Sinne zu »lesen«. Erst in der Arbeit mit dieser Liste, in der aktiven Auseinandersetzung, wird ein sinnvoller Inhalt generiert. Dass diese Arbeit hier als Zeichnen von Diagrammen angenommen wird, unterstreicht noch einmal, wie zentral diese Diagramme für den Inhalt und den Erkenntnisprozess sind, der im Artikel angeregt werden soll. Und es belegt die imaginierte Zusammenarbeit mit den Leser:innen.

4 Reflexion

Es konnte gezeigt werden, wie eng die Verknüpfung der verschiedenen Zeichenmodalitäten im betrachteten Artikel ist. Die Verbindung durch das symbolische Bedeuten abstrakter Objekte, das außer den illustrativen Diagrammen allen betrachteten Zeichen gemeinsam ist, sowie die enge Integration der diversen Zeichenarten sorgen dafür, dass es schwierig ist, zwischen ihnen eine klare Grenze zu ziehen, die Sprache auf der einen Seite von Diagrammen auf der anderen Seite trennt. Stattdessen gibt es einen langsamen Übergang von Fachwörtern über Buchstabenkürzel, Formeln, Zeichenkonstellationen, ideographischen Diagrammen bis hin zu illustrativen Diagrammen. Zwar werden innerhalb des Textes Fachwörter, Buchstabenkürzel und Zeichenkonstellationen bevorzugt, da diese nahtlos in den Textfluss integrierbar sind. Außerdem gibt rein formal das Layout des Artikels eigentlich klare Grenzen vor, indem Diagramme, wie allerdings auch längere Formeln, vom Text abgesetzt und meist als »Figure« gekennzeichnet werden. Trotz dieser visuellen Unterschiede werden an manchen Stellen auch ideographische Diagramme in Sätze integriert, wenn kein Buchstabenkürzel, das wiederum ein entsprechendes Diagramm ersetzt, greifbar

169 Ebd., S. 504.
170 Ebd., S. 504.

ist.[171] Schon die Buchstabenkürzel bewegen sich von reinen Akronymen hin zu Symbolen mit zum Teil visueller Strukturierung. Die diagrammatischen Zeichenkonstellationen[172] nehmen dann eine Art Mittelstellung zwischen Buchstabenkürzel und ideographischen Diagrammen ein. Die traditionelleren illustrativen Diagramme, die keine klare Bedeutung haben,[173] spielen eine verhältnismäßig geringe Rolle im Artikel. Insgesamt konnte auch insofern ein schrittweiser Übergang zwischen den Zeichenarten nachgewiesen werden, als Zusammenhänge existieren, in denen Fachwörter und Buchstabenkürzel, aber keine Diagramme, und andere, in denen Buchstabenkürzel und ideographische Diagramme, aber keine Fachwörter verwendet werden.[174] Die Fähigkeit aller Zeichenarten, außer der illustrativen Diagramme, abstrakte Objekte zu bedeuten, bestätigt sich auch in ihrer sprachlichen Adressierung im Text. Diese berücksichtigt zwar durchaus die Spezifik der verschiedenen Zeichenarten, spiegelt aber dennoch auch ihre Gemeinsamkeiten, wie z.B. anhand der Verwendung des Verbs »mean« deutlich wurde. Unabhängig davon sind Text, Buchstabenkürzel und Diagramme durch vielfache Verweise aufs Engste verschränkt, sodass das eine ohne das andere nicht sinnvoll rezipiert werden kann. Insgesamt hat sich die Frage nach den Eigenschaften der verschiedenen Zeichenmodalitäten als sehr fruchtbar erwiesen, auch wenn eine genaue Abgrenzung hier aufgrund des schrittweisen Übergangs und zwischen eindeutig unterschiedlichen Zeichenmodalitäten zugeordneten Zeichenarten, wie sprachlichem Text und illustrativen Diagrammen, nicht möglich ist.

Durch den Fokus auf das Artefakt des mathematischen Fachartikels konnte ein Schlaglicht auf die Möglichkeiten geworfen werden, die die multimodale Textanalyse auch im Hinblick auf ein eher unübliches Untersuchungsobjekt bietet. Umgekehrt bot das behandelte Beispiel die Chance, etwa Unterschiede zwischen verschiedenen Diagrammen und deren Funktion im Text herauszuarbeiten, die in anderen Zusammenhängen nicht so klar fassbar wären.

Darüber hinaus blieben Fragen offen, die innerhalb des gesetzten Rahmens nicht geklärt werden konnten. So konnte etwa die Rezeptionsseite nur eingeschränkt aus der Art, wie ein:e gedachte:r Leser:in angesprochen wurde, sowie allgemeinen Gepflogenheiten in der Mathematik, abgeleitet

171 Vgl. Appel und Haken 1977, S. 440.
172 Vgl. ebd., S. 461 bzw. Abbildung 1 und 2 oben.
173 Vgl. ebd., S. 485 bzw. Abbildung 7 oben.
174 Vgl. Die Diskussion zu Parallelstellen und Funktionspfeilen oben.

werden. Allerdings existieren diverse fachliche und fachhistorische Auseinandersetzungen mit dem Artikel, auf die für eine Beurteilung der historischen Rezeption im Detail zurückgegriffen werden könnte.

Eine damit verknüpfte Frage ist die nach der Einbettung des vorliegenden Beispiels in den Diskurs der Mathematik. Wie ist die Verwendung von Diagrammen in anderen Fachartikeln im Hinblick auf die angelegten Kriterien zu beurteilen? Welche historischen Entwicklungen lassen sich nachvollziehen, gerade auch angesichts des Umstands, dass die typographischen und zeichnerischen Möglichkeiten durch die fortschreitende Digitalisierung erweitert wurden?

Zuletzt wäre der Aspekt der Intermedialität, der hier eher kurz gestreift wurde, noch weiter auszuführen. Das Verhältnis von Programm, Programmcode und deren Aufgreifen in beschreibendem Text sowie die Übersetzungsleistung zwischen bildlichen Elementen und Programmcode eröffnen ein weites Feld von Fragestellungen.

Insgesamt hat sich also der gewählte mathematische Artikel als produktives Beispiel erwiesen für die Chancen, aber auch die Fragestellungen, die sich aus der Anwendung des multimodalen Ansatzes ergeben können.

Bibliographie

Appel, Kenneth und Wolfgang Haken: »Every planar map is four colorable. Part I: discharging.« In: *Illinois Journal of Mathematics* 3.21 (1977), S. 429–490. doi:1215/ijm/1256049011.

Appel, Kenneth, Wolfgang Haken und John Koch: »Every planar map ist four colorable. Part II: reducibility.« In: *Illinois Journal of Mathematics* 3.21 (1977), S. 491–567. doi:1215/ijm/1256049012.

Appel, Kenneth, Wolfgang Haken und John Koch: »Supplement to ›Every planar map is four colorable. Part I: discharging‹ by K. Appel and W. Haken and ›Every planar map is four colorable. Part II: reducibility‹ by K. Appel, W. Haken, and J. Koch. « Microfichebeilage. In: *Illinois Journal of Mathematics* 3.21 (1977). doi:1215/ijm/1256049023.

Beutelspacher, Albrecht: *»Das ist o.B.d.A. trivial!«. Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken*. 9. Auflage, Wiesbaden 2009 [1991].

Bräm, Marina und Susan Göldi: »Die Infografik im visuellen Journalismus.« In: Adrian Aebi, Susan Göldi und Mirjam Weder (Hrsg.): *Schrift — Bild — Ton*. Bern 2020, S. 199–216.

Davis, Philip, Reuben Hersh und Elena Anne Marchisotto: *The Mathematical Experience. Study Edition*. Boston/Basel/Berlin 2012 [1995].

Gonthier, Georges: »Coq Proof of the Four Color Theorem« [26.04.2006]. In: *Microsoft Download Center*, http://research.microsoft.com/en-us/downloads/5464e7b1-bd58-4f7c-bfe1-5d3b32d42e6d/default.aspx (Zugriffsdatum 10.10.2012).

Gonthier, Georges: »Formal Proof — The Four-Color Theorem.« In: *Notices of the American Mathematical Society* 55.11 (2008), S. 1382–1393.

Hensel, Thomas: »Diagramm.« In: *Navigationen — Zeitschrift für Medien- und Kulturwissenschaften* 11.2 (2011), S. 49–53.

Jörissen, Stefan: »Schreiben in der Mathematik — Schreiben als Mathematik. Zur Bedeutung von Wandtafelnotationen im Mathematikunterricht.« In: Adrian Aebi, Susan Göldi und Mirjam Weder (Hrsg.): *Schrift — Bild — Ton*. Bern 2020, S. 71—84.

Krämer, Sybille: »Mathematizing Power, Formalization and the Diagrammatical Mind or: What does ›Computation‹ mean?« In: *Philosophy & Technology* 27.3 (2014), S. 345–357.

Krämer, Sybille: *Figuration, Anschauung, Erkenntnis. Grundlinien einer Diagrammatologie*. Berlin 2016.

Lakatos, Imre, John Worrall und Elie Zahar (Hrsg.): *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge 2015 [1976].

MacKenzie, Donald: »Slaying the Kraken. The sociohistory of a Mathematical Proof. « In: *Social Studies of Science* 1.29 (1999), S. 7–60.

Nöth, Winfried: »Verbal-visuelle Semiotik.« In: Nina-Maria Klug und Hartmut Stöckl (Hrsg.): *Handbuch Sprache im multimodalen Kontext*. Berlin/Boston 2016, S. 190–216.

O'Halloran, Kay: »Towards a Systemic Functional Analysis of Multisemiotic Mathematics Texts.« In: *Semiotica* 124.1–2 (1999), S. 1–30.

Robertson, Neil, Daniel Sanders et al.: »Efficiently four-coloring planar graphs.« In: *Proceedings of the Twenty-Eighth annual ACM Symposion on Theory of Computing*. New York, 1996, S. 571–575.

Rotman, Brian: »Thinking Dia-Grams. Mathematics and Writing.« In: Mario Biagioli (Hrsg.): *The Science Studies Reader*. New York/London 1999, S. 430–442.

Schmidt, Vasco Alexander: *Grade der Fachlichkeit in Textsorten zum Themenbereich Mathematik*. Berliner Sprachwissenschaftliche Studien, Band 3, Berlin 2003.

Schnotz, Wolfgang: »Wissenserwerb mit Diagrammen und Texten.« In: Ludwig Issing und Paul Klimsa (Hrsg.): *Information und Lernen mit Multimedia*. Weinheim 1997, S. 85–106.

Thibaud, Pierre: »Peirce on Proper Names and Individuation.« In: *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 4.23 (1987), S. 521–538.

Volkert, Klaus: *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*. Göttingen 1986.

Wildfeuer, Janina, John Bateman und Tuomo Hiippala: *Multimodalität. Grundlagen, Forschung und Analyse — eine problemorientierte Einführung*. Berlin/Boston 2020.