

1. Teil: Grundlagen

§ 1 Einführung

Logik bildet die Grundlage juristischer **Argumentation**. Sie ist damit ein notwendiger Gegenstand der Rechtswissenschaft. Recht ist nicht nur ein System von Normen, sondern schließt Argumentationen ein.¹ Dies zeigt sich etwa bei der Anwendung allgemeiner Rechtsnormen auf konkrete Sachverhalte, bei der Ableitung von Normen aus gegebenen Rechtsnormen, bei der Interpretation von Rechtsnormen durch spezifischere Regeln sowie bei der Begründung von Normen aufgrund der Abwägung rechtlicher Prinzipien.²

Recht als System schließt somit Argumentationen darüber ein, welche Normen rechtlich gelten, genauer, welche Normen als rechtlich geltend anerkannt werden sollen. Diese Argumentationen wiederum beanspruchen, **richtig** zu sein. Sie beanspruchen, dass jeder vernünftig Urteilende ihnen zustimmen müsste. Soweit verschiedene Positionen vertretbar erscheinen, beanspruchen sie Richtigkeit zumindest in dem Sinn, dass sie nicht als falsch erwiesen werden können.³

Was in normativen Fragen richtig ist, kann in vielen Hinsichten umstritten sein. Es gibt jedoch **notwendige Bedingungen korrekter Argumentation**, die eingehalten werden müssen, um welche Themen auch immer es geht. Sie lassen sich als Regeln formulieren, die die Logik der juristischen Argumentation bilden.⁴

1 Programmatisch Atienza, *El derecho como argumentación*, 2006.

2 Eine Konzeption des Rechts, die diese Prozesse der Argumentation aus dem Rechtssystem heraushalten möchte, wäre eine in wesentlichen Teilen unvollständige Konzeption des Rechts. Es gibt allerdings positivistische Konzeptionen des Rechts, die genau darauf zielen und Recht etwa ausschließlich als soziale Tatsache verstehen. So Raz, *The Authority of Law*, 1979, 37, 47. Nach dieser Konzeption wäre überall dort, wo über das geltende Recht argumentiert werden muss, kein Recht vorhanden. Argumentationen, welche Norm als rechtlich gültig anerkannt werden sollte, wären solche der Moral, nicht des Rechts. Damit wären weite Teile der juristischen Argumentation nicht der Rechtswissenschaft zuzuordnen.

3 Zum Richtigkeitsanspruch des Rechts Alexy, *Begriff und Geltung des Rechts*, 2. Aufl., 1994, 64ff.; *ders.*, *Theorie der juristischen Argumentation* (1978), 3. Aufl., 1994, 264ff., 428ff.

4 Siehe auch Navarro/Rodriguez, *Deontic Logic and Legal Systems*, 2014, 3.

Als logische Regeln haben sie **formalen Charakter**, d.h. ihre Gültigkeit hängt nicht vom Inhalt der Sätze ab, um die es bei den betreffenden Argumentationen geht. Logische Folgerungen sind aufgrund der Form der Argumentation gültig. Damit sind sie von substantiellen Streitfragen entlastet und können ein besonders hohes Maß an Gewissheit vermitteln. Rechtswissenschaft muss sich daher der Logik bedienen, um ihrem Ziel, wissenschaftliche Erkenntnis zu gewinnen, zu genügen. Es ist somit Aufgabe der Rechtswissenschaft, die Logik juristischer Argumentation herauszuarbeiten und deren Regeln zu beachten.

Die Relevanz der Logik für die juristische Argumentation ist offensichtlich und bildet traditionell ein zentrales Merkmal der juristischen Methodik.⁵ Es gibt zwar logikkritische Richtungen.⁶ Diese treffen jedoch nur die überzogene Auffassung, juristische Argumentation ließe sich auf logische Folgerungen reduzieren.⁷ Tatsächlich dient logische Analyse gerade auch dazu, begründungsbedürftige Prämissen in der juristischen Argumentation aufzuzeigen und damit die nicht-logischen Anteile juristischer Begründungen offenzulegen.⁸ Logische Korrektheit bleibt aber eine Mindestanforderung an juristische Argumentationen. Zu klären ist, was dies bedeutet, welche logischen Regeln also für die juristische Argumentation gelten.

I. Welche Logik?

Ziel dieser Arbeit ist es, logische Strukturen der juristischen Argumentation herauszuarbeiten. Was genau unter Logik verstanden werden soll, muss

5 Klug, Juristische Logik, 4. Aufl., 1982, 3ff.; Engisch, Logische Studien zur Gesetzesanwendung, 1963; Rüdiger, Schriften zur Juristischen Logik, 1980; Weinberger, Rechtslogik, 1970. Siehe auch Sartor, Legal Reasoning, 2005, 387. Ein anderer Bereich, der logische Analysen erfordert, ist die Rechtsinformatik. Dazu Weinberger, Studien zur Normenlogik und Rechtsinformatik, 1974.

6 Ehrlich, Juristische Logik, 2. Aufl., 1925, 288ff.; Perelman/Olbrechts-Tyteca, The New Rhetoric, 1969, 411ff.; Toulmin, The Uses of Argument, 1958, 107ff.; Viehweg, Topik und Jurisprudenz, 5. Aufl., 1974, 81ff.; Neumann, Juristische Argumentationslehre, 1986, 19ff. Dazu Ratschow, Rechtswissenschaft und Formale Logik, 1998, 63ff.; Koch/Rüßmann, Juristische Begründungslehre, 1982, 58ff.; Sartor 2005, 390ff.

7 Dazu Koch/Rüßmann 1982, 59ff.; Klug 1982, 9ff.

8 Koch/Rüßmann 1982, 112ff., sehen die Leistungen deduktiver Logik in der Realisierung der Gesetzesbindung, der Gleichbehandlung, der Rechtssicherheit und der Überprüfung der Schlüssigkeit von Begründungen.

allerdings präzisiert werden.⁹ Es gibt verschiedene Konzeptionen von Logik.

(1) Gesetze des Denkens: Logik gibt die Gesetze des Denkens an. Diese Beschreibung ist aber mehrdeutig und missverständlich. Logik im modernen Sinn befasst sich mit der Gültigkeit oder Ungültigkeit von Schlussfolgerungen oder mit der Feststellung von Widersprüchen. Insofern enthält sie in der Tat Gesetze des Denkens. Dies ist aber nicht psychologisch zu verstehen. Es geht also nicht darum, wie Menschen tatsächlich denken.

(2) Gesetze richtigen Denkens: Logik kann als Anforderung an korrektes Folgern verstanden werden. Es handelt sich insofern um eine Norm, eine Norm über richtiges Argumentieren. Logik bildet somit einen Teilbereich der Rationalität. Logisch fehlerhafte Argumente sind irrational. Allerdings ist Rationalität nicht auf Logik zu reduzieren, sondern kann weitere Anforderungen enthalten. Zudem gibt es nicht nur ein System der Logik, sondern unterschiedliche Systeme.¹⁰ Ferner lassen sich formale und informale Logik unterscheiden.

(3) Formale Logik: Moderne Logik wird als **formale Logik** verstanden. Sie ist eine Theorie formal korrekter Schlussfolgerungen oder auch eine Theorie allgemeingültiger Sätze.¹¹ "Allgemeingültig" bedeutet dabei: wahr unabhängig von konkreten Inhalten oder bestimmten Voraussetzungen. Formale Logik führt einen Kalkül ein, in dem ein Operieren nach formalen Regeln möglich ist. Grundlage des Kalküls sind Axiome und Schlussregeln. Auf dieser Grundlage lassen sich formal gültige Folgerungen oder Sätze bestimmen. Gegenstand formaler Logik ist auch die Definition, wann ein Widerspruch zwischen Sätzen vorliegt, wann also Sätze unter keinen Umständen zugleich wahr sein können.

(4) Formale und informale Logik: Logik muss nicht ausschließlich als formale Logik verstanden werden. Es gibt Richtungen informaler Logik, die korrekte oder inkorrekte Argumentationen zu unterscheiden versuchen, aber nicht auf die Entwicklung eines axiomatischen Systems abzielen, dessen Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit nachgewiesen werden soll.¹²

⁹ Siehe auch Navarro/Rodriguez 2014, 3.

¹⁰ Ein Beispiel sind klassische und intuitionistische (konstruktivistische) Logiken. Dazu Priest, Einführung in die nicht-klassische Logik, 2008.

¹¹ Vgl. auch Patzig, Sprache und Logik, 1970, 10; Alchourrón, On Law and Logic, in: Ratio Juris 9 (1996), 332; Neumann, Juristische Logik, in: Einführung in die Rechtsphilosophie und Rechtstheorie, 9. Aufl., 2016, 7.1.; Sartor 2005, 393.

¹² Zur informalen Logik Walton, Informal Logic, 2008; Tindale, Grundkurs Informelle Logik, 2013.

(5) Logik als Analyse logischer Strukturen: Logik kann in einem weiteren Sinn als logische Analyse begrifflicher oder argumentativer Strukturen verstanden werden. So können formallogische Instrumente für die Analyse von Strukturen in juristischen Argumentationen verwendet werden. Hingegen sind die Entwicklung axiomatischer Systeme sowie Beweise von deren Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit für die juristische Argumentation nicht notwendig. Dennoch bietet die formale Logik Instrumente, die für argumentationstheoretische Analysen fruchtbar gemacht werden können. Die Vorstellung eines widerspruchsfreien und vollständigen Systems ist ein Ideal, dem auch die Gestaltung und Interpretation von Rechtssystemen folgt.¹³ Eine formallogische Rekonstruktion juristischer Probleme ist ein Versuch, sich diesem Ideal zu nähern.

(6) Logik im weiteren Sinn von Methodologie: Mitunter werden wissenschaftliche Methodiken als "Logik" bezeichnet. Ein Beispiel ist die Bezeichnung "Logik der Sozialwissenschaften". Methodische Regeln haben insofern formalen Charakter, als sie auf beliebige Inhalte anwendbar sind. Dennoch handelt es sich nicht um formale Logik im technischen Sinn. Im Folgenden soll es aber um Logik als formale Regeln korrekten Schließens gehen, nicht um juristische Methodenlehre.

(7) Allgemeine Logik und juristische Logik: Als "juristische Logik" wurden eine Reihe von Argumentationsformen bezeichnet, die als logisch gültig angesehen wurden, aber bei genauerer Analyse sich als nicht schlüssige Argumente erwiesen haben,¹⁴ und sofern sie als logisch gültig behauptet wurden, als Fehlschlüsse. Dazu gehören insbesondere Analogie und teleologische Reduktion sowie der Umkehrschluss. Es ist heute anerkannt, dass solche Argumentformen, um zu schlüssigen Argumenten zu werden, Wertungen erfordern, also gerade nicht logisch gültig sind.

Juristen haben keine spezielle Logik.¹⁵ Für die juristische Argumentation gelten die allgemeinen logischen Gesetze. Dementsprechend geht es bei der Logik für Juristen um die Anwendung allgemeiner logischer Gesetze im Bereich des Rechts.¹⁶ Als logische Instrumente sollen die Kalküle der Aussagenlogik, Prädikatenlogik und alethischen Modallogik sowie der deontischen Logik verwendet werden. Allerdings ist die Adäquatheit dieser Kalküle für die Analyse juristischer Argumentation selbst ein Problem, das zu thematisieren ist.

13 Siehe auch *Alchourrón* 1996a, 331ff.

14 Dazu insbesondere *Klug* 1982, 109ff.

15 Siehe auch *Soeteman*, *Logic in Law*, 1989, 20ff.

16 Siehe auch *Neumann* 2016, 7.1.

II. Ziele der Untersuchung

In dieser Arbeit soll formale Logik vor allem in zwei Hinsichten untersucht und verwendet werden:

- bei der Analyse der Struktur juristischer Argumentation und
- bei der Analyse von Normkonflikten.

Juristische Argumentation muss sich logischer Folgerungen bedienen, lässt sich allerdings nicht darauf reduzieren.¹⁷ Die der Folgerung zugrunde liegenden Prämissen müssen begründet werden. In dieser Begründungsarbeit liegt in problematischen Fällen der Hauptteil der juristischen Argumentation. Er erfordert normative Wertungen und rationale praktische Argumentation. Dennoch sind logische Analysen notwendig, um Begründungserfordernisse offenzulegen. Die Verwendung formaler Logik dient vor allem dazu, die Strukturen der juristischen Argumentation aufzuzeigen und darzulegen, welche Prämissen in ihr verwendet werden und daher zu begründen sind. Auf diese Weise trägt sie dazu bei, die Qualität der juristischen Argumentation zu verbessern.

Ein anderer Bereich, in dem formallogische Analysen notwendig erscheinen, ist die Methode der Abwägung von in Konflikt stehenden Normen. Diese Methode wird insbesondere in der Grundrechtsdogmatik explizit angewendet,¹⁸ ist aber in allen Bereichen des Rechts von Bedeutung.¹⁹

Als Beispiel kann ein Konflikt zwischen Persönlichkeitsrecht und Pressefreiheit dienen. Um einen solchen Konflikt ging es in dem Fall *Caroline von Monaco/Hannover*.²⁰ In mehreren Zeitschriften wurden im Rahmen von Textbeiträgen Fotos der Prinzessin veröffentlicht, die sie an verschiedenen, mehr oder weniger privaten oder öffentlichen Orten, teils auch mit Kindern, zeigte. Der Konflikt von Persönlichkeitsrecht und Pressefreiheit stellt ein typisches Abwägungsproblem dar. Das Persönlichkeitsrecht verlangt, die Veröffentlichung von Fotos in der Presse zu verbieten, die Pressefreiheit verlangt, sie zu erlauben. Dieser Normkonflikt wird durch eine Abwägung der kollidierenden Prinzipien entschieden.

17 Dazu *Alexy* 1978 (3. Aufl., 1994), 273ff. Die Unterscheidung der deduktiv-logischen Grundstruktur der juristischen Argumentation und der Begründung der in ihr verwendeten Prämissen wird mit der Unterscheidung interner und externer Rechtfertigung zum Ausdruck gebracht.

18 Siehe insbesondere *Alexy*, *Theorie der Grundrechte*, 1985.

19 Siehe etwa *Enderlein*, *Abwägung in Recht und Moral*, 1992; *Riehm*, *Abwägungsentscheidungen in der praktischen Rechtsanwendung*, 2006.

20 BVerfGE 101, 361.

Die Struktur und die Kriterien dieser Abwägung sind allerdings umstritten. Es stellen sich eine Reihe fundamentaler Fragen:

- Lässt sich die Abwägung von Prinzipien als ein rationales Begründungsverfahren verstehen?
- Können Normen, die in Konflikt stehen, zugleich gültig sein?
- Können sie in dieser Situation als Gründe für ein bestimmtes Abwägungsergebnis dienen?

Die Kritik an der Abwägung setzt in der Regel an Zweifeln an der rationalen Begründbarkeit von Abwägungsurteilen an. Es wird geltend gemacht, dass Abwägungsergebnisse beliebig und subjektiv seien. Es stellt sich jedoch ein noch fundamentaleres Problem: Wie lassen sich Normkonflikte überhaupt verstehen? Im Bereich der Aussagenlogik wäre ein Widerspruch zweier Sätze logisch nicht möglich. Aus einem logischen Widerspruch ließe sich Beliebiges ableiten.²¹ Eine rationale Argumentation wäre nicht möglich. Nun bildet die Aussagenlogik aber die Grundlage für Prädikatenlogik, alethische Modallogik und schließlich deontische Logik. Wenn aber auch die deontische Logik auf der Aussagenlogik aufbaut, kann es dann überhaupt möglich sein, in Konflikt stehende Normen als zugleich gültig anzusehen und als Argumente in einem Verfahren der Abwägung zu verwenden?

Eine Auseinandersetzung mit dieser Frage ist ohne Analysen der Grundlagen der formalen Logik nicht möglich. Das bedeutet aber, dass eine Rechtswissenschaft, die sich nicht mit formaler Logik befasst, nicht in der Lage ist, begründete Aussagen darüber zu treffen, was als Methode rationaler Begründung gelten kann und was nicht. Insofern ist Ziel dieser Arbeit auch, die logischen Grundlagen einer normativen Rechtswissenschaft²² zu entwickeln.²³

21 Zoglauer, Einführung in die formale Logik für Philosophen, 4. Aufl., 2008, Kap. 2.4.

22 Rechtswissenschaft ist insofern normativ, als sie beansprucht, zu praktischen Fragen wissenschaftlich Stellung zu nehmen. Dies ist der Anspruch einer Rechtsdogmatik, die darauf zielt, die Rechtspraxis zu leiten. Daneben gibt es nicht-normative Bereiche der Rechtswissenschaft, wie analytische Rechtstheorie sowie deskriptive Rechtssoziologie, Rechtsgeschichte oder Rechtsvergleichung. Auch eine rein deskriptive Rechtsdogmatik wäre möglich, könnte Streitfragen aber nur aufzeigen und nicht zu ihnen Stellung nehmen.

23 Zur Unterscheidung von Anwendungs- und Entwicklungsaspekt Ratschow 1998, 25f.

§ 2 Struktur juristischer Entscheidungsbegründung

Es lassen sich zwei Grundstrukturen der juristischen Entscheidungsbegründung unterscheiden:²⁴ die von Subsumtion und Deduktion sowie die der Abwägung. Während Subsumtion und Deduktion von einer normativen Prämisse (oder mehreren sich ergänzenden, aber miteinander vereinbaren Prämissen) ausgeht, ist Abwägung eine Methode, mit unvereinbaren, konfligierenden normativen Prämissen umzugehen. Subsumtion und Deduktion ist dabei nur eine mögliche Struktur einer logisch gültigen Folgerung. Es gibt deduktiv gültige Folgerungen mit anderen Strukturen. Allgemeiner sind daher deduktiv-logische Folgerungen als Argumente aufgrund konsistenter Prämissenmengen und Abwägungen als Argumentationen mit konfligierenden Argumenten zu unterscheiden.

I. Deduktive Folgerungen

Eine die juristische Argumentation prägende Form einer deduktiven Folgerung ist die von **Subsumtion und Deduktion**. Die Subsumtion ist die Unterordnung des zu entscheidenden Falls unter den gesetzlichen Tatbestand. Die Deduktion ist die Ableitung der Rechtsfolge (der Konklusion) aus der Rechtsnorm (dem Obersatz) und der Feststellung des Tatbestands (dem Untersatz). Daraus ergibt sich die Struktur eines "Justizsyllogismus":²⁵

- (1) Wenn der Tatbestand T gegeben ist, dann gilt die Rechtsfolge R.
- (2) T ist gegeben.
- (3) Also gilt R.

Beispiel:

- (1) Wenn jemand einen anderen Menschen ermordet, dann soll er mit lebenslanger Haft bestraft werden.

24 Lit. zur Struktur juristischer Entscheidungsbegründung: *Alexy*, Theorie der juristischen Argumentation, 1978, 273ff.; *ders.*, Logische Analyse juristischer Entscheidungen, in: ARSP-Beiheft 14 (1980), 181-212; *Herberger/Simon*, Wissenschaftstheorie für Juristen, 1980; *Koch/Rüßmann*, Juristische Begründungslehre, 1982; *Neumann*, Juristische Logik, in: Einführung in die Rechtsphilosophie und Rechtstheorie, 9. Aufl., 2016.

25 Vgl. auch *Neumann* 2016, 7.2., auch mit Anknüpfung an die aristotelische Syllogistik.

1. Teil: Grundlagen

- (2) A hat einen anderen Menschen ermordet.
- (3) Also soll A mit lebenslanger Haft bestraft werden.

Dies entspricht in der deduktiven Logik dem "*modus ponens*":²⁶

- (1) Wenn p, dann q.
- (2) p
- (3) q

Diese Darstellung des elementaren Falls einer Rechtsanwendung ist allerdings in verschiedenen Hinsichten problematisch. So wird im obigen Schema nicht zwischen dem Tatbestandsmerkmal und der Feststellung des Tatbestands unterschieden. Beides wird durch "T" symbolisiert, obwohl es um jeweils logisch verschiedene Strukturen geht, einerseits um die Bedingung eines Konditionals, andererseits um eine Aussage, dass die Bedingung erfüllt ist.²⁷ Zudem hat die Rechtsnorm generellen Charakter, gilt also für alle Individuen, während die Anwendung nur einen bestimmten Fall betrifft. Die logische Struktur dieser Argumentation ist demnach genauer wie folgt anzugeben:

- (1) Für alle Individuen x gilt: Wenn x den Tatbestand T erfüllt, dann gilt die Rechtsfolge R.
- (2) a erfüllt den Tatbestand T.
- (3) Für a gilt die Rechtsfolge R.

In der Sprache der Prädikatenlogik²⁸:

- (1) $(x)(Tx \rightarrow Rx)$
- (2) Ta
- (3) Ra

Ein weiteres Problem ist, dass der gesetzliche Tatbestand häufig unbestimmt und erst noch zu präzisieren ist. Dazu sind semantische Regeln einzuführen, die bestimmte Tatbestandsmerkmale durch konkretere Merkma-

26 Die Prämissen werden von der Folgerung durch einen Querstrich (_____) unter der letzten Prämisse abgegrenzt.

27 Neumann 2016, 7.3.2.: Unterschied zwischen generellen und singulären Sätzen kann nicht ausgedrückt werden.

28 Dazu unten § 4.

le interpretieren. Solche Folgerungen werden als "**Kettenschluss**" bezeichnet.²⁹ Bei der Interpretation einer Norm wird ein Merkmal des Tatbestands durch eine Auslegungsregel präzisiert. Dieser Vorgang kann wiederum mit weiteren Auslegungsregeln fortgesetzt werden. Die Rechtsnorm wie die Auslegungsregeln haben generellen Charakter, gelten also für alle Individuen, die die betreffenden Merkmale erfüllen.

Beispiel:

- (1) Wer einen anderen Menschen heimtückisch tötet, ist ein Mörder.
- (2) Wer die Arg- und Wehrlosigkeit eines anderen ausnutzt, tötet ihn heimtückisch.
- (3) Wer einen anderen im Schlaf tötet, nutzt dessen Arg- und Wehrlosigkeit aus.
- (4) Also: Wer einen anderen im Schlaf tötet, ist ein Mörder.

Formal:³⁰

- (1) $t \rightarrow r$
- (2) $s \rightarrow t$
- (3) $p \rightarrow s$
- (4) $p \rightarrow r$

Neben Subsumtion und Deduktion sowie Kettenschluss kommen in der juristischen Argumentation auch andere logische Schlussregeln zur Anwendung. Die Umkehrung des "*modus ponens*" ist der "*modus tollens*". Ausgehend von einer Norm mit der Struktur: Wenn T, dann R wird festgestellt, dass R nicht der Fall ist, und geschlossen, dass auch T nicht der Fall ist. Die logische Struktur ist:

- (1) $p \rightarrow q$
- (2) $\neg q$
- (3) $\neg p$

29 *Schneider/Schnapp*, Logik für Juristen, 6. Aufl., 2006, 127, meinen, der Wert des Kettenschlusses sei gering, weil er zu viele Fehlerquellen enthalte. Tatsächlich ist er aber die Grundlage juristischer Interpretation. Sein Wert besteht auch darin, zu begrifflicher Präzision zu zwingen.

30 Die Allquantifizierung "für alle x gilt ...", die in allen Prämissen enthalten ist, wird weggelassen, um die Struktur des Kettenschlusses deutlicher zu machen.

In der juristischen Argumentation wird diese Struktur insbesondere im "*argumentum ad absurdum*" verwendet.³¹ Da die Rechtsfolge R rechtlich nicht akzeptabel erscheint, wird gefolgert, dass der Tatbestand als nicht gegeben anzusehen ist. Logisch ist dies korrekt, weil $p \rightarrow q$ äquivalent zu $\neg q \rightarrow \neg p$ ist. In der juristischen Argumentation setzt dieser Schluss allerdings Wertungen voraus, die begründen, dass die Rechtsfolge R im betreffenden Fall nicht akzeptiert werden kann.

Zur Anwendung kommt auch eine Schlussform, die als "**klassisches Dilemma**" oder als disjunktiver Schluss bezeichnet wird.³² Wenn verschiedene Alternativen zum gleichen Ergebnis führen, kann dahinstehen, welche von ihnen vorliegt, und es kann die Rechtsfolge abgeleitet werden. In der juristischen Argumentation kann etwa ein Streit offengelassen werden, wenn alle vertretenen Positionen zum gleichen Ergebnis führen.

Unberücksichtigt bleibt die Möglichkeit von Normkonflikten. Sowohl auf der Ebene geltender Normen wie auch bei verschiedenen Interpretationsalternativen können Konflikte vorliegen, die sich im Schema deduktiver Argumentation nicht ausdrücken lassen.

II. Interne und externe Rechtfertigung juristischer Entscheidungen

Manche der aufgezeigten Mängel lassen sich durch ein differenzierteres Schema der juristischen Entscheidungsbegründung beseitigen.³³ Es unterscheidet "interne" und "externe" Rechtfertigung. Interne Rechtfertigung bezeichnet den deduktiven Kern der Begründung eines juristischen Urteils. Die externe Rechtfertigung dient der Begründung der aufgestellten Prämissen: Es geht um Argumentation in einem rationalen praktischen Diskurs. Mit der Unterscheidung interner und externer Rechtfertigung wird erreicht, die Teile der Argumentation, die sich auf logische Folgerungen stützen können, von solchen abzugrenzen, die substantieller Argumentation bedürfen.

Terminologisch aussagekräftiger erscheint allerdings die Gegenüberstellung von "deduktiver" und "diskursiver" Rechtfertigung. Damit wird ei-

31 Siehe auch Klug 1982, 131f.

32 Dazu Schneider/Schnapp 2006, 136.

33 Vgl. Alexy 1978, 279; auch Wróblewski, Legal Syllogism and Rationality of Judicial Decision, in: Rechtstheorie 5 (1974), 33-46; Buchwald, Die Struktur rationaler juristischer Begründung, 1990, 277ff.; Koch/Rüssmann 1982, 31-58. Koch/Rüssmann sprechen von "Haupt- und Nebenschema", Buchwald von "Kern- und Mantelbegründung".

nerseits der logische Charakter der Grundstruktur juristischer Argumentation benannt, andererseits auf die Notwendigkeit eines rationalen Diskurses für die Begründung der Prämissen einer deduktiven Argumentation verwiesen. Bei der "deduktiven Rechtfertigung" geht es um die Darstellung der Entscheidungsbegründung in Form eines deduktiven Arguments. Es enthält die Ableitung einer Konklusion aus verschiedenen Prämissen. Bei der "diskursiven Rechtfertigung" geht es um weitere Argumente, die der Rechtfertigung der Prämissen des deduktiven Arguments dienen. Diese müssen selbst nicht die Form deduktiver Argumente haben. Die Unterscheidung interner und externer Rechtfertigung ist allerdings in der Literatur eingeführt und soll auch hier verwendet werden.

Als Kritik an der Unterscheidung interner und externer Rechtfertigung als deduktiv und nicht deduktiv wird die These vertreten, dass sich auch die externe Rechtfertigung deduktiv darstellen lässt.³⁴ Dies ist teilweise sicher möglich, es ist aber fraglich, ob dies stets der Fall ist und damit jede Begründung eine deduktive Struktur aufweisen muss. Die Rechtfertigung von Prämissen kann auch als Ergebnis eines rationalen Diskurses erfolgen. Solche Diskurse schließen deduktive Argumente ein. Das Ergebnis wird jedoch mittels Anerkennung durch die Diskursteilnehmer gerechtfertigt, nicht durch Ableitung aus einer gegebenen Prämissenmenge. Insofern lassen sich diskursive Begründungen aufgrund ihres prozeduralen Charakters von deduktiven oder inferentiellen Formen der Begründung unterscheiden.

Die deduktive Struktur der Entscheidungsgründe lässt sich exemplarisch, in Anlehnung an ein Schema von *Robert Alexy*,³⁵ wie folgt darstellen:

- (1)(x) $(Tx \rightarrow ORx)$
- (2)(x) $(M_1x \rightarrow Tx)$
- (3)(x) $(M_2x \rightarrow M_1x)$
- (4)(x) $(Sx \rightarrow M_2x)$
- (5) Sa
- (6) ORa Folgerung aus (1) – (5).

Dabei bedeuten:

- $\rightarrow$: logischer Junktor "wenn ..., dann",
- (x): Allquantor "für alle x gilt".
- O: Gebotsoperator: "es ist geboten, dass...",

³⁴ Koch/Rüßmann 1982, 58.

³⁵ Alexy 1978, 273ff.

1. Teil: Grundlagen

a: Individuenkonstante; x: Individuenvariable

T, R M, S: Prädikate, die den Individuen Eigenschaften zuschreiben.

III. Schema: Struktur juristischer Entscheidungsbegründung

Die Unterscheidung interner und externer Rechtfertigung kann zu einem Schema ausgebaut werden, das die Struktur juristischer Entscheidungsprobleme wiedergibt. In diesem Schema werden zunächst Rechtsgeltung und Rechtsanwendung getrennt und im Rahmen der Rechtsanwendung deduktive und diskursive Rechtfertigung unterschieden. Die Theorie der Rechtsgeltung (der "Rechtsquellen") repräsentiert dabei die diskursive Rechtfertigung der anzuwendenden Rechtsnormen.

Struktur der juristischen Entscheidungsbegründung

Theorie der Rechtsgeltung, „Rechtsquellen“:

positives Recht		überpositives Recht
- Verfassung	Gewohnheitsrecht	- Naturrecht
- Gesetze	allg. Rechtsgrundsätze	- Vernunftrecht
- Gerichtsurteile		- Moralgrundsätze

Begründung juristischer Urteile (Struktur juristischer Argumentation):

diskursive Rechtfertigung:

deduktive Rechtfertigung:

Rechtsgeltung:
(Rechtsfortbildung?)

Rechtsnorm:
(normative Prämisse)

$(x)(Tx \rightarrow O Rx)$

Juristische Interpretation:
Argumente:
- Wortlaut
- Systematik
- Wille des Gesetzgebers
- Zweck des Gesetzes
- allg. prakt. Argumente

Auslegung:

(semantische Regeln)

$(x)(M_{1x} \wedge M_{2x} \wedge M_{3x} \rightarrow Tx)$

$(x)(Ax \rightarrow M_{1x})$

$(x)(Bx \rightarrow M_{2x})$

$(x)(C_{1x} \vee C_{2x} \rightarrow M_{3x})$

Tatsachenfeststellungen
(im konkreten Fall a)

Subsumtion

Aa

Ba

C₂a

Rechtsfolge

O Ra

Logische Junktoren: $\wedge$: und; $\vee$: oder; $\rightarrow$: wenn ..., dann; $\leftrightarrow$: genau dann ..., wenn;
 $\neg$: nicht.

Allquantor: (...); Existenzquantor: $(\exists \dots)$; Gebotsoperator: O...

a: Individuenkonstante; x: Individuenvariable

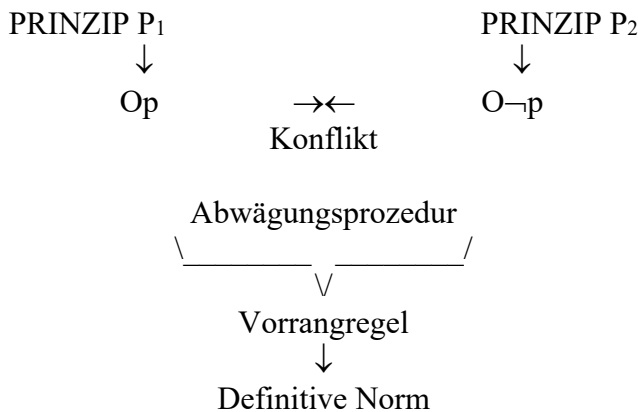
T, R M_{1,2,3}, A, B, C₁, C₂: Prädikate.

Es wird angenommen, dass das Individuum a unter die Prädikate A, B und C₂ fällt.

IV. Grenzen der Deduktion: Die Struktur der Abwägung

Eine Schwäche der dargestellten Schemata ist, dass sie nicht die Darstellung von Normkonflikten erlauben. Echte Normkonflikte liegen außerhalb der Reichweite logischer Begründungen, weil die Lösung solcher Normkonflikte gerade nicht aus vorgegebenen Prämissen abzuleiten ist. Es ist allerdings umstritten, ob es echte Normkonflikte gibt.³⁶ Der Eindruck, dass Normen in Konflikt stehen, könnte trügen, weil tatsächlich nur eine von ihnen gilt, auch wenn noch nicht bekannt ist, welche. Die moderne Grundrechtsdogmatik, die die Abwägung konfligierender Grundrechte oder Verfassungswerte als zentrale Methode verwendet, basiert andererseits auf der Voraussetzung, dass es echte Normkonflikte gibt.

Damit ist die Abwägung konfligierender Rechtsnormen oder rechtlich relevanter Argumente eine zweite Grundstruktur der Rechtsanwendung neben der von Subsumtion und Deduktion. Während die Methode von Subsumtion und Deduktion von einer konsistenten, widerspruchsfreien Menge von Prämissen ausgeht, sind Gegenstand der Abwägung gegensätzliche, unvereinbare normative Forderungen. Die Abwägung gegensätzlicher Forderungen, häufig als "Prinzipien" bezeichnet,³⁷ lässt sich nicht als deduktives Argument darstellen, sondern hat dialektischen Charakter. Ihre Struktur wird in folgendem Schema dargestellt:



36 Dazu *Gowans*, Introduction: The Debate on Moral Dilemmas, in: *id.* (ed.), *Moral Dilemmas*, 1987, 5.

37 Im Anschluss an die Unterscheidung von Regeln und Prinzipien bei *Dworkin*, *Taking Rights Seriously*, 1978, 22ff. Dazu s.u., Anhang I.

Beispiel Caroline:

- (1) Das Prinzip des Persönlichkeitsrechts (P_1) fordert, die Veröffentlichung von Fotos einer Person ohne deren Zustimmung zu verbieten (Op).
- (2) Das Prinzip der Pressefreiheit (P_2) fordert, die Veröffentlichung von Fotos einer Person durch die Presse ohne deren Zustimmung nicht zu verbieten ($O \neg p$).
- (3) Pressefreiheit erhält Vorrang, wenn es sich um Personen der Zeitgeschichte handelt und die Fotos nicht deren Privatsphäre betreffen und nicht Kinder abgebildet werden.

Aus dieser Vorrangregel folgt als definitive Norm:³⁸

- (4) Die Veröffentlichung von Fotos ohne Zustimmung der abgebildeten Person ist erlaubt, wenn es sich um Personen der Zeitgeschichte handelt, die Fotos nicht deren Privatsphäre betreffen und nicht Kinder abgebildet werden.

Die definitive Norm, die das Ergebnis der Abwägung darstellt, kann wiederum als Prämisse eines deduktiven Arguments verwendet werden.³⁹ Gegensätzliche Normen sind aufgrund der Abwägungsentscheidung verdrängt. Die Abwägung selbst wiederum enthält deduktive Folgerungen jeweils im Bereich der kollidierenden Argumente für sich (*pro tanto*) betrachtet. Es muss z.B. festgestellt werden, dass sich ein Sachverhalt als Ausübung von Pressefreiheit subsumieren lässt. Es gibt aber keine logische Folgerung von den konfligierenden Argumenten zum Abwägungsergebnis. Abwägungen sind daher mit deduktiven Argumenten nicht unvereinbar, sondern können mit ihnen kombiniert werden, sofern es um Folgerungen aus den einzelnen Argumenten geht. Der Kern der Abwägung ist jedoch ein nicht-deduktives Begründungsverfahren. Wie dieses und die dabei verwendeten Argumente zu rekonstruieren sind, bleibt zu klären.⁴⁰ Dazu sind zunächst die Grundlagen formaler Logik einzuführen.

38 Diesen Zusammenhang hat Alexy, Theorie der Grundrechte, 1985, 84, als "Kollisionsgesetz" bezeichnet.

39 Alexy 1980, 197.

40 Im dritten Teil dieser Arbeit.

§ 3 Aussagenlogik

I. Grundstruktur⁴¹

Gegenstand der Aussagenlogik sind die logischen Beziehungen zwischen wahrheitsfähigen Sätzen, also Sätzen, die aussagen, dass etwas der Fall oder nicht der Fall ist. Als System formaler Logik enthält die Aussagenlogik

- eine formale Sprache, die festlegt, welche Ausdrücke in dem System vorkommen können, also "*well formed formula*" (wff) sind,
- eine Menge von Schlussregeln, die definieren, welche Übergänge zwischen verschiedenen Ausdrücken erlaubt sind,
- bestimmte Axiomen, die als gültig vorausgesetzt werden.

In einem logischen System werden nicht Ausdrücke der natürlichen Sprache verwendet, sondern Symbole, meist Buchstaben, die Ausdrücke der natürlichen Sprache ersetzen und die präzise definiert eingeführt werden. Bei einer logischen Rekonstruktion umgangssprachlicher Argumentation muss also stets angegeben werden, wofür ein bestimmtes Symbol steht, und dieses stets mit derselben Bedeutung verwendet werden.

In der Aussagenlogik stehen diese Symbole für Aussagesätze. Deren Bedeutung sind Aussagen oder Propositionen.⁴² Ihr Inhalt ist, dass etwas der Fall ist. Sie drücken also Sachverhalte und, sofern sie zutreffen und damit wahr sind, Tatsachen aus. Sie können als wahr oder falsch bewertet werden. Es ist also sinnvoll zu sagen, dass eine Aussage wahr oder falsch ist, im Unterschied etwa zu Fragen oder Befehlen, die nicht sinnvoll als wahr oder falsch bewertet werden können.⁴³

41 Lit. zur Aussagenlogik: *Zoglauer*, Einführung in die Logik für Philosophen, 4. Aufl. 2008, Kap. 2. und 3; *Beckermann*, Einführung in die Logik, 4. Aufl., 2014; *Detel*, Grundkurs Philosophie Band 1: Logik, 2007; *Hardy/Schamberger*, Logik der Philosophie, 2. Aufl., 2018; *Hoyningen-Huene*, Formale Logik, 2013; *Quine*, Grundzüge der Logik, 1964; *Sartor*, Legal Reasoning, 2005, Chap. 15; *Herberger/Simon*, Wissenschaftstheorie für Juristen, 1980, 34ff.; *Schlapp*, Zur Einführung - Logik und Recht, JuS 1984, 505-509.

42 Die Symbole können daher statt auf Sätze auch direkt auf Aussagen oder Propositionen bezogen werden.

43 Die Wahrheitsfähigkeit von Aussagen ist ein Problem bei normativen Aussagen (*Zoglauer* 2008, 1.4 (22)), aber auch bei Aussagen über zukünftige Ereignisse (*Zoglauer* 2008, 1.4 (24)) oder Propositionen, die keinen Bezug zu Raum und Zeit enthalten (*Sartor* 2005, 432f.). Jedoch ergibt sich dies nicht bereits aus semantischen Gründen, sondern aus epistemischen Schwierigkeiten, den Wahrheitswert solcher Sätze zu bestimmen.

1. Objekt- und Metasprache

Die im logischen System verwendeten Symbole bilden die Objektsprache. Aussagen über dieses System wiederum stehen auf einer Metaebene. Sie gehören zu einer Metasprache. Zur Metaebene gehören z.B. Bewertungen von Sätzen als wahr oder falsch. Aber auch Folgerungsbeziehungen können auf objektsprachlicher Ebene oder auf metasprachlicher Ebene formuliert werden. So wird die Wenn-Dann-Beziehung objektsprachlich als Konditional " $\rightarrow$ " dargestellt, metasprachlich als Ableitbarkeitsbeziehung " $\Rightarrow$ ".

Die Unterscheidung von Objekt- und Metasprache ist in einer formalen Logik fundamental. Bei Nichtbeachtung kann es zu Paradoxien kommen, also ein Satz zugleich als wahr und als falsch bewertet werden. So führt die Aussage eines Kreters: "Alles, was Kreter sagen, ist gelogen" zur Lügner-Paradoxie des Epimenides.⁴⁴ Wäre die Aussage wahr, müsste es sich um eine Lüge handeln, weil sie von einem Kreter kommt. Wäre sie falsch, wäre sie zugleich bestätigt, weil ein Kreter gelogen hat. Die Paradoxie ergibt sich aus dem selbstwidersprüchlichen Kern dieser Aussage: "Das, was ich jetzt sage, ist falsch." Der Widerspruch entsteht aufgrund der Selbstreferentialität des Satzes. Ein selbstreferentieller Satz bezieht sich auf sich selbst. Sofern er seine eigene Falschheit behauptet, führt dies zu einem Widerspruch. Um dies zu vermeiden, werden selbstreferentielle Sätze in einem logischen System ausgeschlossen. Dies geschieht durch die strikte Trennung von Objekt- und Metasprache. Da die Bewertung als wahr oder falsch zur Metasprache gehört, kann die dargestellte Paradoxie nicht entstehen. Eine Vermengung von Objekt- und Metasprache kann hingegen zu Paradoxien führen.⁴⁵ Da eine formale Logik für Sätze beliebigen Inhalts gelten muss, können selbstwidersprüchliche Sätze nicht ausgeschlossen werden, wenn die Verbindung von objekt- und metasprachlichen Sätzen zugelassen wird.

In der Umgangssprache ist Selbstreferentialität hingegen nicht notwendig ein Problem. Da der Inhalt von Aussagen vom Sprecher kontrolliert werden kann, ist es möglich, problematische Selbstreferentialität zu vermeiden. Auch eine Trennung von Objekt- und Metasprache ist in der Um-

⁴⁴ Dazu Zoglauer 2008, Kap. 1.2 (16ff.).

⁴⁵ Beispiel aus Zoglauer 2008, Kap. 1.2. (16): "Dieser Satz enthält drei Fehler." Der Satz selbst enthält zwei Fehler. Damit wäre er aber inhaltlich falsch und enthielte somit einen dritten Fehler. Damit wäre er aber wiederum inhaltlich korrekt. Die Vermengung von Objekt- und Metasprache führt hier also zu einem Widerspruch.

gangssprache nicht notwendig, wenn klar ist, welcher Ebene eine Aussage zuzuordnen ist.

In der Rechtstheorie ist das Problem der Selbstreferentialität im Zusammenhang mit Verfassungsbestimmungen, die sich auf die Verfassung selbst beziehen, diskutiert worden.⁴⁶ Insbesondere geht es um Bestimmungen, die die Beseitigung der Verfassung oder einzelner ihrer Bestimmungen ausschließen (Ewigkeitsklauseln). So entzieht Art. 79 Abs. 3 GG z.B. die Menschenwürdegarantie des Art. 1 GG einer Änderung. Solche Klauseln stellen jedoch kein logisches Problem dar. Ob eine Aufhebung einer "Ewigkeitsklausel" mit einer nachfolgenden Änderung der durch sie geschützten Bestimmungen möglich ist, ist eine Frage der Verfassungsinterpretation.⁴⁷

2. Postulate der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit

Ein logisches System muss widerspruchsfrei und vollständig sein. Widerspruchsfreiheit bedeutet, dass keine unvereinbaren Aussagen ableitbar sein dürfen. Die Ableitung kann aufgrund syntaktischer und semantischer Folgerungsbeziehungen erfolgen.⁴⁸ Bei einer syntaktischen Interpretation werden zulässige Übergänge allein mit Blick auf die Zeichen selbst definiert, ohne Rücksicht auf ihre Bedeutung. Bei einer semantischen Interpretation hängen zulässige Folgerungen von den Wahrheitswerten der in der Formel repräsentierten Sätze ab.

Syntaktische und semantische Folgerungen dürfen nicht zu Widersprüchen führen. Darüber hinaus erfordert die Vollständigkeit des Systems, dass jeder syntaktisch ableitbare Satz auch Ergebnis einer semantischen Folgerung ist, und umgekehrt. Es gibt in einem logischen System also keine Folgerungen, die nur syntaktisch oder nur semantisch gültig wären. Logik kann allerdings auch ohne ein System in diesem Sinne betrieben werden, als Analyse plausibler oder evident gültiger Folgerungsbeziehungen. Dies genügt jedoch nicht dem Anspruch der modernen formalen Logik.

46 Dazu Röhl, Allgemeine Rechtslehre, 2. Aufl., 2001, 90ff.

47 Da der Zweck dieser Klauseln ist, eine Änderung bestimmter Verfassungsinhalte auszuschließen, wird man eine sukzessive Änderung ausschließen müssen.

48 Dazu auch Navarro/Rodriguez, Deontic Logic and Legal Systems, 2014, 6.

3. Syntax, Semantik und Pragmatik

Syntaktische und semantische Folgerungsbeziehungen bestimmen Syntax und Semantik einer Sprache. Daneben gehört zu einer Sprache aber auch die Ebene der Pragmatik, also die der Verwendung sprachlicher Ausdrücke.⁴⁹ Ein Beispiel ist die Verwendung von Aussagesätzen in Behauptungen oder Urteilen.⁵⁰ Die Verwendung von sprachlichen Ausdrücken enthält implizit Informationen, die sich wiederum explizit sprachlich formulieren lassen. So impliziert die Verwendung eines Aussagesatzes in einer Behauptung, dass der betreffende Satz wahr ist. Die sprachlich formulierten Inhalte erster Stufe können mit den pragmatisch implizierten Inhalten in Widerspruch stehen, etwa in dem bekannten Beispiel *J.L. Austins*: "Die Katze liegt auf der Matte, aber ich glaube es nicht".⁵¹ Daraus entsteht ein performativer Widerspruch, da der Sprecher mit seiner Aussage implizit zum Ausdruck bringt, dass er glaubt, was er sagt.⁵² Die Analyse der pragmatischen Ebene liegt allerdings außerhalb der Aussagenlogik.

II. Die Sprache der Aussagenlogik

Die Aussagenlogik enthält

- Ausdrücke für Propositionen, z.B. p , q , r . Es handelt sich um Variablen, da beliebige Einsetzungen für diese Ausdrücke möglich sind.
- logische Junktoren für die Verknüpfung verschiedener Aussagen. Durch die Verknüpfung wird eine neue Aussage gebildet. Die gebräuchlichsten Junktoren sind
- Negation: $\neg p$ (nicht- p)
- Konjunktion: $p \wedge q$ (p und q)
- Disjunktion: $p \vee q$ (p oder q)
- Konditional: $p \rightarrow q$ (wenn p , dann q)
- Bikonditional: $p \leftrightarrow q$ (p genau dann, wenn q).

Hinzukommen als Hilfszeichen Klammern, um die Reihenfolge der Auswertung eines zusammengesetzten Ausdrucks zu bestimmen. " $p \vee q \wedge r$ " ist ein anderer Ausdruck als " $(p \vee q) \wedge r$ ". Diese Auswertung wird zu-

49 Dazu *Zoglauer* 2008, Kap. 1.1.

50 Insbesondere *Frege*, Funktion und Begriff, 1891, 35.

51 Dazu *Alexy*, Theorie der juristischen Argumentation, 1978, 80.

52 Zum performativen Widerspruch als Grundlage eines transzendentalpragmatischen Arguments *Alexy*, Recht, Vernunft, Diskurs, 1995, 135f.

nächst durch Bindungsregeln bestimmt: Negation bindet stärker als Konjunktion, Konjunktion bindet stärker als Disjunktion, Disjunktion bindet stärker als Konditional. Für Abweichungen von diesen Regeln oder auch nur zur Klarstellung werden Klammern verwendet.

Für die Analyse der juristischen Argumentation reichen diese Symbole aus. Zudem lassen sich Junktoren auf andere zurückführen, z.B. auf Negation und Disjunktion. Tatsächlich kann ein logisches System mittels nur eines logischen Junktors entwickelt werden.⁵³ Für den Zweck einer präziseren Rekonstruktion natürlich-sprachlicher Argumente ist dies jedoch nicht notwendig.

III. Axiome und Schlussregeln der Aussagenlogik

1. Das System der Aussagenlogik

Das aussagenlogische Axiomensystem lässt sich auf der Junktorenbasis ($\vee$, $\neg$) formulieren:

Definitionen der Junktoren:

$$(D1) \ p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$(D2) \ p \rightarrow q = \neg p \vee q$$

$$(D3) \ p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Axiome der Aussagenlogik:⁵⁴

$$(A1) \ p \vee p \rightarrow p$$

$$(A2) \ q \rightarrow q \vee p$$

$$(A3) \ p \vee q \rightarrow q \vee p$$

$$(A4) \ (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$$

Aussagenlogische Schlussregeln:

$$(R1) \text{ Abtrennungsregel (Modus ponens): } \vdash \alpha \text{ und } \vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \beta$$

[Wenn α logisch ableitbar ist und $\alpha \rightarrow \beta$ logisch ableitbar ist, dann ist β logisch ableitbar.]

⁵³ Dazu Zoglauer 2008, 167 (Aufg. 12).

⁵⁴ Nach Zoglauer 2008, Kap. 8.2 (120). Eine andere Formulierung findet sich in Kap. 7.1 (104).

(R2) Substitutionsregel: In jedem Ausdruck darf für jede Variable eine andere Aussagevariable oder eine andere Aussageform⁵⁵ eingesetzt werden.⁵⁶

Die Substitutionsregel ergibt sich aus dem formalen Charakter der Logik. Da sie für Sätze beliebigen Inhalts gelten muss, können die Aussagevariablen für beliebige Inhalte stehen. Es muss lediglich beachtet werden, dass eine Aussagevariable stets für den gleichen Inhalt steht.

2. Syntaktische und semantische Folgerungsbeziehungen

Die logischen Schlussregeln können syntaktisch oder semantisch interpretiert werden.⁵⁷

(1) Bei einer syntaktischen Interpretation werden zulässige Übergänge allein mit Blick auf die Zeichen selbst definiert, ohne Rücksicht auf ihre Bedeutung.

Eine Konjunktion bedeutet dann, dass man in einer Ableitung von $p \wedge q$ sowohl zu p als auch zu q übergehen kann.

Eine Disjunktion bedeutet, dass man von p zu $p \vee q$ übergehen kann, ebenso ist der Übergang von q zu $p \vee q$ möglich.

Ein Konditional bedeutet, dass man von p zu q übergehen kann.

Ein Bikonditional bedeutet, dass man von p zu q wie auch von q zu p übergehen kann.

(2) Bei einer semantischen Interpretation hängen zulässige Folgerungen von den Wahrheitswerten der in der Formel repräsentierten Sätze ab:

Die Negation $\neg p$ ist genau dann wahr, wenn p falsch ist.

Die Konjunktion $p \wedge q$ ist genau dann wahr, wenn sowohl p wahr ist als auch q wahr ist.

Die Disjunktion $p \vee q$ ist genau dann wahr, wenn p oder q (eines von beiden oder beide) wahr ist.

⁵⁵ Aussageformen sind Sätze, die freie Variablen enthalten und durch Belegung aller freien Variablen in eine wahre oder falsche Aussage übergehen, *Zoglauer* 2008, Kap. 1.4.

⁵⁶ *Zoglauer* 2008, 7.1 (104).

⁵⁷ Dazu auch *Navarro/Rodriguez* 2014, 6.

1. Teil: Grundlagen

Das Konditional $p \rightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn p falsch ist oder q wahr ist.

Das Bikonditional $p \leftrightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn p und q stets den gleichen Wahrheitswert haben, also entweder beide wahr sind oder beide falsch sind.

Semantische Folgerungsbeziehungen lassen sich durch Kombinationen von Wahrheitswerten angeben. Wahrheitswerte sind "wahr" (w) und "falsch" (f). Dies lässt sich in Wahrheitstafeln darstellen.

3. Wahrheitstafeln

In Wahrheitstafeln werden die möglichen Bewertungen von Sätzen und Satzverknüpfungen als wahr oder falsch angegeben.⁵⁸ Für die Negation sieht die Wahrheitstafel wie folgt aus:

p	$\neg p$
w	f
f	w

Die Negation von p ist als wahr, wenn p falsch ist.

Für die Konjunktion gilt folgende Tafel:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Konjunktion von p und q ist also wahr, wenn beide Sätze wahr sind, in allen anderen Fällen hingegen falsch.

⁵⁸ Zum Folgenden insbesondere *Zoglauer* 2008, Kap. 2 (35ff.); ferner *Joerden*, Logik im Recht, 3. Aufl., 2018, 1. Kap. A.

Für die Disjunktion gilt:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Disjunktion ist wahr, wenn einer der in ihr enthaltenen Sätze wahr ist. Auf die Wahrheit oder Falschheit des anderen kommt es nicht an. Es handelt sich um ein einfaches "oder", nicht um ein "entweder ... oder".

Das Konditional wird in der Aussagenlogik wie folgt definiert:

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Das Konditional "wenn p, dann q" gilt also genau dann, wenn der Vordersatz p falsch ist oder der Hintersatz q wahr ist. Ist der Vordersatz falsch, ist das Konditional immer wahr. Damit gilt folgende Äquivalenz:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Beispiel: Wenn A der König von Frankreich ist, dann ist er kahlköpfig.

Die Interpretation des Konditionals als wahr, wenn der Vordersatz falsch ist, mag merkwürdig erscheinen. Sie führt dazu, dass jeder konditionale Normsatz, dessen Vordersatz falsch ist, wahr ist.⁵⁹ Dies bedeutet andererseits nicht, dass eine derartige Norm gilt. Das aussagenlogische Konditional lässt sich somit nicht ohne Einschränkung auf Aussagen über die Geltung von Normen übertragen.⁶⁰

⁵⁹ Sartor 2005, 544.

⁶⁰ Zu konditionalen Normsätzen s.u., § 6 IV. 5.; § 7 II. 3.

Das Bikonditional entspricht einem beidseitigen Konditional:

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Das Bikonditional ist genau dann wahr, wenn der Vordersatz p und der Hintersatz q beide wahr sind oder wenn beide falsch sind. Es gilt also z.B.: "4 ist eine Primzahl genau dann, wenn der Mond aus Käse besteht."

Bei zwei Variablen für Propositionen gibt es 16 Kombinationsmöglichkeiten und entsprechend verschiedene Folgerungsbeziehungen.

IV. Aussagenlogische Tautologien und Äquivalenzen

Logik befasst sich insbesondere mit Tautologien, Kontradiktionen und Äquivalenzen.⁶¹ Zu deren Feststellung dienen neben der Verwendung von Wahrheitswerttafeln verschiedene Techniken der Umformung von Termen. Sie werden wie folgt definiert:

Eine Aussageform heißt Tautologie, wenn sie für jede Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten einen wahren Ausdruck liefert.

Eine Aussageform heißt Kontradiktion, wenn sie für jede Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten einen falschen Ausdruck liefert.

Zwei logische Ausdrücke α und β heißen äquivalent, wenn sie die gleiche Wahrheitswertentwicklung besitzen. Oder: α und β sind äquivalent genau dann, wenn der Ausdruck $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Tautologie ist.

1. Beispiele für Tautologien

$\vdash$ bedeutet, dass eine Formel logisch wahr (also eine Tautologie) ist.

⁶¹ Siehe Zoglauer 2008, 3.1 (47ff.).

$\vdash p \vee \neg p$	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
$\vdash \neg(p \wedge \neg p)$	Satz vom (ausgeschlossenen) Widerspruch
$\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$	Gesetz von der Stärkung des Vordersatzes
$\vdash p \rightarrow (p \vee q)$	Axiom A2
$\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$	Paradoxie der Implikation
$\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	Paradoxie der Implikation
$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$	<i>Modus ponens</i>
$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	<i>Modus tollens</i>
$\vdash (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	Transitivität

2. Beispiele für Äquivalenzen

Einige wichtige Äquivalenzen sind:

$p \rightarrow q = \neg p \vee q$	Definition D2
$p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$	Gesetz der Kontraposition
$p \leftrightarrow q = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$	Definition "genau dann, wenn"
$p \succ \neg q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	Definition "entweder-oder"
$p \vee q = q \vee p$	Kommutativgesetz der Disjunktion
$p \wedge q = q \wedge p$	Kommutativgesetz der Konjunktion
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	1. De Morgansches Gesetz
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	2. De Morgansches Gesetz
$p = p \wedge (p \vee q)$	Verschmelzungsgesetz
$p = p \vee (p \wedge q)$	Verschmelzungsgesetz
$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$	Assoziativgesetz der Disjunktion
$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	Assoziativgesetz der Konjunktion
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivgesetz
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributivgesetz
$(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Exportationsgesetz

Die Feststellung von Äquivalenzen erfolgt auf einer Metaebene, was durch das Gleichheitszeichen "=" zum Ausdruck gebracht wird. Auf der Objektebene würde jeweils ein Bikonditional " $\leftrightarrow$ " zwischen den Gliedern der Gleichungen gelten.

V. Logisches Schließen

1. Deduktive und induktive Schlüsse

Deduktive Schlüsse ziehen Folgerungen aus gegebenen Prämissen. Sie sind notwendig gültig. Induktive Schlüsse versuchen, allgemeine Aussagen aus Einzelaussagen abzuleiten.⁶² Es werden vollständige und unvollständige Induktion unterschieden.

Die vollständige Induktion, wie sie in der Mathematik verwendet wird, ist allerdings ein deduktives Verfahren. Wenn A für die Zahl 1 gilt sowie, wenn A für die Zahl n gilt, es auch für $n + 1$ gilt, dann gilt A für alle natürlichen Zahlen. Diese Art der Induktion ist somit logisch gültig.

Nicht deduktiv gültig ist hingegen die unvollständige Induktion, wie sie in den Naturwissenschaften zur Begründung allgemeiner Gesetze verwendet wird. Nach der Methode der Induktion wird aus Einzelercheinungen ein allgemeines Gesetz abgeleitet. Wenn A in allen bisherigen Fällen aufgetreten ist, dann lässt sich ein allgemeines Gesetz aufstellen, dass A in allen Fällen gilt. Diese Art der Induktion kann durch Gegenbeispiele widerlegt werden. Wenn bisher alle Schwäne weiß waren, wäre eine induktive Folgerung, dass alle Schwäne weiß sind. Diese Aussage wird widerlegt, wenn ein nicht-weißer Schwan gesehen wird. Eine unvollständige Induktion ist somit keine logische Schlussfolgerung.

2. Methode indirekten Beweises

Bei einem indirekten Beweis wird, um eine Aussage zu beweisen, das Gegenteil angenommen und ein Widerspruch abgeleitet.⁶³

Beispiel: Zu zeigen sei: $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$

- | | |
|-----------------------|---|
| (1) $p \rightarrow q$ | (1. Prämisse) |
| (2) $\neg q$ | (2. Prämisse) |
| (3) p | (Annahme des Gegenteils der zu beweisenden Folgerung $\neg p$) |
| (4) q | (aus (1) und (3), im Widerspruch zu (2)) |

⁶² Dazu Zoglauer 2008, Kap. 4.1 (58ff.).

⁶³ Dazu Zoglauer 2008, Kap. 3.2 (50f.).

Da aufgrund von (3) ein Widerspruch auftritt, muss das Gegenteil gelten, also $\neg p$.

In der juristischen Argumentation hat das "*argumentum ad absurdum*" die Struktur eines indirekten Beweises. Dabei wird eine Annahme eingeführt und gezeigt, dass dies zu rechtlich inakzeptablen Ergebnissen führt. Allerdings ergibt sich die Inakzeptabilität eines Ergebnisses in der juristischen Argumentation nicht allein aus einem logischen Widerspruch, sondern aus substantiellen Erwägungen.

§ 4 Prädikatenlogik

I. Grundbegriffe⁶⁴

Die Prädikatenlogik hat, wie die Aussagenlogik, Aussagen zum Gegenstand, behandelt aber, im Unterschied zur Aussagenlogik, Aussagen nicht als elementar, sondern als strukturiert. Einfache, singuläre Aussagen werden gebildet aus Subjekt und Prädikat. Darüber hinaus gibt es quantifizierte Aussagen in Form von All- oder Existenzsätzen.⁶⁵

1. Subjekte und Prädikate

Der Satz "Eva ist ein Mörder" wird gebildet aus dem Subjekt "Eva" und dem Prädikat "ist ein Mörder". Eine noch detailliertere Strukturierung unterscheidet Subjekt, Kopula und Prädikat:

Subjekt	Kopula	Prädikat
Eva	ist	ein Mörder.

Die allgemeine Struktur eines Satzes ist:

S ist P.

⁶⁴ Lit. zur Prädikatenlogik: *Zoglauer*, Einführung in die Logik für Philosophen, 4. Aufl., 2008, Kap. 5; *Detel*, Grundkurs Philosophie Band 1: Logik, 2007; *Hardy/Schamberger*, Logik der Philosophie, 2. Aufl., 2018; *Hoyningen-Huene*, Formale Logik, 2013; *Quine*, Grundzüge der Logik, 1964; *Salmon*, Logik, 1973; *Sartor*, Legal Reasoning, 2005, Ch. 15; *Herberger/Simon*, Wissenschaftstheorie für Juristen, 1980; *Schlapp*, Zur Einführung - Logik und Recht, JuS 1984, 505-509.

⁶⁵ Zum Folgenden insbesondere *Zoglauer* 2008, Kap. 8.

"S" ist ein singulärer Term (ein Eigenname) und bezeichnet ein individuelles Objekt (dies kann aber auch eine Klasse von Gegenständen sein). "P" (oder "ist P") ist das Prädikat. Es ist ein allgemeiner Term und bezeichnet einen Begriff sowie eine Eigenschaft.

In manchen Fällen können Subjekte und Prädikate ineinander umgewandelt werden. Statt "Der Mensch ist vernünftig" könnte gesagt werden "Vernünftig sein ist menschlich". Auch Prädikate können in manchen Fällen in Subjekte umgewandelt werden: Rot sein $\Rightarrow$ die Röte; Gut sein $\Rightarrow$ das Gute; Wahr sein $\Rightarrow$ das Wahre.⁶⁶

2. Extension und Intension von Begriffen

Prädikate stehen für Begriffe. Begriffe sind die Bedeutung von Prädikaten. Weiter zu unterscheiden ist zwischen der Extension eines Begriffs, d.h. dem Begriffsumfang, und der Intension des Begriffs, d.h. der Angabe der Eigenschaften, aufgrund derer ein Gegenstand unter den betreffenden Begriff fällt.⁶⁷ Die Intension gibt also den Inhalt oder das Kriterium an, anhand dessen bestimmt wird, ob ein Gegenstand unter einen Begriff fällt, und anhand dessen damit die Zugehörigkeit zur Extension bestimmt wird.⁶⁸ Demnach heißen

- Intension: die Kriterien, nach denen die Zugehörigkeit von Gegenständen zu einem Begriff festgestellt wird.⁶⁹
- Extension: die Gesamtheit der Gegenstände, die sämtliche Merkmale des Begriffs besitzen.

Zwei Begriffe heißen umfangsgleich, wenn ihre Extensionen identisch sind. Leere Begriffe sind solche, deren Extension leer ist, es also keinen Gegenstand gibt, der unter den Begriff fällt. Individualbegriffe sind solche, deren Extension nur einen Gegenstand enthält. Allgemeinbegriffe (Gattungen, Arten) sind Begriffe, deren Extension mehrere Gegenstände enthält. Extension und Intension verhalten sich reziprok: je mehr Merkmale in den

66 Ob die so gebildeten Prädikate einen Gegenstand bezeichnen oder lediglich sprachliche Ausdrucksweisen darstellen (*façon de parler*), ist philosophisch umstritten (Universalienstreit, platonische Ideenlehre). Dazu Zoglauer 2008, 5.1 (73).

67 Dazu Herberger/Simon 1980, 233ff.

68 Koch/Rüssmann, Juristische Begründungslehre, 1982, 129f.

69 Nach Zoglauer ist die Intension die Gesamtheit aller Merkmale, die in einem Begriff enthalten sind (Zoglauer 2008, 5.2 (75)). Aber zur Angabe der Intension genügt ein Merkmal.

Inhalt eines Begriffs aufgenommen werden, desto kleiner ist seine Extension, und umgekehrt.⁷⁰

II. Formalisierung und Schlussregeln

1. Sprache der Prädikatenlogik

Subjekte (Individuen) werden mit kleinen Buchstaben dargestellt:

Individuenkonstanten: $a, b, c \dots$

Individuenvariablen: $x, y, z \dots$

Prädikate werden mit großen Buchstaben bezeichnet: $A, B, C \dots$

Aus Individuenbezeichnungen und Prädikaten werden Sätze gebildet. Auf sie findet die Aussagenlogik Anwendung.

Singuläre, d.h. auf bestimmte Individuen bezogene Sätze haben die Struktur $Aa, Ba, Bc \dots$, sind also aus Prädikat und Individuenkonstante zusammengesetzt.

Es gibt aber auch quantifizierte Sätze, nämlich Allsätze oder Existenzaussagen. Sie werden durch Anwendung eines Allquantors oder eines Existenzquantors auf einen prädikatenlogischen Satz gebildet.

Allsatz: Für alle x gilt, dass x ein A ist.

Allquantor: (x)

Formale Darstellung eines Allsatzes: $(x)Ax$.⁷¹

" Ax " steht für einen offenen Satz, d.h. einen Satz mit einer Individuenvariable, über die nicht quantifiziert wird.

Existenzsatz: Es gibt (mindestens) ein x , für das gilt, dass x ein A ist.

Existenzquantor: $(\exists x)$

Formale Darstellung eines Existenzsatzes: $(\exists x)Ax$.

Sätze werden mit den in der Aussagenlogik definierten Junktoren verknüpft.

⁷⁰ Reziprozitätsgesetz, *Zoglauer* 2008, 5.2. (77), mit Verweis auf *Kant*, Logik A 148.

⁷¹ Gebräuchlich ist auch das Symbol $\forall$ für den Allquantor.

1. Teil: Grundlagen

2. Schlussregeln

Für Schlüsse unter singulären Sätzen, Existenz- und Allsätzen gelten folgende Regeln:

Existenzeinführung: $Pa \Rightarrow (\exists x)Px$
Allquantorbeseitigung: $(x)Px \Rightarrow Pa$
Aus beiden zusammen folgt: $(x)Px \Rightarrow (\exists x)Px$

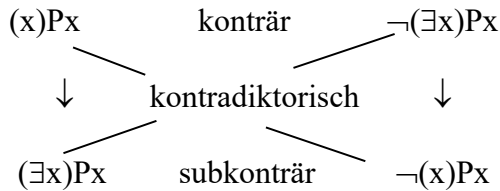
Allquantor und Existenzquantor werden wechselseitig wie folgt definiert:

$$(x)Px = \neg(\exists x)\neg Px$$

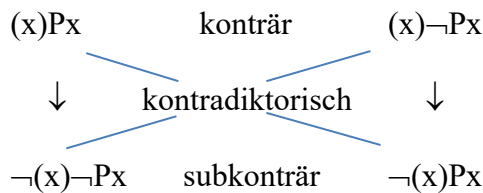
$$\neg(x)Px = (\exists x)\neg Px$$

Die Beziehungen zwischen quantifizierten Sätzen lassen sich in einem "logischen Quadrat" darstellen. Dieses kann auf der Basis nur eines Quantors dargestellt werden.

Logisches Quadrat:



Darstellung mit nur einem Quantor:



Quantorenvertauschung:⁷²

Aus einer Existenzaussage in Bezug auf einen Allsatz lässt sich ein Allsatz in Bezug auf die entsprechende Existenzaussage ableiten:

⁷² Zoglauer 2008, 5.5. (86).

$$(\exists x)(y) R(x,y) \Rightarrow (y)(\exists x) R(x,y)$$

Beispiel: Wenn es ein Individuum gibt, von dem alle anderen Individuen abstammen, dann gilt für jedes Individuum, dass es ein Individuum gibt, von dem es abstammt.

Die Umkehrung gilt nicht.

Beispiel: Wenn es für jedes Individuum ein Individuum gibt, von dem es abstammt, dann folgt nicht, dass es ein Individuum gibt, von dem alle anderen Individuen abstammen.

III. Relationen

Prädikate können einstellig, zweistellig oder mehrstellig sein. Relationen sind zwei- oder mehrstellige Prädikate. Auf logischer Ebene lassen sich verschiedene Arten von Relationen unterscheiden.⁷³ Relationen sind

- reflexiv, wenn gilt $R(x,x)$ für alle x ;
- Beispiel: x ist kleiner oder gleich x ($x \leq x$),
- symmetrisch, wenn gilt $R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)$;
- Beispiel: Bob ist der Bruder von Tom, dann gilt: Tom ist der Bruder von Bob,
- transitiv, wenn gilt $R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)$;
- Beispiel: Alice ist kleiner als Bob und Bob ist kleiner als Tom, dann gilt auch: Alice ist kleiner als Tom.

Die Unterscheidung verschiedener Relationen ist insbesondere bei der Entwicklung der alethischen Modallogik auf der Basis einer Mögliche-Welten-Semantik von Bedeutung,⁷⁴ ferner bei der Präferenzlogik.⁷⁵

Relationen dienen ferner für die Analyse der Struktur individueller oder subjektiver Rechte sowie von Pflichten und Verpflichtungen. Eine Pflicht oder Verpflichtung setzt nicht nur voraus, dass einem Adressaten (a) etwas (G) geboten ist (OaG), sondern auch, dass dies in Relation zu und gegen-

73 Siehe Zoglauer 2008, Kap. 5.3 (77ff.); Herberger/Simon, *Wissenschaftstheorie für Juristen*, 1980, 146ff.

74 Dazu s.u., § 5 III.

75 Zur Präferenzlogik siehe etwa Hansson, *The Structure of Values and Norms*, 2001, 15ff.; Åqvist, *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*, 1987, 168ff.; von Kutschera, *Einführung in die Logik der Normen, Werte und Entscheidungen*, 1973, 85ff.; von Wright, *The Logic of Preferences*, 1963; Cornides, *Ordinale Deontik*, 1974.

über einem anderen (b) gilt (OabG). Der von dem Gebot Begünstigte hat dem Adressaten gegenüber ein Recht auf Erfüllung des Gebots (RbaG).⁷⁶

§ 5 Modallogik

I. Grundlagen⁷⁷

Die Modallogik stellt eine Erweiterung der Aussagenlogik dar, in der neben Wahrheit und Falschheit auch Notwendigkeit, Möglichkeit und Unmöglichkeit als logische Zustände auftreten können.⁷⁸ Wahrheiten können kontingent (zufällig) sein. Sie bestehen in der Welt, wie sie ist. Die Welt könnte aber auch anders sein. Notwendig wahr ist eine Aussage, die in allen möglichen Welten wahr ist. Entsprechend kann etwas falsch in der gegebenen Welt sein, aber wahr in einer anderen, möglichen Welt. Eine Aussage ist möglicherweise wahr, wenn es eine mögliche Welt gibt, in der sie wahr ist.

Die Vorstellung möglicher Welten ist für die Interpretation alethischer Modalitäten verwendet worden (*Kripke-Semantik*⁷⁹). Es werden folgende Aussagen unterschieden:

- (1) p ist notwendig = p ist wahr in allen möglichen Welten.
- (2) p ist wirklich = p ist wahr in unserer Welt.
- (3) p ist möglich = p ist wahr in einer möglichen Welt.
- (4) p ist unmöglich = p ist in keiner möglichen Welt wahr.

Die Modallogik fasst dabei "notwendig" und "möglich" als Operatoren auf, die einer Aussage p eine Aussage über eine Modalität zuordnen.⁸⁰ Die Modalitäten sind:

M : Möglichkeit

N : Notwendigkeit.

76 Dazu Alexy, Theorie der Grundrechte, 1985, 182ff.

77 Lit. zur Modallogik: Zoglauer, Formale Logik für Philosophen, 4. Aufl., 2008, Kap. 8; Cocchiarella/Freund, Modal Logic. An Introduction to its Syntax and Semantics, 2008; Hughes/Cresswell, An Introduction to Modal Logic, 1968.

78 Siehe auch Zoglauer, 2008, Kap. 8 (116ff.).

79 Kripke, A Completeness Theorem in Modal Logic, Journal of Symbolic Logic 24 (1959), 1-14; ders., Semantical Analysis of Modal Logic I Normal Modal Propositional Calculi, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 9 (1963a), 67-96; ders., Semantical Considerations on Modal Logic, Acta Philosophica Fennica 16 (1963b), 83-94.

80 Zoglauer 2008, 8.1 (118).

Zwischen diesen Modalitäten bestehen folgende Beziehungen:

$\mathbf{Mp}$	= Es ist möglich, dass p = Es ist nicht notwendig, dass p falsch ist	$= \neg \mathbf{N}\neg p$
$\mathbf{M}\neg p$	= Es ist möglich, dass nicht-p = Es ist nicht notwendig, dass p	$= \neg \mathbf{N}p$
$\neg \mathbf{Mp}$	= Es ist nicht möglich, dass p = Es ist notwendig, dass p falsch ist	$= \mathbf{N}\neg p$
$\neg \mathbf{M}\neg p$	= Es ist nicht möglich, dass nicht-p = Es ist notwendig, dass p wahr ist	$= \mathbf{N}p$

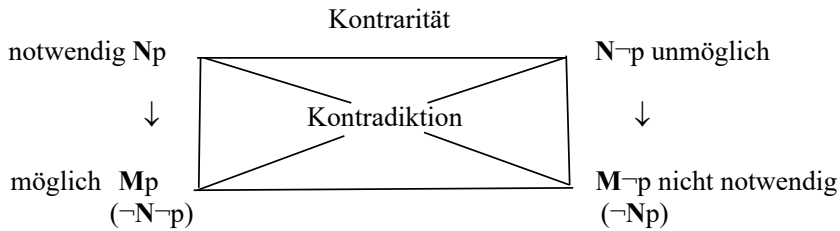
Dem entsprechen folgende Negationsregeln:

$$\mathbf{M}\neg p = \neg \mathbf{N}p$$

$$\neg \mathbf{M}p = \mathbf{N}\neg p$$

Die logischen Beziehungen von Modalsätzen lassen sich wiederum (wie die quantifizierten Sätze in der Prädikatenlogik) in einem logischen Quadrat darstellen.

Logisches Quadrat der Modalitäten:



II. Axiomatik

Normale modallogische Systeme ergeben sich auf der Basis der Aussagenlogik, indem Axiome (A5-A8) sowie zwei modallogische Schlussregeln (R3, R4) ergänzt werden.⁸¹ Das System K ist eine Erweiterung der Aussagenlogik, der die Definition der modallogischen Operatoren, ein weiteres,

⁸¹ Zu weiteren Systemen *Cocchiarella/Freund* 2008, 15ff.; *Hughes/Cresswell* 1968, 213ff.

modallogisches Axiom und zwei Schlussregeln hinzugefügt werden. Mit **N** als modallogischem Grundoperator ergeben sich:

- (D4) $\mathbf{M}p = \neg \mathbf{N} \neg p$
- (A5) $\mathbf{N}(p \rightarrow q) \rightarrow (\mathbf{N}p \rightarrow \mathbf{N}q)$
- (R3) Notwendigkeitsregel: $\vdash \alpha \Rightarrow \mathbf{N}\alpha$
- (R4) $\vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \mathbf{N}\alpha \rightarrow \mathbf{N}\beta$

Die Schlussregel R3 erlaubt, von der logischen Ableitbarkeit ($\vdash$) einer Aussage auf die Notwendigkeit dieser Aussage zu schließen. R4 erlaubt, aus der logischen Ableitbarkeit eines Konditionals auf ein Konditional hinsichtlich der entsprechenden Notwendigkeitsaussagen zu schließen.⁸²

Bemerkenswert ist, dass im System K aus der Aussage der Notwendigkeit von p nicht folgt, dass p der Fall ist. Dies entspricht nicht dem üblichen Verständnis von Notwendigkeit. Es passt aber zur deontischen Logik, da aus einem Gebot $\mathbf{O}p$ nicht folgt, dass p der Fall ist.

Ein stärkeres modallogisches System T ergibt sich mit dem zusätzlichen Axiom:

- (A6) $\mathbf{N}p \rightarrow p$ (Notwendigkeitsaxiom)

Dies entspricht dem Verständnis, dass das, was notwendig ist, auch der Fall ist. Im System T sind als Theoreme ableitbar, dass das, was der Fall ist, möglich ist ($p \rightarrow \mathbf{M}p$) und dass das, was notwendig ist, möglich ist ($\mathbf{N}p \rightarrow \mathbf{M}p$).

Ein noch stärkeres System ist S4 mit dem zusätzlichen Axiom:

- (A7) $\mathbf{N}p \rightarrow \mathbf{N}\mathbf{N}p$

In S4 gilt somit, dass eine Iteration der Modalität der Notwendigkeit ableitbar ist. Wenn p notwendig ist, dann ist es notwendig, dass p notwendig ist. Zusammen mit A6 ergibt sich auch die Äquivalenz $\mathbf{N}p = \mathbf{N}\mathbf{N}p$.

Das System S5 ergibt sich aus dem weiteren Axiom:

- (A8) $\mathbf{M}p \rightarrow \mathbf{N}\mathbf{M}p$

In S5 ist also das, was möglich ist, auch notwendigerweise möglich.

82 Zu in K ableitbaren Theoremen Zoglauer 2008, Kap. 8.2 (120ff.).

III. Semantik der Modallogik

Zur Bewertung modallogischer Sätze als wahr oder falsch dient die *Kripke*-Semantik. Sie deutet die Modaloperatoren als Quantoren über mögliche Welten:

- (1) Np ist wahr in $w_i \Leftrightarrow p$ ist wahr in jeder möglichen Welt w_j , die von w_i aus erreichbar ist.
- (2) Mp ist wahr in $w_i \Leftrightarrow p$ ist wahr in wenigstens einer möglichen Welt w_j , die von w_i aus erreichbar ist.

Die Grundlage der Mögliche-Welten-Semantik ist ein Rahmen, der aus einer Menge möglicher Welten sowie einer Zugänglichkeitsrelation R gebildet wird.⁸³ Dabei bezeichnen

- $p, q, \dots$: atomare Formeln (für Propositionen oder Sätze, die als wahr oder falsch bewertet werden können),
- $w_i, w_j, w_1, w_2, \dots$: mögliche Welten,
- W : Menge aller möglichen Welten,
- R : Zugänglichkeitsrelation (accessibility relation),
- $R(w_1, w_2)$ soll heißen, dass w_2 von w_1 aus erreichbar (vorstellbar) wäre.

In der alethischen Modallogik ist R reflexiv, aber nicht unbedingt symmetrisch⁸⁴ und auch nicht unbedingt transitiv. R kann in verschiedener Weise definiert werden. Eine wichtige Erkenntnis *Kripkes* ist nun: Die Eigenschaften von R legen eine bestimmte Modallogik fest.

Wenn R reflexiv ist, dann gilt (A6): $Np \rightarrow p$.

Wenn R transitiv ist, dann gilt (A7): $MMp \rightarrow Mp$.

Wenn R symmetrisch ist, dann gilt: $MNp \rightarrow p$.

Wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, dann gilt (A8): $Mp \rightarrow NMp$.

Die Zugänglichkeitsrelation R wird für die Logik normativer Argumentation von Bedeutung sein. Werden Gebote als normative Notwendigkeit interpretiert, gilt unter bestimmten Voraussetzungen, dass jede argumentativ

83 Siehe auch *Hughes/Cressweill* 1968, 73. Dort wird ein Modell eines modallogischen Systems aus einer Menge möglicher Welten W , der Relation R sowie einer Bewertungsfunktion V , die für einen Satz p und mögliche Welten w festlegt, ob dieser Satz wahr oder falsch ist, gebildet.

84 *Zoglauer* 2008, 131 (Kap. 8.6).

begründbare Norm normativ notwendig und damit Gegenstand eines Gebots ist.⁸⁵

IV. Modale Prädikatenlogik

Eine modallogische Erweiterung der Prädikatenlogik enthält neben den Axiomen des Prädikatenkalküls die Axiome eines der modallogischen Kalküle, etwa (PL + K), (PL + T), (PL + S4) oder (PL + S5).⁸⁶ In der modallogischen Prädikatenlogik sind Notwendigkeitsoperator und Allquantor nicht generell vertauschbar. Es gilt allerdings:

$$\mathbf{N} (x) Px \rightarrow (x) \mathbf{N} Px.$$

Wenn es notwendig ist, dass für alle x P gilt, dann ist für alle x notwendig, dass für x P gilt.

Die Umkehrung gilt nicht ohne Weiteres. Es gilt allerdings im Kalkül PL + S5 die sog. *Barcan-Formel*:

$$('B) (x) \mathbf{N} Px \rightarrow \mathbf{N} (x) Px$$

sowie

$$(B1) \mathbf{N}(x) Px = (x) \mathbf{N} Px$$

$$(B2) \mathbf{M}(\exists x) Px = (\exists x) \mathbf{M} Px$$

Entsprechend der *Barcan-Formel* wären auf Sachverhalte bezogene *de re*-Modalitäten (wie in $\mathbf{N} Px$) und auf Aussagen bezogene *de dicto*-Modalitäten (wie in $\mathbf{N}(x)Px$) äquivalent in S5 oder anderen mindestens ebenso starken Kalkülen, nicht in S4 oder schwächeren Kalkülen.⁸⁷

85 Dazu s.u., § 11 I. 4.

86 Zoglauer 2008, 131ff. (Kap. 8.7); Hughes/Cresswell 1968, 133ff.

87 Zoglauer 2008, 133f.