Fachliches und »Anderes« in der Hochschuldidaktik Mathematik: Einblicke und Ungeklärtes

Reinhard Hochmuth

Zusammenfassung: *Mathematikdidaktische Forschung verortet sich in einem Kontext vielfältiger sog. Bezugswissenschaften: Erkenntnisse, Theorien und Forschungsmethoden aus der Psychologie, der Pädagogik, den Sozialwissenschaften u.a.m. werden angewendet oder adaptiert und so für die Beforschung des Lernens und der Lehre von Mathematik in Schule und Hochschule fruchtbar gemacht. Wie mathematikdidaktische Theorien, die sich in unterschiedlicher Weise der Bezugswissenschaften bedienen, miteinander vernetzt werden können, wurde in den zurückliegenden 15 Jahren intensiv beforscht. Nach einem kurzen Einblick in Arbeitsfelder und theoretische Ansätze der Hochschuldidaktik Mathematik werden unter anderem von Radford (2008) hervorgehobene Herausforderungen an Vernetzungspraktiken aufgegriffen und hinsichtlich offener Forschungsfragen diskutiert.*

Schlagworte: *Fachbezogene Hochschuldidaktik Mathematik, Wissenschaftsreflexion, Vernetzung von Theorien*

1 Einleitung

Die Hochschuldidaktik Mathematik (HDM) hat sich in den zurückliegenden Jahren gut entwickelt. Basis dafür war einerseits der Entwicklungsstand der schulbezogenen Mathematikdidaktik und andererseits die u.a. durch BMBF, Stiftungen und zeitweise auch Studienbeiträge bereitgestellten finanziellen Mittel für lehrbezogene Projekte und Forschung. Ein substantieller Anteil dieser Ressourcen floss in die Mathematik, da diese in zahlreichen Studiengängen eine Rolle spielt und die damit verbundenen Anforderungen als eine zentrale Ursache für Studienabbrüche gelten.

Der Beitrag gibt zunächst einen Einblick in den aktuellen Stand der HDM. Dabei werden Institutionelles, Forschungsfragen und Arbeitsfelder sowie international weitverbreitete theoretische Ansätze beschrieben. Im darauffolgenden Teil widme ich mich dem Thema der Vernetzung von Theorien in der mathematikdidaktischen Forschung. Dieses ist nicht nur für die Theoriebildung, sondern auch für einen kritischen Blick auf konkrete Lehr-Lernverhältnisse, die Interpretation und Deutung von Beobachtungen sowie die Reflexion sich daraus ergebender Konsequenzen relevant. Dabei gehe ich zunächst von einer inhärent fachlichen Orientierung der Fachdidaktik in Gestalt der Stoffdidaktik und insbesondere dem in der deutschen Mathematikdidaktik häufig verwendeten Konzept der Grundvorstellungen aus. Nach einer Diskussion der Grenzen dieser Ansätze sowie einschlägiger breiter aufgestellter fachdidaktischer Forschungskonzeptionen, die unter anderem stoffdidaktische Überlegungen aufgreifen und inhaltlich einbetten, wende ich mich dem Begriff der Bezugswissenschaften zu (Bruder et al., 2015, Abschnitt 5). Dieser Begriff adressiert die Rolle der Mathematik in Fragestellungen und Methodenzugriffen der Fachdidaktik, die insbesondere auch psychologische, pädagogische und sozialwissenschaftliche Theorien und deren Ergebnisse einbeziehen. Wie dies systematisch und auch mit Blick auf das Fachliche der Mathematik geschehen kann, wurde in vielfältigen Bemühungen zu Vernetzungspraktiken in der Fachdidaktik Mathematik verhandelt (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014). In diesem Kontext von Radford (2008) hervorgehobene Herausforderungen aufgreifend, gehe ich auf ein offenes und grundlegendes Problem ein und verdeutliche dessen Relevanz für Einschätzungen der gesellschaftlichen Konstituierung hochschuldidaktischer Theoriebildung und Praxis. Am Ende steht die Frage, wie sich dieses Problem so reformulieren lässt, dass es systematisch bearbeitet und diskutiert werden kann.

Ausgehend von Radfords Reflexionen skizziere ich im Ausblick einen programmatischen Vorschlag zur Bearbeitung des Problems. Im Kern besteht dieser darin, Wissenschaftsdisziplinen als historische, institutionell-gesellschaftliche Verfestigungen theoretisch-kategorialer Vorentscheidungen, in die insbesondere auch weltanschauliche und philosophische Aspekte eingehen, zu verstehen. Die theoretisch-kategorialen Vorentscheidungen konstituieren die Gegenstandsbereiche sowie die jeweiligen wissenschaftlich als gegenstandsadäquat anerkannten Vorgehensweisen. Dieser Standpunkt wurde unter anderem von Holzkamp (1985, 1993) im Rahmen einer subjektwissenschaftlichen Rekonstruktion vorherrschender Lerntheorien formuliert und liegt auch der Anthropologischen Theorie der Didaktik (Bosch & Gascón, 2014; Chevallard, 1999) zugrunde. Er fundiert letztlich auch die von Radford formulierten Herausforderungen an Vernetzungspraktiken in der Fachdidaktik Mathematik. Es wird deshalb nicht überraschen, dass im Ausblick dieses Beitrags diese drei Forschungsperspektiven miteinander verknüpft werden.

2 Hochschuldidaktik Mathematik als Wissenschaft

Die Hochschuldidaktik Mathematik hat sich in den zurückliegenden ca. 30 Jahren national und international als eigenes wissenschaftliches Forschungsfeld entwickelt. Dazu liegen mittlerweile eine Reihe ausführlicher Überblicksbeiträge und -bände vor (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz & Rasmussen, 2016; Winsløw, Gueudet, Hochmuth & Nardi, 2018; Durand-Guerrier, Hochmuth, Nardi & Winsløw, 2021; Biehler, Eichler, Hochmuth, Rach & Schaper, 2021). Abschnitt 2 skizziert lediglich ausgewählte Aspekte der aktuellen Entwicklung, dabei insbesondere solche, die als Hintergrund für den zweiten Teil dieses Beitrages relevant erscheinen.

2.1 Arbeitsfelder und Forschungsfragen

Die HDM als Wissenschaft baut in weiten Teilen auf der schulbezogenen Mathematikdidaktik auf. Im Zentrum stehen Forschungsfragen, die in ähnlicher Weise im Kontext sog. Bezugswissenschaften wie der Psychologie, der Pädagogik oder den Sozialwissenschaften bearbeitet werden, wobei naturgemäß andere mathematische Inhalte und mit diesen verknüpfte Denk- und Arbeitsweisen, Begriffe, Lernhürden sowie hochschulische Lehr-Lern-Verhältnisse im Fokus stehen. In zunehmendem Maße werden Lehrvorschläge, die zu Beginn der Entwicklung der HDM eher pragmatisch orientiert waren, nunmehr wissenschaftsbasiert begründet. Die Kooperation zwischen Didaktiker:innen mit lehrenden und didaktisch interessierten Mathematiker:innen spielt in der HDM eine große Rolle. Zentrale Themenfelder stellen der Übergang von der Schule zur Hochschule, Entwicklungen im ersten Studienjahr und zunehmend auch fortgeschrittenere Studieninhalte sowie deren Verbindung mit späteren beruflichen Anforderungen dar. An Hochschulen und Universitäten wird Mathematik vor allem im Rahmen von Serviceveranstaltungen für andere Studiengänge, wie etwa den Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften, gelehrt und gelernt, darüber hinaus natürlich in reinen Mathematik- sowie in Lehramtsstudiengängen. Je nach Kontext unterscheiden sich die Inhalte und das Profil der Studierenden und Lehrenden. Bestimmte Themen, wie etwa die Differential- und Integralrechnung, finden sich in fast allen Studienfachkontexten, wenn auch in unterschiedlicher Weise.

Neben eher fachlich orientierten Forschungszugängen, die Lern- und Arbeitsprozesse beobachten und analysieren, lassen sich auch Bezüge zur allgemeinen Hochschuldidaktik und der sich in der Folge von PISA stark entwickelnden empirischen Bildungsforschung und ihren jeweiligen Fragestellungen feststellen. Hier werden mittels quantitativer Erhebungsinstrumente auch affektive Merkmale, Lernstrategien oder Kontextaspekte berücksichtigt. In diesem Zusammenhang stellen sich insbesondere Fragen bezüglich der spezifischen Rolle des Fachlichen. Öffentliche Kontroversen wie in der schulbezogenen Mathematikdidaktik und ihrer mittlerweile dominanten Anwendungs- und Kompetenzorientierung gibt es mit Blick auf die HDM bisher nicht. Auch deshalb knüpfe ich im zweiten Teil des Beitrags diesbezüglich an kritischen Einschätzungen zum Fachlichen in der schulbezogenen Mathematikdidaktik an.

2.2 Theoretische Ansätze in der Hochschuldidaktik Mathematik[1]

In der HDM standen zunächst kognitiv orientierte Ansätze im Zentrum (Artigue, 2016). So wurden beispielsweise unter dem Obergriff »Advanced Mathematical Thinking« (Tall, 1991) wesentliche Unterschiede zwischen der Schul- und Hochschulmathematik in Form von Gegensätzen wie informell vs. formal, konkret vs. abstrakt, kalkül- vs. strukturorientiert thematisiert. Die Unterscheidung zwischen einem Begriffsbild und einer Begriffsdefinition wurde durch die viel zitierte Arbeit von Tall und Vinner (1981) zu einem wesentlichen Bestandteil kognitiv orientierter Analysen der HDM, da formale Definitionen und darauf beruhende Beweise ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal der Hochschulmathematik gegenüber der Schulmathematik darstellen. APOS (action-process-object-schema) (Dubinsky, 1991) ist ein komplexerer kognitionstheoretischer Rahmen, der auf Piagets genetischer

1 Dieser Abschnitt folgt im Aufbau und einigen Formulierungen der Darstellung von Hochmuth, Broley und Nardi (2021).

Erkenntnistheorie und insbesondere auf seinem Begriff der reflexiven Abstraktion beruht.

Die nachfolgende Entwicklung zu breiter angelegten und flexibleren Theorien wurde unter anderem durch den »social turn« angeregt (Lerman, 2000): »Social turn« bezeichnet eine Entwicklung in der mathematikdidaktischen Forschung, die darauf abzielt, soziale, interaktionelle und intersubjektive Aspekte systematischer zu berücksichtigen. So betrachtet die Anthropologische Theorie der Didaktik (ATD)[2] (Chevallard, 1999) Wissen als etwas, das in institutionellen Settings verortet ist. Sie thematisiert in ihren Analysen die historische und epistemische Konstitution fachlichen Wissens und ermöglicht so, institutionelle Besonderheiten dieses Wissens und damit verbundene Praktiken zu erklären. Sie berücksichtigt insbesondere, dass gelehrtes Wissen und dessen Formen das Ergebnis komplexer gesellschaftlicher Transformationsprozesse ist, die in der ATD als externe didaktische Transposition bezeichnet werden (Bosch, Hausberger, Hochmuth, Kondratieva & Winsløw, 2021). So wird Wissen als (mit-)bestimmt durch weltanschauliche, gesellschaftliche, schulorganisatorische oder auch pädagogische Aspekte verstanden, was darauf hinweist, dass fachliches Lehren und Lernen auch von nichtfachlichen Zwängen geprägt sind. Eine Grundüberzeugung dieses Ansatzes ist, dass kognitiv orientierte Forschungszugänge dazu neigen, institutionelle Aspekte von Praktiken als individuelle Dispositionen zu missverstehen (Gasón, 2003).

Im Zentrum der ATD steht das Konzept der Praxeologie,[3] das Wissen und damit zusammenhängende menschliche Handlungen in Gestalt zweier aufeinander bezogener Blöcken modelliert: Der Praxis-Block (»Know-how«) besteht aus Aufgabentypen und einer Reihe von zugehörigen Techniken zur Lösung der Aufgaben. Der Logos-Block (»Know-why«) wird durch zwei Ebenen eines Begründungsdiskurses gebildet: Auf der ersten Ebene werden die Techniken des Praxisblocks durch Technologien unter anderem erklärt, gerechtfertigt, motiviert und begründet. Auf der zweiten Ebene organisiert und ordnet die Theorie ihrerseits die Technologien. Dieses Konzept wird unter anderem genutzt, um Referenzmodelle als Grundlage für Analysen des gelehrten und gelernten Wissens zu formulieren. Im Schule-Hochschule-Übergang kommt

2 Die ATD stelle ich etwas ausführlicher dar, da ich auf sie im Ausblick zurückkomme.

3 Sowohl inhaltlich wie auch hinsichtlich seines methodischen Stellenwerts unterscheidet sich die Verwendung des Praxeologie-Begriffs in der ATD von der in der Praxeologischen Wissenssoziologie (Bohnsack, 2021). Auf Unterschiede, aber auch bestehende Gemeinsamkeiten und Bezüge kann hier aus Platzgründen nicht eingegangen werden.

es zu einem Wechsel der Aufgaben und Techniken und zur Bildung von technologischen und theoretischen Aspekten, die den für die Interpretation und Rechtfertigung des praktischen Blocks (d.h. der Aufgabe und der zugehörigen Techniken) erforderlichen Diskurs bilden. So konnten Barbé et al. (2005) mittels Referenzmodellen schulische Praxeologien als voneinander isoliert aufzeigen, was sich zum Teil als Folge des Fehlens voll entwickelter Logos-Blöcke erwies. Was mathematische Servicekurse anbelangt, so ermöglicht ATD eine Formalisierung der Verbindungen zwischen der in diesen Kursen gelehrten Mathematik und ihrer Anwendung in den jeweiligen fachlichen Kernkursen wie beispielsweise in Kursen der »Signaltheorie«. So werden dort neue praktische und theoretische Blöcke entsprechend den unterschiedlichen Praxis- und Validierungserfordernissen in Mathematik- und Ingenieurstudiengängen ergänzt (Castela et al., 2011). Noch fruchtbarer wird ATD durch die Berücksichtigung höherer Mitbestimmungsebenen wie z.B. der Gesellschaft, da etwa Validierungen nicht nur spezifische Aufgabenstellungen und deren fachlichen Kontext, sondern auch die gesellschaftlich und historisch gewachsene Organisation von Wissenschaftsfeldern und deren dominante Vorstellungen über fachliche Zusammenhänge widerspiegeln (Hochmuth & Peters, 2021; 2022).

In Forschungen der HDM, die sich der kommunikativen Perspektive der »Commognition Theory« von Sfard (2014) bedienen, liegt der Fokus auf mathematischen Diskursen innerhalb und zwischen verschiedenen Gruppen und insbesondere auf den Verschiebungen von Diskursen und Regeln. Hier wird Wissen als etwas betrachtet, das durch Kommunikation in die Welt kommt, die nicht als sekundärer Aspekt des Lehrens und Lernens betrachtet wird, sondern als untrennbar mit der individuellen Kognition verbunden. Wichtige Begriffe sind unter anderem Wortgebrauch, visuelle Vermittler und Routinen, die weiter in Rituale und Erkundungen unterschieden werden. So bleiben im Übergang Schule-Hochschule unterschiedliche Verwendungsweisen von Wörtern oft implizit. Dies gilt auch für jeweilige Rollen von visuellen Vermittlern wie Graphen. Commognition-Theorie dient insbesondere dazu, Lehrende in Schulen und an Universitäten für kommunikative Konflikte zu sensibilisieren, die in Lehr-Lern-Situationen auftreten oder sich daraus ergeben. Wie ATD befasst sich auch die Commognition-Theorie mit epistemologischen, kognitiven, soziokulturellen, pädagogischen und institutionellen Fragen. In beiden Ansätzen werden Lernhindernisse in erster Linie nicht bei den Studierenden lokalisiert, sondern in einem breiteren Kontext verstanden, der das Handeln der Lehrenden und das mathematische Wissen, um das es geht, einschließt. Dies beeinflusst auch deren Entwicklungsvorschläge bezüglich Lehrinterventionen.

Weitere in der HDM verbreitete Ansätze sind die Theorie didaktischer Situationen (Brousseau, 2002) mit ihren a priori und a posteriori Analysen, Realistic Mathematics Education (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014) und zunehmend auch Ansätze, die einer Design-Based Research Orientierung folgen (Prediger, Gravemeijer & Confrey, 2015). Psychologische Theorien, die auf affektiv-emotionale Aspekte, Überzeugungen und Einstellungen fokussieren, werden vor allem auch in large-scale Untersuchungen berücksichtigt, die theoretisch und methodisch der Perspektive der empirischen Bildungsforschung zugerechnet werden können. Diese zielen unter anderem darauf, Maßnahmen zu evaluieren, die Lernende hinsichtlich ihres Interesses, ihrer mathematischen Selbstwirksamkeit oder ihrer Lernstrategien etc. unterstützen sollen (siehe z.B. Hochmuth, Biehler, Liebendörfer & Schaper, in Druck)

Trotz der recht erfolgreichen Bemühungen zur Klärung von Vernetzungspraktiken verschiedener theoretischer Ansätze in der mathematikdidaktischen Forschung (u.a. Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014) lassen sich hinsichtlich der Begründung theoretischer Ansätze, der Identifizierung ihrer jeweiligen Grenzen und schließlich ihrer Verknüpfung in Analysen der HDM unbeantwortete theoretische Herausforderungen aufweisen. Dies soll im folgenden Abschnitt verdeutlicht werden.

3 Bezugswissenschaften und Vernetzungspraktiken: Fachliche Ausgangspunkte, Kontroversen und offene Fragen

Der Überblick zum Stand der HDM im Abschnitt 2 zeigt, dass sich diese als Wissenschaft mit originären bzw. spezifisch aus der schulbezogenen Mathematikdidaktik weitergeführten theoretischen Ansätzen entwickelt. Blickt man näher auf die Berücksichtigung des Fachlichen und mit Bezug darauf auf die Verknüpfung von Theorien in Analysen der HDM, zeigen sich ungeklärte grundlegende Fragen, die trotz ihrer auch praktischen Relevanz in Diskussionen der HDM weitgehend unberücksichtigt bleiben. Die Entwicklung von Zugängen, die diese Fragen perspektivisch bearbeitbar machen und in aktuelle Forschung miteinbeziehen, stellt nicht nur eine theoretische Anforderung an die HDM dar, sondern scheint mir auch für die Einschätzung von Lehrinterventionen von Bedeutung.

Eine zentrale These dieses Beitrages ist, dass eine adäquate Berücksichtigung des Fachlichen in universitären Lehr-Lern-Verhältnissen eines theoretischen Rahmens bedarf, der es systematisch erlaubt, diese Verhältnisse als Momente in ihrem historisch spezifischen gesellschaftlich-institutionellen Zusammenhang zu begreifen. Dies erfordert einen Subjektbegriff, der die gesellschaftliche Vermitteltheit subjektiver Erfahrungen hinsichtlich Möglichkeiten und Hindernissen berücksichtigt und der einerseits einen auch in diesen Hinsichten adäquaten Begriff des Lernens entfaltet und andererseits diesen Lernbegriff mit einem prinzipiell damit kompatiblen handlungstheoretisch anschlussfähigen Rahmen für das Fachliche und seine jeweiligen Praktiken betreffend verknüpft. Bevor ich darauf im Ausblick diese Beitrags zurückkomme, möchte ich in diesem Abschnitt die eingangs angesprochenen ungeklärten Fragen verdeutlichen und damit eine Problemlage skizzieren, vor deren Hintergrund diese These zumindest plausibel erscheinen könnte.[4]

Den Ausgangspunkt meiner Argumentation bildet das vor allem in der deutschen Fachdidaktik weitverbreitete Konzept der Grundvorstellungen, das Fachliches in besonderer Weise in den Mittelpunkt stellt (vom Hofe et al., 2016). Grenzen von Grundvorstellungen und anderer stoffdidaktischer Konzepte werden in Forschungen, die sich auf den Ansatz des Design-Based Research beziehen, und im Rahmen der Empirischen Bildungsforschung aufgegriffen. Beide Perspektiven, wie auch eine Kritik an einer Fachdidaktik, die sich an der Empirischen Bildungsforschung orientiert, rekurrieren im Hinblick auf die Verknüpfung verschiedener Forschungsperspektiven (etwa solche aus der Pädagogik, der Psychologie oder der Soziologie) mit der Mathematik als fachlichem Zentrum auf den Begriff der Bezugswissenschaften. Mit diesem Begriff wird das Problem der Begründung von Verknüpfungen und deren Ausgestaltung allerdings lediglich adressiert. Bearbeitet wurde es in den zurückliegenden 15 Jahren unter anderem in vielfältigen Bemühungen um mathematikdidaktische Vernetzungspraktiken (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014). Radford (2008) formulierte in einem synthetisierenden Überblick grundlegende Anforderungen an das Vernetzen theoretischer Perspektiven und weist auf Grundlagen der Möglichkeit des Erfüllens dieser Anforderungen

4 Schon aus Platzgründen kann hier ein auf diese These bezogener konstruktiver Vorschlag nicht ausgeführt werden. Mir ist bewusst, dass dies von Leser:innen als nicht befriedigend bewertet werden könnte, umso mehr als so ein Vorschlag in der HDM bisher nur in ersten Ansätzen realisiert wurde. Nichtsdestotrotz, scheint es mir wichtig, im Folgenden ein Stück weit die Problemlage darzulegen.

hin. Ähnliche Anforderungen formulierte Gascón (2003) in seinen Überlegungen zu Unterschieden und Anschlussmöglichkeiten kognitivistischer und epistemologischer Forschungsperspektiven. Die HDM scheint mir in diesem Kontext Ungeklärtes bisher eher zur Seite zu schieben als konstruktiv aufzugreifen.

3.1 Grundvorstellungen

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik steht das Fachliche insbesondere in Arbeiten im Zentrum, die sich der sog. Stoffdidaktik zuordnen lassen (Laborde, 2016; Sträßer, 2019). Die Stoffdidaktik hat zu zentralen Inhalten des schulischen Mathematikunterrichts einflussreiche konkrete Vorschläge unterbreitet und zu deren Begründung auch theoretische Konzeptualisierungen des Fachlichen entwickelt. Auch in der HDM fokussieren stoffdidaktische Analysen auf den Lehr- bzw. Lernstoff und identifizieren etwa geeignete fachliche Übergänge und Passungen hinsichtlich Begriffen und Kalkülen. So tragen Rekonstruktionen der fachlichen und innermathematischen Logik mathematischer Themen unter anderem zur Klärung der Frage bei, welcher »Stoff« auf welche Weise in Mathematik-, Lehramts-, Naturwissenschafts- und Ingenieurstudiengängen behandelt werden soll und kann. Stoffdidaktische Konzeptualisierungen haben dabei psychologische Aspekte wie etwa Fragen der Motivation oder Problemlösekompetenz durchaus im Blick.

Eine solche Konzeptualisierung stellen Grundvorstellungen dar (Greefrath et al., 2016; vom Hofe, 1992; vom Hofe et al., 2016). Sie dienen unter anderem der Orientierung bei der Entwicklung curricularer Inhalte und als Heuristik bei der Aufbereitung mathematischen Wissens für die Lehre. Bezogen etwa auf die Behandlung der Ableitung reeller Funktionen in der gymnasialen Oberstufe werden im Wesentlichen vier verschiedene Grundvorstellungen unterschieden.[5] Aktuell wird für den unterrichtlichen Einstieg die Änderungsratenvorstellung favorisiert. Grundvorstellungen beanspruchen, für Lernende bedeutungsvolle fachliche Aspekte anschauungsbezogen zu adressieren, die beim Lösen von Aufgaben und im Kontext von Begründungen mathematischer Zusammenhänge fruchtbar gemacht werden können. Mittels der Änderungsratenvorstellung kann etwa anschauungsbezogen plausibel

5 Diese sind: Lokale Änderungsrate, Tagentensteigung, Lokale Linearität und Verstärkungsfaktor (Greefrath et al., 2016).

begründet werden, dass eine positive Ableitung einer Funktion mit ihrer Eigenschaft zusammenhängt, monoton wachsend zu sein.

In der HDM wird das Grundvorstellungskonzept bisher vergleichsweise wenig verwendet.[6] Eine Anbindung der Gestaltung hochschulmathematischer Lehre an Grundvorstellungen findet sich in den folgenden zwei (im Kern) College-bezogenen Vorschlägen. Zwar wird in beiden nicht explizit von Grundvorstellungen gesprochen, inhaltlich und aus einer deutschen Perspektive lassen sich die Vorschläge aber als orientiert an Grundvorstellungen deuten. So wird im IODE-Projekt[7] bei der Einführung Gewöhnlicher Differentialgleichungen, der weiteren Elaboration von Eigenschaften und Darstellungsweisen usw. konsequent an der Änderungsratenvorstellung angeknüpft. Dieses Lehrprojekt ist unter anderem aus dem Bemühen heraus entstanden, eine Orientierung von Kursen zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen auf rechnerische Tricks zur Lösung spezifischer Typen von Differentialgleichungen zu überwinden. Das ergibt insbesondere innermathematisch Sinn, da einerseits CAS-Software wie Maple oder Mathematica das Berechnen von Lösungen spezieller Typen übernehmen kann und andererseits ein qualitatives und etwa grundvorstellungsorientiertes Verständnis für Modellierungsaktivitäten mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen hilfreich, wenn nicht sogar notwendig ist. Darüber hinaus ist es auch so, dass ein explizites Berechnen von Lösungen von (noch nicht einmal sehr) komplexen Differentialgleichungen gar nicht möglich ist, qualitative Überlegungen einem aber in der Regel durchaus erlauben, interessante Einsichten über Verhalten und strukturelle Eigenschaften von Lösungen zu gewinnen. Im zweiten, meiner Einschätzung nach ebenfalls grundvorstellungsbezogenen Projekt (für einen Überblick, der auch weitere ähnliche Bemühungen aufgreift, siehe Thompson et al., 2021) geht es um Materialien für einen Lehrgang zur Integralrechnung, der inhaltlich insbesondere die Grundvorstellung der Integration als Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten adressiert, eine (Grund-)Vorstellung die beispielsweise im aktuellen niedersächsischen

6 Eine Ausnahme stellen Lehrvorschläge dar, die für die mathematischen Grundvorlesungen wie Analysis und Lineare Algebra mit Blick auf gymnasiale Lehramtsstudierende entwickelt wurden. So soll dort etwa in ergänzenden Aufgaben das neue universitäre Fachwissen genutzt werden, um schulbezogene Grundvorstellungen hinsichtlich curricularer und unterrichtspraktischer Einsichten zu sichern bzw. zu vertiefen (Bauer, 2013).

7 https://iode.wordpress.ncsu.edu/

Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe zentral adressiert wird. Beide genannten Entwicklungsprojekte greifen aus deutscher Sicht zwar zunächst schulmathematisches Wissen auf, überschreiten dieses aber im Fortgang. Dabei bleibt die Darstellung der Inhalte weniger formal als in Deutschland üblichen universitären Mathematikveranstaltungen, was unter anderem an institutionellen Unterschieden zwischen den U.S.A. und Deutschland im tertiären Bildungsbereich liegt.

3.2 Grenzen des Konzepts Grundvorstellungen, der Stoffdidaktik allgemein und Ansätze, diese zu überwinden

An einer sich im Wesentlichen auf fachliche, insbesondere stoffdidaktische und dabei etwa grundvorstellungsbezogene Konzepte fokussierenden Fachdidaktik lassen sich die folgenden drei Grenzen aufweisen, die zu spezifischen Weiterentwicklungen bzw. Einbettungen stoffdidaktischer Überlegungen in weiter gefassten Forschungsunternehmungen Anlass geben.

Eine erste Grenze, die in ähnlicher Weise auch eine Rolle in der Diskussion um die Kompetenzorientierung spielt, adressiert den Aspekt, dass es sich bei Grundvorstellungen um etwas handelt, was allgemeiner ist als ein konkreter fachlicher Inhalt. Die empirisch zu beobachtende Situierung gelernten Wissens, auch deren jeweils individuelle Realisierung, führten Bauersfeld (1993) zum Begriff der Subjektiven Erfahrungsbereiche, gewissermaßen als Gegenbegriff zu Grundvorstellungen. Dies wurde etwa von Vom Hofe (1992) aufgegriffen. Er schlug vor, beide Konzepte, also Grundvorstellungen und Subjektive Erfahrungsbereiche, zu verknüpfen. Dies geschah unter anderem im Kontext der Unterscheidung zwischen einer normativen (u.a. Lernziel) und deskriptiven (u.a. Lernresultat) Verwendung des Grundvorstellungskonzepts.

Eine zweite Grenze betrifft den Aspekt, dass fachliches Lernen, insbesondere wenn es institutionalisiert in der Schule oder Hochschule organisiert ist, nicht aus dem Fach und damit stoffdidaktisch alleine begriffen werden kann. So sind kognitive und affektiv-emotionale Aspekte genauso mit zu berücksichtigen, wie auch soziale und kommunikative Prozesse (siehe dazu auch Abschnitt 2.2). Dies wird von Vertretern einer stoffdidaktischen Orientierung selbstverständlich nicht geleugnet. Jedoch kann zum einen die Gegenfrage gestellt werden, ob eine Forschung, die vor allem diese Aspekte fokussiert, noch zum Kerngeschäft der Fachdidaktik gehört oder nicht vielmehr zum Kerngeschäft etwa der Psychologie, der Pädagogik oder der Sozialwissenschaften, und zum anderen stellt sich bei einer Aufnahme dieser Perspektiven das

Problem der Verknüpfung, das mich im Folgenden noch weiter beschäftigen wird.

Eine dritte, mit der vorhergehenden zusammenhängende Grenze besteht darin, dass Stoffdidaktik keine (zumindest den vorherrschenden psychologischen oder sozialwissenschaftlichen Standards entsprechende) empirische Überprüfung von Unterrichtsvorschlägen durchführte (etwa bezüglich der Rolle von Grundvorstellungen), und sich aus der Stoffdidaktik allein auch keine Evaluationsmethode ableiten lässt.

Bezüglich der empirischen Beforschung spezifisch fachlicher Lehr-Lernprozesse unter Berücksichtigung insbesondere pädagogisch- und persönlichkeitspsychologischer Aspekte ist in den letzten 20 Jahren viel geschehen. Erwähnen möchte ich hier stellvertretend die Arbeit von Hußman und Prediger (2016), die dieses Anliegen in den Kontext des Design-Based Research eingebettet haben und dabei ein Modell vorschlagen, das für sich beansprucht, über die Grenzen der Stoffdidaktik wesentlich hinausgehen zu können. Daneben gibt es vielfältige mathematikdidaktische Forschung, die der Empirischen Bildungsforschung zugeordnet werden kann. Hier werden Phänomene und Ausgangsfragen vor allem vor dem Hintergrund psychologischer Lerntheorien und auf der Grundlage vorgängiger Erkenntnisse mit Blick auf Hypothesen und deren Prüfung modelliert. Forschungsfragen werden formuliert auf Basis der Operationalisierung von Einflussgrößen als Variablen, die mittels bewährter, ggf. adaptierter oder auch neuer Instrumente erhoben werden (für einen Überblick der in der HDM häufig verwendeter Instrumente siehe etwa Schürmann et al., 2022). Hinsichtlich Erhebungsinstrumenten, bei denen sich schon an der inhaltlichen Formulierung der Items zeigt, dass sie den universitätsmathematischen Lehr-Lern-Kontext und dessen Inhalte unzureichend abdecken, gibt es vielfältige Bemühungen, diese fachlich adäquater zu gestalten. Dies betrifft beispielsweise die Erfassung von Lernstrategien. So wurde der LIST (Schiefele & Wild, 1994) mit Blick auf Universitätsmathematik zum LimST (Liebendörfer et al., 2021) weiterentwickelt. Dieser berücksichtig hinsichtlich kognitiver Lernstrategien die mathematikspezifische Rolle von Beispielen und Praxisbezügen bei der Elaboration, von Beweisen und Vereinfachungen bei der Organisation und das Üben als spezifische Form wiederholenden Lernens sowie bezüglich ressourcenbezogener Strategien unter anderem die Frustrationsresistenz als besondere Anstrengungsform und Übungsaufgaben als typische Lernanlässe in mathematikhaltigen Studiengängen. Diese fachspezifischen Differenzierungen erlauben zu erfassen, dass in verschiedenen Studiengängen und deren jeweiliger Mathematik durchaus unterschiedliche Lernstrategien relevant erscheinen, so beispielsweise in der Ingenieurmathematik gegenüber der Mathematik in einem reinen Fachstudium Mathematik.[8]

Eine fachlich adäquate und psychometrischen Kriterien genügende Erfassung universitätsmathematischer Kompetenzen stellt ein weithin offenes Forschungsdesiderat dar. Für mathematische Vorkurse im Kontext des Schule-Hochschule-Übergangs gibt es erste, in realistischer Zeit durchführbare Tests, die über prozedurale Aspekte hinaus hochschulmathematisch relevante Kompetenzfacetten unterscheiden können (Hochmuth et al., 2019). Und nicht zuletzt wurden in den zurückliegenden Jahren fachspezifische Konzepte der Programmevaluation und Elemente einer fachliche Aspekte berücksichtigenden Wirkungsforschung entwickelt, die in größerer Breite bei der Beforschung von Vorkursen, Brückenkursen im ersten Studienjahr und Lernzentrumsangeboten weitgehend erfolgreich angewendet wurden (Hochmuth, Biehler et al., in Druck).

3.3 Ungeklärtes hinsichtlich des (auch in) diesen Ansätzen inhärenten Begriffs sog. Bezugswissenschaften

Vom Standpunkt eines expliziten mathematischen Bildungsbegriffs kritisiert etwa Wittmann (2015) eine am Kompetenzbegriff orientierte Bildungsforschung, die den fachlichen Kern und die fachliche Ausrichtung der Fachdidaktik behindere und insbesondere auch dem schulischen Mathematikunterricht schade. So argumentiert Wittmann (2015) unter anderem, dass Kompetenzlisten die fachliche Spezifik der Mathematik nicht beschreiben können und darüber hinaus die Verwendung weitgehend fachlich unspezifischer psychologischer und sozialwissenschaftlicher Methoden zu keinen validen Aussagen über den Mathematikunterricht führen könne. Auch wenn diese Kritik auf Schulmathematik und deren Fachdidaktik bezogen formuliert ist, lassen sich die Argumente im Kern auf die HDM übertragen, hier natürlich vor allem auf eine entsprechend quantitativ ausgerichtete Forschung, darüber hinaus aber auch auf eine qualitative Forschung, wenn diese psychologische, päd-

8 So zeigen beispielsweise in ingenieurmathematischen Veranstaltungen leistungsstarke Studierende hohe Werte in der Anstrengung und bezüglich Übungsstrategien, die oft als Oberflächenstrategien bezeichnet werden, aber eher geringere Werte hinsichtlich Elaborations- und Organisationsstrategien (Liebendörfer et al., 2022).

agogische oder sozialwissenschaftliche Begriffe und Methoden ins Zentrum stellt.

Sowohl Wittmanns Kritik wie auch den in Abschnitt 3.2 erwähnten fachdidaktisch orientierten Ansätzen der Überwindung von Grenzen stoffdidaktischer Forschung liegt eine weitverbreitete Vorstellung von Bezugswissenschaften (u.a. Psychologie, Philosophie, Pädagogik, Soziologie) mit einem Kern aus Mathematik und einer darin eingebetteten Didaktik der Mathematik zugrunde. Damit ist bildhaft eine Situation adressiert, die zu der Frage führt, wie man sich einen Austausch zwischen Mathematik und anderen Wissenschaften (insbesondere die wechselseitigen Bezugnahmen) vorstellen soll. Wittmann (1995, pp. 357) formuliert diesbezüglich:

> »exchange of ideas with related disciplines [...] that allow for investigating the different roots of the core in a systematic way [....]. Of course, the core and the related areas overlap, and the ill-defined borders between them change over time. Thus, a strict separation is not possible. Although the related areas are indispensable for the whole entity to function in an optimal way, the specificity of mathematics education rests on the core, and therefore the core must be the central component.«

Dabei soll der Kern für Folgendes sorgen: »The core is aimed at an interdisciplinary, integrative view of different aspects and at constructive developments whereby the ingenuity of mathematics educators is of crucial importance« (Wittmann, 1995, pp. 358). Einerseits betont Wittmann, dass Methoden oder Ergebnisse nicht einfach zu übernehmen oder anzuwenden seien; wie aber adaptierte Verwendungsweisen jeweils gestaltet und begründet werden (können), bleibt andererseits weitgehend unklar. In ähnlicher Weise stellen sich diese Fragen in einer fachdidaktisch orientierten Empirischen Bildungsforschung, etwa bei der jeweiligen Auswahl zugrunde gelegter Begriffe, Theorien, Operationalisierungen oder auch statistischer Modelle, darüber hinaus auch in der inhaltlichen Interpretation quantitativer und qualitativer Forschungsergebnisse. Und auch in Untersuchungen im Rahmen des Design-Based Research-Ansatzes ergeben sich in den jeweiligen konkreten Forschungsschritten entsprechende Fragen.

Nun bieten beispielsweise psychologische oder pädagogische Theorien und Methoden natürlich jeweils Möglichkeiten, inhaltliches und damit mathematisches Wissen zu berücksichtigen. Aber wie sind dann die sich dabei ergebenden psychologisch, pädagogisch und/oder sozialwissenschaftlich aufgeladenen fachdidaktischen Theorien, zugeordnete methodische Zugänge und Fragestellungen aufeinander zu beziehen? Ohne eine Klärung dieser Frage bleibt die Rolle des Fachlichen, wie dieses auch immer in den jeweiligen fachdidaktischen Theorien berücksichtigt sein mag, letztlich ungeklärt.

Die Bedeutung dieser Fragen ist in der Fachdidaktik immer wieder erkannt worden und hat zu Bemühungen um deren systematische Bearbeitung geführt.[9] Wie in der Mathematikdidaktik verschiedene didaktische Theorien, die sich in durchaus unterschiedlicher Weise der Bezugswissenschaften bedienen und dabei in jeweils spezifischer Weise Fachliches berücksichtigen, miteinander verknüpft werden können, wurde intensiv im Rahmen einer europäischen Forschungskooperation unter der Überschrift »Networking of theories as a research practice in mathematics education« beforscht (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014). In diesen Bemühungen wurde die theoretische Vielfalt nicht nur als Herausforderung gesehen, sondern angesichts der Komplexität des Forschungsfeldes vor allem als Ressource. So wurden insbesondere mit Blick auf die Bearbeitung der Komplexität fruchtbare Vernetzungspraktiken identifiziert und beispielhaft umgesetzt. So finden sich etwa differenzierte Vorschläge zur lokalen Integration von Theorienteilen. Darüber hinaus wurden die Bedingungen von Vernetzungspraktiken hinsichtlich ihres Potenzials für substantielle Beiträge zur fachdidaktischen Theorieentwicklung systematisch reflektiert.[10]

Da fachdidaktische Theorien jeweils Antworten auf die Frage nach dem Verhältnis zwischen dem Fach Mathematik und den Bezugswissenschaften einschließen, ist in den Vernetzungsproblemen und diesbezüglichen Bearbeitungsvorschlägen ebenfalls die Frage zu diesem Verhältnis enthalten. In den Vernetzungsbemühungen wurden diesbezüglich über den obigen Vorschlag Wittmanns (1995) hinaus substantielle Fortschritte gemacht. Im Kern scheinen mir aber zentrale Aspekte weder inhaltlich noch methodisch grundlegend beantwortet. Auch scheint mir keine systematische und in einem wissenschaftlichen Sinne kontrollierbare Umgangsweise mit der sich daraus

9 Für einen historischen Überblick und darüber hinaus aktuellen Bearbeitungsvorschlag aus systemtheoretischer Sicht (im Sinne Luhmanns) vgl. Lensing (2021).

10 Mit diesen wenigen Anmerkungen werde ich den Bemühungen um Vernetzungspraktiken und den dabei gewonnenen Einsichten selbstverständlich in keiner Weise gerecht. Wenn ich im Folgenden auf eine m.E. wichtige Grenze dieser Bemühungen eingehe, so soll dies insbesondere keine Geringschätzung diesen gegenüber zum Ausdruck bringen.

resultierenden Problemlage vorzuliegen. Ein Grund dafür dürfte sich aus Überlegungen Radfords (2008)[11] ergeben, auf die ich nächsten Abschnitt eingehen werde.

3.4 Bisher nicht eingelöste Voraussetzungen der Klärung im Rahmen der Vernetzungsbemühungen

Radford (2008, p. 320) hat vorgeschlagen, mathematikdidaktische Theorien als Tripel (P, M, Q) aufzufassen:

> »… theory can be seen as a way of producing understandings and ways of action based on:
> – A system, P, of basic principles, which includes implicit views and explicit statements that delineate the frontier of what will be the universe of discourse and the adopted research perspective.
> – A methodology, M, which includes techniques of data collection and data-interpretation as supported by P.
> – A set, Q, of paradigmatic research questions (templates or schemas that generate specific questions as new interpretations arise or as the principles are deepened, expanded or modified).«

Mit Blick auf die Frage der Vernetzung fachdidaktischer Theorien sind die Prinzipien zentral. Radford (2008) legt bezüglich »P« Wert auf die Verwendung des Wortes System statt etwa Menge, da es sich in der Regel um eine Art hierarchischer Anordnung von aufeinander verweisenden Begriffen handele, deren Bedeutung und Gewicht sich jeweils auch aus deren Zusammenhang ergebe. So bedeuteten etwa Begriffe wie Kognition oder soziale Interaktion selbst in Theorien, die durchaus eine gewisse Verwandtschaft besäßen, Unterschiedliches und wären auch verschieden relevant. Beispielhaft skizziert Radford dies an der Verwendung der beiden genannten Begriffe in der Theorie Didaktischer Situationen und einer an Wygotski orientierten Handlungstheorie, wie sie etwa von Engeström (2016) ausgearbeitet wurde. Methoden und Forschungsfragen gründen gewissermaßen in Prinzipien und sollten mit diesen verträglich sein, sind durch diese aber nicht vollständig festgelegt. Zu den Prinzipien gehörten insbesondere solche, die den ontologischen Status

11 Ähnliche Überlegungen finden sich bereits bei Gasón (2003) im Kontext einer Diskussion der Verknüpfung von APOS und ATD bzw. kognitivistischer und epistemologischer Forschungsperspektiven.

des mathematischen Wissens betreffen: »Ontological principles have to do with the status that the theory attributes to mathematical knowledge and the realities the theory deals with« (Radford, 2008, p. 320).

Lotman (1989) folgend sieht Radford Theorien und ihre Formen in spezifischen historischen und kulturellen Kontexten gegründet, was unter anderem ihre Grenzen festlege. Allerdings: »The identification of boundaries is still a work in progress« (Radford, 2008, p. 323). Mit dem Triple (P, M, Q) und insbesondere dem Element P gelingt es also Radford zwar, Dimensionen der Verknüpfung zu thematisieren und damit prinzipiell zugänglich zu machen. Wegen des damit aber substantiell zusammenhängenden und weitgehend ungelösten Problems der Identifizierung jeweiliger Grenzen wird die Frage des in Abschnitt 3.3 thematisierten Ungeklärten in gewissem Sinne lediglich verschoben und bleibt unbeantwortet. Daraus erklärt sich meines Erachtens letztlich auch ein gewisser Stillstand bezüglich der weiteren Ausarbeitung der Networking-Grundlagen.

Auf einen dabei meines Erachtens äußerst relevanten Punkt deutet Radford im folgenden Zitat bereits selbst hin:

> »The differences are thus clear at the level of their respective research questions. Now, are these research questions incompatible or just different? My argument here is that we cannot answer this question by looking at the theories' research questions alone and that we need to look into the principles as well. For, research questions are not stated in a conceptual vacuum: research questions are stated within a world-view and this world-view is defined by the explicit and implicit principles of any given theory.« (Radford, 2008, p. 325).

Nun drücken sich Weltanschauungen sicher in den genannten Prinzipien aus, gehen aber auch über diese hinaus. Soweit sich aber unterschiedliche Weltanschauungen gegenüberstehen, gibt es für die sich daraus ergebenden Vernetzungsfragen meines Erachtens kein zufriedenstellendes Bearbeitungsangebot. Letztlich ist überhaupt unklar, wie sich an Theorien jeweils unterschiedliche Weltanschauungen festmachen lassen, vor allem wenn sie implizit bleiben. Natürlich können weltanschauliche Divergenzen teilweise auf wiederum strittige philosophische Fragen zurückbezogen werden. Damit wäre dann zwar eine Ebene benannt, auf der solche Fragen elaboriert und systematisch verortet und verhandelt, aber eben mit Blick auf fachdidaktische Begriffe und deren Verwendung im Kontext institutioneller Lehr-Lernverhältnisse nicht beantwortet werden können. Auch auf damit zusammenhängende gesellschaftliche bzw. politische Positionierungen weist Radford abschließend hin: »Our list should hence also include items about power, intersubjectivity and a clear sensibility to other epistemologies (e.g. aboriginal and marginalized ones); for […] in one way or another, mathematics education must attend to the ethical and political domains of the practices it investigates.« (Radford, 2008, p. 326). Offen bleibt auch in diesem Zusammenhang insbesondere die Frage, wie dies mit Blick auf fachdidaktische Theoriebildung systematisch bearbeitet und in einer wissenschaftlichen Auseinandersetzung über theoretische Begriffe und Prinzipien, die das Fachliche und seine Rolle einschließen, zugänglich gemacht werden kann.

4 Ausblick

Die in den letzten Jahren stattgefundene Entwicklung der Hochschuldidaktik Mathematik als Wissenschaftsdisziplin erscheint mir durchaus bemerkenswert. Elaborierte theoretische Ansätze und vielfältige empirische Untersuchungen tragen international zu zumeist gut begründeten Lehrentwicklungen bei. Allerdings scheint es mir, insbesondere das spezifisch Universitätsmathematische betreffend, auch Entwicklungen zu geben, die als problematisch einzuschätzen sind. Zumindest angedeutet seien Beobachtungen zum mathematischen Wissen von gymnasialen Lehramtsstudierenden am Ende ihres Fachstudiums und Überlegungen, wie Defizite bezüglich dieses Wissens mit problematischen fachdidaktischen Vorstellungen zusammenhängen (Hochmuth & Peters, eingereicht). So lässt sich etwa im Kontext fachdidaktischer Qualifikationsarbeiten zur Entwicklung entdeckend-forschend orientierter Lehrgestaltungen beobachten, dass konsequent konzeptorientierte Ausgangsmaterialen in kleinschrittige, enggeführte und im Wesentlichen auf Kalkülaspekte fokussierte Lehrmaterialien transformiert werden (Hochmuth & Peters, in Druck). Dabei verknüpfen sich sehr grundlegende, trotz eines im Sinne der Prüfungsanforderungen erfolgreichen dreijährigen Mathematikstudiums bestehende, fachliche Defizite mit problematischen gesellschaftlich dominanten aber kaum der Reflektion zugänglichen Vorstellungen bezüglich Lehr-Lernprozessen. Angesichts dieser Beobachtungen stellt sich unter anderem die Frage, ob hochschuldidaktische Fördermaßnahmen und Umstrukturierungen nicht (zumindest teilweise) eher dazu beitragen, fachliches und kritisch-reflektierendes Lernen zu behindern anstatt zu fördern.

Nach einer ersten Entwicklungsphase der HDM, die fruchtbare Impulse für die mathematische Hochschullehre aufgezeigt hat, scheint es mir eine zunehmend wichtiger werdende Aufgabe, solche Phänomene besser zu verstehen und mit Blick darauf auch die institutionell-gesellschaftliche Rolle, welche die Hochschuldidaktik Mathematik in diesem Kontext einnimmt. Meines Erachtens hängt die Bearbeitung dieser Aufgabe eng mit den im Abschnitt 3 diskutierten Fragestellungen zusammen, da es dabei auch darum geht, die HDM hinsichtlich Theoriebildung und Praxis in ihrer gesellschaftlichen Konstituierung und politischen Verortung zu reflektieren.

Auch vor dem Hintergrund der Vernetzungsproblematik halte ich es für potentiell fruchtbar, subjektwissenschaftliche Erkenntnisse und Überlegungen zum Lernen in vorherrschenden institutionell-gesellschaftlichen Lehr-Lernverhältnissen (Holzkamp, 1993) und deren Grundlegung (Holzkamp, 1985) mit einzubeziehen. Dies schließt in der Folge die Notwendigkeit ein, vor diesem Hintergrund mathematikdidaktische Theoriebildungen zu reinterpretieren (Markard, 2012). Mit Blick auf das spezifisch Fachliche erscheint mir ATD (siehe dazu auch die Ausführungen im Abschnitt 2.2) einen mit diesem programmatischen Anliegen anschlussfähigen und die Stoffdidaktik einschließenden Ansatz zu bieten (Hochmuth & Schreiber, 2015). In einer wechselseitig integrierten Verknüpfung von Subjektwissenschaft und ATD wären dann auch die in der Diskussion der Stoffdidaktik identifizierten drei Grenzen adressierbar: die Situierung gelernten Wissens unter anderem etwa im ATD-Konzept der institutionellen Relativität mathematischen Wissens; die Rolle der auch gesellschaftlich funktionalen Institutionalisierung von Lehr-Lern-Verhältnissen unter anderem etwa im ATD-Konzept der Praxeologien kodeterminierenden höheren Mitbestimmungsebenen; die Frage einer gegenstandsadäquaten empirischen Forschung unter anderem etwa in subjektwissenschaftlichen Konzeptionen empirischer Forschung (Holzkamp, 1985, Kap. 9) unter expliziter Berücksichtigung von Reinterpretationen vorliegender fachdidaktischer Theoriebildungen. Die Anschlussfähigkeit von subjektwissenschaftlichem Ansatz und ATD beruht unter anderem darauf, dass zumindest am Anfang der subjektwissenschaftlichen Theorieentwicklung und der Untersuchungen zu Phänomenen der Didaktischen Transposition verwandte »Weltanschauungen« standen (Chevallard, 1991), die im Unterschied zur subjektwissenschaftlichen Theorie in aktuellen Entwicklungen der ATD allerdings keine explizite Rolle mehr spielen.

Im Rahmen dieses Programms wäre unter anderem auch das folgende Problem zu bearbeiten: In einer fachbezogenen, subjektwissenschaftlich basierten didaktischen Rekonstruktion gilt es, im Übergang von auf der institutionellen Ebene verortetem Fachlichem zu auf der individuellen Ebene adressierten subjektbezogenen fachlichen Bedeutungen, zu vermeiden, unmittelbar Institutionelles auf Individuelles zu beziehen. Hinsichtlich dieses Übergangs wurde im Kontext fachbezogener Analysen studentischer Aufgabenbearbeitungen (Hochmuth & Peters, 2021) ein erster methodischer Vorschlag formuliert, der Ideen aus der Theorie Rationaler Erklärungen (Schwemmer, 1976) aufgreift.

Literatur

Artigue, M. (2016). Mathematics education research at university level: Achievements and challenges. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31 March-2 April 2016)* (pp. 11–27). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. In C. Laborde, M.-J. Perrin-Glorian & A. Sierpinska, (Eds.), *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 235–268). New York: Springer.

Bauer, T. (2013). *Analysis-Arbeitsbuch: Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik – sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen.* Wiesbaden: Springer.

Bauersfeld, H. (1993). Mathematische Lehr-Lern-Prozesse bei Hochbegabten – Bemerkungen zu Theorie, Erfahrungen und möglicher Förderung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14*(3), 243–267.

Biehler, R., Eichler, A., Hochmuth, R., Rach, S. & Schaper, N. (Hrsg.) (2021). *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik praxisrelevant – didaktisch fundiert – forschungsbasiert.* Berlin: Springer Spektrum.

Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education.* Cham: Springer.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A. & Rasmussen, C. (2016). *Research on teaching and learning mathematics at the tertiary evel: State-of-the-art and looking ahead. ICME-13 Topical Surveys.* Cham: Springer.

Bohnsack, R. (2021). Praxeologische Wissenssoziologie. *ZQF – Zeitschrift für Qualitative Forschung 1*, 87–106.

Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 67–83). Cham: Springer.

Bosch, M., Hausberger, T., Hochmuth, R., Kondratieva, M. & Winsløw, C. (2021). External didactic transposition in undergraduate mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 7(1)*, 140–162.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics.* Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.). Dordrecht: Springer.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.G. (Hrsg.) (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Berlin: Springer Spektrum.

Castela, C. & Romo Vázquez, A. (2011). Des mathematiques a l'automatique : Etude des effets de transposition sur la transformee de Laplace dans la formation des ingenieurs. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(1), 79–130.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné* (2nd ed.). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 19*(2), 221–266.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Springer.

Durand-Guerrier, V., Hochmuth, R., Nardi, E. & Winsløw, C. (Eds.) (2021). Research and development in university mathematics education: Overview produced by the International Network for Didactic Research in University Mathematics. London: Routledge.

Engeström, Y. (2016). *Studies in expansive learning: Learning what is not yet there*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gascón, J. (2003). From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: Two incommensurable scientific research programmes? *For the Learning of Mathematics 23*(2), 44–55.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.S., Ulm, V. & Weigand, H.G. (2016). Aspects and »Grundvorstellungen« of the concepts of derivative and integral. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 99–129.

Hochmuth, R., Biehler, R., Liebendörfer, M. & Schaper, N. (in Druck). *Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen: Konzepte, Praxisbeispiele und Untersuchungsergebnisse.* Berlin: Springer Spektrum.

Hochmuth, R., Broley, L. & Nardi, E. (2021). Transitions to, across and beyond university. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi & C. Winsløw (Eds.), *Research and development in university mathematics education* (pp. 191–215). London: Routledge.

Hochmuth, R. & Peters, J. (2021). On the analysis of mathematical practices in signal theory courses. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7*(2), 235–260.

Hochmuth, R. & Peters, J. (2022). About two epistemological related aspects in mathematical practices of empirical sciences. In Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás & N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 327–342). Cham: Birkhäuser.

Hochmuth, R. & Peters, J. (in Druck). About the use of QA-maps in the development of lesson plans by student teachers. In Proceedings 7th International Conference of the Anthropological Theory of the Didactics. Cham: Birkhäuser.

Hochmuth, R. & Peters, J, (eingereicht). Student teachers' development of introductory ODE learning units – Subject-specific and further challenges.

Hochmuth, R., Schaub, M., Seifert, A., Bruder, R. & Biehler, R. (2019). The VEMINT-Test: Underlying design principles and empirical validation. In U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME11) (pp. 2526–2533). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Hochmuth, R. & Schreiber, S. (2015). Conceptualizing societal aspects of mathematics in signal analysis. In S. Mukhopadhyay & B. Geer (Eds.), *Proceedings of the Eight International Mathematics Education and Society Conference,* Vol. 2 (pp. 610–622). Portland: Ooligan Press.

Holzkamp, K. (1985). *Grundlegung der Psychologie*. Frankfurt a.M.: Campus.

Holzkamp, K. (1993). *Lernen: Subjektwissenschaftliche Grundlegung*. Frankfurt a.M.: Campus.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2016). Specifying and structuring mathematical topics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 33–67.

Laborde, C. (2016). A view on subject matter didactics from the left side of the Rhine. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 255–73.

Lensing, F. (2021). *Das Begreifen begreifen: auf dem Weg zu einer funktionalistischen Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer VS.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport, CT: Ablex Publishing.

Liebendörfer, M., Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Kortemeyer, J., Ostsieker, L., Rode, J. & Schaper, N. (2021). LimSt – A questionnaire for learning strategies in Mathematics related studies. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*, 25–59.

Liebendörfer, M. et al. (2022). The role of learning strategies for performance in mathematics courses for engineers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(5), 1133–1152.

Lotman, Y.M. (1989). The semiosphere. *Soviet Psychology*, *27*(1), 40–61.

Markard, M. (2012). *Einführung in die Kritische Psychologie.* Hamburg: Argument Verlag.

Prediger, S., Gravemeijer, K. & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM*, 47(6), 877–891.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM, 40*(2), 317–327.

Schiefele, U. & Wild, K.-P. (1994). Lernstrategien im Studium: Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie*, *15*, 185–200.

Schürmann, M., Büdenbender-Kuklinski, C., Lankeit, E., Liebendörfer, M., Hochmuth, R., Biehler, R. & Schaper, N. (2022). *Dokumentation der Erhebungsinstrumente des Projekts WiGeMath*. khdm-Report 22–0. KOBRA Universität Kassel.

Schwemmer, O. (1976). *Theorie der Rationalen Erklärung: Zu den methodischen Grundlagen der Kulturwissenschaften*. München: Beck.

Sfard, A. (2014). University mathematics as a discourse – why, how, and what for? *Research in Mathematics Education, 16*(2), 199–203.

Sträßer, R. (2019). The German speaking didactic tradition. In W. Blum, M. Artigue, M. Mariotti, R. Sträßer & M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European traditions in didactics of mathematics* (pp. 123–151). Cham: Springer.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Springer.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.

Thompson, P.W. & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM*, *53*(3), 507–519.
van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521–525). Dordrecht: Springer.
vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *13*(4), 345–364.
vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). »Grundvorstellungen« as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 225–254.
Winsløw, C., Gueudet, G., Hochmuth, R. & Nardi, E. (2018). Research on university mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 60–74). London: Routledge.
Wittmann, E.C. (1995). Mathematics education as a ›design science‹. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(4), 355–374.
Wittmann, E.C. (2015). *Kompetenzorientierung vs. solide mathematische Bildung: Wohin steuert der Mathematikunterricht?* Dortmund: Universitätsbibliothek Dortmund.