Zahlenkörper – Funktionenräume – unendliche Welten. Einfälle eines Mathematikers zu Raum und Körper

TORSTEN STEIDTEN

Du bist mein maximales Ideal,
Der Zustand meiner Liebe ist stabil,
Doch deine Kovarianten sind labil
Und unbestimmt wie Eulers Integral.
[…]
Den Ring aus Polynomen gab ich dir,
Dazu die Markov-Kette mit dem Stein,
All deine Tensorfelder waren mein,
Nur dein Quotientenkörper fehlte mir.
Stanislaw Lem: Liebe und Tensoralgebra (1983: 57)

Körper und Räume in der Mathematik

Körper und Räume sind in der Mathematik zum Teil sehr abstrakte Begriffe, die ganz unterschiedliche Dinge bezeichnen können. Am ehesten der gewohnten Vorstellung entspricht der Körper in der Geometrie. Es ist dies ein dreidimensionales Objekt, das durch Grenzflächen beschrieben werden kann. Die bekanntesten Körper besitzen flache oder kreis- bzw. kugelförmige Grenzflächen. Polyeder (Vielflächner) sind Körper, die ausschließlich von flachen Flächen begrenzt sind. Bei den 5 nach dem Griechen Plato benannten platonischen Körpern (unter anderem Tetraeder, Oktaeder und Würfel) sind alle Flächen regelmäßige Polygone, alle Flächen haben dieselbe Anzahl von Ecken und in jeder Ecke kommt dieselbe Anzahl an Kanten an. Es waren dies daher für die alten Griechen die perfekten geometrischen Körper. Charakteristische Größen für alle Körper sind beispielsweise Volumen und Oberflächeninhalt.

Wenn wir uns nun den Körpern in der Algebra zuwenden, sei als Warnung ein Jules Verne zugeschriebener Satz zitiert: »Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat.«

Was folgt, sind nämlich einige typische mathematische Definitionen, also Begriffserklärungen …

Eine *Gruppe* G ist eine Menge zusammen mit einer Abbildung $*$: $G \times G \to G$, welche jedem Paar (a,b), $a,b \in G$ ein Element $a*b$ zuordnet, so dass gilt:

1. $a*(b*c)=(a*b)*c$ für alle $a,b,c \in G$ (Assoziativität).
2. Es gibt ein Element $e \in G$ mit
   $e*a=a=a*e$ für alle $a \in G$ (Neutralelement).
3. Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit
   $a*b=e=b*a$ (Inverses).

Eine Gruppe A heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn

$a*b=b*a$ für alle $a,b \in A$.

Ein *Ring* R ist eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe zusammen mit einem Produkt „$\times$", so dass für alle $a,b,c \in R$ gilt:

1. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (Assoziativität);
2. $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ und
   $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ (Distributivität).

Ein Ring K heißt *Körper*, wenn gilt:

1. Es existiert ein Einselement 1 mit $1 \neq 0$.
2. Für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein $a^{-1} \in K$ mit
   $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ (Invertierbarkeit).
3. Die Multiplikation ist kommutativ.

Beispiele

- Q (die Menge der rationalen Zahlen), R (die reellen Zahlen) und C (die komplexen Zahlen) sind Körper, also auch spezielle Ringe.
- Z (die Menge der ganzen Zahlen) ist ein kommutativer Ring mit Einselement.
- N (die Menge der natürlichen Zahlen) bildet keinen Ring.

Es gibt aber auch völlig andere Beispiele, unter anderem verschiedene Mengen von Matrizen …

Ein *Vektorraum* V ist

1. eine kommutative Gruppe bezüglich Addition mit den Eigenschaften
2. $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \lambda * w$ für alle reellen Zahlen λ und für alle $v, w \in V$;
3. $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$ für alle reellen Zahlen λ, μ und für alle $v \in V$;
4. $1 * v = v$ für alle $v \in V$.

Besonders wichtig sind Räume mit einer sogenannten Norm (normierte Räume).

Eine Funktion $\|.\| : V \to R$ heißt *Norm* auf V, wenn für alle $x, y \in V$ und für alle reellen Zahlen α gilt:

1. Es gilt stets $\|x\| \geq 0$ (Positivität).
2. Falls $\|x\| = 0$ ist, dann ist $x = 0$ (Definitheit).
3. $\|\alpha \times x\| = |\alpha| * \|x\|$ (Homogenität).
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (die so genannte Dreiecksungleichung).

Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die jedem Element des Definitionsbereiches in eindeutiger Weise ein Element des Wertebereiches zuordnet.

Eine reelle Funktion auf der Menge R der reellen Zahlen ist beispielsweise eine Funktion, die jeder reellen Zahl x einen ebenfalls reellen Wert $f(x)$ zuordnet.

Als *Funktionenraum X* wird eine Menge von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften bezeichnet. Solche Räume sind oft nach Mathematikern benannt – Banach, Besov, Bessel, Lebesgue, Lipschitz, Orlicz, Sobolev und viele andere mehr sind Beispiele hierfür.

Wer bis hierhin geduldig gefolgt ist, wird spätestens an dieser Stelle nicht zu Unrecht fragen, wozu das alles gebraucht wird. Doch der nächste Abschnitt beantwortet erst einmal eine Frage, die scheinbar gar nichts hiermit zu tun hat.

Wie werden Probleme gelöst?

Nehmen wir einmal an, ein/e Mathematiker/in bekommt ein Problem zur Bearbeitung. Dann gilt es typischerweise folgende Schritte zu bewältigen:

Erstens die Modellierung, zweitens die Untersuchung bzw. Bearbeitung des Modells und drittens die Ergebnisformulierung und -validierung.

Die *Modellierung* ist der Übergang vom Problem zu einem Modell. Dabei wird Ersteres unter Nutzung bekannter Gesetzmäßigkeiten beschrieben. Hierbei sind viele Dinge zu beachten wie etwa Ursachen, Einflussfaktoren oder auch der Vorgang selbst.

Früher wurde hierzu oft ein »reales Modell« genutzt, Probleme wurden in erster Linie experimentell gelöst. Heute wird dagegen oft ein mathematisches Modell gewählt. Es ist dies der Versuch, wesentliche Parameter natürlicher Phänomenen zu erfassen und diese in einem berechenbaren Gleichungssystem, Differentialgleichungssystem, Algorithmus oder ähnlichem zur Vorhersage des beobachteten Systems zu nutzen. Das hierfür mathematische Modelle bevorzugt werden, hat unterschiedliche Gründe: So ist ein Experiment häufig unmöglich bzw. verursachte zu hohe Kosten, oder es sollen Vorhersagen vor der Konstruktion gemacht werden, die teure Versuche vermeiden helfen.

Bei der *Untersuchung* des Modells ist zunächst insbesondere die Frage zu beantworten, ob das Modell prinzipiell das leisten kann, was es leisten soll. Danach gilt es, numerische Verfahren und Algorithmen zur Lösung der Modellgleichungen auszuwählen oder neu zu entwickeln. Es folgen die Implementation und der Test auf einem Computer und anschließend oft viele Computersimulationen.

Der letzte Teilschritt ist der Vergleich der Simulationsergebnisse mit der Realität. Danach ist gegebenenfalls das Modell weiter zu verbessern, und der ganze Prozess beginnt eventuell von vorn. Auch die Variation von Einflussfaktoren und anderem ist möglich. Damit kann zum Beispiel die Frage beantwortet werden, welche (mathematischen) Konsequenzen eine Änderung der physikalischen Annahmen hat. Für die *Validierung* des Modells erfolgt eine Auswahl von Parametern, die einerseits aus experimentellen Untersuchungen bekannt und andererseits auch für das Modell bestimmbar sind. Wenn Vorbild und Modell in diesen Parametern übereinstimmen, dann kann man umgekehrt schließen, dass das Modell relevante Aspekte der Wirklichkeit korrekt wiedergibt.

Wozu Funktionenräume benötigt werden

Für numerische Verfahren ist es wichtig, eine Reihe von Fragen zu beantworten: Es ist zunächst zu klären, ob das Modell eine Lösung besitzt – man spricht von der Frage nach der Existenz einer Lösung. Meist parallel dazu muss überprüft werden, ob die Lösung des Modells eindeutig ist, d.h. ob es genau eine Lösung gibt. Wenn beide Fragen mit Ja beantwortet worden sind, ist zu überlegen, ob man mit dem gewählten Verfahren diese Lösung erhält – man spricht von der Konvergenz des Verfahrens. Wenn auch durch die moderne Technik nicht mehr ganz so bedeutsam wie noch vor wenigen Jahren, stellt sich schließlich auch die Frage, wie groß (Speicherplatz- und) Rechenzeitbedarf sind.

Zunächst soll kurz erläutert werden, warum diese Fragen von Bedeutung sind und nicht nur der Beschäftigung einiger Theoretiker dienen.

Schon die Modellierung birgt mögliche Fehler: Vielleicht wird ein wichtiger Einflussfaktor zu Unrecht vernachlässigt oder ein anderer falsch beschrieben. Umso vorsichtiger muss man beim weiteren Umgang damit sein. Wie schon erwähnt, handelt es sich bei mathematischen Modellen in der Regel um Gleichungen oder um ganze Systeme davon. Sehr oft treten Differentialgleichungen auf. Dass es nicht selbstverständlich ist, dass es eine Lösung gibt, zeigt schon das ganz einfache Beispiel

$$x^2 = -1$$

zumindest solange man eine reelle Zahl x als Lösung sucht. Die Modellgleichungen sind natürlich in aller Regel wesentlich komplizierter.

Ganz ähnlich sieht es mit der Eindeutigkeit der Lösung aus. Schon die einfache Gleichung

$$x^2 = 1$$

besitzt zwei Lösungen, nämlich 1 und -1. Erst wenn man eine zusätzliche Bedingung stellt wie z.B.

$$x > 0$$

wird die Lösung eindeutig.

Numerische Verfahren sind immer fehlerbehaftet, schon weil selbst der modernste Computer nicht unendlich genau arbeiten kann. Daher ist es wichtig zu wissen, ob ein bestimmtes Verfahren zuverlässig die gewünschte Lösung liefert. Dazu gilt es, die Größenordnung des dabei gemachten Fehlers zu ermitteln. Da sehr oft Verfahren benutzt werden, mit denen man der tatsächlichen Lösung in mehreren Schritten näher kommt, stellt sich die Frage, wie viele Schritte man benötigt, bis man die Lösung mit einer gewünschten Genauigkeit angenähert hat.

Für all die in diesem Abschnitt aufgeworfenen Fragen sind die weiter oben angesprochenen Funktionenräume ein wichtiges Handwerkszeug des Mathematikers. Da es einleuchten wird, dass man nicht für jedes neue Problem langwierige theoretische Untersuchungen erneut anstellen kann, sucht man nach Eigenschaften der Lösung der Modellgleichungen, für die bereits Bedingungen bekannt sind, bei denen man dann *nur* noch untersuchen muss, ob sie erfüllt sind. Differentialgleichungen haben als Lösung Funktionen, und alle Funktionen in einem Funktionenraum haben eine Reihe von Eigenschaften gemeinsam. Man untersucht daher oft, ob ein Modell eine Lösung besitzt, die zu einem bestimmten Raum gehört und kann dann Antworten auf die eben aufgeworfenen Fragen ableiten.

Natürlich konnte in diesem Beitrag nur sehr verknappt dargestellt werden, woran oft mehrere Wissenschaftler/innen längere Zeit arbeiten. Vielleicht ist aber klar geworden, dass auch zunächst sehr abstrakt wirkende Begriffe durchaus sehr viel zur Bewältigung der unterschiedlichsten Probleme in Natur und Technik beitragen können. Dass es noch eine Reihe davon zu lösen gibt, weiß jeder, der sich schon einmal über eine falsche Wettervorhersage geärgert hat. Das Wetter führt nämlich zu einem der kompliziertesten Modelle überhaupt und wird wahrscheinlich nur noch vom menschlichen Verhalten an Kompliziertheit übertroffen.

Literatur

Stanislaw Lem (1983): Kyberiade, Frankfurt/M.: Insel.