Zum Status operativer Definitionen und die Eindeutigkeit der Parallelität[1]

Matthias Wille

In Janich (1992) findet sich sowohl ein Herstellungsverfahren als auch ein korrigierter Eindeutigkeitsbeweis für die Grundform der Parallelität.[2] Im Unterschied zu Inhetveen (1983) und Lorenzen (1984) und im Anschluß an eine streng operative Begründung der Geometrie im Sinne Dinglers ist für die geometrischen Grundformen »eben«, »orthogonal« und »parallel« zu zeigen, daß die für sie bereitgestellten Herstellungsverfahren in relevanter Hinsicht stets ununterscheidbare Resultate liefern. Dies ist Aufgabe von entsprechenden Eindeutigkeitsbeweisen. In Wille (2002, Kap.5) wird ausgeführt, daß der von Janich ausgeführte Beweis fehlerhaft ist. Im vorliegenden Beitrag wird im Abschnitt 3 ein neuer Eindeutigkeitsbeweis geführt, der sich im Poietischen ganz einfach andemonstrieren läßt. Die hierfür erforderlichen Vorarbeiten bestehen im wesentlichen in einer – vorerst auf die Geometrie beschränkten – Definitionstheorie für operative Definitionen. Dies ist Gegenstand des Abschnitts 2. Für die sich hieraus ergebenden wissenschafts- und erkenntnistheoretischen Konsequenzen – vornehmlich im Zusammenhang mit der Sicherstellung der Euklidizität – sei auf Janich (1992), (2000), (2001) sowie auf Wille (2002, 7.5) verwiesen.

1 | Der vorliegende Text enthält in den Abschnitten 2 und 3 eine gekürzte und in Teilen leicht überarbeitete Fassung der Kapitel sechs und sieben aus Wille (2002).

2 | Der vorliegende Text baut systematisch auf Janich (1992) auf und stützt sich ohne weitere Ausführungen im Detail auf die dort explizierten Herstellungsverfahren.

1. Einleitung

Hugo Dingler war einer der ersten, der sich der empiristischen Auffassung im Sinne Helmholtz' und der konventionalistischen im Sinne Poincarés entgegenstellte. Ausgehend von der Einsicht, daß die Geometrie als Theorie der Längenmeßgeräte eine empirisch messende Physik allererst ermöglicht und ihr somit methodisch vorausgeht, zeigt er vor allem die Defizite der empiristischen Grundhaltung auf. Der Versuch, die Realgeltung der Geometrien durch empirische Resultate zu entscheiden, ist pragmatisch zirkulär, da die Mittel zur Realisierung entsprechender Resultate immer schon auf die Realisierung einer Geometrie zurückgreifen müssen. Der von Dingler angestrebte Aufbau einer sicheren Wissenschaft, der bei der Sicherung der terminologischen und operativen Grundlagen zur Geräteherstellung anzusetzen hat, braucht an dieser Stelle nicht weiter nachgegangen zu werden. Die in seiner Philosophie auftretende Willensmetaphysik unterläuft zu Dinglers Nachteil den normativen Gehalt seiner Wissenschaftsphilosophie und wirft eine Vielzahl von erkenntnistheoretischen Problemen auf. Dinglers Operativismus sowie das von ihm formulierte »Prinzip der methodischen Ordnung« liefern ideengeschichtlich sicherlich den nachhaltigsten Einfluß auf die methodische Philosophie der konstruktiven und kulturalistischen Wissenschaftstheorie. Die von ihm verfolgte Idee einer normativen Wissenschaftstheorie geht dabei auf Edmund Husserls Spätphilosophie in der *Krisisschrift* (Husserl 1996) von 1936 zurück. Nach Husserl gründet sich alle wissenschaftliche Terminologie, Reflexion und wissenschaftlich konstituierte Wirklichkeit auf dem methodisch vorgängigen und (in diesem Sinne) »unhintergehbaren« Fundament einer vor- und außerwissenschaftlichen Lebenswelt:

> »Der Geometrie der Idealitäten ging voran die praktische Feldmeßkunst, die von Idealitäten nichts wußte. Solche *vorgeometrische Leistung* war aber für die Geometrie Sinnesfundament, Fundament für die große Erfindung der Idealisierung [...].« (Husserl 1996: 52f.)

In genau diesem Verständnis finden die Wissenschaften ihre Gegenstandsbereiche nicht einfach maßgefertigt vor, sondern konstituieren diese immer auch ein Stück weit relativ zu ihren erkenntnisleitenden Fragestellungen und verfügbaren Mittel. Der von Dingler in die Philosophie eingeführte und als zweckmäßig und unverzichtbar ausgewiesene Bezug auf die handwerklich-technischen Herstellungszusammenhänge zur Lösung des Begründungsproblems in der Geometrie prägt besonders die protophysikalischen Arbeiten von Peter Janich. Anstelle des bei Dingler erhobenen fundamentalistischen Begründungsanspruchs im Sinne einer Letztbegründung (»Vollbegründung«) tritt bei Janich – ähnlich wie bei Lorenzen – ein Pragmatismus der Lebenswelt. Nun findet sich in Dinglers Werk ein häufig wieder auftretender Ausdruck, der ebenfalls in der methodisch-operativen Begründung von Prototheorien eine ausgezeichnete Rolle einnimmt: der Ausdruck »Eindeutigkeit«.

Sofern hier von der Eindeutigkeit eines Herstellungsverfahrens gesprochen wird, so wird damit jedoch gerade nicht behauptet, daß es genau ein Herstellungsverfahren zur Realisierung bestimmter Formen gibt. In bezug auf die Eindeutigkeit des Doppelkeilverfahrens (Janich 1992: 73f.) für die Herstellung von parallelen freien Keilflanken wird damit weder behauptet, daß es genau ein Herstellungsverfahren für die Parallelität gibt noch, daß es genau ein methodisch primäres Herstellungsverfahren für die Parallelität gibt. Die Zurückweisung dieses Exklusivitätsanspruchs ist in doppelter Hinsicht wichtig. Zum einen kann man problemlos weitere (methodisch sekundäre) Herstellungsverfahren für die Parallelität angegeben, was im Widerspruch zur Ausschließlichkeitsbehauptung stehen würde. Zum anderen hat die Verwendung des Ausdrucks »eindeutig« im Werk Dinglers viele Mißverständnisse hervorgerufen, da die Gebrauchsmöglichkeiten von »eindeutig« bei Dingler besonders großzügig ausgelegt sind. So spricht Dingler unter anderem von »eindeutigen Begriffen«, »eindeutiger Ausdrückbarkeit«, »eindeutigen Ideen«, »eindeutigen Formen«, »eindeutigen Aussagen«, »einer eindeutigen Operationenlehre«, »der Eindeutigkeit der empirischen Kausalität« oder »dem Prinzip der Eindeutigkeit« (Inhetveen 1984: 77). Zwar hat Inhetveen (1984) gezeigt, daß sich die Dinglersche Rede von »eindeutig« in dem von Janich intendierten Sinne rekonstruieren läßt, jedoch finden sich in den Arbeiten von Dingler eine Vielzahl von Bemerkungen, die gerade den Exklusivitätsanspruch unterstreichen wie etwa:

> »Um absolute Sicherheit zu haben, müssen wir anstreben, daß es [...] stets nur eine einzige bestimmte Entscheidung gibt.« (Dingler 1949: 34)

Es ist daher zweckmäßig, die Bedeutung der bei Janich und hier zu etablierenden Rede über die »Eindeutigkeit von Herstellungsverfahren« präzise zu charakterisieren (3.3).

Wir bezeichnen in erster Annäherung ein Herstellungsverfahren als »eindeutig«, wenn nachgewiesen werden kann, daß dieses Herstellungsverfahren »gleiche« Ergebnisse erwarten läßt. »Gleiche Ergebnisse« bedeutet hier, daß relativ zu einem gegebenen Herstellungsverfahren (für eine Grundform) ein operatives Kontrollkriterium bereitgestellt wird, anhand dessen überprüft werden kann, ob die Realisate in relevanter Hinsicht ununterscheidbar sind.

Da die Angabe eines Herstellungsverfahrens aus einer Reihe von (methodisch geordneten) Handlungsanweisungen besteht, bezieht sich der Prädikator »eindeutig« auf eben diese semantisch normierten Handlungsanweisungen und die zwischen ihnen bestehende methodische Ordnung. Ein Herstellungsverfahren ist also genau dann eindeutig, wenn die korrekte (und damit auch schrittweise geregelte) Befolgung der Handlungsanweisungen zu keinem anderen als dem angegebenen Herstellungsresultat kommen kann.

Ein gelungener Eindeutigkeitsbeweis für ein Herstellungsverfahren H ist hiernach eine begründete (und methodologisch unverzichtbare) Behauptung, daß die wiederholte Aktualisierung von H gleiche Ergebnisse erwarten läßt. Wodurch das hierfür benötigte Kontrollkriterium als zulässig und adäquat ausgewiesen werden kann, hängt in einem nicht geringen Maße von der korrespondierenden operativen Definition für die betroffene Grundform ab.

Damit führt die Interpretation von ideativen Normen (mit Hilfe der ihre Semantik liefernden Realisierungsverfahren) zu Homogenitätssätzen, die für die prototypenfrei reproduzierbaren Realisate eine normative Geltung beanspruchen. So stellt etwa ein gelungener Eindeutigkeitsbeweis für das Dreiplattenverfahren sicher, daß die Aussage »Aus unterschiedlichen Aktualisierungen stammende Ebenen passen frei verschiebbar aufeinander« nicht empirisch widerlegt werden kann. Mit dem Eindeutigkeitsbeweis werden die Sätze über Handlungsfolgen als apriorische Sätze etabliert, die ausschließlich durch die Rede über die Herstellungsvorschriften gestützt werden. Passen zwei »Ebenen« nicht frei verschiebbar aufeinander, dann haben wir nicht empirisch gezeigt, daß es Ebenen gibt, die nicht frei verschiebbar aufeinander passen, sondern festgestellt, daß mindestens eine der Oberflächen nicht eben ist, d.h. mindestens eine der Aktualisierungen des Herstellungsverfahrens mißlungen ist. Ein gelungener Eindeutigkeitsbeweis für ein Herstellungsverfahren H stellt somit ein Wissen darüber bereit, unter welchen Bedingungen eine Aktualisierung von H als gestört zu bezeichnen ist.

2. Zum Status operativer Definitionen

Sowohl im *Historischen Wörterbuch der Philosophie* (Band 2) als auch in der *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie* (Band 1) findet sich kein eigener Eintrag für den Ausdruck »operative Definition« bzw. »Definition, operative«. Lediglich der Ausdruck »operationale Definition« wird mit fast ausschließlichem Bezug auf Percy Bridgmans (1882-1961) *The Logic of Modern Physics* (1927) erläutert. Selbst im *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie* von Lorenzen (1987) wird lediglich auf den Definitionstyp der expliziten Definition eingegangen. Auch in den protophysikalischen Arbeiten zur Geometriebegründung von Janich, die sich immerhin über einen Zeitraum von inzwischen 30 Jahren erstrecken, findet sich keine weiterführende Bemerkung, wie definitionstheoretisch mit operativen Definitionen umzugehen ist. Der gelegentliche Verweis in konstruktiven und kulturalistischen Arbeiten auf Bridgman besitzt hierbei nur einen »ungefähren Charakter«. Der Operationalismus bei Bridgman dient eher als bibliographischer und ideengeschichtlich anregender Bezugspunkt für das operative Begründen in der methodischen Philosophie.

Wie groß die Gemeinsamkeiten resp. Differenzen zwischen den »operationalen« Definitionen und den »operativen« in der methodischen Philosophie sind, kann erst beantwortet werden, wenn der Status von operativen Definitionen geklärt ist. Mit »Status« wird hier auf die Explikation von syntaktischen (formalen) und semantisch-operativen Bedingungen verwiesen, die eine Definition erfüllen muß, um als »operativ« bezeichnet zu werden. Während die formalen Bedingungen relativ einfach zu charakterisieren sein werden, wird es bei den (in Frage kommenden) semantisch-operativen Bedingungen Klärungsbedarf geben. Mit der Bezugnahme auf die relevanten poietischen und praktischen Ebenen zur Bedeutungsbestimmung im Definiens einer operativen Definition ist jener Aspekt charakterisiert, bei dem eine Orientierung an anderen Definitionstypen (allen voran die explizite Definition) nur noch tentativ möglich ist.

2.1 Bridgmans operationale Definitionen

Einer der wenigen Texte, in denen eine Gegenüberstellung zwischen dem Dinglerschen Operativismus und dem Operationalismus Bridgmans vollzogen wird, ist der Abschnitt 2.3 in Janich (1987). Dort (S.29) wird expliziert, daß im Unterschied zu dem normativen Vorgehen Dinglers das »operationale Definieren« eine rein analysierende Beschreibung von faktisch vollzogenen Handlungen des Definierens in der Physik darstellt. In diesem Verständnis können Bridgmans »operationale Definitionen« nicht als Rekonstruktionsmittel im Rahmen einer normativen Wissenschaftstheorie verstanden werden.

Bridgmans *The Logic of Modern Physics* (Bridgman 1927) entstand in einer Zeit, in der sich das Bild der Wissenschaft Physik stark verändert hatte und viele traditionellen Verständnisse im doppelten Sinne des Wortes »relativiert« werden mußten oder sogar ganz aufgegeben wurden. Der Siegeszug der relativistischen Physik und Quantenmechanik machte unter anderem darauf aufmerksam, daß die gegenwärtige Physik umso mehr in die Pflicht zu nehmen ist, verständlich zu machen und transparent zu halten, worin die Besonderheiten physikalischer Praxen bestehen, und wodurch die Struktur der Physik charakterisiert wird. Dies ist bedeutsam, insofern Bridgman (1927: ix) davon ausgeht, daß die Physik der 1920er das Erscheinungsbild dieser Wissenschaft für eine lange Zeit prägen wird und es demgemäß besonders wichtig ist, daß grundlegende Begrifflichkeiten und Methoden dieser Physik präzise erfaßt werden. Das von ihm vorgeschlagene »operationale Verständnis« von physikalischen Begriffen stellt sich in den Dienst dieser Aufgabe. Dabei macht Bridgman deutlich, daß es für den Physiker vollständig ausreichend ist, wenn dieser die physikalischen Begriffe in jeder Einzelanwendung korrekt gebraucht:

»[...] what do we mean by the length of an object? We evidently know what we mean by length if we can tell what the length of any and every object is, and for the physicist nothing more is required.« (Bridgman 1927: 5)

Was bedeutet jedoch »korrekter Gebrauch« physikalischer Ausdrücke? Auf dem Hintergrund der jüngeren Entwicklungen – vor allem in den ersten zwei Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts – kann man Bedeutungsveränderungen zentraler physikalischer Begriffe konstatieren, die durch neue/veränderte Meßverfahren sowie die Berücksichtigung bisher vernachlässigter Bedingungen erforderlich wurden. Um das Problem »statischer« Bedeutungsbestimmungen etwa in der Form expliziter Definitionen zu vermeiden, richtet Bridgman seinen Blick umgehend auf die Operationen als Definitionsbasis, in denen der jeweils relevante Ausdruck verwendet wird. Die Bedeutung eines Ausdrucks wird demnach durch die bei seiner Verwendung ausgeführten Handlungen festgelegt:

»The concept of length is therefore fixed when the operations by which length is measured are fixed: that is, the concept of length involves as much as and nothing more than the set of operations by which length is determined. In general, we mean by any concept nothing more than a set of operations; *the concept is synonymous with the corresponding set of operations.*« (Bridgman 1927: 5)

Mit diesem Definitionsverfahren möchte Bridgman zwei Probleme bereinigen. Zum einen soll dem Umstand Rechnung getragen werden, daß ein Ausdruck – wie etwa Länge – in verschiedensten Gegenstandsbereichen (von subatomaren bis zu interstellaren) verwendet werden kann, jedoch die Weisen der Verwendung hochgradig verschieden sind. Zum zweiten soll durch das operationale Verständnis ein Filter bereitgestellt werden, mit dem sinnlose bzw. bedeutungslose Ausdrücke entlarvt werden können:

»Now we merely have to examine any of the possible operations by which we measure time to see that all such operations are relative operations. Therefore the previous statement that absolute time does not exist is replaced by the statement that absolute time is meaningless. And in making this statement we are not saying something new about nature, but are merely bringing to light implications already contained in the physical operations used in measuring time.« (Bridgman 1927: 6)

Gerade dieser zweite Punkt kann als ein sprachkritisches Verständnis im Umgang mit der Sprache der Physik aufgefaßt werden, denn Bridgman bindet explizit die Bedeutung von Grundbegriffen an die Verfügbarkeit von unmittelbar kontrollierbaren Operationen an. Ausdrücke, für die beansprucht wird, daß ihre Bedeutung über den operativ erfaßbaren Rahmen hinausreichen oder für die wir keine korrespondierenden operativen Weisen der Verwendung besitzen, sind bedeutungslos:

»[...] if we remember that the operations to which a physical concept are equivalent are actual physical operations, the concepts can be defined only in the range of actual experiment, and are undefined and meaningless in regions as yet untouched by experiment.« (Bridgman 1927: 7)

Operationale Definitionen sollen somit eine Reglementierung sprachlicher Möglichkeiten vornehmen, denn die Reichhaltigkeit der Sprache kennt Möglichkeiten, sprachliche Gebilde zu erzeugen, die epistemisch unsinnig sind.[3] Folgerichtig hält Bridgman die Angabe von Operationen als Bedeutungskriterium fest.[4] Aus dieser Auffassung folgt, daß zwar die Bedeutungsbestimmung von Grundbegriffen im Einzelfall sich aufwendig und komplex gestalten kann, jedoch damit die Sicherheit verbunden ist, daß spekulative Begriffe entdeckt und eliminiert werden können:

»In some respects thinking becomes simpler, because certain old generalizations and idealizations become incapable of use; for instance, many of the speculations of the early natural philosophers become simply unreadable. In other respects, however, thinking becomes much more difficult, because the operational implications of a concept are often very involved.« (Bridgman 1927: 31)

3 | Vgl.: »For of course the true meaning of a term is to be found by observing what a man does with it, not by what he says about it.« (Bridgman 1927: 7)

4 | Vgl: »If a specific question has meaning, it must be possible to find operations by which an answer may be given to it.« (Bridgman 1927: 28)

2.2 Ein heuristischer Zugang zu operativen Definitionen

Für eine Annäherung an den Status von »operativen Definitionen« scheint es dennoch sinnvoll, mit einem Vergleich zu den expliziten Definitionen – als dem Musterbeispiel einer Definition – zu beginnen. Vorangestellt sei die Bemerkung, daß eine Definition – dem üblichen Sprachgebrauch folgend – die Verwendung eines Ausdrucks vollständig festlegt. »Vollständig« bedeutet, daß es keinen Verwendungszusammenhang des Definiendums gibt, bei dem nicht auch die Verwendung des Definiens dieselbe Bedeutung besitzt. Das setzt unter anderem voraus, daß die im Definiens verwendeten Ausdrücke bereits ihrerseits in ihrer Bedeutung festgelegt sind. Diese Form der Sprachregulierung unterscheidet sich von anderen semantischen Regeln wie etwa den Prädikatorenregeln (Bedeutungspostulaten). Die meisten Definitionstypen[5] legen die Bedeutung der durch sie definierten Ausdrücke vollständig fest. Definitionen, die diese Bedingung erfüllen, wollen wir als Definitionen im strengen Sinne bezeichnen. Ein Problem bei der Charakterisierung der operativen Definition wird darin bestehen, zu klären, ob auch sie Definitionen im strengen Sinne sind. Diese Frage wird bereits dadurch motiviert, daß operative Definitionen zwar eine methodisch primäre Verwendung der operativen Ausdrücke sicherstellen sollen, darüber hinaus jedoch unklar bleibt, ob diese Verwendung im Einzelfall nicht möglicherweise unterbestimmt ist.

Wenn wir von operativen Definitionen sprechen, dann könnte man genauer von »operativen Realdefinitionen« sprechen, denn analog zu den expliziten Realdefinitionen gehen den operativen Definitionen (faktisch, aber nicht methodisch) Untersuchungen zum Sprachgebrauch voraus. Sie sollen eine (methodische) Rekonstruktion des betroffenen Ausdrucks (auf einer operativen Basis) leisten. Beispiele für operative Realdefinitionen sind etwa »eben«, »orthogonal« und »parallel« in der Geometriebegründung im Sinne Janichs (1976) bzw. (1992). In diesem Verständnis haben auch operative Realdefinitionen eine Adäquatheitsbedingung zu erfüllen: sie sollen – sofern durchführbar – eine bereits etablierte Ausdrucksverwendung weitgehend einfangen und dort eine Grenze ziehen, wo das häufig anzutreffende Feld der Beliebigkeit beginnt. Für die bereits erwähnten Beispiele bedeutet dies, daß »(poietisch) eben«, »(poietisch) orthogonal« und »(poietisch) parallel« eine Explikation der jeweiligen handwerklich-technischen Ausdrucksverwendung leisten sollen. Der Schritt zur Rekonstruktion der geometrisch-mathematischen Ausdrucksverwendung bedarf jedoch weiterer Mittel.

5 | Ausgeschlossen sind hier bereits die »ostensiven Definitionen«, die aber eher dem Namen und nicht der Aufgabe nach mit anderen Definitionstypen eine Gemeinsamkeit besitzen.

Wird indes mittels einer operativen Definition ein neuer Ausdruck bereitgestellt, so müßte man von einer »operativen Nominaldefinition« sprechen. Die Zweckmäßigkeit dieser Unterscheidung läßt sich ebenfalls mit dem Bezug auf die expliziten Definitionen ausweisen. Nominaldefinitionen haben im Unterschied zu Realdefinitionen keine Adäquatheitsbedingung zu erfüllen. Sie besitzen ausschließlich einen festsetzenden (normierenden) Charakter, während Realdefinitionen zudem einen feststellenden besitzen. Mit der Formulierung von letzteren wird neben einer Normierung ja zudem ihre Adäquatheit (relativ zu etablierten Verwendungszusammenhängen) behauptet. Die Adäquatheitsbehauptung erfolgt jedoch nicht explizit, sondern ergeht performativ mit der Setzung der operativen Realdefinition.

2.3 Hauptmerkmal einer operativen Definition in der Geometrie

Bezüglich der Grundcharakterisierung von operativen Definitionen im Rahmen der (operativen) Geometriebegründung wird es wohl kaum Streitigkeiten geben:

Eine Definition, in deren Definiens ein Sachverhalt angegeben ist, der durch ein Herstellungsverfahren realisiert sein muß, damit das Definiendum (auf den beschriebenen Sachverhalt) zutrifft, bezeichnen wir als »operative Definition«.

Diese Charakterisierung bezieht sich auf die Beschreibung des Herstellungsresultats. Hierbei ist anzumerken, daß die Angabe eines solchen Resultats nicht unabhängig mindestens einer korrespondierenden Handlungsanweisung – einem Rezept – (zur Realisierung des Herstellungsresultats) vollzogen werden kann. Sofern also im Definiens einer operativen Definition ein poietisch zu realisierender Sachverhalt – das Herstellungsresultat – angegeben ist, dann bezieht sich diese Definition auf ein methodisch vorausgehendes Herstellungsverfahren, welches die operative Semantik zum Verständnis des zu realisierenden Sachverhalts liefert. Eine »operative Definition« ohne ein korrespondierendes Herstellungsverfahren ist unzulässig, da in diesem Fall unverständlich bleibt, was durch das Definiens ausgedrückt werden soll. Dennoch ist diese resultatsbezogene Fassung verschieden von der unmittelbaren Verwendung von Handlungsanweisungen für Herstellungsverfahren im Definiens.

Anstatt der resultatsbezogenen Formulierung kann man auch die entsprechende Handlungsanweisung für den poietisch zu realisierenden Sachverhalt als Definiens verwenden.[6] Im Unterschied zur erstgenannten Fas-

6 | Diese Fassung wäre wohl im Sinne Bridgmans (1927), der einen Ausdruck wie zum Beispiel »Länge« dann versteht (seine Bedeutung kennt), wenn er weiß, welche Operationen man durchzuführen hat, um eine bestimmte Länge zu ermitteln.

sung, die verfahrensinvariant ist, müßte man in diesem Falle jedoch gegebenenfalls die Äquivalenz zwischen verschiedenen Verfahren nachweisen, um sicherzustellen, daß zwei operative Definitionen (sofern beansprucht) denselben Ausdruck bestimmen. Im Fall der resultatsbezogenen Fassung ist dies nicht Aufgabe der operativen Definition. Hier haben wir »per definitionem« genau einen operativen Ausdruck definiert. Sofern verschiedene Handlungsanweisungen zur poietischen Realisierung des relevanten Sachverhalts vorliegen, muß durch eben diese Handlungsanweisungen selbst sichergestellt werden, daß mit ihrer Befolgung dasselbe realisiert wird. Ist dies nicht der Fall, dann folgt daraus nicht, daß die operative Definition nicht zulässig ist (die dann in relevanter Hinsicht verschiedenen Herstellungsresultaten denselben Ausdruck prädizieren würde), sondern daß mindestens eine der Handlungsanweisungen fehlerhaft ist. Die Aufgabe des Äquivalenznachweises liegt hier nicht bei der Definition, sondern auf der Ebene der Handlungsanweisungen.

Im folgenden beschränken wir uns auf verfahrensinvariante operative Definitionen, in deren Definiens hergestellte Formen an Artefakten beschrieben werden. Es handelt sich somit um resultatsbezogene Fassungen von operativen Definitionen. Betrachtet man erst einmal die syntaktischen und semantischen Bedingungen für explizite Definitionen, so können viele Gemeinsamkeiten festgestellt werden (die im übrigen auch für die meisten anderen Definitionstypen gelten).

2.4 Anforderungen an explizite und operative Definitionen

Korrekte explizite Definitionen jeder Art müssen die folgenden fünf Bedingungen erfüllen:[7]

1) *Das Definiendum muß logisch atomar sein.*
   Es darf aus Gründen der Eindeutigkeit des zu definierenden Ausdrucks genau ein elementarer Prädikator im Definiendum definiert werden. Andernfalls könnte man mit der Verwendung eines nicht logisch atomaren Definiendums zu Folgerungen gelangen, die Ausdrücke mit einer noch nicht bestimmten Bedeutung besitzen. Dies gilt ebenfalls für operative Definitionen.
2) *Alle im Definiens vorkommenden freien Variablen treten auch im Definiendum auf.*
   Explizite Definitionen müssen die Substituierbarkeit des Definiendums

Gibt man diese Operationen explizit an, dann ist man nach Bridgman im Besitz einer operationalen Definition für den entsprechenden Ausdruck.

7 | Vgl. Hartmann (2003: 113).

durch das Definiens für jeden Verwendungszusammenhang sicherstellen, da daß Definiendum »lediglich« eine (bedeutungsgleiche) Abkürzung für den (in der Regel) komplexeren Ausdruck des Definiens darstellt. (Der Grenzfall wäre die Definition eines Ausdrucks durch einen bedeutungsgleichen atomaren Prädikator.) Würde indes im Definiens eine zusätzliche freie Variable auftauchen, so hätte man nach der Substitution der durch das Definiendum dargestellten Aussage lediglich eine Aussageform vorliegen. Von Bedeutungsgleichheit kann dann nicht mehr die Rede sein, da eine Aussageform keinen Sachverhalt darstellt. Bedingung 2) sollte ebenfalls für operative Definitionen gelten, obgleich die oben angeführte Begründung für explizite Definitionen hier noch nicht benutzt werden darf.[8]

3) *Jede im Definiendum vorkommende freie Variable tritt dort genau einmal auf.*
Andernfalls könnte man zum Beispiel aus einem reflexiven, aber asymmetrischen Prädikator durch Existenzeinführung einen symmetrischen machen. Die Bedingung 3) gilt auch für operative Definitionen.

4) *Definitionen dürfen nicht kreativ sein.*
Eine Definition ist kreativ, wenn mit ihrer Verwendung Aussagen hergeleitet werden können, die zum einen das Definiendum nicht enthalten und zum anderen ohne die Definition nicht hergeleitet werden können. Eine Folge wäre etwa die Herleitbarkeit von falschen Aussagen aus wahren. Auch operative Definitionen müssen Bedingung 4) erfüllen.

5) *Zirkuläre Definitionen sind unzulässig.*
Eine Definition ist zirkulär, wenn der zu definierende Ausdruck bereits im Definiens auftaucht bzw. ein Ausdruck Verwendung findet, der nur mit Bezug auf eben diesen zu definierenden Ausdruck eingeführt werden kann. Mit Ausnahme der rekursiven Definitionen (die durch eine Anfangs-/Startbedingung aufgelöst werden) gilt dies für alle Definitionstypen. Das erklärt sich mit dem Verweis auf eine Aufgabe von Definitionen: die Bedeutungsbestimmung eines Ausdrucks über eine Definition kann nicht bereits auf die Kenntnis seiner Verwendungszusammenhänge zurückgreifen, da diese allererst mit der Definition bereitgestellt werden sollen. Für operative Definitionen kommt hinzu, daß sie ein zulässiges Mittel zum lückenlosen, vollständigen und zirkelfreien Aufbau von normierten wissenschaftlichen Sprachen darstellen sollen. Kurz: wenn der Aufbau methodisch erfolgen soll, dann dürfen auch die verwendeten Mittel nicht gegen das Prinzip der methodische Ordnung verstoßen.

8 | Vorsicht ist vorerst durch die noch offene Frage nach der möglichen unterbestimmten Verwendung von operativen Ausdrücken geboten. Die Begründung der Forderung 2) für operative Definitionen wird daher im Abschnitt 2.7 erfolgen.

> Andernfalls würden sie den angestrebten methodischen Aufbau der zu begründenden Theorie nicht sicherstellen können und mithin unzulässig sein. Operative Definitionen sollen gerade klassische Defizite von etablierten Definitionen (z.B. in den faktisch betriebenen Wissenschaften) unter Beibehaltung der Leistungsstärke vermeiden.

2.5 Gemeinsamkeit mit und Unterschiede zu ostensiven Definitionen

Die bisher aufgezeigten Bedingungen lassen die operativen Definitionen in die Nähe der expliziten Definitionen rücken. Ein erster und auffälliger Unterschied zwischen beiden Definitionstypen betrifft deren »Operationsbereich«. Während explizite Definitionen ausschließlich innerhalb der Sprache operieren, nehmen die operativen Definitionen mit ihrem Bezug auf realisierte/zu realisierende Sachverhalte eine ähnliche Stellung ein wie die ostensiven Definitionen: sie dienen als Gelenkstelle zwischen der Sprache und (nicht-sprachlichen) rein poietischen Ebenen. Während mittels der ostensiven Definitionen und ihrer prädikativen Funktion »die Lebenswelt sprachlich strukturiert wird«, bezieht sich das operative Definieren auf die Charakterisierung von Formen, die an Artefakten hergestellt werden.

Dennoch rücken die operativen Definitionen nicht zu nah an die ostensiven Definitionen heran, denn vermöge letzterer erreichen wir lediglich, durch hinreichend viele (positive wie negative) Anwendungsfälle den einzuführenden Ausdruck kompetent zu verwenden. »Hinreichend viel« ist eine häufig bemühte Wendung, mit der zum Ausdruck gebracht werden soll, daß im Einzelfall nicht genau gesagt werden kann, wann ein bestimmter Ausdruck verstanden wurde, d.h. von nun an korrekt verwendet werden kann. Das hängt nicht nur von der »Lernfähigkeit« des noch »Unwissenden« und der Geduld des »Lehrenden« ab, sondern auch etwa von der geschickten Wahl entsprechender Beispiele und Gegenbeispiele. Man muß eben häufig genug bei der Verwendung eines exemplarisch zu erlernenden Ausdrucks fehlgehen, um zu verstehen, wie er eigentlich zu verwenden ist. Dennoch ist mit einer derartigen ostensiven Bedeutungserläuterung keine vollständige Bedeutungsbestimmung im Sinne einer expliziten Definition geleistet. So vermerken denn auch Kamlah und Lorenzen:

> »An dieser Stelle können wir also rekonstruieren, wie die Prädikatoren der natürlichen Sprache gebrauchsmäßig erlernt werden, so daß sie schließlich mit großer Sicherheit den Gegenständen zugesprochen und abgesprochen werden, ohne daß wir explizit (ausdrücklich) auseinanderzusetzen wüßten, was sie ›bedeuten‹. Dafür können wir auch sagen: ›Gebrauchsprädikatoren‹ sind uns auf Grund des Sprachgebrauchs ›unmittelbar verständlich‹.« (Kamlah/Lorenzen 1973: 29)

Es bedarf keiner Erwähnung, daß wir nicht gleich mit dem expliziten Definieren im Aufbau einer Sprache beginnen. Gerade der stets in Erweiterung befindliche Grundstock an exemplarisch erlernten und zu erlernenden Ausdrücken bereitet selbst einer gestandenen sprachkompetenten Person immer wieder Probleme. Dies zeigt sich vor allem dann, wenn man einer anderen sprachkompetenten Person einen für diesen bisher unbekannten Ausdruck – etwa eine Wortneuschöpfung von Jugendlichen – erläutern möchte. Man kann bei der Einführung von Prädikatoren mittels ostensiver Definitionen schwerlich von einer »semantischen Unterbestimmung« sprechen, da eine Unterbestimmung erst dann vorliegt, wenn relativ zu einem etablierten Sprachgebrauch die Bedeutung eines Ausdrucks (und damit die explizierbaren Kriterien für seine Verwendung) nicht adäquat ist (aber angemessen sein sollte). Im Fall der exemplarischen Einführung eines Ausdrucks besitzen wir jedoch keine vollständige Liste dieser zu explizierenden Kriterien. Daß wir eine solche für einzelne Ausdrücke nicht haben, hängt unter anderem auch von der Reihenfolge der exemplarisch erlernten Ausdrücke ab. Hat etwa ein Kind den Ausdruck »Hund« bereits hinreichend gut verstanden, dann kann man sich dieses Ausdrucks für Erläuterungen bedienen, warum das Tier im Zoo nun ein Wolf ist etc. Das ostensive Definieren folgt eher einem Prinzip des »Ungefähren«: Je nachdem, was gerade als zusätzliche und verständliche Erläuterung zu passen scheint bzw. bereits als bekannt vorausgesetzt werden kann, ist dem »Lehrenden« recht und billig. Durch welche ergänzenden Bemerkungen oder Gesten letztlich ein Ausdruck hinreichend kompetent erlernt wurde, ist im Nachhinein egal. Hauptsache: es funktioniert!

Operative Definitionen setzen indes auf einer Ebene ein, auf der man den kompetenten Gebrauch eines hinreichend umfangreichen Vokabulars voraussetzen darf. Operative Ausdrücke, die im Rahmen der Rekonstruktion einer wissenschaftlichen Theorie Verwendung finden sollen, werden nicht exemplarisch eingeführt. Doch was bedeutet die Wendung »die Bedeutung eines operativen Ausdrucks zu kennen«? Das Definiens einer operativen Definition beschreibt einen Zustand Z, der realisiert sein muß, damit der operative Ausdruck P (auf Z) zutrifft. Mit P wird Z bezeichnet. Der Zustand Z ermöglicht eine methodisch primäre Verwendung des operativ definierten Ausdrucks P. Wir unterstellen, daß wir verstehen, was es bedeutet, den Zustand Z zu realisieren, d.h. wir wissen um Kriterien, um zu Überprüfen, ob Z der Fall ist. Kennen wir aber damit die Bedeutung des Ausdrucks P?

Fordert man von einer operativen Definition, daß sie die Verwendungsmöglichkeiten des zu definierenden operativen Ausdrucks vollständig festlegt, dann würden wir die Bedeutung des Ausdrucks P kennen. Diese Forderung kann aber nicht sinnvoll aufrechterhalten werden, denn mittels des beschriebenen zu realisierenden Zustandes Z sollte doch lediglich eine erstmalige Verwendung des Ausdrucks P ermöglicht werden. Jedoch sollte sich die Verwendung des Ausdrucks P (in der Regel) nicht ausschließlich auf die Beschreibung des realisierten Zustandes Z beschränken. Im Fall der operativen Parallelendefinition wollen wir nicht nur Aussagen darüber machen, daß die freien Keilflanken eines Doppelkeils zueinander »parallel« sind. Vielmehr wollen wir auch Aussagen darüber machen, daß die freien Keilflanken von zwei Doppelkeilen, die auf derselben (ebenen) Unterlage aufliegen, ebenfalls zueinander parallel sind. Wir wollen zudem darüber Aussagen machen können, daß die Wände meines Arbeitszimmers »ebenso« zueinander parallel sind wie eine Tischkante zu sich selbst parallel ist. Allein aufgrund der operativen Definition

(def‖) *Die freien Keilflanken eines Doppelkeils heißen »parallel«.*

können wir dies nicht. Nun könnte man einwenden, daß dies doch eine »Haarspalterei« sei, denn immerhin wissen wir doch, welcher geometrische Ausdruck in seiner Bedeutung auf einer operativen Basis rekonstruiert werden soll. Ganz so ist es dann doch nicht. Man versetze sich hier in die Situation desjenigen, der außer (def‖) keine weiteren Verwendungszusammenhänge kennt (so wie eben nun einmal der etablierte Mittelbestand auf dieser Rekonstruktionsstufe bestellt ist). Diese Person würde zu Recht fragen, weshalb die freien Keilflanken von zwei Keilen (auf einer ebenen Unterlage) zueinander parallel sein sollen, denn immerhin sind es keine freien Keilflanken an ein und demselben Doppelkeil. Noch mehr Verwunderung würde er bezüglich des Sprachgebrauchs zeigen, daß eine Kante zu sich selbst parallel sein soll, denn in diesem Fall haben wir nicht einmal einen Doppelkeil. Auch die von uns betrachteten Flächen der Wände meines Arbeitszimmers sind sicherlich nicht im Sinne von (def‖) zueinander parallel.

Kurz: Mit einer operativen Definition wird die Bedeutung des definierten operativen Ausdrucks noch nicht vollständig festgelegt. Vielmehr können wir erst einmal sagen, daß uns die operative Definition die semantische Basis des operativen Ausdrucks liefert. Für weitere zu etablierende Verwendungszusammenhänge müssen Verwendungskriterien formuliert werden, die erfüllt sein müssen, damit ein operativer Ausdruck korrekt gebraucht wird. Ohne bereits Kenntnis von derartigen Kriterien zu besitzen, läuft die Bedeutungsbestimmung von operativen Ausdrücken auf eine Bedeutungserweiterung hinaus. Dies führt jedoch dazu, daß wir im strengen Sinne einen neuen Ausdruck einführen, der lediglich ein operatives Fundament besitzt. Im Fall der Parallelität bedeutet dies, daß der durch die handwerklich-technischen Handlungszusammenhänge als zweckmäßig ausgewiesene Prädikator »parallel« verschieden ist von dem in (def‖) definierten. Der im folgenden ausgeführte Vorschlag versteht die Schritte zur Bedeutungserweiterung jedoch nicht als Aufbau einer kumulativen Hierarchie von Parallelenprädikaten, sondern als die sukzessive sprachliche Etablierung eines einzigen Ausdrucks.

Ein Problem bei der Bedeutungserweiterung besteht in der Feststellung der *zulässigen Verwendungskriterien*. Was hierbei noch unproblematisch ist, ist die Forderung nach Konsistenz: die Kriterien dürfen nicht so beschaffen sein, daß die erweiterte Bedeutung einzelne Verwendungszusammenhänge auf der Basis des bisher etablierten Bestandes an Verwendungszusammenhängen verbietet. Es soll nun am Beispiel von (def‖) ein Vorschlag dessen erarbeitet werden, was unter der Bedeutungsbestimmung mittels einer operativen Definition verstanden werden kann.

2.6 Die rekursive Bestimmung der Verwendungszusammenhänge

Auch wenn die Einführung und Verwendung von (def‖) im Rahmen der operativen Geometriebegründung (und darüber hinaus) bereits in einen größeren Zusammenhang eingebettet ist, so möchte ich im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit das Beispiel isoliert betrachten.[9] Halten wir fest, was zu berücksichtigen ist:

1. Operative Definitionen ermöglichen eine erstmalige Ausdrucksverwendung.
2. Die Bedeutung des operativen Ausdrucks soll sich in der Regel nicht auf die operative Definition beschränken.
3. Für eine Bedeutungserweiterung bedarf es weiterer zulässiger Verwendungskriterien.
4. »Zulässig« bedeutet:
   4.1 konsistente Erweiterung (Erhalt des bereits etablierten Bestandes)
   4.2 der Ausweis der Zweckmäßigkeit einer Bedeutungserweiterung (»Nicht-Beliebigkeit« im konsistenten Rahmen); für operative Realdefinitionen läuft dies vor allem auf die Feststellung einer adäquaten Verwendung hinaus
   4.3 die Angabe einer methodischen Schrittfolge vom klassischen zum erweiterten Bestand (logisch-semantische »Unterfütterung« der Kriterien)
   4.4 Der Nachweis von 4.1., 4.2. und 4.3. erfolgt auf der Basis des bereits sichergestellten methodischen Hintergrundwissens Σ. Im Fall der Parallelität umfaßt Σ zu Beginn den operativen Aufbau der

9 | Der Vorschlag läßt sich jedoch ohne Abänderung unmittelbar für die operativen Definitionen von »eben« und »orthogonal« übernehmen.

Geometrie bis einschließlich der Eindeutigkeit der Orthogonalität u. der Angabe des Doppelkeilverfahrens zur Formulierung v. (def‖).

Die Forderungen 4.2. und 4.3. werden an den Beispielen – die wir zudem für den zu führenden Eindeutigkeitsbeweis benötigen – besser verständlich. Dazu beginnen wir wiederum mit (def‖) und formulieren einen Sachverhalt, in dem die Ausdrucksverwendung von »parallel« noch nicht durch (def‖) abgedeckt ist.

Die Menge aller bereits etablierten Verwendungszusammenhänge des Ausdrucks »parallel« bezeichnen wir mit $\Psi^*(\|)$ (die durch »*« angedeutete obere Indizierung spielt umgehend eine Rolle). Dieses Vorgehen der Mengenerweiterung bleibt stets konstruktiv, da für jeden zu etablierenden Verwendungszusammenhang angeben werden muß, wie wir diesen (zulässig) einführen. $\Psi^*(\|)$ kann auf jeder Stufe der Bedeutungserweiterung des Ausdrucks »parallel« genau charakterisiert werden. Die Menge $\Psi^*(\|)$ ist stets konstruktiv! Zum Beginn der Bedeutungsbestimmung umfaßt die Menge $\Psi^*(\|)$ lediglich jenen Verwendungszusammenhang, bei dem *freien* Keilflanken eines Doppelkeils der Ausdruck »parallel« prädiziert wird. Es gilt also: $\Psi^\circ(\|) = \{(\text{def}\|)\}$. Für die methodisch folgenden Herstellungshandlungen werden wir jedoch auf einer ebenen Bezugsunterlage operieren. Dies soll unser erstes Beispiel sein:

1. Sachverhalt: Ein bereits hergestellter Doppelkeil liegt mit einer Keilflanke auf einer ebenen Unterlage auf. Die Rede von »parallelen freien Keilflanken« wird hier erklärungsbedürftig, da eine der beiden Keilflanken, die auf der Unterlage aufliegt, nicht mehr frei ist. Auch für diesen Sachverhalt wollen wir sagen können, daß dann die verbliebene freie Keilflanke zur ebenen Oberfläche der Unterlage »parallel« ist. Einzig mit (def‖) gilt dies nicht, denn die ebene Oberfläche der Unterlage ist keine freie Keilflanke eines Keiles, die durch dieselbe (meint: die individuelle) Aktualisierung des Handlungsschemas des Doppelkeilverfahrens hergestellt wurde. Es bedarf einer Erweiterung der Verwendungszusammenhänge.

Betrachten wir also den Sachverhalt, daß ein bereits hergestellter Doppelkeil mit einer der beiden freien Keilflanken E^I auf eine ebene Unterlage U aufgelegt wird. Dann können wir mit den bereits etablierten sprachlichen Mitteln des Drei-Platten-Verfahrens sagen, daß sich die ehemals freie Keilflanke E^I mit einem Teil U^I der ebenen Oberfläche von U in »Passung« befindet. E^I berührt U^I an jeder Stelle. Da E^I und U^I im Sinne des Drei-Platten-Verfahrens (und dem entsprechenden Eindeutigkeitsnachweis) formgleich sind und durch die Passung die *gleiche* Lage aufweisen, sind sie in bezug auf die (noch) freie Keilflanke E2 *in relevanter Hinsicht ununterscheidbar*. E^2 ist zu U^I genau dann »parallel«, wenn E^I auf U^I paßt. Da U^I in U beliebig gewählt ist, können wir sagen, daß E^2 zu U genau dann »parallel« ist, wenn E^I auf einen Teil von U paßt. Die soeben vorgenommenen Erläuterungen bezeichnen wir kurz als Verwendungskriterium $\Sigma^I(\|)$, das genau dann erfüllt ist, wenn das durch die Handlungsanweisung beschriebene Handlungsresultat *realisiert* wurde. Für die Verwendungsmöglichkeiten des Ausdrucks »parallel« gilt nun: $\Psi^I(\|) = \Psi°(\|) \cup \Sigma^I(\|)$

Für das Beispiel ist nun zu klären, in wiefern die Forderungen unter 4. erfüllt sind:

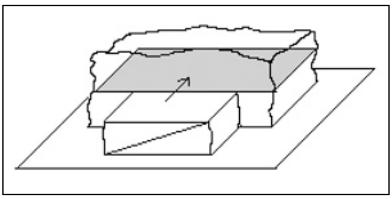
4.1. Die Erweiterung um $\Sigma^I(\|)$ ist *konsistent*. Jede formulierbare Aussage mittels (def$\|$) wird auch durch die Verwendungszusammenhänge der Menge $\Psi^I(\|)$ erfaßt (Erhalt des klassischen Bestandes). $\Sigma^I(\|)$ verbietet an keiner Stelle, auch weiterhin freie Keilflanken als »parallel« zu bezeichnen.

4.2. Die Erweiterung um $\Sigma^I(\|)$ ist *zweckmäßig*. E^I und U^I sind nicht nur formgleich, sondern befinden sich nach dem Sachverhalt auch in gleicher Lage: Sie befinden sich in »Passung«. Daß sich an der Lage (zueinander) zwischen E^I und E^2 nichts geändert hat, ist die Formbeziehung zwischen E^2 und U^I in relevanter Hinsicht auch dieselbe. Aussagen über die gleiche Form (an verschiedenen Körpern) sollten auch dieselben sprachlichen Mittel für die Feststellung dieser gleichen Lage benutzen.

4.3. Die Erweiterung um $\Sigma^I(\|)$ erfolgt *methodisch*. Mit der Angabe der obigen Handlungsanweisung ist dies sichergestellt, da an keiner Stelle auf ein (sprachliches) Mittel zurückgegriffen wurde, das seinerseits nicht bereits in der Rekonstruktion bereitgestellt ist. Damit ist die Erweiterung um $\Sigma^I(\|)$ *zulässig*.

2. Sachverhalt: Ein hergestellter Doppelkeil wird auf eine ebene Unterlage aufgelegt. Des Weiteren verwenden wir einen Körper K (der größer ist als der Doppelkeil) mit mindestens zwei ebenen Flächen, die eine gemeinsame Kante besitzen und zueinander lotrecht stehen. Diesen legen wir auf derselben Unterlage auf, so daß eine ebene Fläche auf die Unterlage paßt und die andere mit einer Seite des Doppelkeils in Passung befindlich ist. Entlang – also in ebener Fortsetzung der Ebene – der (nun einzigen) freien Keilflanke des Doppelkeils vollziehen wir einen ebenen Schnitt durch K (siehe Abbildung 1).

Abbildung 1



Das Resultat ist eine weitere ebene Fläche an K, die mit der freien Keilflanke des Doppelkeils eine gemeinsame Ebene aufspannt. Wir wollen nun sagen, daß diese neue ebene Fläche zu jener, auf der K auf der Unterlage aufliegt ebenfalls »parallel« ist. Allein aufgrund (def‖) gilt dies nicht, denn K ist zum einen kein Doppelkeil und zum anderen sind die betroffenen ebenen Flächen nicht Resultat des Doppelkeilverfahrens (im Sinne Janich [1992]). Vielmehr haben wir auf der operativ-semantischen Basis von (def‖) ein darauf aufbauendes Herstellungsverfahren angegeben, mit dem *dieselbe* Grundform an anderen Körpern reproduziert werden kann. Es ist somit nur zweckmäßig, auch diese beiden betroffenen ebenen Flächen als zueinander »parallel« zu bezeichnen.[10] Dafür müssen wir aber unsere Menge aller (zulässigen) Verwendungszusammenhänge $\Psi^1(\|)$ erweitern derart, daß $\Psi^2(\|)$ nun $\Psi^1(\|)$ plus das angegebene Herstellungsverfahren enthält. Das oben beschriebene Herstellungsverfahren bezeichnen wir kurz als Verwendungskriterium $\Sigma^2(\|)$, das genau dann erfüllt ist, wenn das durch das Herstellungsverfahren beschriebene Herstellungsziel realisiert wurde. Für die Verwendungsmöglichkeiten des Ausdrucks »parallel« gilt nun: $\Psi^2(\|) = \Psi^1(\|) \cup \Sigma^2(\|)$.[11]

10 | Es sei explizit darauf hingewiesen, daß man für die Geltungssicherung dieser Aussage noch nicht die Eindeutigkeit der Parallelität benötigt.

11 | Auch für dieses Beispiel ist nun zu klären, inwiefern die Forderungen unter 4. erfüllt sind:

4.1. Die Erweiterung um $\Sigma^2(\|)$ ist *konsistent*. Jede formulierbare Aussage mittels (def‖) oder $\Sigma^1(\|)$ wird auch durch die Verwendungszusammenhänge der Menge $\Psi^2(\|)$ erfaßt (Erhalt des klassischen Bestandes).

4.2. Die Erweiterung um $\Sigma^2(\|)$ ist *zweckmäßig*. Mit der Herstellung von zwei ebenen Flächen, die zu den freien Keilflanken formgleich sind, ist auch die Prädikation desselben Ausdrucks sinnvoll, da die Herstellungsresultate in relevanter Hinsicht nicht unterscheidbar sind.

4.3. Die Erweiterung um $\Sigma^2(\|)$ erfolgt *methodisch*. Mit der Angabe des obigen Herstellungsverfahrens ist dies sichergestellt, da an keiner Stelle auf ein Mittel zurückgegriffen wurde, das seinerseits nicht bereits in der Rekonstruktion bereitgestellt ist. Damit ist die Erweiterung um $\Sigma^2(\|)$ *zulässig*.

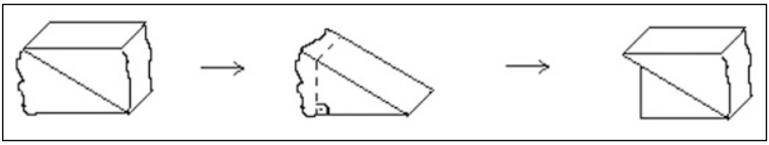
Zusatz: Dieses Beispiel ist wichtig, insofern mit $\Sigma^2(\|)$ gleichzeitig die Rede von »formgleich« (in bezug auf die Grundform der Parallelität) etabliert werden kann. Mit der Herstellung der dritten Ebene an K, die mit der freien Keilflanke des Doppelkeils eine *gemeinsame* Ebene aufspannt, besitzen wir ebenfalls ein Kriterium, um von der *Formgleichheit* beider Körper sprechen zu können. Während hier das Kriterium als Nebenresultat mitgeliefert wird, können wir dies im Hinblick auf weitere Verwendungszusammenhänge wie folgt reformulieren: Spannt die freie Oberfläche eines Körpers K (auf U aufliegend) mit der freien Keilflanke eines Doppelkeils D (eben-

Es sei ein weiteres Beispiel angeführt, bei dem neben dem Bezug auf erweiterte poietische Handlungszusammenhänge auch formale Mittel zur Etablierung eine Rolle spielen:

3. Sachverhalt: Wir gehen davon aus, wir hätten bisher nur die in $\Psi^2(\|)$ erfaßten Verwendungszusammenhänge etabliert (diese haben wir in jedem Fall). Wir möchten nun auch die Redeweise von der »Reflexivität der Parallelität« für Geraden/Linien etablieren. »Jede gerade Kante (später: ›Linie‹) ist zu sich selbst parallel.« Offenkundig wird diese Redeweise durch $\Psi^2(\|)$ noch nicht erfaßt, denn sowohl der Doppelkeil als auch der darauf aufbauend eingeführte Körper K (mit den relevanten Formen) besitzen stets zwei (freie) ebene Flächen (bzw. Kanten) die zueinander parallel sind. Mittels (def$\|$), $\Sigma^1(\|)$ oder $\Sigma^2(\|)$ kann der Verwendungszusammenhang mit nur einer Ebene (bzw. Kante) nicht etabliert werden, denn egal wie klein/schmal wir den Doppelkeil usw. konstruieren, es bleiben *zwei* freie Keilflanken.

Um den gewünschten Verwendungszusammenhang zu etablieren, gehen wir wiederum von einem bereits hergestellten Doppelkeil aus, an den jedoch eine zusätzliche Forderung ergeht: bei einem der beiden (öffnungswinkelgleichen) Keile wird nach Auflage einer Keilflanke auf eine ebene Unterlage an der (der Keilspitze gegenüberliegenden) Seite ein lotrechter Schnitt (relativ zur Unterlage) vollzogen (siehe Abbildung 2).

Abbildung 2



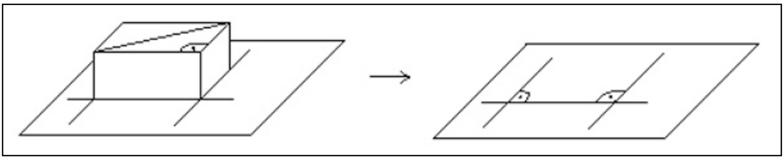
Den nun formveränderten Doppelkeil legen wir so auf die ebene Unterlage, daß die beiden freien Keilflanken (und auch die neu erzeugte Ebene) nun lotrecht auf der Unterlage stehen. Die aufliegenden (drei) Kanten dienen als Führungskanten für zu zeichnende (gerade) Striche. Jene beiden (geraden) Striche,[12] die wir längs der Führungskanten der freien Keilflanken gezeichnet haben, sind zueinander »parallel«, während jener (gerade) Strich,

falls auf U aufliegend) eine gemeinsame Ebene auf, so besitzen K und D in relevanter Hinsicht *dieselbe Form*.

12 | Genauer: *Strichmarken*; Die Rede von geraden Strichen ist abgesichert, da wir bereits mit der methodisch vorangehenden Einführung von »geraden Kanten« methodisch primäre »Lineale« besitzen.

der längs der lotrecht erzeugten Kante gezeichnet wurde, zu den beiden anderen »lotrecht« bzw. »orthogonal« steht (siehe Abbildung 3).

Abbildung 3



Während die »Orthogonalität« bereits an einer methodisch früheren Stelle für den planimetrischen Fall eingeführt werden kann (siehe Drei-Keile-Verfahren, Janich 2001: 48f.), etablieren wir an dieser Stelle eine erste planimetrische Verwendung des Ausdrucks »parallel«. Dafür benötigt man eigentlich das erzeugte Lot gar nicht, denn die planimetrische Markierung von zueinander parallelen Keilflanken liefert auch ohne das Lot zueinander parallele (gerade) Striche. Da wir jedoch an jedem Doppelkeil eine lotrechte Ebene erzeugen können, die stets zu beiden freien Keilflanken »orthogonal« ist, können wir dieses operative Wissen auch für eine abgeleitete planimetrische Parallelendefinition benutzen:

(def‖p) Zwei gerade Striche a und b heißen »parallel«, wenn es einen geraden Strich c gibt, der sowohl bezüglich a als auch b lotrecht gezeichnet werden kann.

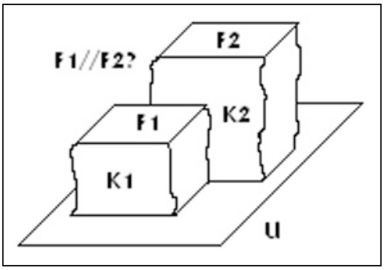
Bezeichnen wir mit R(*,+) die binäre Relation »* ist orthogonal zu +«, dann lautet die abgeleitete Definition formal: $a \parallel b \leftrightharpoons \bigvee z(R(a,z) \wedge R(b,z))$.

Diese Definition erfüllt im Übrigen alle formalen Anforderungen an explizite Definitionen. Hieraus folgt nun unmittelbar durch jeden satz- bzw. regellogischen Kalkül für die Prädikatenlogik erster Stufe (durch Substitution bzw. entsprechende Konjunktionseinführung) die Gültigkeit von $a \parallel a$: »Jeder gerade Strich a ist zu sich selbst parallel.« Das soeben beschriebene Vorgehen bezeichnen wir kurz als Verwendungskriterium $\Sigma^3(\parallel)$. Für den erweiterten Verwendungszusammenhang des Ausdrucks »parallel« gilt nun: $\Psi^3(\parallel) = \Psi^2(\parallel) \cup \Sigma^3(\parallel)$.[13]

13 | 4.1. Die Erweiterung um $\Sigma^3(\parallel)$ ist *konsistent*. Das Zutreffen/Nicht-Zutreffen von (def‖p) kann jederzeit auf das Zutreffen/Nicht-Zutreffen der in $\Psi^2()$ bereits etablierten Verwendungszusammenhänge zurückgeführt werden. Formal-logisch kann man zeigen, daß (def‖) und (def‖p) über einem entsprechend aufgebauten Kalkül äquivalent sind. Wäre die Erweiterung inkonsistent, dann wäre bereits $\Psi^2(\parallel)$ widerspruchsvoll. Dies ist aber nicht der Fall (siehe vorangegangenes Beispiel).

Ein abschließendes – wichtiges – Beispiel soll noch gegeben werden:
4. *Sachverhalt*: Wir gehen von dem Sachverhalt aus, daß zwei Körper K^1 und K^2 mit einer ebenen Grundfläche auf ein und derselben ebenen Unterlage U aufliegen. Des Weiteren besitzen K^1 und K^2 ebene Kopfflächen (siehe Abbildung 4).

Abbildung 4

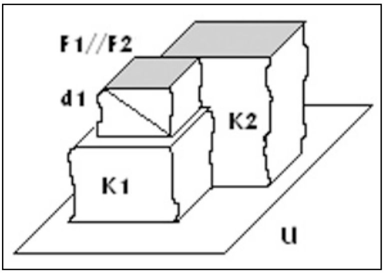


Wir möchten nun danach fragen können, ob die beiden Kopfflächen F^1 und F^2 zueinander »parallel« sind. Die bisher etablierten Verwendungszusammenhänge $\Psi^3(\|)$ ermöglichen zum einen die Fragestellung und zum anderen eine Beantwortung noch nicht. Ohne die bisher etablierten Sigma-Kriterien im Einzelnen daraufhin zu überprüfen, läuft die entsprechende Begründung auf den Sachverhalt hinaus, daß *alle* in $\Psi^3(\|)$ etablierten Möglichkeiten vom Vorliegen und der operativen Verwendung eines Doppelkeils Gebrauch machen. Im hier betrachteten Sachverhalt ist bisher von einem Doppelkeil jedoch noch nicht die Rede gewesen. Dennoch möchten wir für zwei voneinander unabhängig hergestellte und in einer beliebigen Lage (relativ zur Unterlage) befindliche Ebenen (oder Kanten) überprüfen können, ob die zwischen ihnen bestehende Lage verschieden oder gleich ist von der relevanten Form an einem Doppelkeil. Im Konjunktiv gesprochen: Falls sich zeigen lassen könnte, daß diese Ebenen (oder Kanten) formgleich zu

4.2. Die Erweiterung um $\Sigma^3(\|)$ ist *zweckmäßig*. Die Rede von »parallel« wollen wir nicht auf den räumlichen Fall beschränken. Bereits in den handwerklich-technischen Zusammenhängen spielt die planimetrische Verwendung der geometrischen Grundformen eine unersetzbare Rolle. Gerade die Abbildung von zueinander parallelen Kanten (an einem Körper) auf eine Ebene durch Markierungen soll auch als »Abbildung« verstanden werden können.
4.3. Die Erweiterung um $\Sigma^3(\|)$ erfolgt *methodisch*. Dies ist durch das obige Herstellungsverfahren sichergestellt. An keiner Stelle wurde auf ein noch nicht verfügbares Mittel vorgegriffen. Damit ist die Erweiterung um $\Sigma^3(\|)$ *zulässig*.

den Keilflanken eines Doppelkeils sind, dann sollte man auch sagen können, daß auch diese Ebenen (oder Kanten) zu einander »parallel« sind. Hierfür benötigen wir ein neues Sigma-Kriterium. Dazu greifen wir auf $\Sigma^1(\|)$ (»Passung«) und $\Sigma^2(\|)$ (»formgleich«) zurück. Wir wollen die beiden freien Ebenen genau dann als zueinander »parallel« bezeichnen, wenn es einen Doppelkeil gibt, der mit einer freien Keilflanke auf der einen (»niedrigeren«) Ebene aufliegt (»paßt«) und mit der anderen Ebene eine gemeinsame Ebene aufspannt (»formgleich«) (siehe Abbildung 5).

Abbildung 5



Die Konstruktion und die gelungene Einbettung des Doppelkeils liefert uns die Möglichkeit zur Überprüfung, ob die Lage der beiden Ebenen mit der Lage der beiden freien Keilflanken übereinstimmt oder nicht. Mit der Passung zwischen einer der beiden freien Keilflanken mit der (»niedrigeren«) Ebene haben wir nach $\Sigma^1(\|)$ erst einmal die Parallelität zwischen der noch freien Keilflanke und der betroffenen Ebene. Dies gilt unabhängig von dem zu überprüfenden Sachverhalt. Spannt nun noch die verbliebene freie Keilflanke mit der zweiten Ebene eine gemeinsame Ebene auf, dann sind die beiden Ebenen zueinander parallel, denn jeder Doppelkeil ist auch zu sich selbst formgleich. Das soeben beschriebene Vorgehen zur Etablierung dieses weiteren Verwendungszusammenhangs bezeichnen wir kurz mit $\Sigma^4(\|)$. Für den erweiterten Verwendungszusammenhang des Ausdrucks »parallel« gilt nun: $\Psi^4(\|) = \Psi^3(\|) \cup \Sigma^4(\|)$.[14]

14 | 4.1. Die Erweiterung um $\Sigma^4(\|)$ ist *konsistent*. Alle durch $\Psi^3(\|)$ bereits etablierten Verwendungszusammenhänge werden durch $\Sigma^4(\|)$ nicht berührt. Im Wesentlichen wiederholt sich hier obige Begründung: wäre $\Psi^4(\|)$ widerspruchsvoll, dann wäre bereits $\Psi^2(\|)$ inkonsistent. Dies ist nicht der Fall.
4.2. Die Erweiterung um $\Sigma^4(\|)$ ist *zweckmäßig*. Die Rede von »parallel« wollen wir im räumlichen Fall nicht nur auf Doppelkeile oder durch sie hergestellte Formen an anderen Körpern beschränken.

Die in den Beispielen veranschaulichten Erweiterungen der Verwendungszusammenhänge des Ausdrucks »parallel« haben zum Teil eine methodische Ordnung in der Reihenfolge der zu etablierenden Verwendungszusammenhänge einhalten müssen. So benötigt man die durch Beispiel eins bereitgestellte Rede, um die Verwendung im Beispiel vier etablieren zu können. Die Formulierung und Begründung von $\Sigma^4(\|)$ muß explizit auf $\Sigma^1(\|)$ (bezüglich »Passung«) und auf $\Sigma^2(\|)$ (bezüglich »formgleich«) zurückgreifen. Indes spielt es keine Rolle, ob Beispiel drei vor Beispiel vier (oder umgekehrt) eingeführt wird. Hier ist ›lediglich‹ darauf zu achten, daß der sprachliche Aufbau von $\Sigma^3(\|)$ und $\Sigma^4(\|)$ relativ zu $\Psi^2(\|)$ nicht kollabiert. Es kann jedoch kein allgemeines Rezept angegeben werden, ob und wann eine methodische Ordnung bei der Erweiterung der Verwendungszusammenhänge eingehalten werden muß. Dies ist – wie aus den Beispielen ersichtlich – im Einzelfall zu entscheiden. Es gibt jedoch auch sprachliche Erweiterungen, die auf mehr als das bisher Verwendete zurückgreifen müssen. So kann etwa der erweiterte Verwendungszusammenhang der »Transitivität der Parallelität« erst nach dem (vielmehr durch den) *Eindeutigkeitsbeweis für das Doppelkeilverfahren* etabliert werden. Alle Verwendungszusammenhänge, die ohne eine unterstellte Eindeutigkeit eingeführt werden können (die also zulässig sind), stehen als semantisch-operative Mittel für diesen Eindeutigkeitsbeweis zur Verfügung. Besonders der im Beispiel vier eingeführte Verwendungszusammenhang $\Sigma^4(\|)$ wird sich als leistungsstark für diesen Beweis erweisen.

2.7 Abstrakte Betrachtung

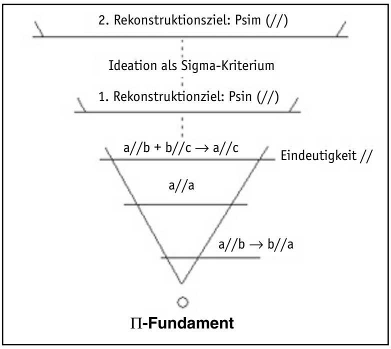
Ausgehend von den Beispielen soll nun noch einmal angegeben werden, wie sich die sukzessive Bedeutungsbestimmung in Form einer schrittweisen Bedeutungserweiterung vollzieht. Wie bereits erwähnt, ist (def$\|$) eine operative Realdefinition, d.h. es gibt bereits Verwendungszusammenhänge, die mittels der operativen Fundierung und den darauf aufbauenden Ψ-Mengen rekonstruiert werden sollen. Dies umfaßt etwa die handwerklich-

Wenn wir Ebenen an anderen Körpern hergestellt haben, die sich zueinander in einer bestimmten Lage befinden, so ist auch in diesem Fall sinnvoll danach zu fragen, ob diese Ebenen zueinander parallel sind. $\Sigma^4(\|)$ liefert uns hierfür die sprachlichen Mittel und ein operatives Kontrollkriterium, um die Frage stellen und beantworten zu können.

4.3. Die Erweiterung um $\Sigma^4(\|)$ erfolgt *methodisch*. Dies ist durch die obigen Handlungsanweisungen und der korrespondierenden Durchführung des Kontrollverfahrens sichergestellt. An keiner Stelle wurde auf ein noch nicht verfügbares Mittel vorgegriffen. Damit ist die Erweiterung um $\Sigma^4(\|)$ *zulässig*.

technischen Verwendungszusammenhänge, in denen »parallel« als Prädikator gebraucht wird. Dies sei charakterisiert durch eine Menge $\Psi^{n}(\|)$ (n fest). Der Übergang zur ebenfalls angestrebten geometrisch-mathematischen Rede von »parallel« baut auf $\Psi^{m}(\|)$ methodisch auf und bedarf zudem des Ideationsverfahrens. Das Ideationsverfahren ist ein ausschließlich sprachlich bestimmtes Sigma-Kriterium, welches uns die (zusätzlichen) Verwendungszusammenhänge in einer Menge $\Psi^{m}(\|)$ (m fest) bereitstellt (mit $\Psi^{n}(\|) \subset \Psi^{m}(\|)$). Da die Parallelität eine Äquivalenzrelation ist (sein soll), beschreiben die unteren Ψ-Mengen, in welcher Reihenfolge Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bereitgestellt werden können (siehe Abbildung 6). Während die Symmetrie bereits aufgrund von (def$\|$) allein etabliert werden kann, benötigt man für die Reflexivität bereits das Operieren auf der Bezugsebene (siehe Beispiel drei oben) und für die Transitivität sogar die Eindeutigkeit der Parallelität. Erst mit dem Nachweis der Eindeutigkeit des Doppelkeilverfahrens ist der operative Beweis erbracht, daß die Parallelität eine Äquivalenzrelation ist!

Abbildung 6: Π-*Fundament*



Das Π-Fundament enthält unter anderem das analoge Schema für die Orthogonalität (R) und das (wiederum dafür benötigte) Schema für die Ebenheit (E). Charakterisieren wir nun den Aufbau der Ψ-Mengen durch ein Rekursionsschema:

(defΨ)
1. $\Psi^{\circ}(\|) = \{(\mathrm{def}\|)\} \cup \Sigma^{\circ}(\|) = \varnothing$ ($\Sigma^{\circ}(\|)$ ist leer)
2. $\Psi^{n'}(\|) = \Psi^{n}(\|) \cup \{\Sigma^{n'}(\|)\}$

bzw., falls man (def$\|$) als $\Sigma^{\circ}(\|)$ auffaßt:

1. $\Psi^{\circ}(\|) = \{(\mathrm{def}\|)\}$
2. $\Psi^{n'}(\|) = \Psi^{n}(\|) \cup \{\Sigma^{n'}(\|)\}$

und es gilt: $\bigwedge n \in \mathbb{N}^{\circ}\ (\Psi^{n}(\|) \subset \Psi^{n'}(\|))$

Wenn durch die Bedeutungserweiterung von »parallel« durch ein entsprechendes Verwendungskriterium $\Sigma^{n'}(\|)$ eine Aussage $A(\|)$ formulierbar und verständlich wird, dann wollen wir sagen, daß $A(\|)$ relativ zum Hintergrundwissen $\Psi^{n}(\|) \cup \{\Sigma^{n'}(\|)\}$ *zulässig formulierbar* ist (formuliert werden darf) und gemäß $\Sigma^{n'}(\|)$ überprüft werden kann. Hierfür schreiben wir kurz:

$$\Psi^{n}(\|) \cup \{\Sigma^{n'}(\|)\} \vDash A(\|)$$

4.1. bedeutet somit:

$$\Psi^{n}(\|) \vDash A(\|) \Rightarrow \Psi^{n}(\|) \cup \{\Sigma^{n'}(\|)\} \nvDash \neg A(\|)$$

Wenn unter Nutzung des Verwendungskriteriums $\Sigma^{n}(\|)$ die Aussage $A(\|)$ formuliert werden darf, dann darf die Nutzung des Verwendungskriteriums $\Sigma^{n'}(\|)$ die Formulierung dieser Aussage nicht verbieten und muß den Wahrheitswert von $A(\|)$ erhalten. Die Einhaltung der Konsistenzforderung bei der Einführung von $\Sigma^{n'}(\|)$ stellt dies sicher.

Nochmals: 2) Alle im Definiens vorkommenden freien Variablen treten auch im Definiendum auf.

Kommen wir zur Begründung von 2) für operative Definitionen, da bei der obigen Diskussion (unter 2.4) für explizite Definitionen noch Vorbehalte bestanden. Die Forderung 2) ist für jede Ebene der Verwendungszusammenhänge $\Psi^{n}(\|)$ erfüllt. Wie ist hier »Substituierbarkeit« zu verstehen? Für explizite Definitionen bezog sich dies auf die Bedeutungsgleichheit von Definiendum und Definiens in jedem Verwendungszusammenhang (»vollständige Festlegung der Bedeutung«). Die sukzessive Erweiterung der Verwendungszusammenhänge für $(\mathrm{def}\|)$ läßt nun die Rede von der »vollständigen Festlegung« in einem angemessenen Verständnis verständlich werden: Relativ zu jeder Ebene $\Psi^{n}(\|)$ sind die zulässigen Verwendungszusammenhänge vollständig festgelegt, denn $\Psi^{n}(\|)$ ist stets genau angebbar. Sprechen wir bei $(\mathrm{def}\|)$ von der beliebigen Substituierbarkeit des Ausdrucks »parallel« durch das Definiens, so bedeutet dies nichts anderes, als daß für alle Verwendungszusammenhänge von $\Psi^{n}(\|)$ der Ausdruck »parallel« ersetzt werden kann durch die Rede des Zutreffens/Nicht-Zutreffens der relevanten (etablierten) Sigma-Kriterien. Die Rede von »alle« bleibt stets gebunden an die konstruierte Ψ-Menge. Eine Rede von »alle« unabhängig dieser ist indes unzulässig, da ohne Angabe einer konstruktiven Ψ-Menge diese Rede indefinit wäre.

3. Die Eindeutigkeit der Parallelität

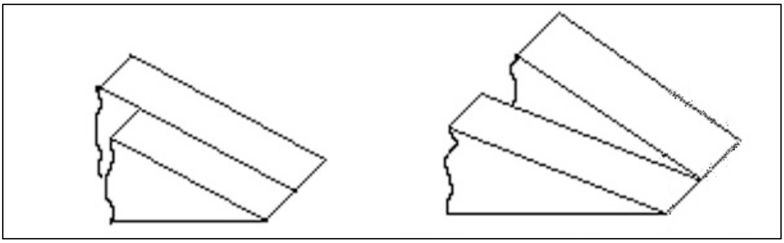
Ausgehend von den im Abschnitt 2 bereitgestellten poietischen und sprachlichen Mitteln auf der Basis der operativen Parallelendefinition wird in diesem Teil der noch ausstehende Eindeutigkeitsbeweis geführt. Da nur jene poietischen und sprachlichen Mittel, welche ohne Eindeutigkeit etabliert werden können, auch für den Eindeutigkeitsbeweis verwendet werden dürfen, ist vorher zu klären, welche Mittel zusätzlich und zulässig zu verwenden sind. Im Hinblick auf die explizit zu bestimmende Menge aller zu benutzenden Verwendungszusammenhänge ist zu klären, durch welchen Sachverhalt die Eindeutigkeitsbehauptung repräsentiert wird. Bei einem entsprechenden Beweis ist wiederum darauf zu achten, daß an keiner Stelle des Beweisversuchs ein Mittel verwendet wird, das seinerseits die Eindeutigkeit bereits voraussetzen würde.

3.1 Die sprachlichen Mittel

Der Großteil der für den Eindeutigkeitsbeweis benötigten Mittel wurde bereits durch die Beispiele eins, zwei und vier (aus 2.6) bereitgestellt. Die Beispiele eins und zwei werden weiterhin durch die Verwendungskriterien $\Sigma^1(\|)$ bzw. $\Sigma^2(\|)$ repräsentiert. Das Verwendungskriterium des vierten Beispiels bezeichnen wir indes jetzt mit $\Sigma^3(\|)$. Die Erwähnung der erstgenannten Kriterien besitzt hierbei nicht zuletzt einen Vollständigkeitscharakter, denn im Vollzug des Beweises wird vor allem mit $\Sigma^3(\|)$ operiert, das jedoch seinerseits auf $\Sigma^1(\|)$ und $\Sigma^2(\|)$ zurückgreifen muß. $\Sigma^1(\|)$ geht trivialerweise in den gesamten Beweisaufbau ein, da das Operieren auf einer ebenen Bezugsunterlage – und damit die »Passung« zwischen einer Keilflanke und einer ebenen Unterlage – unverzichtbar ist. $\Sigma^2(\|)$ wird indes in einigen Schritten des Beweises ausdrücklich erwähnt, da die Erzeugung von (in relevanter Hinsicht) formgleichen Kopien erweiterte poietische und sprachliche Handlungsmöglichkeiten bereitstellt. Die Menge der Verwendungszusammenhänge bis einschließlich $\Sigma^3(\|)$ bezeichnen wir entsprechend mit $\Psi^3(\|)$.

Die einzige Erweiterung, die noch vorzunehmen ist, betrifft die Rede von »gleichen bzw. verschiedenen Öffnungswinkeln« von Keilen. Da diese Rede jedoch nicht an die Sigma-Kriterien für die Parallelität (semantisch) gebunden ist, kann sie unabhängig von $\Psi^3(\|)$ etabliert werden. Betrachten wir hierzu zwei beliebige Keile k^1 und k^2. Die Rede von »gleichen bzw. verschiedenen Öffnungswinkeln« kann dadurch operativ fundiert werden, daß man die beiden Keile k^I und k^2 auf eine gemeinsame ebene Unterlage auflegt, ein Querschnittspaar zur Passung und ihre Zentralkanten in eine gemeinsame Kantenlage bringt. Spannen die nun verbliebenen freien Keilflanken von k^I und k^2 eine gemeinsame Ebene auf, dann sind die Keile k^I und k^2 »öffnungswinkelgleich«, andernfalls »öffnungswinkelverschieden« (siehe Abbildung 7). Wir wollen dieses Verwendungs- und Kontrollkriterium mit $\Sigma(\nabla)$ bezeichnen.

Abbildung 7



3.2 Nochmals »formgleich«

Obgleich im Zusatz zum zweiten Beispiel in 2.6 eine Verwendungsweise von »formgleich« in bezug auf die Parallelität bereits etabliert wurde, ist es zweckmäßig, präziser darauf einzugehen, denn:

a) die Rede von »formgleich« beschränkt sich nicht auf die Grundform der Parallelität, sondern umfaßt in dem bereits etablierten Hintergrundwissen Π (siehe Kriterium 4.4. in 2.6) mindestens noch die Rede von der Formgleichheit für die Grundform der Ebenheit und die für die Grundform der Orthogonalität,
b) »formgleich« ist in bezug auf die Prädikatoren für die (geometrischen) Grundformen ein Metaprädikator, der Körpern stets nur relativ zu einem Formprädikator zu- oder abgesprochen werden kann,
c) Kontrollkriterien zum Feststellen einer »Formgleichheit« sind stets gebunden an die zugrunde gelegte Form,
d) das in 2.6 angegebene Kontrollkriterium – das Aufspannen einer gemeinsamen Ebene von Körpern auf einer gemeinsamen ebenen Unterlage – ist erst einmal nur ein Kriterium zur Überprüfung der »Formgleichheit« zwischen der Form an einem Körper und einer in relevanter Hinsicht ununterscheidbaren Kopie, d.h. die kopierte Form ist poietisch und (die Rede über sie) semantisch an ein Original (bzw. an die Rede über dieses) gebunden,

e) die »Formgleichheit« von Doppelkeilen ist semantisch primär an das Doppelkeilverfahren und damit an die Herstellung von »öffnungswinkelgleichen« Keilen gebunden und unabhängig von der relativen »Höhe« der Keilflanken zueinander,
f) die Relation der »Formgleichheit« soll alle Bedingungen für eine Äquivalenzrelation erfüllen, wobei
g) die transitive Anwendung eines relevanten Kontrollkriteriums allererst die »Formgleichheit« (bezüglich eines Formprädikators) sicherstellt.

Der Ausdruck »formgleich« soll wie folgt (syntaktisch) definiert werden: *(defφ) Wir bezeichnen zwei Körper k^1 und k^2 hinsichtlich der Form $\mathfrak{F}$ und des Kontrollkriteriums $C\mathfrak{F}(*,+)$ als formgleich, genau dann wenn es einen weiteren Körper k^3 gibt, so daß aus der Gültigkeit von $C\mathfrak{F}(k^1, k^3)$ und $C\mathfrak{F}(k^2, k^3)$ die Gültigkeit von $C\mathfrak{F}(k^1, k^2)$ folgt.*

(defφ) ist erst einmal nur eine Aussageform, da $\mathfrak{F}$ und $C\mathfrak{F}(*,+)$ in dieser Fassung unbestimmt bleiben (k^1 und k^2 sind indes freie Variablen). Dies ist jedoch zweckmäßig (und erforderlich), da die Rede von »formgleich« ohne die Verwendung eines Formprädikators sinnlos ist. In diesem Verständnis genügt (defφ) den obigen Punkten b) und c). Die semantische Bindung zwischen $\mathfrak{F}$ und $C\mathfrak{F}(*,+)$ kann durch (defφ) nicht weiter spezifiziert werden. Die Bestimmung von zulässigen Kontrollkriterien relativ zu einem Formprädikator muß individuell erfolgen und orientiert sich an den bereits etablierten sprachlichen und poietischen Mitteln, die jedoch im Einzelfall unterschiedlich ausfallen können. An die Existenz des weiteren Körpers k^3 wurden keine zusätzlichen Bedingungen geknüpft, da durch die Erfüllung des Antezedens – $C\mathfrak{F}(k^1, k^3)$ und $C\mathfrak{F}(k^2, k^3)$ – festgelegt wird, welche (Form-)Eigenschaften k^3 besitzen muß. Dies wird durch das $C\mathfrak{F}$-Kontrollkriterium reglementiert.

Ein Kontrollkriterium für die Ebenheit

In bezug auf die Ebenheit besteht ein Kontrollkriterium $C\mathfrak{E}(*,+)$ in der frei verschiebbaren, keine Richtung bevorzugenden »Passung« der Ebenen * und +, d.h. wir bezeichnen zwei Ebenen e^1 und e^2 als »formgleich«, genau dann wenn es eine Ebene e^3 gibt, so daß aus der Gültigkeit von $C\mathfrak{E}(e^1, e^3)$ und $C\mathfrak{E}(e^2, e^3)$ auch die Gültigkeit von $C\mathfrak{E}(e^1, e^2)$ folgt. Die transitive Anwendung von $C\mathfrak{E}(*,+)$ besagt also nichts anderes, als daß aus der jeweiligen (frei verschiebbaren, keine Richtung bevorzugenden) Passung von zwei Ebenen mit einer dritten auch die (frei verschiebbare, keine Richtung bevorzugende) Passung untereinander folgt. Ist dies nicht der Fall, dann ist mindestens eine der Oberflächen keine Ebene.

Ein Kontrollkriterium für die Orthogonalität

In bezug auf die Orthogonalität besteht ein Kontrollkriterium $C\mathfrak{O}(*,+)$ in der »Passung« der freien Keilflanken der Keile * und +, wobei die jeweils zweite Keilflanke auf einer gemeinsamen ebenen Bezugsunterlage aufliegt. Wir bezeichnen zwei rechte Keile k^1 und k^2 als »formgleich«, genau dann wenn es einen rechten Keil k^3 gibt, so daß aus der Gültigkeit von $C\mathfrak{O}(k^1, k^3)$ und $C\mathfrak{O}(k^2, k^3)$ die Gültigkeit von $C\mathfrak{O}(k^1, k^2)$ folgt. Die transitive Anwendung von $C\mathfrak{O}(*,+)$ besagt also nichts anderes, als daß aus der jeweiligen Passung der freien Keilflanken von zwei rechten Keilen mit der freien Keilflanke eines weiteren rechten Keils (auf einer gemeinsamen ebenen Bezugsunterlage) auch die Passung der freien Keilflanken untereinander folgt. Ist dies nicht der Fall, dann ist mindestens einer der Keile kein rechter.

Ein Kontrollkriterium für die Parallelität

In bezug auf die Parallelität besteht $C\|(*,+)$ in $\{\Sigma^2(\|)\} \cup \{\Sigma^3(\|)\}$. Wir bezeichnen zwei Doppelkeile d^1 und d^2 als »formgleich«, genau dann wenn es eine Ebene e gibt,[15] so daß aus der Gültigkeit von $C\|(d^1, e)$ und $C1\|(d^2, e)$ die Gültigkeit von $C\|(d^1, d^2)$ folgt. »Formgleich« bedeutet in diesem Fall also nichts anderes, als daß die Lage der freien Keilflanken (Ebenen) von d^1, d^2 und e zueinander gemäß $\Sigma^2(\|)$ oder $\Sigma^3(\|)$ »parallel« sind:

(def$\varphi\|$) Wir bezeichnen zwei Doppelkeile d^1 und d^2 als »formgleich«, genau dann wenn es eine Ebene e gibt, so daß aus der Parallelität der freien Keilflanke von d^1 und der Ebene e (gemäß $\{\Sigma^2(\|)\} \cup \{\Sigma^3(\|)\}$) sowie aus der Parallelität der freien Keilflanke von d^2 und der Ebene e (gemäß $\{\Sigma^2(\|)\} \cup \Sigma^3\{(\|)\}$) die Parallelität der freien Keilflanken von d^1 und d^2 (gemäß $\{\Sigma^2(\|)\} \cup \{\Sigma^3(\|)\}$) folgt.

Ist dies nicht der Fall, dann ist mindestens eine freie Keilflanke (Ebene) zu den beiden anderen Ebenen (Keilflanken) nicht parallel. Man sieht bereits anhand des $C\|$-Kriteriums, daß man für den Nachweis der Formgleichheit von Doppelkeilen maßgeblich auf die relative Lage von Ebenen angewiesen ist. Oben wurden zwar freie Keilflanken von Doppelkeilen (d^1 und d^2) zur Formulierung des $C\|$-Kriteriums verwendet, jedoch kann die Formulierung des Kontrollkriteriums auf die Rede von Doppelkeilen verzichten und allgemein mit der Rede über Ebenen erfolgen.[16]

15 | Dies kann folglich auch die freie Keilflanke eines weiteren Doppelkeils sein.

16 | Vgl. Wille (2002: 203f.).

3.3 Zur Rede über den »formgleichen Umbau« von Doppelkeilen

Janichs Satz 1 in Janich (1992: 78) besagt, daß Doppelkeile unter Wahrung der Formgleichheit »umgebaut« werden können. Die Rede vom »Umbau« betrifft nichts anderes als die operative Gleichstellung von Keilen eines Doppelkeils und ist bereits in der Charakterisierung des Doppelkeilbegriffs verortet. Mit dem Doppelkeilverfahren werden in einem Schritt »öffnungswinkelgleiche« Keile erzeugt, die dann in die bereits präzisierte Wechsellagebeziehung gebracht werden. Da in diesen von Janich ausgeführten Handlungsanweisungen keiner der erzeugten Keile einen Namen – und damit einen ausgezeichneten Status – erhalten hat, besitzen die Handlungsanweisungen gegenüber den erzeugten »öffnungswinkelgleichen« Keilen einen allgemeinen Charakter. Unabhängig der je individuellen (Aus-)Wahl liegt als Resultat des Doppelkeilverfahrens ein Doppelkeil vor, d.h. zwischen den erzeugten Keilen bestehen in relevanter Hinsicht keine operativen Unterschiede. Dies wird explizit in Janichs Satz 1 in Janich (1992) festgehalten.

Damit kann einem möglichen Mißverständnis vorgebeugt werden, auf welches bereits im Punkt e) unter 3.2 Bezug genommen wurde: die Rede von der »Formgleichheit von Doppelkeilen« ist gemäß (def$\varphi\|$) semantisch unabhängig von der Größe der Passungsfläche der in Wechsellage befindlichen Keile eines Doppelkeils. Weder nach den Handlungsanweisungen des Doppelkeilverfahrens noch nach den darauf aufbauenden Sigma-Kriterien für die Parallelität wurde vorausgesetzt oder gar unterstellt, daß die Passungsfläche zwischen den Keilen »maximal«, »minimal« oder ähnliches ist. Die relevante Form eines Doppelkeils – die parallelen (freien) Keilflanken – ist operativ gebunden an die Herstellung von öffnungswinkelgleichen Keilen und der bereits ausgeführten Wechsellagebeziehung. Doch die Charakterisierung der Wechsellagebeziehung sagt lediglich etwas darüber aus, daß sich die Keile mit je einer Keilflanke in »Passung« befinden müssen. Wie »groß« resp. wie »klein« diese gemeinsame Passungsfläche sein soll, wird durch die Handlungsanweisungen nicht normiert. Die Größe der Passungsfläche zwischen den Keilen trägt nichts bezüglich der Lage der freien Keilflanken zueinander aus. Kurz: Durch die entsprechende Handlungsanweisung des Doppelkeilverfahrens muß lediglich sichergestellt werden, daß »Passung« vorliegt. Dies ist der Fall.

Wird nun einer der beiden Keile eines Doppelkeils (gemäß $\Sigma(\nabla)$) durch einen öffnungswinkelgleichen Keil substituiert, dann besitzt das Resultat dieser Substitution in relevanter Hinsicht dieselbe Form wie der Ausgangsdoppelkeil, denn die Substitution ist gegenüber den einzig relevanten Kriterien – Öffnungswinkelgleichheit und Wechsellagebeziehung der Keile – invariant.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sollte nochmals festgestellt werden, daß unter der Rede von der »Formgleichheit von Doppelkeilen« nicht mehr aber auch nicht weniger zu verstehen ist, als (def$\varphi\|$). Mit der Rede von »formgleich« wird also nicht auf weitere individuelle Aspekte der Keile – »Größe« der Passungsfläche, Länge der Keilflanken etc. – Bezug genommen. Ausschließlich die relevanten Kriterien – Öffnungswinkelgleichheit und Wechsellagebeziehung – sind zu berücksichtigen, um eine mögliche Formgleichheit nachzuweisen. Sind diese Kriterien durch entsprechende poietische Handlungen erfüllt, dann besitzt auch das Herstellungsresultat parallele (freie) Keilflanken bzw. Ebenen.

3.4 Präzisierung der Eindeutigkeitsforderung

Durch (def$\varphi\|$) wurde normiert, was unter der »Formgleichheit von Doppelkeilen« zu verstehen ist. Jeder Doppelkeil liefert gemäß (def$\|$) parallele freie Keilflanken. Die Eindeutigkeitsbehauptung – die dann wahr ist, wenn der entsprechende Eindeutigkeitsbeweis gelungen ist – besteht in dem Sachverhalt, daß jede regelgeleitete, gelungene (und damit ungestörte) Aktualisierung des Schemas des Doppelkeilverfahrens zu Resultaten führt, die hinsichtlich der Grundform der Parallelität ununterscheidbar sind. Das Kriterium zum Feststellen dieser Formgleichheit ist durch (def$\varphi\|$) festgelegt. Es ist also nachzuweisen, daß (def$\varphi\|$) für alle Doppelkeile erfüllt ist. Die nun zu beweisende Eindeutigkeitsbehauptung lautet somit:

Alle Doppelkeile erfüllen (def$\varphi\|$).

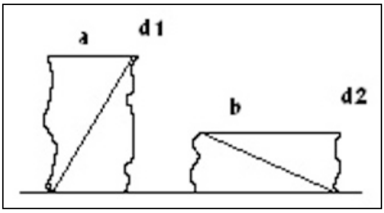
Die Eindeutigkeitsbehauptung kann auf verschiedenen Wegen bewiesen werden, denn es wird durch das Antezedens von (def$\varphi\|$) nichts darüber ausgesagt, durch welchen individuell charakterisierten Sachverhalte $C\|(d^1, e)$ und $C\|(d^2, e)$ erfüllt werden. Es muß ja lediglich sichergestellt sein, daß $d^1\|e$ und $d^2\|e$ gemäß den Verwendungszusammenhängen von $\Psi^3(\|)$ gilt. Ist dies der Fall, dann ist zu zeigen, daß der je daraus resultierende Sachverhalt das $C\|$-Kriterium für d^1 und d^2 erfüllt.

3.5 Ein Eindeutigkeitsbeweis

Sachverhaltsbestimmung: Analog zu Janich (1992) gehen wir von zwei beliebigen Doppelkeilen d^1 und d^2 aus, bei denen sich je eine (ehemals freie) Keilflanke $d^{1\ulcorner 1\urcorner}$ und $d^{2\ulcorner 1\urcorner}$ mit einer gemeinsamen ebenen Unterlage u in »Passung« befindet (siehe Abbildung 8).

Nach $\Sigma^1(\|)$ gilt für die verbliebenen freien Keilflanken $d^{1\ulcorner 2\urcorner}$ (im Bild: a) und $d^{2\ulcorner 2\urcorner}$ (im Bild: b): $d^{1\ulcorner 2\urcorner}\|u$ und $d^{2\ulcorner 2\urcorner}\|u$. Damit ist das Antezedens von (def$\varphi\|$) erfüllt, denn gemäß $\Sigma^1(\|)$ gilt $C\|(d^1, u)$ und $C\|(d^2, u)$. Nach dem

Abbildung 8



Bezugsunterlage u a//u und b//u; a//b?

$C\|$-Kriterium für den Nachweis der Formgleichheit ist zu zeigen, daß dann $d^{1\ulcorner 2\urcorner} \| d^{2\ulcorner 2\urcorner}$ gilt, d.h. $C\|(d^1, d^2)$ und damit das Sukzedens von (def$\varphi\|$) erfüllt ist. Im Unterschied zum Beweisansatz von Janich (1992) (dort die Heuristik des Widerspruchsbeweises) wird der Beweis direkt geführt, der sich im Poietischen unmittelbar andemonstrieren läßt. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

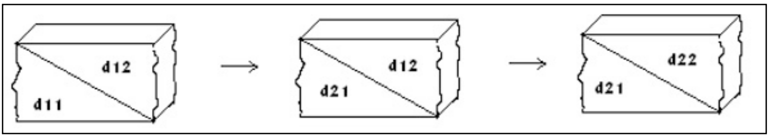
erster Fall: die Keile des Doppelkeils d^1 sind »öffnungswinkelgleich« zu den Keilen des Doppelkeils d^2

zweiter Fall: die Keile des Doppelkeils d^1 sind »öffnungswinkelverschieden« zu den Keilen des Doppelkeils d^2

erster Fall

Da die Keile der Doppelkeile d^1 und d^2 gemäß $\Sigma(\nabla)$ öffnungswinkelgleich sind, können sie unter Wahrung der Formgleichheit wechselseitig substituiert werden, da sie in relevanter Hinsicht (hinsichtlich des Öffnungswinkels) ununterscheidbar sind. Bezeichne nun d^{11} und d^{12} die Keile von d^1 und d^{21} sowie d^{22} die Keile von d^2. Betrachten wir den Doppelkeil d^1: ohne Einschränkung liegt der Keil d^{11} in Wechsellage unter dem Keil d^{12}. Wir ersetzen nun d^{11} durch den in relevanter Hinsicht (hinsichtlich des Öffnungswinkels) ununterscheidbaren Keil d^{21} (siehe hierzu und folgend Abbildung 9).

Abbildung 9



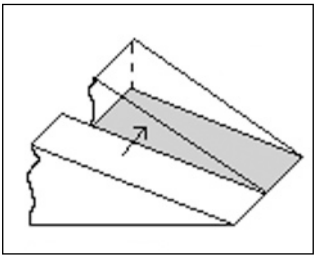
Doppelkeil d^1 Doppelkeil $d^{1'}$ Doppelkeil $d^{1''} = d^2$

Den so erzeugten Doppelkeil bezeichnen wir kurz mit $d^{1'}$. $d^{1'}$ ist zu d^1 formgleich, da die freien Keilflanken von d^1 und $d^{1'}$ gemäß $\Sigma^2(\|)$ eine gemeinsame Ebene aufspannen (sie sind identisch). Den Keil d^{12} ersetzen wir folgend durch den öffnungswinkelgleichen Keil d^{22}. Der so entstandene Doppelkeil wird mit $d^{1''}$ bezeichnet. $d^{1''}$ ist zu $d^{1'}$ und mithin auch zu d^1 formgleich, da $d^{1'}$ und $d^{1''}$ gemäß $\Sigma^2(\|)$ eine gemeinsame Ebene aufspannen (auch sie sind identisch). $d^{1''}$ ist jedoch nach Konstruktion identisch mit d^2. Folglich spannt auch die freie Keilflanke von d^2 mit der freien Keilflanke von d^1 gemäß $\Sigma^2(\|)$ eine gemeinsame Ebene auf. Es gilt also $C\|(d^1, d^2)$, und (def$\varphi\|$) ist erfüllt. Damit ist dieser Fall abgeschlossen.

zweiter Fall

Ohne Einschränkung gehen wir davon aus, daß die Keile d^{11} und d^{12} des Doppelkeils d^1 gemäß $\Sigma(\Delta)$ einen »größeren Öffnungswinkel« besitzen als die Keile d^{21} und d^{22} des Doppelkeils d^2. Wir legen einen der beiden Keile von d^2 mit einer der beiden Keilflanken auf eine ebene Unterlage auf. Analog dem Vorgehen zur Etablierung der Rede über »unterschiedliche Öffnungswinkel« legen wir einen der beiden Keile von d^1 mit einer Keilflanke ebenfalls auf die Unterlage auf, so daß die Querschnitte der Keile zur Passung gebracht werden und die Zentralkanten eine gemeinsame Kantenlage aufweisen. Nun vollziehen wir entlang – in ebener Verlängerung – der freien Keilflanke des Keils von d^2 einen ebenen Schnitt durch den Keil von d^1 (siehe Abbildung 10).

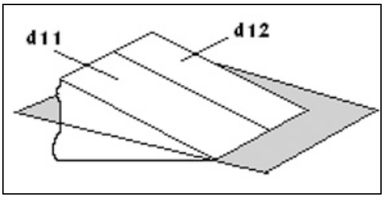
Abbildung 10



Als Resultat erhalten wir gemäß $\Sigma(\nabla)$ – und analog dem Verwendungszusammenhang von $\Sigma^2(\|)$ – eine in relevanter Hinsicht formgleiche Kopie des Keils von d^2. Mit dem Schnitt entlang (in ebener Verlängerung) der freien Keilflanke des Keils von d^2 erzeugen wir eine gemeinsame Ebene zwischen der freien Keilflanke und der erzeugten Ebene. Nach der Rede über die »Gleichheit bzw. Verschiedenheit von Öffnungswinkeln« sind diese nun gemäß Σ(Δ) gleich, da die freien Keilflanken eine – nach Konstruktion – gemeinsame Ebene aufspannen. Durch den Schnitt wird der Keil von d^1 geteilt. Eines der Keilstücke ist nun eine (öffnungswinkelgleiche) Kopie des Keils von d^2.

Dieses Vorgehen wiederholen wir auch für den zweiten Keil von d^1, d.h. wir erzeugen eine weitere Kopie des Keils von d^2, die ebenfalls gemäß Σ(∇) zu dem Keil von d^2 öffnungswinkelgleich ist. Über die verbliebenen, ebenfalls miterzeugten Keilstücke der Keile von d^1 wissen wir nun, daß sie öffnungswinkelgleich sein *müssen*. Beide Keile von d^1 sind nach Konstruktion öffnungswinkelgleich. Selbiges gilt für beide Keile von d^2. Mit dem angegebenen Verfahren haben wir öffnungswinkelgleiche Kopien der Keile von d^2 hergestellt, d.h. der Öffnungswinkel der Keile von d^1 wurde um den Öffnungswinkel der Keile von d^2 »verkleinert«. Auch die Öffnungswinkel der verbliebenen Keilstücke der Keile von d^1 sind öffnungswinkelgleich. Nach Passung der beiden (bearbeiteten) Keile von d^1 an den Querschnitten und der gemeinsamen Kantenlage der Keilspitzen, spannen die nun verdeckten (erzeugten) Schnittebenen nach Konstruktion eine gemeinsame Ebene auf (siehe Abbildung 11).

Abbildung 11



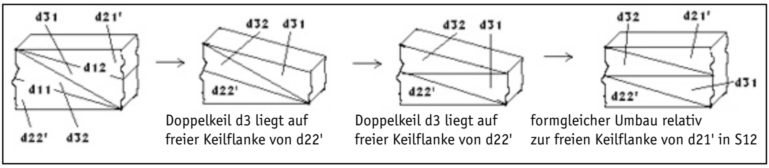
Auf eben dieser Ebene liegen nun jeweils die verbliebenen Keilstücke auf, deren freie Keilflanken nun ihrerseits nach Konstruktion des Doppelkeils d^1 gemäß Σ(∇) eine gemeinsame Ebene aufspannen. Damit ist das Kontrollkriterium Σ(∇) für die »Gleichheit der Öffnungswinkel« erfüllt. Die verbliebenen miterzeugten Keilstücke sind gemäß Σ(∇) öffnungswinkelgleich.

Damit haben wir operativ die Herstellbarkeit von weiteren Doppelkeilen sichergestellt, denn sowohl die hergestellten Kopien der Keile von d^2 als auch die verbliebenen Keilstücke von d^1 erfüllen paarweise die Doppelkeileigenschaft und bilden in jeweiliger Wechsellage einen Doppelkeil. Während die hergestellten Kopien der Keile von d^2 ihrerseits in Wechsellage eine Kopie des Doppelkeils von d^2 darstellen, haben wir mit den verbliebenen Keilstücken von d^1 einen neuen Doppelkeil d^3 hergestellt. Den Aufbau von d^1 wollen wir wie folgt charakterisieren: seien $d^{21'}$ und $d^{22'}$ die beiden hergestellten Kopien der Keile von d^2. Die beiden verbliebenen Keilstücke von d^1

bezeichnen wir mit d^{31} und d^{32}. Die Paare $\{d^{21'}, d^{31}\}$ und $\{d^{22'}, d^{32}\}$ repräsentieren die Keile d^{11} und d^{12}. Da der – unter Wahrung der Formgleichheit – bearbeitete Doppelkeil d^{1} nun nicht mehr aus zwei, sondern aus vier Keilen besteht, wollen wir ihn kurz als »Mehrfachdoppelkeil« bezeichnen. Um die Darstellung möglichst übersichtlich zu gestalten, reden wir von »unten« bzw. »oben« immer relativ zur Bezugsunterlage u. Wenn demnach der Keil d^{11} unter dem Keil d^{12} in Wechsellage liegt, so bedeutet das nun, daß $d^{21'}$ und d^{31} unter $d^{22'}$ und d^{32} in Wechsellage liegen. Da für die Erzeugung der Schnitte durch d^{11} und d^{12} keine Keilflanke ausgezeichnet wurde, ist die jeweilige Lagebeziehung zwischen $d^{21'}$ und d^{31} bzw. $d^{22'}$ und d^{32} kommutativ.

Gehen wir also von dem Sachverhalt aus, daß der Keil $\{d^{22'}, d^{32}\}$ in Wechsellage unter dem Keil $\{d^{21'}, d^{31}\}$ liegt. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß sich die Keile d^{31} und d^{32} in Wechsellage direkt berühren (siehe Abbildung 12). Entfernen wir nun $d^{21'}$, so liegt der Doppelkeil d^{3} (bestehend aus d^{31} und d^{32}) auf der (nicht mehr freien) Keilflanke von $d^{22'}$ auf. Da Doppelkeile nach Janich (1992) formgleich (relativ zur Unterlage) umgebaut werden können, vertauschen wir d^{31} und d^{32} (für diese und die folgenden Ausführungen siehe Abbildung 12).

Abbildung 12



Da an der Form des Mehrfachdoppelkeils nach Entfernung von $d^{21'}$ durch den Umbau nichts verändert wurde, erhalten wir durch Wiederherstellung der alten Lage von $d^{21'}$ einen formgleichen Mehrfachdoppelkeil, d.h. die freie Keilflanke von $d^{21'}$ ist zur Unterlage u parallel. Es liegt nun folgender Sachverhalt vor: $d^{22'}$ liegt in Wechsellage zu d^{31}. Letzterer befindet sich zusätzlich in Wechsellage zu d^{32} und dieser wiederum in Wechsellage zu $d^{21'}$. Der nächste Beweisschritt besteht nun in der Separierung der Doppelkeile $d^{2'}$ und d^{3}, d.h. es muß gezeigt werden, daß der Mehrfachdoppelkeil unter Wahrung der Formgleichheit so umgebaut werden kann, daß der Doppelkeil $d^{2'}$ unter dem Doppelkeil d^{3} liegt. Hierfür sind nun wiederum zwei Fälle zu unterscheiden:

dritter Fall: $d^{21'}$ und d^{31} (und somit auch $d^{22'}$ und d^{32}) besitzen denselben Öffnungswinkel *vierter Fall:* $d^{21'}$ und d^{31} (und somit auch $d^{22'}$ und d^{32}) besitzen verschiedene Öffnungswinkel

dritter Fall:

Besitzen $d^{21'}$, d^{31}, $d^{22'}$ und d^{32} denselben Öffnungswinkel, dann sind sie in relevanter Hinsicht ununterscheidbar und können unter Wahrung der Formgleichheit des Mehrfachdoppelkeils beliebig gegeneinander substituiert werden.[17] Mit dem Umbau zwischen $d^{21'}$ und d^{31} haben wir folgenden Sachverhalt realisiert: d^{32} liegt nun in Wechsellage unter d^{31}, und $d^{22'}$ liegt in Wechsellage unter $d^{21'}$. Damit liegt der Doppelkeil $d^{2'}$ unter dem Doppelkeil d^{3}.

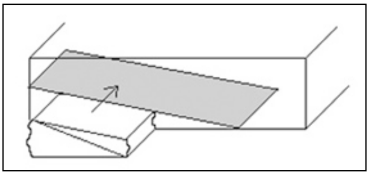
vierter Fall:

Im Fall der Öffnungswinkelverschiedenheit kann von dem Mittel des formgleichen Umbaus nicht Gebrauch gemacht werden. Statt dessen wird die von Janich (1992: 77, 2001: 66f.) etablierte Keil-Kerbe-Invarianz (KKI) benutzt. Dafür muß sichergestellt werden, daß die relevanten Körper (die in Wechsellage befindlichen öffnungswinkelverschiedenen Keile) *als* Keile behandelt werden dürfen.

Betrachten wir hierzu ohne Einschränkung die in Wechsellage befindlichen Keile $d^{21'}$ und d^{32}. Da $d^{21'}$ und d^{32} verschiedene Öffnungswinkel besitzen, repräsentieren sie nach den poietischen und sprachlichen Mitteln keinen Doppelkeil, d.h. die Keilflanken der in Wechsellage befindlichen Keile sind weder nach (def$\|$) noch nach einer etablierten sprachlichen Erweiterung von $\Psi(\|)$ zueinander parallel. Dies bedeutet, daß die Keilflanken eine gemeinsame Kante erzeugen könnten. Der verwendete Konjunktiv betrifft den Sachverhalt, daß die in Wechsellage befindlichen Keile erst einmal keine gemeinsame Keilspitze besitzen. Eine solche Keilspitze kann jedoch an einer hergestellten (formgleichen) Kopie aufgewiesen werden. Hierfür betrachte man wiederum jene Schnitthandlung, die oben bereits erläutert wurde. Man lege den Körper, der aus $d^{21'}$ und d^{32} besteht, mit einer freien Keilflanke auf eine ebene Unterlage auf. Jener Körper, an dem eine Kopie hergestellt werden soll, muß bereits zwei zueinander orthogonale Ebenen aufweisen. Eine der beiden Ebenen wird ebenfalls mit der Unterlage in Passung gebracht und die andere mit dem Querschnitt der in Wechsellage befindlichen Keile. Nun vollzieht man entlang der freien Keilflanke (in ebener Verlängerung) einen Schnitt durch den Körper und verlängert diesen, bis der Schnitt die ebene Unterlage berührt (siehe Abbildung 13).

17 | Es wiederholt sich hier das Vorgehen des ersten Falles.

Abbildung 13

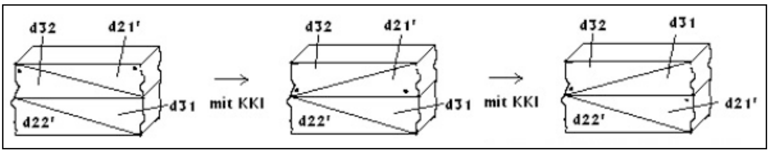


Zwei in Wechsellage befindliche öffnungswinkelverschiedene Keile besitzen zusammen die Keileigenschaft, d.h., der Keil kann so verlängert werden, dass die Zentralkante die Bezugsunterlage schneidet.

Die Berührung des Schnittes mit der Unterlage wird durch die fehlende Drehinvarianz des zu kopierenden Körpers sichergestellt, denn die Keilflanken der in Wechsellage befindlichen Keile sind nicht zueinander parallel. Die durch den Schnitt erzeugte Kante zwischen Schnitt- und Unterlagenebene ist die zu konstruierende Keilspitze. Da der zu kopierende Körper mit seiner Kopie gemäß $\Sigma(\nabla)$ und $\Sigma^2(\|)$ eine gemeinsame (erzeugte) Ebene aufspannt und die Kopie eine Öffnungswinkel besitzt, kann mit den sprachlichen Mitteln von einer »Öffnungswinkelgleichheit« zwischen dem Körper $\{d^{32}, d^{21'}\}$ und seiner Kopie gesprochen werden. Da Körper und Kopie nun in relevanter Hinsicht ununterscheidbar sind, repräsentieren die in Wechsellage befindlichen Keile $d^{21'}$ und d^{32} (sowie $\{d^{22'}, d^{31}\}$) einen »Keil«. Somit kann für die Keile $\{d^{21'}, d^{32}\}$ und $\{d^{22'}, d^{31}\}$ das Mittel der KKI zulässig genutzt werden.

Betrachten wir nun wieder den Mehrfachdoppelkeil $\{d^{22'}, d^{31}, d^{32}, d^{21'}\}$. Legen wir auf die freie Keilflanke von $d^{21'}$ einen beliebigen Körper mit einer ebenen Oberfläche auf, so daß sich die Ebenen in Passung befinden, so befindet sich der Keil $\{d^{21'}, d^{32}\}$ in Passung mit einer erzeugten Kerbe (für diese und die folgenden Ausführungen siehe Abbildung 14).

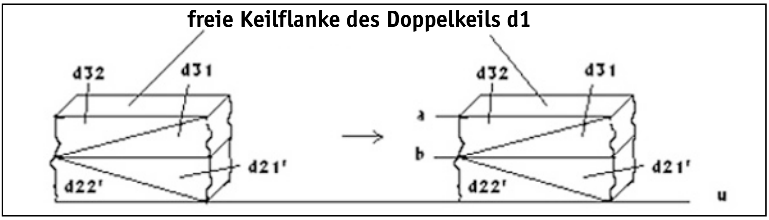
Abbildung 14: Umbau des Mehrfachkeils mittels Keil-Kerbe-Invarianz (KKI)



Nach der KKI paßt der Keil unter Wahrung der Formgleichheit auch nach einer Drehung wieder in die Kerbe. Nach der Drehung gilt nun für den Mehrfachdoppelkeil: $\{d^{22'}, d^{31}, d^{21'}, d^{32}\}$. Nach Konstruktion befinden sich nun die Keile $d^{21'}$ und d^{31} in Gleichlage, d.h. sie repräsentieren nach Schnittkonstruktion einen Ursprungskeil des Doppelkeils d^1. Nach einer nochmals auszuführenden Drehung des Keils $\{d^{21'}, d^{31}\}$ ist gemäß der KKI die Passung und die Wahrung der Formgleichheit sichergestellt. Für den Mehrfachdoppelkeil gilt nun: $\{d^{22'}, d^{21'}, d^{31}, d^{32}\}$, d.h. $d^{22'}$ liegt in Wechsellage unter $d^{21'}$ und d^{31} in Wechsellage unter d^{32}. Damit ist auch dieser Fall abgeschlossen, denn der Doppelkeil $d^{2'}$ liegt nach dem Umbau des Mehrfachdoppelkeils unter dem Doppelkeil d^3.

Wir substituieren nun die Keile $d^{21'}$ und $d^{22'}$ des Doppelkeils $d^{2'}$ durch die in relevanter Hinsicht ununterscheidbaren Keile d^{21} und d^{22} des Doppelkeils d^2 (siehe Abbildung 15).

Abbildung 15



Formgleicher Umbau durch d1 durch den formgleichen (öffnungswinkelgleichen) Umbau von d2' durch d2; gemäß Σ (//) gilt für die Keilflanken des Doppelkeils d3: a//b; damit folgt, dass die Keilflanken von d1 und d2 parallel zueinander sind; somit gilt: wenn a//u und b//u, dann a//b

Wir haben nun den Sachverhalt realisiert, daß der Doppelkeil d^2 unter dem Doppelkeil d^3 liegt. Die freie Keilflanke von d^3 ist jedoch identisch mit der freien Keilflanke des Doppelkeils d^1. Mit der Passung von d^3 auf d^2 und der gemeinsam aufgespannten Ebene mit d^1 folgt mit $\Sigma^3(\|)$ die Parallelität zwischen der freien Keilflanke von d^1 und der oberen Keilflanke von d^2. Damit ist $C\|(d^1, d^2)$ und mithin auch das Sukzedens von (def$\varphi\|$) erfüllt. Somit ist (def$\varphi\|$) auch für diesen – letzten – Fall erfüllt.

Mit dem Nachweis der Fälle eins und zwei ist bewiesen, daß (def$\varphi\|$) durch beliebige – und damit alle – Doppelkeile erfüllt wird. Kurz: *Alle Doppelkeile erfüllen (def$\varphi\|$).* Damit ist die Eindeutigkeit für das Realisierungsverfahren für die Grundform »parallel« bewiesen.

Literatur

Bridgman, P. (1927): *The Logic of Modern Physics,* New York.

Dingler, H. (1949): *Grundriß der methodischen Philosophie,* Füssen.

Hartmann, D. (2003): *On Inferring. An Enquiry into Relevance and Validity,* Paderborn.

Husserl, E. (1996): *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie. Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie,* 3. Aufl. (1. Aufl. 1936), Hamburg.

Inhetveen, R. (1983): *Konstruktive Geometrie. Eine formentheoretische Begründung der Euklidischen Geometrie,* Mannheim, Wien, Zürich.

Inhetveen, P. (1984): »Die Rolle der Eindeutigkeit in der Philosophie Hugo Dinglers«, in: P. Janich (Hrsg.), *Methodische Philosophie. Beiträge zum Begründungsproblem der exakten Wissenschaften in Auseinandersetzung mit Hugo Dingler,* Mannheim, Wien, Zürich, S. 77-89.

Janich, P. (1976): »Zur Protophysik des Raumes«, in: G. Böhme (Hrsg.), *Protophysik. Für und wider eine konstruktive Wissenschaftstheorie der Physik,* Frankfurt a.M. 1976, S. 83-130; gekürzt wiederabgedruckt unter dem Titel »Die protophysikalische Begründung der Geometrie«, in: P. Janich (1997), S.35-72.

Janich, P. (1987): »Voluntarismus, Operationalismus, Konstruktivismus. Epistemologien im pragmatischen Paradigma«, in: H. Stachowiak (Hrsg.), *Pragmatik, Handbuch pragmatischen Denkens (Band II). Der Aufstieg pragmatischen Denkens im 19. und 20. Jahrhundert,* Hamburg 1987, S. 233-256; wiederabgedruckt unter dem Titel »Voluntarismus, Operationalismus, Konstruktivismus. Zur pragmatischen Begründung der Naturwissenschaften«, in: P. Janich (1996), S. 21-52.

Janich, P. (1992): »Die technische Erzwingbarkeit der Euklidizität«, in: P. Janich, (Hrsg.), *Entwicklungen der methodischen Philosophie,* Frankfurt a.M. 1992, S. 68-84; wiederabgedruckt in: P. Janich (1997), S. 73-89.

Janich, P. (1996): *Konstruktivismus und Naturerkenntnis. Auf dem Weg zum Kulturalismus,* Frankfurt am Main.

Janich, P. (1997): *Das Maß der Dinge. Protophysik von Raum, Zeit und Materie,* Frankfurt am Main.

Janich, P. (2000): »Euklids Erben«, in: J. Cobet/C. F. Gethmann/D. Lau (Hrsg.), *Europa. Die Gegenwärtigkeit der antiken Überlieferung,* Aachen, S. 357-371.

Janich, P. (2001): *Die Begründung der Geometrie aus der Poiesis,* Sitzungsberichte der Wissenschaftlichen Gesellschaft an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Band XXXIX, Nr. 2, Stuttgart.

Kamlah, W./Lorenzen, P. (1973): *Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens,* Mannheim, Wien, Zürich.

Lorenzen, P. (1984): *Elementargeometrie. Das Fundament der analytischen Geometrie,* Mannheim, Wien, Zürich.

Lorenzen, P. (1987): *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie,* Mannheim, Wien, Zürich.

Wille, M. (2002): *Das Parallelenproblem in der Protophysik,* (Mag.-Arb.), 233 S.