

**Reihe 18**

Mechanik/  
Bruchmechanik

**Nr. 349**

M.Sc. Alexander Grübel,  
Paderborn

## **Effiziente bruchmechanische Herangehensweisen für eine wirtschaftliche Produktentstehung und einen sicheren Bauteilbetrieb**



# Effiziente bruchmechanische Herangehensweisen für eine wirtschaftliche Produktentstehung und einen sicheren Bauteilbetrieb

zur Erlangung des akademischen Grades  
DOKTOR DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)  
der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Paderborn

genehmigte  
DISSERTATION

von  
M. Sc. Alexander Grübel  
aus Holzminden

Tag des Kolloquiums: 6. Dezember 2017

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Hans Albert Richard

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Stefan Weihe



# Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 18

Mechanik/  
Bruchmechanik

M.Sc. Alexander Grübel,  
Paderborn

Nr. 349

Effiziente  
bruchmechanische  
Herangehensweisen für  
eine wirtschaftliche  
Produktentstehung  
und einen sicheren  
Bauteilbetrieb

VDI verlag

Grübel, Alexander

## **Effiziente bruchmechanische Herangehensweisen für eine wirtschaftliche Produktentstehung und einen sicheren Bauteilbetrieb**

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 349. Düsseldorf: VDI Verlag 2018.

138 Seiten, 90 Bilder, 16 Tabellen.

ISBN 978-3-18-334918-0, ISSN 0178-9457,

€ 52,00/VDI-Mitgliederpreis € 46,80.

**Für die Dokumentation:** Bruchmechanik in der virtuellen Produktentstehung – Ermüdungsrisswachstum – bruchmechanischer Festigkeitsnachweis – ersatzmodellbasierte Spannungsintensitätsfaktormittlung – Mixed-Mode-Rissbeanspruchung – Nutzung vorhandener Spannungsdaten – effiziente Herangehensweisen – Restlebensdauer

Ermüdungsrisswachstum von Fehlstellen in Folge zyklischer Beanspruchung ist eine häufige Versagensursache von Bauteilen. Die im fehlerstellenfreien Bauteil wirkenden Spannungen sind im Kontext einer modernen Produktentstehung unabhängig von einer bruchmechanischen Untersuchung verfügbar. Deren synergetische Nutzung zur Bestimmung der Rissbeanspruchung mit Hilfe numerischer Methoden ist Hauptthema dieser Arbeit. In der vorliegenden Dissertation werden Herangehensweisen erarbeitet, die vorhandene mehrachsige Spannungsdaten fehlerstellenfreier Bauteile zur Bestimmung der Rissbeanspruchung nutzen. In der Praxis gestaltet sich dadurch die bruchmechanische Bauteilbewertung deutlich effizienter. Die Herangehensweisen basieren größtenteils auf kubischen Ersatzmodellen, wodurch der Modellierungs- und Berechnungsaufwand reduziert wird.

### **Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

### **Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek**

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie (German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at <http://dnb.ddb.de>.

Dissertation Universität Paderborn

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 2018

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9457

ISBN 978-3-18-334918-0

## VORWORT

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Fachgruppe Angewandte Mechanik der Universität Paderborn.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater und langjährigem Leiter der Fachgruppe Angewandte Mechanik Herrn Prof. Dr.-Ing. Hans Albert Richard für die Diskussionsbereitschaft, die vielen wertvollen Ratschläge und Anregungen sowie das entgegengebrachte Vertrauen. Die konsequente Förderung hat wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Dem Direktor der Materialprüfungsanstalt der Universität Stuttgart, Herrn Prof. Dr.-Ing. Stefan Weihe, danke ich für das gezeigte Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferats meiner Dissertation. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Volker Schöppner (Kunststofftechnik Paderborn, Universität Paderborn) sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerson Meschut (Laboratorium für Werkstoff- und Fügetechnik, Universität Paderborn) für die Mitarbeit in der Promotionskommission.

Für die fachliche Unterstützung und die sehr hilfreichen Diskussionen bedanke ich mich außerdem bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Gunter Kullmer. Ein großer Dank für die kollegiale Arbeitsatmosphäre und die gute Zusammenarbeit gilt weiterhin den derzeitigen und ehemaligen Arbeitskolleginnen und Arbeitskollegen der Fachgruppe Angewandte Mechanik: Frau Dipl.-Medienwirtin (FH) Michaela Brock, Frau Dipl.-Ing. Katharina Dibblee, Frau M. Sc. Lena Risse, Frau Dr.-Ing. Britta Schramm, Herrn M. Sc. Benjamin Bauer, Herrn M. Sc. Jan-Peter Brüggemann, Herrn Dr.-Ing. Alexander Eberlein, Herrn M. Sc. Tintu David Joy, Herrn M. Sc. Sergius Kremer, Herrn Dr.-Ing. Wadim Reschetnik, Herrn Dr.-Ing. Andre Riemer, Herrn M. Sc. Karsten Schäfer und Herrn Dipl.-Ing. Markus Wirxel. Einschließen möchte ich sowohl die engagierten Studien-, Bachelor- und Masterarbeiter/-innen als auch die studentischen Hilfskräfte.

Abschließend geht ein besonderer Dank an meine Eltern Ulrike und Manfred für ihren uneingeschränkten Rückhalt sowie die Unterstützung auf meinem bisherigen Lebensweg. Gleiches gilt meinem Bruder Carl. Großer Dank gilt außerdem meiner Partnerin Hedda für ihre Zuversicht, viele wertvolle Ratschläge und die notwendige Ablenkung.

Paderborn, im Dezember 2017

Alexander Grübel

## Meinen Eltern

# INHALTSVERZEICHNIS

Verzeichnis der verwendeten Symbole und Abkürzungen.....	VIII
Kurzfassung .....	XIII
<b>1 Einführung .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Fehlstellen in Bauteilen und Strukturen sowie ihre Bewertung .....</b>	<b>4</b>
<b>2.1 Wirkung von Rissen und Fehlstellen auf Bauteile .....</b>	<b>4</b>
2.1.1 Rissbildung .....	4
2.1.2 Rissfortschritt .....	5
<b>2.2 Beispiele für Rissprobleme unter komplexer Belastung in der Praxis.....</b>	<b>6</b>
2.2.1 Ermüdungsrisswachstum in Rotorwellen von Windenergieanlagen .....	7
2.2.2 Rissprobleme in der Kurbelwelle von Verbrennungsmotoren .....	8
<b>2.3 Kraftflussverlauf und Rissbeanspruchungsarten .....</b>	<b>9</b>
<b>2.4 Spannungsverteilung in der nahen Rissumgebung.....</b>	<b>12</b>
2.4.1 Spannungsverteilung ebener Rissprobleme .....	13
2.4.2 Spannungsverteilung räumlicher Rissprobleme .....	14
<b>2.5 Spannungsintensitätsfaktoren .....</b>	<b>16</b>
<b>2.6 K-Konzept bei Mixed-Mode-Beanspruchung.....</b>	<b>17</b>
2.6.1 K-Konzept bei Single-Mode-Beanspruchung .....	17
2.6.2 K-Konzept bei ebener Mixed-Mode-Beanspruchung .....	18
2.6.3 K-Konzept bei räumlicher Mixed-Mode-Beanspruchung .....	19
<b>2.7 Ermüdungsrisswachstum bei zyklischer Belastung mit konstanter Amplitude .....</b>	<b>21</b>
2.7.1 Zusammenhang zwischen Bauteilbelastung und zyklischem Spannungsintensitätsfaktor .....	21
2.7.2 Rissausbreitung unter zyklischer Beanspruchung .....	23
2.7.3 Mathematische Konzepte zur Beschreibung der Kennwerte des Ermüdungsrisswachstums .....	25
2.7.3.1 PARIS-Gesetz .....	25
2.7.3.2 FORMAN/METTU-Gleichung .....	25
2.7.3.3 Konzept nach KULLMER .....	26
2.7.4 Ermüdungsrisswachstum bei Mixed-Mode-Beanspruchung.....	26
<b>2.8 Regelwerke der bruchmechanischen Bauteilbewertung .....</b>	<b>28</b>
2.8.1 Vorgehensweise der bruchmechanischen Bauteilbewertung.....	29
2.8.2 Internationale Regelwerke zur bruchmechanischen Bauteilbewertung.....	29
2.8.2.1 FKM-Richtlinie Bruchmechanischer Festigkeitsnachweis .....	30

2.8.2.2	British Standard 7910.....	30
2.8.2.3	European Fitness-for-Service Network FITNET.....	30
2.8.2.4	ASME Boiler & Pressure Vessel Code.....	31
2.8.3	Kennwertermittlung nach ASTM E 647-08.....	31
<b>3</b>	<b>Bruchmechanische Bauteilbewertung im Kontext der modernen Produktentstehung und -nutzung.....</b>	<b>33</b>
3.1	Virtuelle Entstehung technischer Produkte.....	33
3.2	Bruchmechanische Fragestellungen während Produktentstehung und Bauteilbetrieb .....	35
3.3	Anforderungen an die effiziente bruchmechanische Bauteilbewertung .....	36
<b>4</b>	<b>Verfahren zur Bestimmung der bruchmechanischen Beanspruchungsgrößen .....</b>	<b>38</b>
4.1	Grundlegende Ansätze für Basislösungen.....	38
4.1.1	Analytische Lösungen .....	38
4.1.2	Programmbasierte Bibliotheken .....	39
4.2	Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen .....	40
4.2.1	Grundlagen der Finite-Elemente-Methode .....	40
4.2.2	Ansätze der Finite-Elemente-Methode zur Beschreibung der Gegebenheiten an der Rissspitze .....	42
4.2.3	Spannungsintensitätsfaktorbestimmung auf Basis der Finite-Elemente Methode.....	46
4.2.3.1	Einfaches und modifiziertes Rissschließungsintegral .....	46
4.2.3.2	<i>J</i> -Integral .....	47
4.2.3.3	<i>M</i> -Integral .....	49
4.2.3.4	Verschiebungskorrelationsmethode .....	49
4.2.4	Untersuchungen zur Ergebnissenauigkeit .....	51
4.3	Automatisierte numerische Simulation des Ermüdungsrisswachstums .....	52
4.3.1	Automatisierte Rissausbreitungssimulationsprogramme .....	53
4.3.1.1	Programmsystem FRANC/FAM.....	53
4.3.1.2	Programmsystem ADAPCRACK3D .....	53
4.3.1.3	Programmsystem FRANC3D .....	54
4.3.2	Untersuchungen zur Ergebnissenauigkeit .....	54
4.4	Bewertung der Verfahren zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung in Bauteilen und Strukturen .....	59
<b>5</b>	<b>Effiziente bruchmechanische Herangehensweisen für Produktentstehung und Bauteilbetrieb .....</b>	<b>62</b>
5.1	Hauptnormalspannungskonzept.....	64
5.1.1	Idee des Hauptnormalspannungskonzepts.....	64
5.1.2	Anwendbarkeit.....	65

<b>5.2</b>	<b>Mehrachsig halbanalytische Herangehensweise .....</b>	<b>66</b>
5.2.1	Rissbeanspruchungsrelevante Komponenten des mehrachsigen Spannungsfeldes.....	67
5.2.2	Idee der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise .....	68
5.2.3	Anwendbarkeit .....	70
<b>5.3</b>	<b>Konzept der Schnittspannungsfelder .....</b>	<b>72</b>
5.3.1	Idee des Konzepts der Schnittspannungsfelder .....	72
5.3.2	Anwendbarkeit .....	75
<b>5.4</b>	<b>Konzept der parametrisierten Einflussfunktionen .....</b>	<b>76</b>
5.4.1	Idee des Konzept der parametrisierten Einflussfunktionen .....	76
5.4.2	Anwendbarkeit .....	79
<b>5.5</b>	<b>Bewertung der entwickelten Herangehensweisen .....</b>	<b>81</b>
<b>5.6</b>	<b>Umsetzung der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise in ein Berechnungstool.....</b>	<b>84</b>
<b>6</b>	<b>Validierung der Herangehensweisen und Konzepte an Rissen in dreidimensionalen Bauteilen .....</b>	<b>87</b>
6.1	Kraftwerksbauteil: Y-Siebfilter.....	87
6.2	Motorenkomponente: Kurbelwelle .....	94
<b>7</b>	<b>Lösungsvorschläge zu praxisrelevanten Fragestellungen der bruchm. Bauteilbewertung.....</b>	<b>102</b>
<b>7.1</b>	<b>Umgang mit nicht-proportionalen Mixed-Mode-Rissbeanspruchungen .....</b>	<b>102</b>
7.1.1	Ungleiche positive $R$ -Verhältnisse .....	103
7.1.2	Ungleiche negative $R$ -Verhältnisse .....	105
7.1.3	Statische Mode II-Beanspruchung .....	107
<b>7.2</b>	<b>Einfluss unscharfer Materialdaten auf die Restlebensdauer .....</b>	<b>108</b>
<b>7.3</b>	<b>Einfluss anisotroper Materialkennwerte auf die Restlebensdauer bei Mixed-Mode-Rissbeanspruchung.....</b>	<b>110</b>
<b>8</b>	<b>Fazit .....</b>	<b>113</b>
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>115</b>

## VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE UND ABKÜRZUNGEN

### a) Lateinisch

$A$	Querschnittsfläche
$C$	Integrationsweg des $J$ -Integrals
$C_{\text{FM}}$	Koeffizient der FORMAN/METTU-Gleichung
$C_{\text{P}}$	Koeffizient der PARIS-Gleichung
$F$	Kraft
$F_{\text{G}}$	Gaskraft, Gewichtskraft
$F_{\text{i}}$	Knotenpunktkraft
$F_{\text{max}}$	maximale Kraft
$F_{\text{min}}$	minimale Kraft
$F_{\text{RG}}$	radiale Hubzapfenkraft
$F_{\text{SG}}$	Hubzapfenkraft
$F_{\text{TG}}$	tangentiale Hubzapfenkraft
$G_{\text{I}}, G_{\text{II}}, G_{\text{III}}$	Energiefreisetzungsrate für Mode I, Mode II und Mode III
$J$	gesamte freigesetzte Energie bei Rissfortschritt
$J_{\text{I}}, J_{\text{II}}, J_{\text{III}}$	freigesetzte Energie für Mode I, Mode II und Mode III
$\underline{K}$	Steifigkeitsmatrix
$K_{\text{I}}, K_{\text{II}}, K_{\text{III}}$	Spannungsintensitätsfaktor für Mode I, Mode II bzw. Mode III
$K_{\text{I,a}}, K_{\text{II,a}}$	Spannungsintensitätsamplitude für Mode I und Mode II
$K_{\text{IC}}, K_{\text{IIC}}, K_{\text{IIIC}}$	Risszähigkeit für Mode I, Mode II und Mode III
$K_{\text{I,m}}, K_{\text{II,m}}$	Mittelwert des Spannungsintensitätsfaktors für Mode I und Mode II
$K_{\text{I,max}}, K_{\text{I,min}}$	maximaler bzw. minimaler Spannungsintensitätsfaktor für Mode I
$K_{\text{I,zul}}$	zulässiger Spannungsintensitätsfaktor
$K_{\text{C}}$	kritischer Spannungsintensitätsfaktor
$K_{\text{V}}$	Vergleichsspannungsintensitätsfaktor
$\Delta K_{\text{I}}, \Delta K_{\text{II}}, \Delta K_{\text{III}}$	zyklischer Spannungsintensitätsfaktor für Mode I, Mode II und Mode III
$\Delta K_{\text{I,0}}, \Delta K_{\text{II,0}}$	zyklischer Spannungsintensitätsfaktor für Mode I und Mode II unter Annahme von $R = 0$
$\Delta K_{\text{IC}}$	kritischer zyklischer Spannungsintensitätsfaktor für Mode I

$\Delta K_{I,zul}$	zulässiger zyklischer Spannungsintensitätsfaktor
$\Delta K_{I,th}$	Schwellenwert für Mode I
$\Delta K_V$	zyklischer Vergleichsspannungsintensitätsfaktor
$\Delta K_{V,0}$	zyklischer Vergleichsspannungsintensitätsfaktor unter Annahme von $R = 0$
$L$	Elementgröße an der Rissspitze
$L^*$	Verhältnis der Elementgröße an der Rissspitze zur Risslänge
$L_S$	Submodellelementgröße
$M$	Moment
$M_{Ab}$	Abtriebsmoment
$M_{An}$	Antriebsmoment
$N$	Lastwechselzahl
$N_{0 \rightarrow I}$	benötigte Lastwechselzahl für definierte Rissverlängerung
$N_G$	Kolbenseitenwandkraft
$R$	Verhältnis von minimaler zu maximaler Beanspruchungsgröße
$S_E$	Sicherheit gegen stabile Rissausbreitung
$S_R$	Sicherheit gegen instabile Rissausbreitung
$\overline{U}$	elastische Energiedichte
$\underline{U}$	Verschiebungsvektor
$W_k$	Arbeit für Riss schließen
$Y_I, Y_{II}, Y_{III}$	Geometriefaktoren für Mode I, Mode II und Mode III
$Y_{I,z}$	Geometriefaktor für Mode I in Folge einer Normalspannung $\sigma_z$
$Y_{II,zy}, Y_{III,zy}$	Geometriefaktor für Mode II und Mode III in Folge einer Schubspannung $\tau_{zy}$
$Y_{II,zx}, Y_{III,zx}$	Geometriefaktor für Mode II und Mode III in Folge einer Schubspannung $\tau_{zx}$
$a, b$	Risslänge
$a_0$	Initialrisslänge
$a_{0,crit}$	wachstumsfähige Anrisslänge
$a_C$	kritische Risslänge
$a_h$	Risslänge bei Rissstillstand

$\Delta a$	Risslängenzuwachs
$b$	Halbachse eines elliptischen Risses
$c$	Spezifische Wärmekapazität
$d$	Durchmesser
$da$	Risslängenänderung
$da/dN$	Rissgeschwindigkeit bzw. Rissfortschrittsrate
$dN$	Lastwechselzahländerung
$ds$	Wegkoordinate des $J$ -Integrals
$f$	Verhältnis von absoluter Ergebnisabweichung zum Thresholdwert
$h_{I,z}$	Einflussfaktor für Mode I in Folge einer Normalspannung $\sigma_z$
$h_{II,zx}, h_{III,zx}$	Einflussfaktor für Mode II und Mode III in Folge einer Schubspannung $\tau_{zx}$
$h_{II,zy}, h_{III,zy}$	Einflussfaktor für Mode II und Mode III in Folge einer Schubspannung $\tau_{zy}$
$j_z$	Verdrehung
$m_P$	Exponent im PARIS-Gesetz
$n, p, q$	Exponenten der FORMAN/METTU-Gleichung
$p_{\bar{u}}$	normierter Überdruck
$q$	Verhältnis von Submodellelementgröße zur globalen Elementgröße
$r, \varphi$	Polarkoordinaten
$r^*$	Abstand zur Rissspitze
$t$	Zeit, Probendicke
$\Delta t$	effektive Elementdicke
$\vec{u}$	Verschiebungsvektor
$u_x, u_y, u_z$	Verschiebungen
$\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$	Rissuferverschiebung
$w$	Probenbreite
$x, y, z$	kartesische Koordinaten

**b) Griechisch**

$\Phi_I, \Phi_{II}$	Phasenwinkel für Mode I und Mode II
$\alpha$	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\gamma$	Rissöffnungsfunktion der FORMAN/METTU-Gleichung
$\varepsilon_{ij}$	Dehnungstensor
$\kappa$	Exponent des Exponentialansatzes nach KULLMER
$\lambda$	Koeffizient des Exponentialansatzes nach KULLMER, Wärmeleitfähigkeit
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\rho$	Dichte, Kerbradius
$\sigma$	Spannung
$\vec{\sigma}$	Spannungsvektor
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannung
$\sigma_a$	Spannungsamplitude bzw. Spannungsausschlag
$\sigma_{B,x}, \sigma_{B,y}, \sigma_{B,z}$	Normalspannungen des Basistensors
$\sigma_{ij}$	Komponenten des Spannungstensors
$\sigma_m$	Mittelspannung
$\sigma_{\max}$	maximale Spannung
$\sigma_{\min}$	minimale Spannung
$\sigma_s, \tau_s$	Schnittspannungen
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungen in kartesischen Koordinaten
$\sigma_\varphi, \sigma_r, \sigma_z$	Normalspannungen in Zylinderkoordinaten
$\Delta\sigma$	Schwingbreite der Normalspannung bzw. Spannungsschwingbreite
$\tau$	Schubspannung
$\tau_{B,xy}, \tau_{B,yz}, \tau_{B,zx}$	Schubspannungen des Basistensors
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Schubspannungen in kartesischen Koordinaten
$\tau_{\varphi\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$	Schubspannung in Zylinderkoordinaten
$\tau_z$	nichtebene Schubspannung
$\varphi$	Winkel, Kurbelwinkel
$\varphi_0$	Rissabknickwinkel

$\psi$	Rissbeanspruchung des Exponentialansatzes nach KULLMER
$\psi_0$	Rissverdrehwinkel
$\psi_{th}$	Schwellenwert des Exponentialansatzes nach KULLMER
$\omega_I, \omega_{II}$	Kreisfrequenz für Mode I-, Mode II-Beanspruchungs-Zeit-Funktion.

### c) Abkürzungen

ASTM	American Society for Testing and Material
CAD	Computer Aided Design
CAE	Computer Aided Engineering
CT	Compact-Tension
CTSR	Compact-Tension-Shear-Rotation
DIN	Deutsches Institut für Normung
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode
FITNET	Fitness-for-Service-Network
FKM	Forschungskuratorium Maschinenbau
FRANC	Fracture Analysis Code
GW	Gigawatt
LEBM	Linear elastische Bruchmechanik
Lw	Lastwechsel
MVCCI	Modified Virtual Crack Closure Integral
SINTAP	Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry

Alle weiteren verwendeten oder hiervon abweichenden Symbole und Bezeichnungen sind im Text erläutert.

## KURZFASSUNG

Eine der Ursachen für das Versagen technischer Bauteile ist das Ermüdungsrischwachstum von Fehlstellen in Folge zyklischer Beanspruchung. Im Kontext einer modernen Produktentstehung ist die numerische Simulation von Bauteilen weit verbreitet. Wichtige Daten, wie die im fehlerstellenfreien Bauteil wirkenden Spannungen, sind unabhängig von einer bruchmechanischen Untersuchung auftretender Fehlstellen verfügbar. Deren synergetische Nutzung zur Bestimmung der Rissbeanspruchung durch herkömmliche Anwendung von Rissausbreitungssimulationsprogrammen ist jedoch nicht ohne Weiteres möglich. Neumodellierungen des Ausgangsproblems sind nötig. Vor diesem Hintergrund werden in der vorliegenden Dissertation Herangehensweisen erarbeitet, die vorhandene mehrachsige Spannungsdaten fehlerstellenfreier Bauteile zur Bestimmung der Rissbeanspruchung nutzen. In der Praxis gestaltet sich dadurch die bruchmechanische Bauteilbewertung deutlich effizienter. Die Herangehensweisen basieren größtenteils auf kubischen Ersatzmodellen, wodurch der Modellierungs- und Berechnungsaufwand reduziert wird. Der Fokus liegt dabei auf der Untersuchung der Wachstumsfähigkeit von Rissen. Die anhand von Fehlstellen eines im Bereich thermischer Kraftwerke verwendeten Y-Siebfilters sowie einer Kurbelwelle im Verbrennungsmotor durchgeführte Validierung zeigt die Ergebnisgenauigkeit und Effizienz der Herangehensweisen. Außerdem wird deutlich, dass die Wahl der verwendeten Herangehensweise von der Phase im Produktlebenszyklus abhängt.

## ABSTRACT

One of the major reasons for failure of technical components is fatigue crack growth of imperfections subjected to cyclic loading. In the context of the modern product development numerical simulations of technical components are widespread. Important information like the effective stress fields obtained from simulation results of defect-free components is available independently of the fracture mechanical assessment of imperfections. The synergetic use of this stress data with conventional crack growth simulation software is complicated so far. Comprehensive modeling is necessary to obtain stress intensity factors for the original problem. Against this background in this paper approaches are presented to determine crack loading using available multiaxial stress data obtained from existing simulation results of uncracked technical components synergistically. They promise an efficient fracture mechanical assessment procedure for industrial applications. The approaches are mostly based on cubical shaped substitute models whereby modelling and computing time are significantly reduced. They are especially suitable for evaluating the growth ability of imperfections. The validation of accuracy and efficiency of the approaches is done successfully by investigating imperfections of a Y-shaped strainer used in thermal power plants as well as in a crankshaft of a combustion engine. Here it is shown that the choice of the proper approach depends on the phase in the product life cycle.



# 1 EINFÜHRUNG

Die zunehmende Globalisierung sowie steigende Energie-, Rohstoff- und Umweltschutzkosten führen zu einer stetigen Verschärfung der Wettbewerbssituation im Maschinen- und Anlagenbau. Vor allem Anbieter technisch komplexer Produkte mit Entwicklungs- und Forschungszentren in Hochlohnländern wie Deutschland sehen sich einem starken Kostendruck ausgesetzt, um im internationalen Vergleich wettbewerbsfähig zu bleiben. Eine Reduzierung der Produktentwicklungszeit durch effiziente Herangehensweisen, der Einsatz neuartiger Produktionstechnologien sowie führende Qualitätsstandards sind Möglichkeiten gegenüber Wettbewerbern Vorteile zu generieren und am Weltmarkt wirtschaftlich konkurrenzfähig zu bleiben [GP14].

Vor diesem Hintergrund spielt die Abwendung von Schäden, als eine der grundlegenden Herausforderungen des Ingenieurwesens, eine entscheidende Rolle. Vermeidbare Reparaturen, der Austausch beschädigter Komponenten oder auch Rückrufaktionen aufgrund fehlerhafter Entwicklung konterkarieren den Wirtschaftlichkeitsgedanken einer jeden Unternehmung. Der proaktiven Identifikation von Schadensursachen bereits vor Auftreten von Bauteilversagen, wie beispielsweise Fehlstellen kritischer Größe, kommt daher eine zentrale Bedeutung zu [FKM09, RS12].

Neben klassischem Festigkeitsversagen stellt Bauteilversagen durch Ermüdungsrisswachstum oder statischen Gewaltbruch eine der häufigsten Ursachen für Bauteilschäden dar. Insbesondere bei Ermüdungsrisswachstum kann es vorkommen, dass technische Produkte bei Beanspruchung weit unterhalb der statischen Festigkeit oder der Dauerfestigkeit des Materials ausfallen. Ursache dafür sind kleine Fehlstellen innerhalb des Bauteils, welches einer zeitlich veränderlichen Belastung ausgesetzt ist. Die dadurch hervorgerufene Beanspruchung der Fehlstelle ist letztlich wesentlich für deren Wachstumsfähigkeit. Liegt eine solche Beanspruchung unterhalb eines materialabhängigen Schwellenwertes, kann das Wachstum der Fehlstelle ausgeschlossen werden. Überschreitet die Beanspruchung diesen Schwellenwert, so vergrößert sich die Fehlstelle mit zunehmender Lastwechselzahl. Es tritt sog. stabiles Ermüdungsrisswachstum auf. Erreicht die Größe der wachsenden Fehlstelle einen bestimmten Grenzwert, versagt das Bauteil schlagartig durch sog. Restgewaltbruch [RS12, Kun08].

Bereits während des Herstellprozesses kann es materialbedingt oder aufgrund der Eigenschaften eingesetzter Fertigungsverfahren zu Fehlstellen, wie zum Beispiel Poren oder Lunkern, kommen. Darüber hinaus entstehen während des Betriebs von technischen Bauteilen Fehlstellen, wie Einkerbungen der Oberfläche oder Korrosionsnarben, durch äußere Einflüsse der Betriebsumgebung. Die Entscheidung über die technische Einsetzbarkeit derartiger fehlerbehafteter Bauteile wird im Rahmen des bruchmechanischen Festigkeitsnachweises getroffen [FKM09]. Im Wesentlichen beinhaltet dieser die Gegenüberstellung von Rissbeanspruchung sowie bruchmechanischen Materialdaten. Während die bruchmechanischen Materialdaten durch experimentelle Untersuchungen zu ermitteln sind, wird die Rissbeanspruchung im Allgemeinen unmittelbar aus den Ergebnissen einer Finite-Elemente-Analyse berechnet.

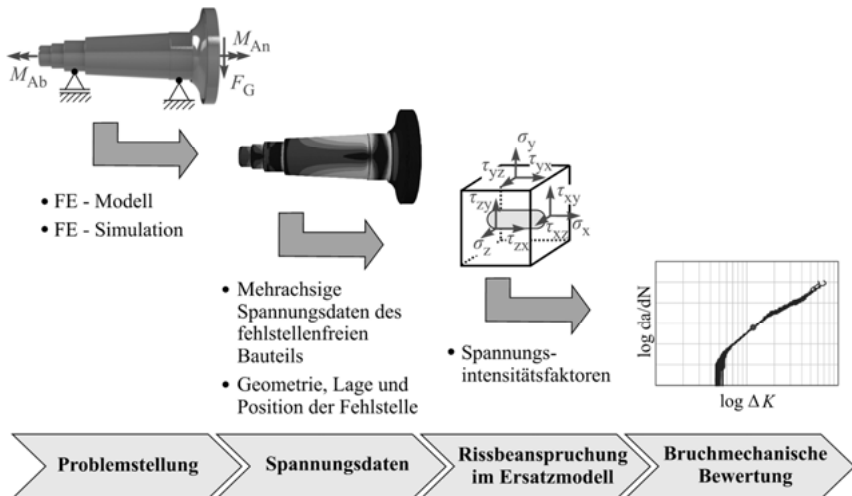
Die Finite-Elemente-Analyse bildet in den Ingenieurwissenschaften ein wichtiges Simulationswerkzeug zur virtuellen Beschreibung realer Vorgänge am Rechner. Vor dem Hintergrund der virtuellen Produktentwicklung sowie der Industrie 4.0 verbreitet sich zunehmend die lebenszyklusübergreifende numerische Bauteilsimulation – von der Produktentwicklung und Herstellung über die Nutzung und Wartung bis hin zum Recycling [BHV14]. In diesem Zusammenhang bestätigt die Erfahrung, dass wichtige Daten wie zum Beispiel die im Bauteil wirkenden Spannungsfelder zunächst unabhängig von der bruchmechanischen Bewertung etwaig auftretender Fehlstellen verfügbar sind. Unter Effizienz- und Wirtschaftlichkeitsgesichtspunkten ist daher die Nutzung dieser vorhandenen Spannungsdaten fehlerstellenfreier Bauteile bei deren bruchmechanischer Bewertung anzustreben.

Zur Bestimmung der Rissbeanspruchung existiert für Industrie und Forschung eine Reihe von Rissausbreitungssimulationsprogrammen, die auf der Finite-Elemente-Analyse basieren. Durch eine weitgehend automatisierte Bestimmung der für das Ermüdungsrisswachstum relevanten Größen – vom ersten Wachstum der Fehlstelle bis hin zum Bauteilversagen – generieren diese umfassende Potentiale. Allerdings stehen deren vollumfänglicher Nutzung durch Simulation vollständiger Bauteilmodelle in der Praxis diverse Restriktionen gegenüber:

- Rissausbreitungssimulationsprogramme stellen oft spezielle Anforderungen an die Eingangsinformationen. Die Nutzung von Daten vorhergehender Finite-Elemente-Analysen fehlerstellenfreier Bauteile ist bei herkömmlicher Anwendung dieser Programme daher in der Regel nicht möglich. Eine auf die Anforderungen des verwendeten Rissausbreitungssimulationsprogramms fokussierte kosten- und zeitintensive Neumodellierung der Problemstellung wird dadurch notwendig. In diesem Zusammenhang ist darüber hinaus die Kompatibilität zwischen Rissausbreitungssimulationsprogramm und der im Umfeld vorhandenen Simulationssoftware nicht immer gegeben.
- Eine Untersuchung von Bauteilen mit komplexen Randbedingungen ist mit Rissausbreitungssimulationsprogrammen meist problematisch. Massenkraft, thermische sowie strömungsmechanische Belastungen seien in diesem Zusammenhang beispielhaft genannt. Diese Tatsache steht im Gegensatz zu einer realitätsgetreuen und robusten bruchmechanischen Fehlstellenbewertung.
- Abhängig vom Detaillierungsgrad der Geometrie führt die Simulation fehlerstellenbehafteter Modelle mit Hilfe von Rissausbreitungssimulationsprogrammen zu hohen Anforderungen bzgl. der Rechnerleistung und damit einhergehend zu langen Rechenzeiten. Insbesondere bei einer Vielzahl von zu untersuchenden Lastfällen steht diese Problematik Effizienzzielen entgegen.

Unter anderem sind die hier aufgeführten Restriktionen ursächlich dafür, dass der Einsatz von Rissausbreitungssimulationsprogrammen zur Simulation vollständiger Bauteilmodelle im Rahmen des bruchmechanischen Festigkeitsnachweises nicht immer möglich sowie wirtschaftlich sinnvoll ist. An diesem Punkt setzt die vorliegende Arbeit an. Es werden bruchmechanische Herangehensweisen vorgestellt, welche die Bestimmung der Rissbeanspruchung effizienter ge-

stalten. Dabei ist allen Herangehensweisen die Nutzung bereits vorliegender Simulationsergebnisse in Form von mehrachsigen Spannungsdaten fehlerstellenfreier Bauteile gemein. Darüber hinaus unterstützt die Verwendung geometrischer Ersatzmodelle an Stelle vollständiger Bauteilmodelle den Effizienzgedanken durch Komplexitätsreduzierung maßgeblich (Abbildung 1-1).



**Abbildung 1-1:** Effiziente bruchmechanische Bauteilbewertung durch vereinfachte Ersatzmodelle

Die entwickelten Herangehensweisen unterscheiden sich untereinander vor allem in ihrer mit dem Ressourceneinsatz korrelierenden Ergebnisgenauigkeit. Somit steht dem Anwender, abhängig von der Problemstellung, eine geeignete Herangehensweise zur Verfügung. Die Bestimmtheit und Detailliertheit entsprechender Eingangsdaten der Problematik sind entscheidend. Diese hängen nicht zuletzt von der jeweiligen Phase des Produktentwicklungsprozesses ab [FG13].

## 2 FEHLSTELLEN IN BAUTEILEN UND STRUKTUREN SOWIE IHRE BEWERTUNG

Der klassische Festigkeitsnachweis geht in der Regel von fehlerfreien Bauteilen aus und berücksichtigt mögliche Fehlstellen durch entsprechende Sicherheitsfaktoren. In der Praxis ändert die Existenz von Fehlstellen das Verhalten von Bauteilen und Strukturen im Hinblick auf die Festigkeit jedoch gravierend. Fehlstellen und daraus entstehende Risse werden in diesem Zusammenhang nicht selten als Ursache bei der Untersuchung elementarer Schadensfälle technischer Strukturen und Anlagen, teils mit erheblichen Auswirkungen für Mensch und Umwelt, identifiziert [NEK+10]. Vor einem derartigen Hintergrund behandelt dieses Kapitel grundlegende Zusammenhänge der Bruchmechanik sowie die im Rahmen der vorliegenden Arbeit wesentlichen Themengebiete des Ermüdungsrisswachstums. Mit deren Hilfe erfolgt die Beurteilung der von Fehlstellen und Rissen ausgehenden Gefahr für das Bauteil.

### 2.1 Wirkung von Rissen und Fehlstellen auf Bauteile

In der Bruchmechanik wird unter einem Riss die lokale Trennung von Material in einem Maschinenteil oder einer Struktur verstanden [GS11]. Risse entstehen unter bestimmten Voraussetzungen bei zeitlich veränderlicher Belastung und können zum Bruch des Bauteils führen. Derartiges Bauteilversagen durch Bruch weit unterhalb der statischen Festigkeit oder der Dauerfestigkeit des verwendeten Materials [FKM12, RS12, RV07] ist letztendlich die Folge von Rissbildung und Rissausbreitung [Ber80].

#### 2.1.1 Rissbildung

Die Phase der Rissbildung setzt sich aus der Rissentstehung sowie dem Mikrorisswachstum zusammen und beschreibt die Entstehung eines technischen Anrisses. Als solcher wird der, mit den Methoden der zerstörungsfreien Prüfung, kleinste eindeutig detektierbare Riss bezeichnet. Die Entstehung technischer Anrisse, sog. Makrorisse, kann dabei auf verschiedene Weisen erfolgen und wird durch eine zeitlich veränderliche Belastung  $F(t)$  getrieben (Abbildung 2-1) [RS12].

Rissentstehung an glatten Oberflächen ist zunächst ein mikrostruktureller Vorgang, der durch die Hauptschubspannung und damit verbundene Gleitvorgänge dominiert wird. In einem zugbelasteten Bauteil entsteht der Anriss zunächst bis zu einer Länge von  $200\text{ }\mu\text{m}$  -  $250\text{ }\mu\text{m}$  unter  $45^\circ$  [BRR14] zur Belastungsrichtung. Hiernach vergrößert sich der Riss senkrecht zur größten Hauptnormalspannung (Abbildung 2-1a).

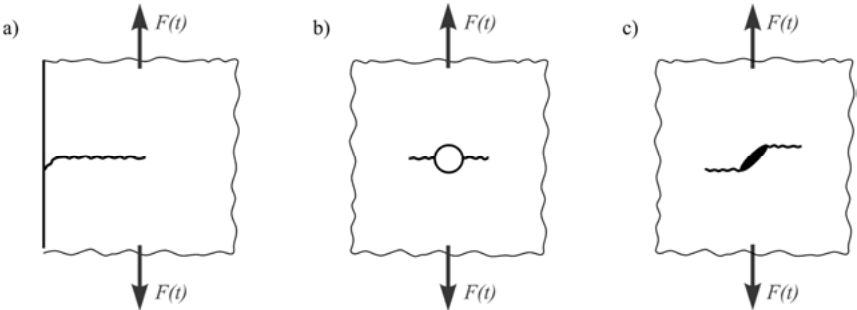


Abbildung 2-1: Rissentstehung an a) glatter Oberfläche, b) Kerbe und c) Materialdefekt [RS12]

Risse bilden sich außerdem häufig an fertigungsbedingten Kerben, beispielsweise an Bohrungen, Gewindelöchern oder Schweißnähten, infolge der Kerbwirkung. Diese verursachen eine Umverteilung der im Bauteil wirkenden Spannungen, woraus örtliche Spannungsspitzen an der Kerbe resultieren [Kul93, Ric79]. Bei zyklischer Bauteilbelastung bilden sich daher schnell wachstumsfähige Mikrorisse [GS11], die senkrecht zur Hauptnormalspannung (Abbildung 2-1b) auf die Größe von Makrorissen anwachsen [RS12].

Eine weitere Ursache für Rissentstehung sind bei der Werkstoffherstellung bzw. Bauteilproduktion auftretende Fehlstellen in Form von Lunkern, Einschlüssen, Schweißnahtfehlern oder geometrischen Imperfektionen [BRR14]. Durch derartige Defekte hervorgerufene Spannungsüberhöhungen führen bei entsprechend großer zyklischer Bauteilbelastung zur Materialauftrennung und letztendlich zu wachstumsfähigen Rissen, die unabhängig von der Lage der Fehlstelle normalspannungsgesteuert wachsen (Abbildung 2-1c) [Sch80].

2.1.2 Rissfortschritt

Neben der Rissbildungsphase spielt die darauf folgende Phase des Rissfortschritts für die Gesamtlebensdauer des bruchmechanisch zu betrachtenden Bauteils eine entscheidende Rolle. Die Rissfortschrittsphase umfasst dabei das stabile Makrorisswachstum unter zeitlich veränderlicher Belastung sowie den instabilen Restbruch, der bei Erreichen einer materialabhängigen Rissgrenzlänge einsetzt (Abbildung 2-2) [RS12].

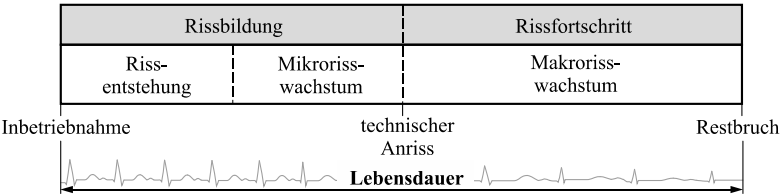
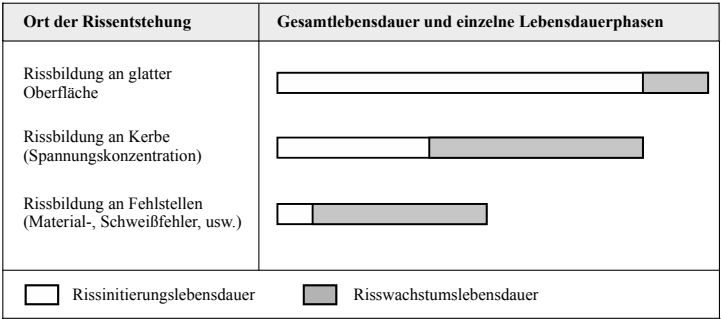


Abbildung 2-2: Lebensdauerphasen eines Bauteils unter zeitlich veränderlicher Belastung nach [RS12]

Aus der Aufsummierung der entsprechenden Lebensdauerwerte in den einzelnen Phasen ergibt sich letztendlich die Gesamtlebensdauer eines Bauteils von der Inbetriebnahme bis zum Restbruch. Abhängig von Situation und Art der Rissentstehung unterscheiden sich die jeweiligen Lebensdauerphasen, wodurch deutliche Unterschiede in der Zusammensetzung der Gesamtlebensdauer begründet sind. Qualitativ ist der Zusammenhang zwischen dem Ort der Rissentstehung sowie der Gesamtlebensdauer, unterteilt in Rissinitiations- und Risswachstumslebensdauer, in Abbildung 2-3 dargestellt.



**Abbildung 2-3:** Zusammenhang zwischen Ort der Rissentstehung und Lebensdauerzusammensetzung [RS12]

Bauteile mit etwaiger Rissentstehung an glatten Oberflächen besitzen die vergleichsweise größte Lebensdauer. Den mit 80-90% größten Anteil hieran hat die Rissinitiation. Rissentstehung aufgrund von Spannungskonzentrationsstellen oder Defekten führt zu deutlich verminderten Lebensdauerwerten mit vergleichsweise geringem Anteil der Rissinitiationslebensdauer an der Gesamtlebensdauer [RS12].

Fehlstellen haben die mit Abstand geringste Lebensdauer eines zeitlich veränderlich belasteten Bauteils zur Folge. Der Anteil der Rissinitiation an der Gesamtlebensdauer ist vernachlässigbar gering. Im Rahmen der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen werden, aus Gründen der Konservativität, Fehlstellen wie technische Anrisse bzw. Makrorisse behandelt. Rissbildung und Mikrorisswachstum werden dementsprechend vernachlässigt. Die Fehlstellengröße definiert letztlich die Größe des bruchmechanisch zu untersuchenden Anrisses.

2.2 Beispiele für Rissprobleme unter komplexer Belastung in der Praxis

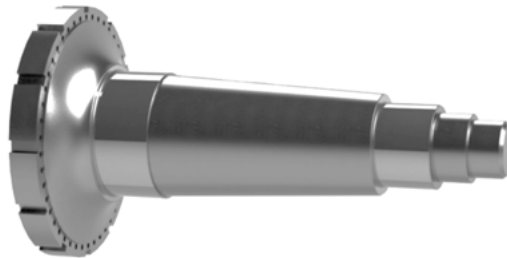
Im Rahmen des heutigen Produktentwicklungsprozesses werden Bauteile und Strukturen mit Hilfe moderner Verfahren, wie der Finite-Elemente-Methode (FEM), nach den Regeln der klassischen Festigkeitslehre ausgelegt. Trotz sorgfältiger Berechnung treten nach wie vor Schadensfälle an Bauteilen sowie technischen Strukturen auf, deren Ursache im Bereich von kleinen Fehlstellen oder Rissen zu finden ist. Nachfolgend werden ausgewählte aktuelle Schadensfälle

vorgestellt, die durch Ermüdungsrisswachstum eingetreten sind. Derartige Schadensfälle können nur dann verhindert werden, wenn bei der Bauteilauslegung entsprechende bruchmechanische Konzepte Anwendung finden.

### 2.2.1 Ermüdungsrisswachstum in Rotorwellen von Windenergieanlagen

Im Rahmen der Energiewende wächst der Anteil von durch Windenergieanlagen erzeugter erneuerbarer Energie weltweit stetig, so auch in Deutschland [BMW17-ol]. Damit einher geht die steigende Zahl installierter Anlagen, deren wirtschaftlicher Betrieb durch möglichst hohe Anlagenverfügbarkeit ohne Ausfälle zu gewährleisten ist. Nichtsdestotrotz kommt es immer wieder zu Ausfällen von Komponenten, was hohe Stillstandszeiten der Anlage mit entsprechenden monetären Verlusten zur Folge hat [HD09].

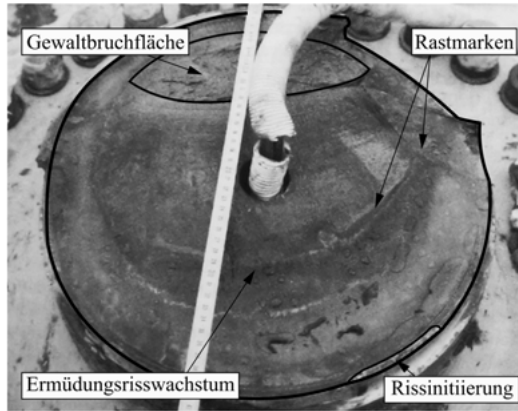
In diesem Zusammenhang zeigen Untersuchungen, dass 37% aller Störungen durch Bauteildefekte hervorgerufen werden [IWE17-ol]. Die Ursache schwerwiegender Unfälle ist wiederholt der Bruch von Rotorwellen (Abbildung 2-4).



**Abbildung 2-4:** Beispielbild der Rotorwelle einer Windenergieanlage

Die durch die Rotorblätter erzeugten Kräfte und Momente führen zu einer umlaufenden Biegebelastung der Welle [Hau14], welche eine Ausbreitung von Fehlstellen oder Kerben durch Ermüdungsrisswachstum zur Folge haben kann. Abbildung 2-5 zeigt die Bruchfläche einer Antriebswelle, in deren Konsequenz die Gondel der Windenergieanlage sowie die Rotorblätter und -nabe zu Boden stürzten [Hul04].

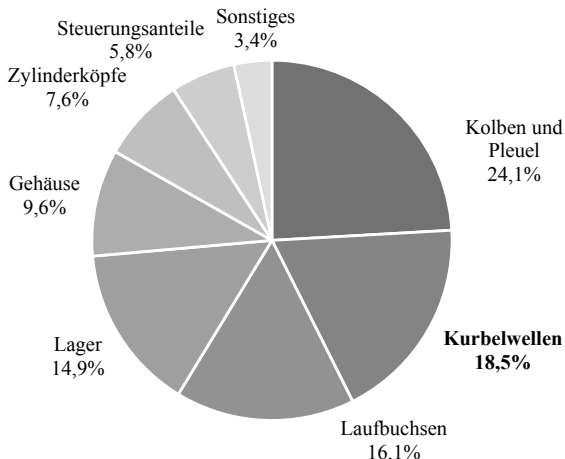
Das Versagen der Rotorwelle durch Ermüdungsrisswachstum trat im Bereich des Hauptlagers auf. Auftragsschweißungen, deren metallurgische Kerben eine starke Kraftflussumlenkung erzeugten, konnten als hierfür ursächlich identifiziert werden [Hul04]. Die Bruchflächenanalyse zeigt ca. 15% der Gesamtbruchfläche als Restgewaltbruchfläche. Derart ausgedehntes Ermüdungsrisswachstum lässt auf eine geringe Bauteilbelastung schließen. Hinweise auf stabiles Risswachstum geben darüber hinaus die dunkle Färbung der Rissfläche sowie die deutlich sichtbaren Rastmarken.



**Abbildung 2-5:** Ermüdungsbruch einer Rotorwelle in Anlehnung an [Hul04]

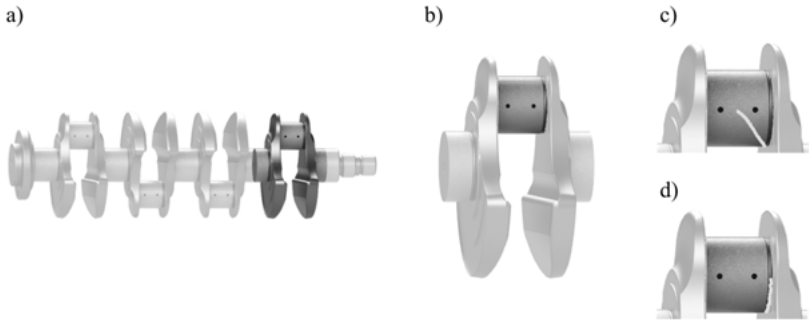
### 2.2.2 Rissprobleme in der Kurbelwelle von Verbrennungsmotoren

Kurbelwellen von Verbrennungsmotoren setzen die translatorischen Kräfte der Kolben in eine Rotationsbewegung um, welche in Form eines Drehmoments an das Getriebe übertragen wird. Für die jeweilige Beanspruchung der mit hohen Drehzahlen laufenden Kurbelwelle sind dementsprechend die auftretenden Biege- und Torsionsmomente maßgeblich, welche mehrachsige Spannungsfelder im Bauteil erzeugen. Insbesondere vor dem Hintergrund gestiegener Effizienzanforderungen an moderne Verbrennungsmotoren und der damit einhergehenden Ausschöpfung von Sicherheitsreserven macht Motorenversagen in Folge gebrochener Kurbelwellen einen erheblichen Anteil aller Motorschäden aus (Abbildung 2-6) [GZH06, KF11].



**Abbildung 2-6:** Versagensstellen in Verbrennungsmotoren nach [GZH06]

Schäden an Kurbelwellen sind in der Regel mit den Methoden des Ermüdungsrisswachstums zu erklären. Entsprechende Analysen zeigen Biege- oder Torsionsdauerbrüche als ursächlich auf. Biegedauerbrüche verlaufen häufig von hochbelasteten Hohlkehlen aus, wohingegen Torsionsdauerbrüche größtenteils ihren Ausgang von Ölbohrungen nehmen (Abbildung 2-7) [FLR+13, FF08].



**Abbildung 2-7:** Rissausbreitung in Kurbelwellen  
a) Kurbellwelle eine 4-Zylinder-Motors  
b) Kurbelwellenkröpfung  
c) Risspfad bei Torsionsdauerbruch  
d) Risspfad bei Biegedauerbruch

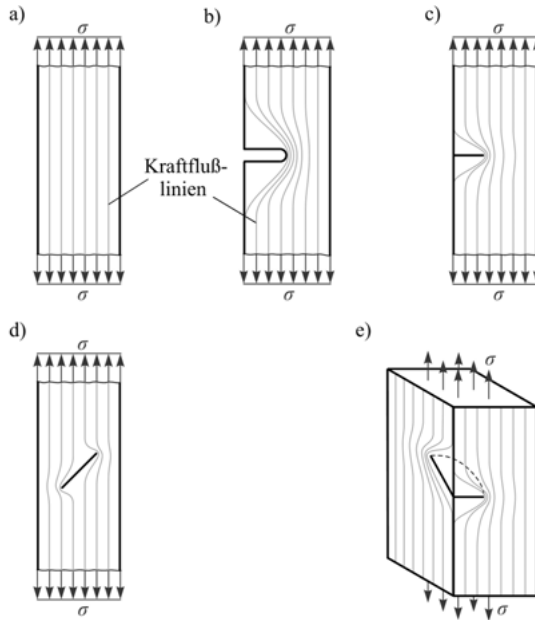
Kurbelwellen werden im modernen Maschinenbau aufwendig entwickelt und erprobt, sodass Schäden als Folge von Auslegungs- und Konstruktionsfehlern im Allgemeinen nicht auftreten. Vielmehr sind Materialfehler in Form von nichtmetallischen Einschlüssen wie Schlacken oder Oxidhäuten ursächlich für Ermüdungsrisswachstum [FLR+13, FF08, GZH06]. Abbildung 2-8 zeigt ein Beispiel für Bauteilschäden aus der Praxis.



**Abbildung 2-8:** Biegedauerbruch einer Kurbelwelle nach [FLR+13]

## 2.3 Kraftflussverlauf und Rissbeanspruchungsarten

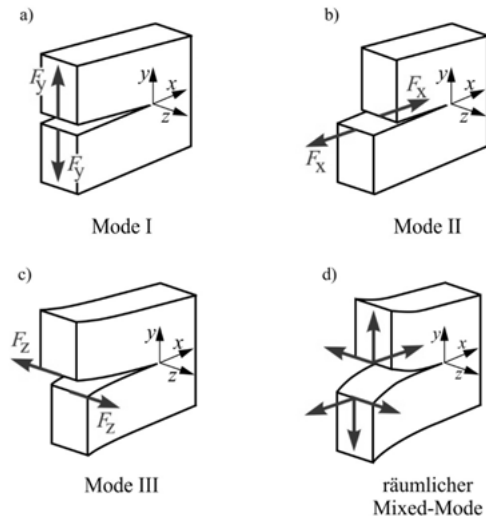
Im Fachgebiet der technischen Bruchmechanik wird grundsätzlich die Existenz von Rissen vorausgesetzt. Diese sind als lokale Materialtrennungen definiert und stören den Kraftfluss im Bauteil durch dessen scharfe Umlenkung erheblich. Lokale Spannungsüberhöhungen sind die Folge. Bei einem kleineren Kerbradius  $\rho$  sind diese größer. Abbildung 2-9 zeigt schematisch die Beeinflussung des Kraftflusses durch Kerben bzw. Risse [RV07, BP93].



**Abbildung 2-9:** Beeinflussung des Kraftflusslinienverlaufs durch Kerben bzw. Risse in Anlehnung an [RS12]

- a) Kraftfluss in einer kerbfreien Scheibe
- b) Kerbe mit großem Radius
- c) Riss als Sonderfall einer Kerbe mit Kerbradius  $\rho = 0$
- d) Kraftfluss bei einem schrägliegendem Innenriss (ebene Mixed-Mode-Beanspruchung)
- e) Kraftfluss bei schrägliegendem Eckenriss (räumliche Mixed-Mode-Beanspruchung)

Unabhängig von der Lage im Bauteil bzw. vom Kraftflussverlauf lässt sich nach IRWIN die Rissbeanspruchung auf drei grundlegende Arten (Mode I, Mode II sowie Mode III) zurückführen [Irw57]. Diese sog. Beanspruchungsmoden charakterisieren die drei voneinander unabhängigen Bewegungsrichtungen der Rissoberflächen (Abbildung 2-10) [Hah76].



**Abbildung 2-10:** Grundlegende Rissbeanspruchungsarten sowie räumliche Mixed-Mode-Beanspruchung nach [RS12]

Für die relative Verschiebung der Rissflächen zueinander und somit für die Ausprägung der einzelnen Moden ist die Lage des im Bauteil vorherrschenden Spannungsfeldes maßgebend. Vor diesem Hintergrund sind die grundlegenden Moden wie folgt definiert:

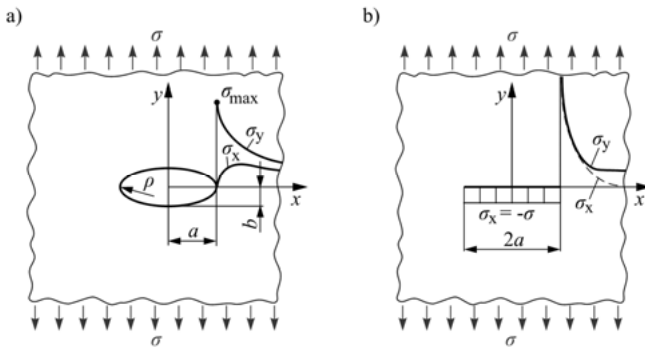
- Mode I:** Diese Rissbeanspruchungsart beschreibt ein Rissöffnen senkrecht zur Rissebene, welches durch Normalbeanspruchungen verursacht wird. Eine Mode I Rissbeanspruchung tritt beispielsweise bei zug- oder biegebelasteten Bauteilen auf.
- Mode II:** Das entgegengesetzte Gleiten der Rissoberflächen in Richtung der Rissorientierung wird durch diese Rissbeanspruchungsart beschrieben. Ursächlich dafür ist eine ebene Schubbeanspruchung des Bauteils.
- Mode III:** Eine Gegeneinanderbewegung der Rissoberflächen quer zur Rissrichtung wird durch die Rissbeanspruchungsart Mode III charakterisiert. Maßgebend ist in diesem Fall ein nichtebener Schubspannungszustand im Bauteil, beispielsweise in einer torsionsbelasteten Welle mit senkrecht zur Wellenachse liegendem Riss.

Bei gleichzeitigem Auftreten von Normal- und Schubbeanspruchungen treten die beschriebenen Moden in Kombination auf. Ein derartiger Zustand wird als Mixed-Mode-Beanspruchung definiert. Ebener Mixed-Mode ist dabei aus einer Mode I und Mode II Beanspruchung zusammengesetzt. Treten alle drei Moden miteinander kombiniert auf, ergibt sich der sog. räumliche Mixed-Mode [Ric85].

## 2.4 Spannungsverteilung in der nahen Rissumgebung

Basis aller bruchmechanischen Ansätze ist das elastische Spannungsfeld in der nahen Umgebung der Risspitze, welches durch die Spannungskonzentration in Folge von Kerbwirkung bestimmt ist. Die Untersuchung der Spannungsverteilung erfolgt hierbei unter den Annahmen der Kontinuumsmechanik. Damit einhergehend finden die nachfolgend vorgestellten Modelle und Konzepte im Rahmen der Linear-Elastischen-Bruchmechanik Anwendung.

Zunächst eignet sich das Modell eines elliptischen Lochs in einer ebenen Scheibe unter Zugbelastung, um Rückschlüsse auf die exakte Spannungsverteilung an Rissen zu ziehen. Abbildung 2-11a) zeigt für dieses Beispiel die Verläufe der beiden Normalspannungskomponenten in der Ebene [RS12, Kun08].



**Abbildung 2-11:** Riss als Sonderfall einer Kerbe [RS12]

- a) Spannungsverteilung an einer elliptischen Kerbe
- b) Rissmodell nach GRIFFITH mit Innenriss der Länge  $2a$

Am Kerbgrund ergibt sich die in  $y$ -Richtung wirkende maximale Spannung  $\sigma_{\max}$ . Diese ist bestimmt durch die wirkende Spannung  $\sigma$ , die Längen der Halbachsen  $a$  und  $b$  bzw. durch die Halbachsenlänge  $a$  und dem Krümmungsradius  $\rho$  der Kerbe. Gleichung 2.1 stellt diesen Zusammenhang dar:

$$\sigma_{\max} = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right) = \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.1).$$

Mit der zunehmenden Reduzierung der Halbachsenlänge  $b$  bzw. des Krümmungsradius  $\rho$  hin zu schmalen Kerben ist ein merklicher Anstieg der maximalen Spannung verbunden. Im Rahmen der Grenzwertbetrachtung für den Krümmungsradius  $\rho \rightarrow 0$  ergibt sich ein quer zur Belastung liegender Innenriss, auch Griffith-Riss [Gri21] genannt, mit der Länge  $2a$ . Die Betrachtung des Ausdrucks

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{\max} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) = \infty \quad (2.2)$$

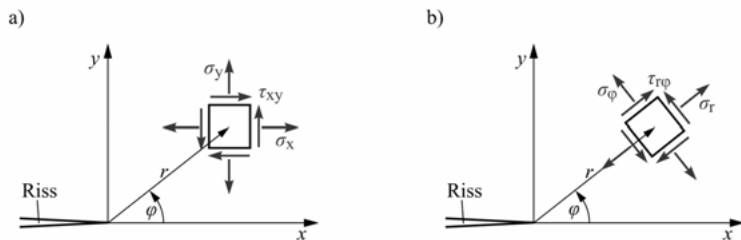
ergibt in diesem Zusammenhang eine unendlich hohe Spannung unmittelbar an der Rissspitze (Abbildung 2-11). Nach klassischen Festigkeitskriterien tritt hierfür durch die Überschreitung der statischen Materialgrenzwerte ein sofortiges Versagen des Bauteils ein. In der Realität trifft diese Überlegung nicht zu. Die Beurteilung des Risses hinsichtlich seiner Gefährlichkeit ist daher mit den Methoden der klassischen Festigkeitslehre nicht möglich [Hah76, SS06].

#### 2.4.1 Spannungsverteilung ebener Rissprobleme

Das an der Rissspitze vorherrschende singuläre Spannungsfeld erfordert die Betrachtung der von IRWIN für ebene Fälle eingeführten Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  als bruchmechanisch ausschlaggebende Größen. Diese sind den einzelnen Rissbeanspruchungsmoden zugeordnet und beschreiben die Intensität der Spannungsverteilung an der Rissspitze.

Anhand von Näherungslösungen können die elastischen Spannungsfelder an der Rissspitze in den Koordinaten  $r$  und  $\varphi$  mit Hilfe der Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  für den ebenen Fall dargestellt werden. Die Funktionen  $f_{ij}^I$  und  $f_{ij}^{II}$  sind dabei dimensionslos und lediglich vom Winkel  $\varphi$  abhängig (Gleichung 2.5 sowie Abbildung 2-12):

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \left[ K_I \cdot f_{ij}^I(\varphi) + K_{II} \cdot f_{ij}^{II}(\varphi) \right] \quad \text{mit } i, j = x, y \quad (2.5).$$



**Abbildung 2-12:** Koordinatensysteme und Spannungskomponenten für ebene Rissprobleme [Hah76]

- a) Spannungen am Volumenelement in kartesischen Koordinaten
- b) Spannungen am Volumenelement in Polarkoordinaten

Ein homogenes isotropes Verhalten des Materials und eine im Vergleich zu den Bauteildimensionen kleine plastische Zone um die Rissspitze sind für die Gültigkeit des Zusammenhangs Voraussetzungen. Im Bereich direkter Rissnähe werden die Spannungsfelder exakt berechnet. Hierbei findet das singuläre Verhalten mit  $1/\sqrt{r}$  Berücksichtigung. Für Bereiche, in denen  $r$  klein im Verhältnis zur Risslänge  $a$  ist, gilt die Formel als gute Näherung [RS12].

Gleichung 2.5 beschreibt die Spannungsverteilung in der Umgebung der Rissspitze für den Fall einer ebenen Mixed-Mode-Beanspruchung (Überlagerung der Moden I und II). Es resultieren, analog zu Abbildung 2-12a, zur Spannungsberechnung in kartesischen Koordinaten bei ebener Mixed-Mode-Beanspruchung die Ausdrücke 2.6.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \\ 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \end{pmatrix} + \frac{K_{II} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \begin{pmatrix} -\left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2}\right) \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Die Spannungskomponenten bei ebenem Mixed-Mode in Polarkoordinaten ergeben sich durch:

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \end{pmatrix} = \frac{K_I \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ \frac{1}{2} \sin \varphi \end{pmatrix} + \frac{K_{II} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \sin \varphi - 2 \tan \frac{\varphi}{2} \\ -\frac{3}{2} \sin \varphi \\ \frac{1}{2} \cdot (3 \cos \varphi - 1) \end{pmatrix} \quad (2.7).$$

Für den Fall von  $K_{II} = 0$  ergibt sich die Spannungsverteilung für eine Mode I-Beanspruchung. Analog kann für  $K_I = 0$  die Spannungsverteilung für eine Mode II-Beanspruchung berechnet werden.

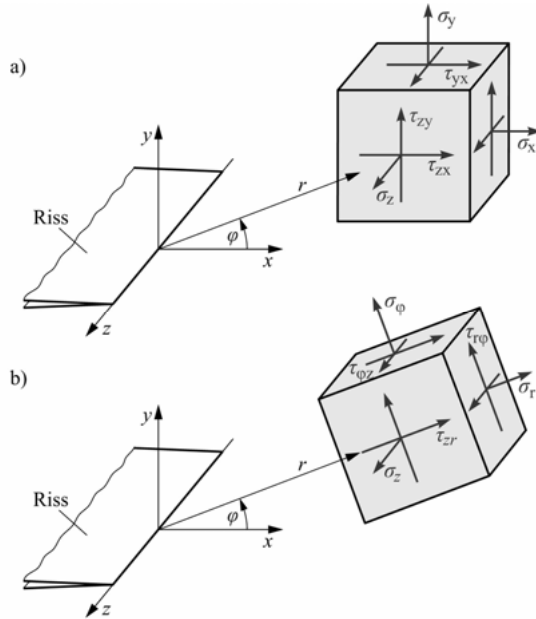
## 2.4.2 Spannungsverteilung räumlicher Rissprobleme

Neben ebenen Rissfällen treten in der Realität häufig räumliche Rissprobleme im Bauteilinneren sowie Oberflächen- oder Eckenrisse auf. Bei allgemeiner Belastung überlagern sich dementsprechend alle drei Rissbeanspruchungsmoden zu einer räumlichen Mixed-Mode-Beanspruchung. Zusätzlich zu den Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  gilt es hier auch den Spannungsintensitätsfaktor  $K_{III}$  zu berücksichtigen. Die Spannungsverteilung am Riss berechnet sich bei einem derartigen allgemeinen Beanspruchungszustand in Tensorschreibweise nach folgender Gleichung [Hah76]:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left[ K_I \cdot f_{ij}^I(\varphi) + K_{II} \cdot f_{ij}^{II}(\varphi) + K_{III} \cdot f_{ij}^{III}(\varphi) \right] \quad \text{mit } i, j = x, y, z \quad (2.8).$$

Die bei räumlichen Rissen auftretenden Spannungskomponenten am Volumenelement in kartesischen oder zylindrischen Koordinaten zeigt Abbildung 2-13.

In der Nähe der Risspitze treten bei räumlichen Rissproblemen Spannungen sowohl in x- und y- als auch in z-Richtung auf. Nach den Gleichungen 2.9 ergibt sich die Spannungsverteilung in kartesischen Koordinaten.



**Abbildung 2-13:** Koordinatensysteme und Spannungskomponenten für räumliche Rissprobleme [RS12]

- a) Spannungen am Volumenelement in kartesischen Koordinaten  
b) Spannungen am Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \\
 \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \\
 \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \\
 \sigma_z &= \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left( K_I \cdot \cos \frac{\varphi}{2} - K_{II} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Analog hierzu kann das Spannungsfeld an der Rissspitze auch auf Basis zylindrischer Koordinaten beschrieben werden. Mit  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  ergibt sich die Spannungsverteilung nach den Gleichungen 2.10.

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{K_I}{4 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \left( 5 \cdot \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \left( 5 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \\
 \sigma_\varphi &= \frac{K_I}{4 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \left( 3 \cdot \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \left( 3 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \\
 \tau_{r\varphi} &= \frac{K_I}{4 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \left( \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \left( \cos \frac{\varphi}{2} + 3 \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \\
 \tau_{rz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \\
 \tau_{\varphi z} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \\
 \sigma_z &= \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_\varphi) = \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi} \cdot r} \cdot \left( K_I \cdot \cos \frac{\varphi}{2} - K_{II} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

## 2.5 Spannungsintensitätsfaktoren

Die Intensität der vorhergehend beschriebenen Spannungsverteilungen sowie die Größe der Verschiebungen an der Rissfront lassen sich durch die bereits erwähnten Spannungsintensitätsfaktoren ausdrücken [GS07]. Den in Kapitel 2.3 beschriebenen Rissbeanspruchungsmoden wird jeweils ein Spannungsintensitätsfaktor zugewiesen. Mathematisch sind die Rissbeanspruchungen in den einzelnen Moden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \\
 K_{II} &= \tau \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{II} \\
 K_{III} &= \tau_z \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{III}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Charakteristika wie Riss- und Bauteilgeometrie sowie die Risslage und Lasteinleitung üben erheblichen Einfluss auf den jeweiligen Spannungsintensitätsfaktor aus. Derartige Größen werden in der als Geometriefaktor bezeichneten dimensionslosen Funktion  $Y_i$  (mit  $i = I, II, III$ ) berücksichtigt [RS12, Ric85]. Für die Bestimmung können numerische, experimentelle oder theoretische Methoden herangezogen werden. Geometriefaktoren häufig auftretender Risskonfigurationen unter einfachen Belastungssituationen sind in Tabellenwerken zu finden [Mur87, RS12]. Die Variable  $a$  beschreibt die Risslänge im Bauteil. Bei einem innenliegenden Riss gibt  $a$  die halbe Risslänge an. Die Spannungen  $\sigma$ ,  $\tau$  und  $\tau_z$  beschreiben die durch die äußere Belastung des Bauteils hervorgerufene Beanspruchung am Riss. Spannungsintensitätsfaktoren haben die Dimension Kraft/Länge<sup>3/2</sup> und werden in der Einheit N/mm<sup>3/2</sup> oder MPa√m angegeben.

## 2.6 K-Konzept bei Mixed-Mode-Beanspruchung

Mit Hilfe des  $K$ -Konzepts nach IRWIN lassen sich bei bruchmechanischen Untersuchungen von Bauteilen Aussagen über das Eintreten einer instabilen Rissausbreitung treffen. Hierbei werden die beanspruchungsseitig charakteristischen Größen  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  der Materialbeanspruchbarkeit gegenübergestellt. Eine sichere Bauteilauslegung bei vertretbarem Aufwand ist hierdurch möglich. Grundvoraussetzung zur Anwendbarkeit der nachfolgend beschriebenen Konzepte ist linear-elastisches Materialverhalten.

### 2.6.1 $K$ -Konzept bei Single-Mode-Beanspruchung

Bei Single-Mode-Beanspruchung werden die auftretenden Spannungsintensitätsfaktoren mit den materialabhängigen kritischen Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{IC}$ ,  $K_{IIC}$  und  $K_{IIIC}$ , auch Risszähigkeiten genannt, verglichen. Die Risszähigkeit als Werkstoffkennwert ist in den einzelnen Moden u. a. von Temperatur sowie Belastungsgeschwindigkeit abhängig und für die jeweilige Situation nach der Norm ASTM E 399-09 experimentell zu ermitteln [AST09].

Instabiles Risswachstum setzt beispielsweise für den Mode I ein, sobald der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  die Risszähigkeit  $K_{IC}$  überschreitet. Der Riss breitet sich also mit großer Geschwindigkeit aus. Grundlegend beschreibt das  $K$ -Konzept folgende Gesetzmäßigkeiten für das Eintreten von instabilem Risswachstum in den jeweiligen Moden [RS12]:

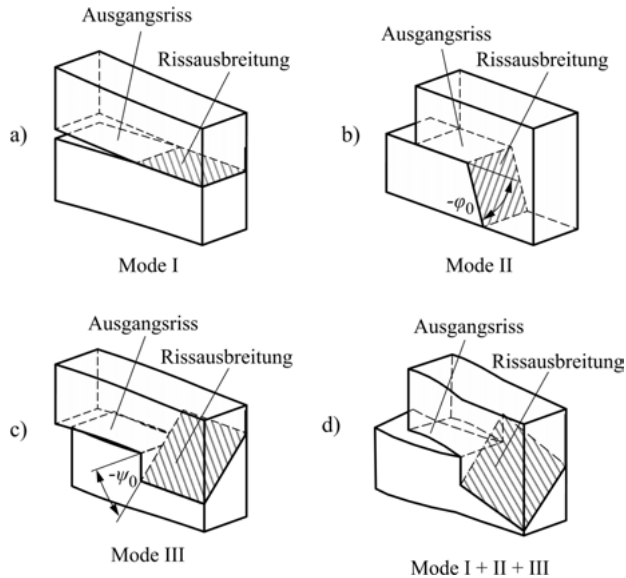
$$K_I = K_{IC} \quad (2.12),$$

$$K_{II} = K_{IIC} \quad (2.13),$$

$$K_{III} = K_{IIIC} \quad (2.14).$$

Bei Auftreten von instabilem Risswachstum hängt die Richtung der Rissausbreitung von der Rissbeanspruchungsart ab. Abknicken oder Verdrehen der Rissfläche ist hierbei möglich. Entsprechende Zusammenhänge stellt Abbildung 2-14 dar.

Instabiles Risswachstum bei reiner Mode I-Beanspruchung resultiert in einer Rissausbreitung unter Beibehaltung der ursprünglichen Richtung. Durch Mode II-Beanspruchung hervorgerufenen instabiles Risswachstum führt zu einem Abknicken des Risses. Relativ zur bisherigen Richtung beträgt der Abknickwinkel  $\varphi_0 \approx \pm 70^\circ$ . Darüber hinaus findet ein Verdrehen des Risses bei reiner Mode III-Beanspruchung statt. In diesem Fall dreht sich der Riss bei instabiler Ausbreitung um den Winkel  $\psi_0 \approx \pm 45^\circ$  aus der Ausgangsebene heraus.



**Abbildung 2-14:** Rissausbreitungsverhalten bei Single-Mode- und Mixed-Mode-Beanspruchung in Anlehnung an [RS12]

- a) Rissausbreitung bei Mode I-Beanspruchung
- b) Rissabknicken bei reiner Mode II-Beanspruchung
- c) Rissverdrehen bei reiner Mode III-Beanspruchung
- d) Kombination von Mode I-, Mode II- und Mode III-Beanspruchung

## 2.6.2 K-Konzept bei ebener Mixed-Mode-Beanspruchung

Risse und Fehlstellen sind in realen Bauteilen in der Regel einem mehrachsigen Spannungsfeld ausgesetzt. Eine Überlagerung der Beanspruchungsarten aufgrund des zum Riss antisymmetrischen Spannungs- und Verschiebungsfeldes ist die Folge. Der Vergleich einer derartig zusammengesetzten Rissbeanspruchung mit den im jeweiligen Mode aufgenommenen Risszähigkeiten ist somit nicht mehr ohne Weiteres möglich. Konzepte zur Berechnung eines Vergleichsspannungsintensitätsfaktors - analog zur Berechnung von Vergleichsspannungen beim Festigkeitsnachweis - sind nötig [GS11].

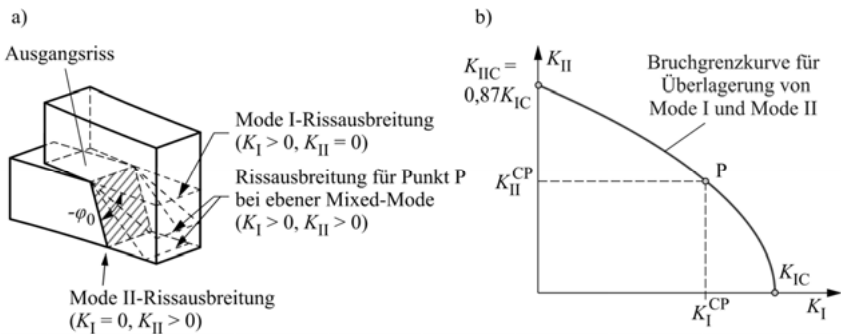
Das K-Konzept für ebenen Mixed-Mode bietet in diesem Zusammenhang eine Möglichkeit, aus den Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  einen Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_V$  zu berechnen und diesen der Risszähigkeit  $K_{IC}$  gegenüberzustellen (Gleichung 2.15) [RBK+03, Ric03, Ric85].

$$K_V = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{K_I^2 + 5,336 \cdot K_{II}^2} = K_{IC} \quad (2.15)$$

Die Ausbreitungsrichtung des instabilen Risswachstums ist in diesem Fall vom Verhältnis der  $K_I$ - und  $K_{II}$ -Anteile zueinander abhängig. Der entsprechende Abknickwinkel  $\varphi_0$  ist mit folgender Beziehung bestimmbar:

$$\varphi_0 = \mp \left[ 140^\circ \cdot \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|} - 70^\circ \cdot \left( \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|} \right)^2 \right] \quad (2.16).$$

Bei positiver Schubbeanspruchung des Risses ergibt sich laut Definition ein negativer Abknickwinkel der instabilen Rissausbreitung. Ein zunehmender  $K_{II}$ -Anteil hat nach Gleichung 2.16 eine betragsmäßige Vergrößerung des Abknickwinkels  $\varphi_0$  bis zum Erreichen eines reinen Mode II-Zustandes zur Folge. Der entsprechende Zusammenhang ist in Abbildung 2-15a dargestellt.



**Abbildung 2-15:** K-Konzept für ebene Mixed-Mode-Beanspruchung nach [Ric85]

- a) Rissabknickwinkel bei verschiedenen Mode II-Anteilen
- b) Bruchgrenzkurve für ebenen Mixed-Mode

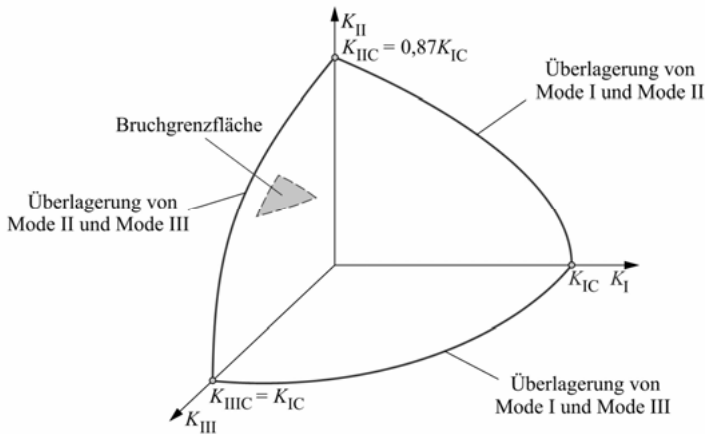
Die Zusammenhänge zwischen  $K_I$  und  $K_{II}$  und der jeweiligen Risszähigkeit für die Moden I und II können mit Hilfe der Bruchgrenzkurve, die sich nach Gleichung 2.15 ergibt, in Abbildung 2-15b dargestellt werden. Durch das Bruchkriterium bestimmt sich außerdem aus dem experimentell zu ermittelnden  $K_{IC}$ -Wert die Risszähigkeit  $K_{IIC}$  für den Grenzfall einer reinen Mode II-Beanspruchung mit  $K_{IIC} = 0,87K_{IC}$  [RS12]. Instabiles Risswachstum und das damit einhergehende plötzliche Bauteilversagen tritt ein, sobald die Beanspruchung des Risses als Kombination von  $K_I$  und  $K_{II}$  die Bruchgrenzkurve erreicht.

### 2.6.3 K-Konzept bei räumlicher Mixed-Mode-Beanspruchung

Auf Basis des K-Konzepts für ebenen Mixed-Mode ergibt sich mit der Erweiterung um den Mode III das K-Konzept für dreidimensionale Mixed-Mode-Beanspruchungen. Hiernach tritt instabiles Risswachstum auf, wenn der Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $K_V$ , als Kombination von  $K_I$ ,  $K_{II}$  sowie  $K_{III}$ , die Risszähigkeit  $K_{IC}$  erreicht [RFS05, Ric03, SRK+02]:

$$K_V = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{K_I^2 + 5,336 \cdot K_{II}^2 + 4 \cdot K_{III}^2} = K_{IC} \quad (2.17).$$

Die Zusammenhänge der Rissbeanspruchung bei räumlichem Mixed-Mode lassen sich in einem  $K_I$ - $K_{II}$ - $K_{III}$ -Diagramm darstellen. Gleichung 2.17 bestimmt dabei die Gestalt der Bruchgrenzfläche (Abbildung 2-16).



**Abbildung 2-16:** K-Konzept für räumliche Mixed-Mode-Beanspruchung [RS12]

Je nach  $K_{II}$ -Anteil knickt der Riss um den Winkel  $\varphi_0$  ab und verdreht sich in Abhängigkeit des  $K_{III}$ -Anteils um den Winkel  $\psi_0$ . Formelmäßig gilt bei positiven  $K_I$ -Werten:

$$\varphi_0 = \mp \left[ 140^\circ \cdot \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} - 70^\circ \cdot \left( \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} \right)^2 \right] \quad (2.18),$$

$$\psi_0 = \mp \left[ 78^\circ \cdot \frac{|K_{III}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} - 33^\circ \cdot \left( \frac{|K_{III}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} \right)^2 \right] \quad (2.19).$$

Analog zur Berechnung des Abknickwinkels  $\varphi_0$  ergibt sich durch Beanspruchung des Risses mit einer positiven nicht-ebenen Schubspannung ein negativer Verdrehwinkel  $\psi_0$ . In ihrer Gesamtheit besteht die instabile Rissausbreitung bei räumlichem Mixed-Mode aus einer Kombination von Abknick- und Verdrehvorgängen (vgl. Abbildung 2-14d).

Eine reine Rissbeanspruchung in den jeweiligen Moden wird durch die entsprechenden Achsen repräsentiert. Hiernach tritt instabile Rissausbreitung ein, sobald die Risszähigkeit der entsprechenden Moden überschritten wird. Bei räumlicher Mixed-Mode-Beanspruchung setzt instabile Rissausbreitung ein, sobald die durch  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  charakterisierte Rissbeanspruchung die Bruchgrenzfläche erreicht.

## 2.7 Ermüdungsrissswachstum bei zyklischer Belastung mit konstanter Amplitude

Bei statischer Belastung erfolgt ein Ausbreiten des Risses, wenn die Spannungsintensität die Risszähigkeit überschreitet. Technische Strukturen und Bauteile unterliegen während ihres Einsatzes jedoch häufig zeitlich veränderlichen Belastungen. Wiederholte zeitlich veränderliche Belastungen können unter bestimmten Umständen zum kontinuierlichen Wachstum von im Bauteil vorhandenen Rissen führen. Es tritt sog. Ermüdungsrissswachstum auf.

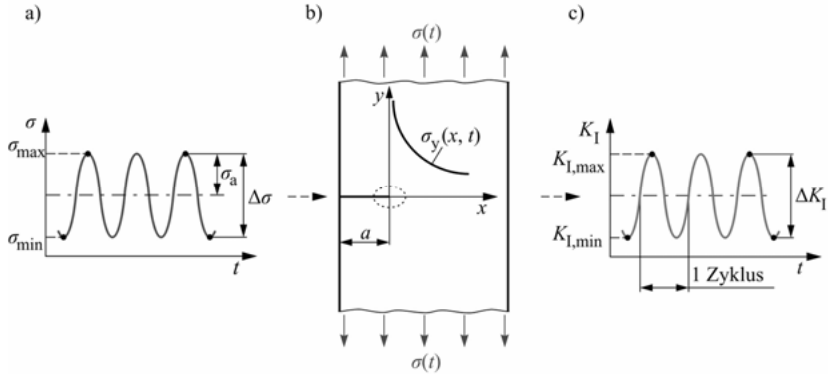
Der Riss vergrößert sich zunächst langsam, stabil und vorhersagbar als Ermüdungsrisss, bis das Bauteil schließlich durch Restgewaltbruch versagt. Das Ermüdungsrissswachstum erfolgt hierbei weit unterhalb der statisch mechanischen und bruchmechanischen Kennwerte (Zugfestigkeit  $R_m$  oder Risszähigkeit  $K_{IC}$  [RS12]). In diesem Zusammenhang existieren bruchmechanische Konzepte, mit deren Hilfe eine im Hinblick auf Ermüdungsrissswachstum sichere Bauteilauslegung in der Produktentwicklung sowie ein sicherer Bauteilbetrieb gewährleistet werden. Nachfolgend werden diese Konzepte näher erläutert.

### 2.7.1 Zusammenhang zwischen Bauteilbelastung und zyklischem Spannungsintensitätsfaktor

Hervorgerufen durch die zeitlich veränderliche Belastung des Bauteils ergibt sich ein zeitlich veränderliches Spannungsfeld in der Rissumgebung. Bei reiner Mode I-Beanspruchung lässt sich das zeitabhängige Spannungsfeld wie folgt berechnen:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^I(\varphi) \quad \text{mit } i, j = x, y \quad (2.20).$$

Das von der äußeren zyklischen Bauteilbelastung  $\sigma(t)$  hervorgerufene Spannungsfeld an der Riss Spitze  $\sigma_{ij}(t)$  ist durch seine Schwingbreite die determinierende Größe bei der Bestimmung des zyklischen Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_I$ . Dieser stellt die wesentliche Größe des Ermüdungsrissswachstums dar [RS12]. Abbildung 2-17 zeigt den Zusammenhang zwischen zyklischer Bauteilbelastung  $\sigma(t)$  und zyklischem Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_I$ .



**Abbildung 2-17:** Zusammenhang zwischen zyklischer Bauteilbelastung  $\sigma(t)$  und dem resultierenden Spannungsintensitätsfaktorverlauf  $K_I(t)$  nach [RS12]

- Zeitlicher Verlauf der Bauteilbelastung
- Randriss der Länge  $a$  in einem Bauteil unter zyklischer Belastung  $\sigma(t)$
- Zyklischer Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_I$  mit maximaler und minimaler Spannungsintensität

Aus maximaler Spannung  $\sigma_{\max}$  und der minimalen, ins Bauteil eingeleiteten, Spannung  $\sigma_{\min}$  lassen sich die konstante Spannungsamplitude  $\sigma_a$  und die Schwingbreite  $\Delta\sigma$  der Belastung bestimmen:

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2\sigma_a \quad (2.21).$$

Analog dazu ergeben sich die Extremwerte für  $K_I(t)$ . Diese sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} K_{I,\max} &= \sigma_{\max} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \\ K_{I,\min} &= \sigma_{\min} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \end{aligned} \quad (2.22).$$

Der zyklische Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_I$  ist somit aus der Schwingbreite der äußeren Belastung  $\Delta\sigma$  oder aus der Differenz von maximaler und minimaler Spannungsintensität,  $K_{I,\max}$  und  $K_{I,\min}$ , bestimmbar:

$$\Delta K_I = \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I = K_{I,\max} - K_{I,\min} \quad (2.23).$$

Ermüdungsrissswachstum ist nicht allein von der zyklischen Spannungsintensität abhängig. Vielmehr spielt auch das sog.  $R$ -Verhältnis eine wichtige Rolle. Dieses beschreibt das Verhältnis von minimaler zu maximaler Spannung, welche von außen auf das Bauteil wirkt:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{K_{I,\min}}{K_{I,\max}} \quad (2.24).$$

Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem  $R$ -Verhältnis und dem zyklischen Spannungsintensitätsfaktor:

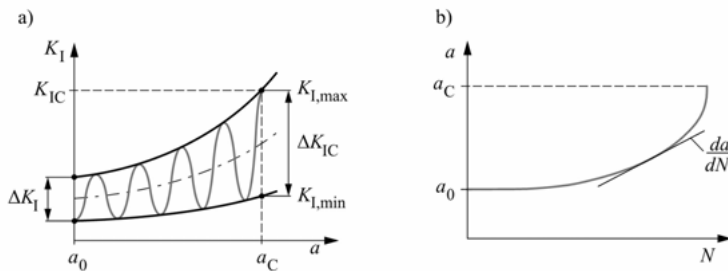
$$\Delta K_I = K_{I,\max} - K_{I,\min} = (1 - R) \cdot K_{I,\max} \quad (2.25).$$

In Folge von zeitlich veränderlichen Schubbelastungen oder allgemeiner Bauteilbelastung können in der Nähe der Rissspitze Mode II-, Mode III- sowie ebene und räumliche Mixed-Mode-Zustände auftreten. Für derartige Mode II- und Mode III-Beanspruchungen ergeben sich die zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren in den einzelnen Moden wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta K_{II} &= \Delta \tau \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{II} \\ \Delta K_{III} &= \Delta \tau_z \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{III} \end{aligned} \quad (2.26).$$

### 2.7.2 Rissausbreitung unter zyklischer Beanspruchung

Mit steigender Lastwechselzahl vergrößert sich zunehmend die Risslänge  $a$ . Bei konstanter Belastungsamplitude  $\sigma_a$  und konstanter Mittelspannung  $\sigma_m$  steigen deshalb auch die maximale und minimale Spannungsintensität sowie der zyklische Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_I$  solange, bis die maximale Spannungsintensität die Risszähigkeit  $K_{IC}$  erreicht (Abbildung 2-18).

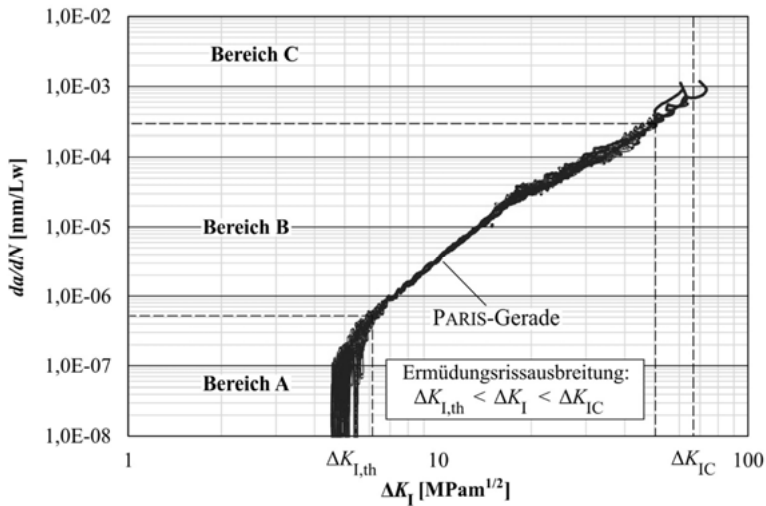


**Abbildung 2-18:** Verhalten des Risses bei zunehmender Risslänge [RS12, RV07]

- a) Ausprägung von  $K_{I,\max}$ ,  $K_{I,\min}$  sowie  $\Delta K_I$  bei zunehmender Risslänge
- b) Rissgeschwindigkeit aus der Steigung der  $a$ - $N$ -Kurve

Beim Ermüdungsrissswachstum charakterisiert die Lastwechselzahl  $N$  in Abhängigkeit von der Belastungsfrequenz die Einsatzdauer zyklisch belasteter Bauteile. Das in Abbildung 2-18a gezeigte Verhalten der Spannungsintensitätsfaktoren hat einen über die Lastwechselzahl zunehmenden Risslängenzuwachs  $\Delta a$  zur Folge, was sich in der  $a$ - $N$ -Kurve widerspiegelt (Abbildung 2-18b). Die Steigung  $da/dN$  der  $a$ - $N$ -Kurve gibt die sog. Rissgeschwindigkeit bzw. Rissfortschrittsrate in mm/Lastwechsel an [RS12].

Mit Einführung der Rissgeschwindigkeit lässt sich das Risswachstumsverhalten vom Einsetzen der Rissvergrößerung bis zum Bauteilversagen durch die Rissgeschwindigkeitskurve darstellen. Die Rissgeschwindigkeit ergibt sich als Funktion der zyklischen Spannungsintensität. Abbildung 2-19 zeigt den entsprechenden Zusammenhang in doppellogarithmischer Skalierung.



**Abbildung 2-19:** Rissfortschrittskurve für einen Stahlwerkstoff als Zusammenhang zwischen Rissgeschwindigkeit und zyklischem Spannungsintensitätsfaktor

Eine derartige Darstellung der Rissgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der zyklischen Spannungsintensität führt zu einem für Stahlwerkstoffe typischen S-förmigen Kurvenverlauf, der sich asymptotisch zwei materialspezifischen Grenzen nähert. In diesem Zusammenhang bestimmt die untere Grenze mit dem Schwellenwert gegen Ermüdungsrissausbreitung  $\Delta K_{th}$  den Materialkennwert, dessen Überschreitung zur Ausbreitung eines zyklisch beanspruchten Makrorisses führt [BP93, Kun08]. Dahingegen beschreibt der Wert  $\Delta K_{IC}$  den Grenzwert, ab dem die Rissausbreitung instabil verläuft. Aus der statischen Risszähigkeit kann dieser Wert mit Hilfe des  $R$ -Verhältnisses gebildet werden:

$$\Delta K_{IC} = (1 - R) \cdot K_{IC} \quad (2.27).$$

Das mit der Rissfortschrittskurve beschriebene Ermüdungsrisswachstum gliedert sich in drei Bereiche.

**Bereich A:** Ermüdungsrisswachstum setzt grundsätzlich erst ab einer bestimmten unteren Belastungsgrenze ein, welche sich im Bereich A befindet. Die zyklische Spannungsintensität  $\Delta K_I$  muss dazu den sog. Threshold-Wert  $\Delta K_{th}$  erreichen. Bei einer weiteren Zunahme der zyklischen Spannungsintensität ist ein nicht-linearer Anstieg der Rissgeschwindigkeit zu beobachten [PE63].

**Bereich B:** Hier liegt ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungsintensität und Rissgeschwindigkeit vor. Dieser lässt sich mit dem PARIS-Gesetz [PGA61] beschreiben (s. Kapitel 2.7.3.1).

**Bereich C:** Dieser Bereich führt über einen starken nicht-linearen Anstieg der Risswachstumsgeschwindigkeit zu instabilem Risswachstum und somit zum Bruch des Bauteils.

Der jeweilige Verlauf der Rissfortschrittskurve ist u. a. abhängig vom  $R$ -Verhältnis, von der Temperatur sowie im Allgemeinen vom Material [RHB06, RV07, Sch09, Sch80]. Zur Charakterisierung des Werkstoffverhaltens sind entsprechende Versuche in Anlehnung an die Norm ASTM E 647-08 durchzuführen [AST08]. Die so gewonnenen  $da/dN$ - $\Delta K$ -Datensätze dienen als Grundlage der bruchmechanischen Bauteilbewertung und Lebensdauerabschätzung.

### 2.7.3 Mathematische Konzepte zur Beschreibung der Kennwerte des Ermüdungsrisswachstums

Bei ausbreitungsfähigen Rissen kann anhand vorliegender Spannungsintensitätsfaktor-Risslängen-Verläufe, dem  $R$ -Verhältnis sowie entsprechender Materialdaten rechnerisch eine Lebensdauervorhersage getroffen werden. Die allgemeine mathematische Beschreibung der Rissfortschrittskurve  $da/dN = f(\Delta K, R)$  ist dabei notwendig. Es existiert eine Reihe von Konzepten zur Beschreibung der Rissfortschrittskurve. Eine Auswahl relevanter Konzepte wird nachfolgend vorgestellt.

#### 2.7.3.1 PARIS-Gesetz

Den linearen Abschnitt der Rissgeschwindigkeitskurve im Bereich B beschreibt das sog. PARIS-Gesetz [PGA61]. Dieses hat die Form:

$$\frac{da}{dN} = C_P \cdot \Delta K_I^{m_P} \quad (2.30).$$

Der Vorfaktor  $C_P$  sowie der Exponent  $m_P$  sind werkstoffabhängig und angepasst an die jeweilige Spannungssituation experimentell zu bestimmen. Zwar bietet das PARIS-Gesetz einen einfachen mathematischen Ansatz, führt jedoch zu vergleichsweise konservativen Lebensdauerabschätzungen, da der Bereich des Thresholdwertes keine Berücksichtigung findet.

#### 2.7.3.2 FORMAN/METTU-Gleichung

Im Gegensatz zum PARIS-Gesetz bildet die FORMAN/METTU-Gleichung [FM92] alle Bereiche der Rissgeschwindigkeitskurve unter Berücksichtigung von  $\Delta K_{th}$  sowie  $K_{IC}$  ab. Die mathematische Formulierung erfolgt in Abhängigkeit des  $R$ -Verhältnisses und lautet:

$$\frac{da}{dN} = C_{FM} \cdot \left[ \left( \frac{1-\gamma}{1-R} \right) \cdot \Delta K_I \right]^n \cdot \frac{\left( 1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K_I} \right)^p}{\left( 1 - \frac{K_{max}}{K_C} \right)^q} \quad (2.31).$$

Experimentell sind für diese Gleichung die Parameter  $C_{FM}$ ,  $n$ ,  $p$  sowie  $q$  zu ermitteln. Mit der Rissöffnungsfunktion  $\gamma$  bezieht der Ansatz nach FORMAN/METTU auch das Riss schließen [Elb70] ein.

Beim Ermüdungsrissswachstum ist in diesem Zusammenhang nicht die komplette Rissbeanspruchung zur Ausbreitung des Risses wirksam. Vielmehr öffnet sich der Riss bei einer Beanspruchung des Bauteils mit einer zyklischen Zugbelastung und konstanter Amplitude erst ab einem gewissen Lastniveau  $K_{I,op}$ . Beim Entlasten schließt der Riss bereits vor Erreichen der minimalen Last. So ist lediglich eine effektive zyklische Spannungsintensität  $\Delta K_{I,eff}$  bei der Rissausbreitung wirksam [MR98, OS75, SP73].

Im Rahmen der Lebensdauerabschätzung rissbehafteter Bauteile kann die für eine Rissverlängerung  $\Delta a$  benötigte Lastspielzahl mit Hilfe des FORMAN/METTU-Ansatzes bestimmt werden. Dazu wird Gleichung 2.31 nach  $a$  integriert, sodass sich folgender Ausdruck ergibt:

$$N_{0 \rightarrow 1} = \int_0^{N_{0 \rightarrow 1}} dN = \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{\frac{da}{dN}} da = \int_{a_0}^{a_1} \frac{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_C}\right)^q}{C_{FM} \cdot \left[\left(\frac{1-\gamma}{1-R}\right) \cdot \Delta K_I\right]^n \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K_I}\right)^p} da \quad (2.32).$$

Eine geschlossene Integration ist in diesem Fall jedoch nicht möglich. Näherungsweise Ergebnisse ergeben sich durch numerisches Integrieren.

### 2.7.3.3 Konzept nach KULLMER

Zur Beschreibung der Rissgeschwindigkeitskurve existieren neben den vorhergehend erläuterten zahlreiche weitere Ansätze. Nachfolgend wird der Exponentialansatz nach KULLMER stellvertretend vorgestellt.

Auf einem Exponentialgesetz basierend beschreibt die Rissgeschwindigkeitskurve das gesamte Beanspruchungsspektrum von  $\Delta K_{I,th}$  bis  $\Delta K_C$  weitgehend exakt. Die Rissgeschwindigkeit  $da/dN$  korreliert dabei nicht direkt mit  $\Delta K$ , sondern mit der für die Rissbeanspruchung charakteristische Größe  $\Psi$ , welche in direktem Zusammenhang mit  $\Delta K$  steht:

$$\frac{da}{dN} = \left(\frac{da}{dN}\right)_{th} \left\{ \exp \left[ \lambda \cdot \psi_{th} \left( \frac{\psi}{\psi_{th}} - 1 \right) \right] - \exp \left[ \lambda_a \cdot \psi_{th} \left( \frac{\psi}{\psi_{th}} - 1 \right) \right] \right\} \quad (2.33).$$

Mit dem Koeffizient  $(da/dN)_{th}$  kann die fiktive Rissgeschwindigkeit für  $\psi = \psi_{th}$  beschrieben werden. Für den Zusammenhang zwischen den Größen  $\psi$ ,  $\psi_{th}$ ,  $\Delta K$  und  $\Delta K_{th}$  gilt

$$\frac{\psi}{\psi_{th}} = \left( \frac{\Delta K}{\Delta K_{th}} \right)^\kappa \quad (2.34),$$

wobei der Schwellenwert  $\psi_{th}$  sowie der Exponent  $\kappa$  werkstoffabhängige Konstanten darstellen [Kul99].

## 2.7.4 Ermüdungsrissswachstum bei Mixed-Mode-Beanspruchung

Analog zur Untersuchung statischer Mixed-Mode-Beanspruchung ist auch bei zyklischer Mixed-Mode-Beanspruchung ein zyklischer Vergleichsspannungsintensitätsfaktor zu bilden,

welcher den für Mode I ermittelten Materialkennwerten bzw. der entsprechenden Rissfortschrittskurve gegenüber gestellt wird. Für den Fall des ebenen Mixed-Mode ermittelt sich der Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  wie folgt:

$$\Delta K_V = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\Delta K_I^2 + 5,336 \cdot \Delta K_{II}^2} \quad (2.35).$$

Bei einem räumlichen Rissbeanspruchungszustand (allgemeiner Mixed-Mode) erweitert sich die Zusammensetzung des Vergleichsspannungsintensitätsfaktors um die zyklische Komponente der Mode III-Beanspruchung [RBK+03]. Formelmäßig ergibt sich dementsprechend:

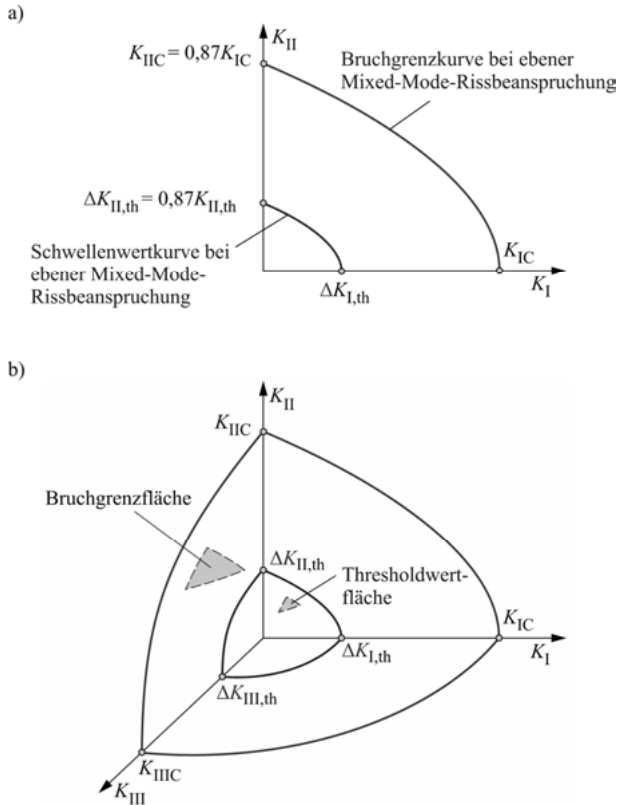
$$\Delta K_V = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\Delta K_I^2 + 5,336 \cdot \Delta K_{II}^2 + 4 \cdot \Delta K_{III}^2} \quad (2.36).$$

Unabhängig von der Zusammensetzung des Mixed-Mode-Zustandes wird der berechnete zyklische Vergleichsspannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_V$  im Rahmen der Bewertung des Ermüdungsrisswachstums den für Mode I experimentell ermittelten Materialkennwerten gegenüber gestellt. Stabiles Risswachstum findet statt, wenn folgende Bedingung gilt:

$$\Delta K_{I,th} < \Delta K_V < \Delta K_{IC} \quad (2.37).$$

Dieser Zusammenhang kann in Anlehnung an Abbildung 2-15b sowie 2-16 auch graphisch verdeutlicht werden. Für ebenen Mixed-Mode beschreiben die Schwellenwertkurve und die Bruchgrenzkurve die Grenzen des Ermüdungsrisswachstums (Abbildung 2-20a). Für den Fall zyklischer räumlicher Mixed-Mode-Beanspruchung gelten analog die Schwellenwertfläche sowie die Bruchgrenzfläche als Grenzen (Abbildung 2-20b).

Ausbreitungsfähige Risse knicken und/oder verdrehen sich mit zunehmender Risslänge um die Winkel  $\varphi_0$  bzw.  $\psi_0$  (Abbildung 2-14). Eine Änderung des Beanspruchungszustands an der Risspitze tritt auf, in dessen Folge die Mode II- und Mode III-Anteile bei gleichzeitiger Steigerung von  $\Delta K_I$  abnehmen.



**Abbildung 2-20:** Grenzen des Ermüdungsrisswachstums [RS12]

- Schwellenwertkurve und Bruchgrenzkurve bei ebener Mixed-Mode-Rissbeanspruchung
- Thresholdwertfläche und Bruchgrenzfläche bei räumlicher Mixed-Mode-Rissbeanspruchung

## 2.8 Regelwerke der bruchmechanischen Bauteilbewertung

Treten in Bauteilen oder Strukturen während der Fertigung oder im Bauteilbetrieb Fehler, beispielsweise Materialeinschlüsse oder Risse, auf, sind diese durch die Anwendung bruchmechanischer Methoden zu untersuchen. Gleiches gilt, wenn während des Betriebs von einem Entstehen von Fehlern innerhalb von Inspektionszeiträumen ausgegangen werden muss. Die bruchmechanische Bauteilbewertung ist dabei als komplementär zum klassischen Festigkeitsnachweis fehlstellenfreier Bauteile zu sehen und erfolgt in der Praxis auf Basis einer Reihe von Regelwerken.

2.8.1 Vorgehensweise der bruchmechanischen Bauteilbewertung

Analog zum klassischen Festigkeitsnachweis wird auch bei der Bewertung des Ermüdungsris-  
swachstums die Bauteilbeanspruchung bzw. die Rissbeanspruchung der experimentell zu be-  
stimmenden Beanspruchbarkeit des Werkstoffs gegenübergestellt [RS12]. Abbildung 2-21  
zeigt schematisch die Vorgehensweise.

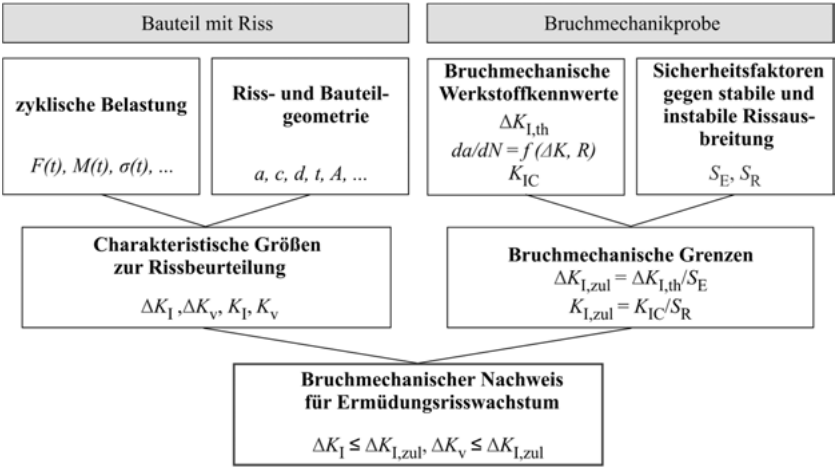


Abbildung 2-21: Vorgehensweise bei der Bewertung des Ermüdungsrissswachstums nach [RS12]

Mit Hilfe analytischer oder numerischer Methoden lässt sich die durch zyklische Bauteilbelas-  
tung hervorgerufene Beanspruchung des Risses, ausgedrückt durch die Spannungsintensitäts-  
faktoren, bestimmen. Die Beanspruchbarkeit des Werkstoffs hingegen ist experimentell anhand  
spezieller bruchmechanischer Proben zu ermitteln. Unter Berücksichtigung der geforderten Si-  
cherheitsfaktoren ergeben sich die zulässigen bruchmechanischen Grenzen, die bei der Bewer-  
tung des Ermüdungsrissswachstums maßgebend sind. Aussagen über das Ermüdungsrissswach-  
stum bzw. der Nachweis der bruchmechanischen Festigkeit im Kontext verschiedenster ingeni-  
eurechnischer Fragestellungen bei Auftreten von Rissproblemen (vgl. Kapitel 3.3) ergeben  
sich schließlich aus dem Vergleich der Beanspruchung mit der Beanspruchbarkeit.

2.8.2 Internationale Regelwerke zur bruchmechanischen Bauteilbewertung

Die Untersuchung von Fehlstellen in Bauteilen und Strukturen erfordert klare Vorgehensweisen  
in Form von anerkannten Regelwerken und Richtlinien. International existiert eine Vielzahl  
von Werken, in denen Methoden, Konzepte sowie Handlungsempfehlungen für den bruchme-  
chanischen Festigkeitsnachweis praxisorientiert aufgeführt sind. Eine Auswahl der am weitest  
verbreiteten Regelwerke wird nachfolgend vorgestellt.

### 2.8.2.1 FKM-Richtlinie Bruchmechanischer Festigkeitsnachweis

Das Forschungskuratorium Maschinenbau e. V. (FKM) hat eine, vor allem im deutschsprachigen Raum verbreitete, Richtlinie zur Führung eines bruchmechanischen Festigkeitsnachweises [FKM09] entwickelt. Diese betrachtet die Auswirkungen von Fehlstellen auf die mechanische Sicherheit und Funktionstüchtigkeit technischer Strukturen und ist dementsprechend im Maschinenbau sowie in verwandten Bereichen der Industrie allgemein anwendbar.

Besondere Berücksichtigung finden statische, zyklische sowie dynamische Belastungen von Bauteilen aus Eisenwerkstoffen sowie Leichtmetalllegierungen, wobei ein besonderer Schwerpunkt auf der Untersuchung von Mixed-Mode-Beanspruchungszuständen liegt. Dabei werden auch thermische Einflüsse bis unterhalb der Kriechtemperatur in Ansätzen berücksichtigt. Die Untersuchung nichtmetallischer Werkstoffe sowie von Kriechvorgängen überschreitet die Grenzen der Richtlinie, welche in Teilen auf dem British Standard (Abschnitt 2.8.2.2) beruht.

### 2.8.2.2 British Standard 7910

Die Norm British Standard 7910 zur Beurteilung der Akzeptierbarkeit von Fehlstellen in Bauteilen und Strukturen [BS13a] wurde von einem Zusammenschluss verschiedener Institute sowie technischer Überwachungsvereine erstellt. Vor allem rohrartige Bauteile, beispielsweise Druckbehälter, Pipelines sowie insbesondere deren geschweißte Verbindungsstellen finden Berücksichtigung. International wird die Norm von Überwachungsvereinen sowie Sicherheitsbehörden vielfach angewandt.

Fehlstellen werden im Rahmen ihrer Beurteilung innerhalb verschiedener Stufen untersucht, wobei auch vereinfachte Verfahren vorgeschlagen sind. Der Umgang mit Mixed-Mode-Beanspruchungszuständen wird hierbei lediglich kurz umrissen. Vielmehr liegt der Fokus auf der Beurteilung weiterer Versagensmodi wie beispielsweise Fließen bei Überlastung des Restquerschnitts sowie Leckagen in Druck- und Flüssigkeitsbehältern.

### 2.8.2.3 European Fitness-for-Service Network FITNET

Aus dem europäischen Verbundprojekt „Fitness-for-Service-Network“ von Industrie und Forschungseinrichtungen ist die Richtlinie FITNET [KWJ+08] entstanden, deren Ziel eine standardisierte Beurteilung von postulierten oder realen Schäden ist. In einzelnen Modulen sind den Hauptversagensmechanismen zugeordnete Methoden zur Fehlerbeurteilung erläutert. Inhaltlich ist die Richtlinie zu großen Teilen dem Regelwerk British Standard 7910 (vgl. Kapitel 2.8.2.2) ähnlich. Sie ist aus der SINTAP-Prozedur (Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry) [SIN99] hervorgegangen.

Die Richtlinie FITNET findet Anwendung in allen Industriezweigen des Maschinenbaus und ist dementsprechend für allgemeine technische Strukturen aus Eisenwerkstoffen und Leichtmetalllegierungen sowie Schweißverbindungen anwendbar. Die Hauptversagensmechanismen Bruch, Ermüdung, Kriechen sowie Korrosion werden entsprechend abgedeckt. Statische oder zyklische Belastungen werden berücksichtigt.

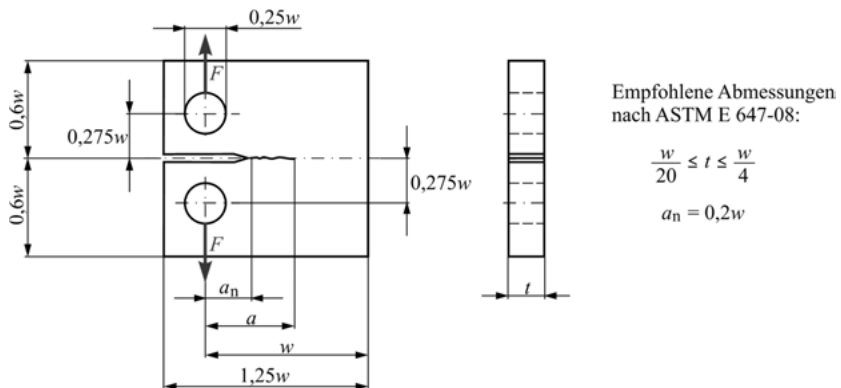
#### 2.8.2.4 ASME Boiler & Pressure Vessel Code

Die durch den Verband amerikanischer Ingenieure erarbeitete und herausgegebene Richtlinie ASME Boiler & Pressure Vessel Code [ASM15] ist das umfassendste Regelwerk für Konstruktion und Fertigung sowie Prüfung von Druckbehältern. In Teilgebieten dieses Werkes wird die temporäre Akzeptanz entstandener Fehlstellen thematisiert. Entsprechende Kriterien werden vor allem für nukleare Anwendungen spezifiziert, um Inspektionsintervalle fundiert abschätzen zu können.

#### 2.8.3 Kennwertermittlung nach ASTM E 647-08

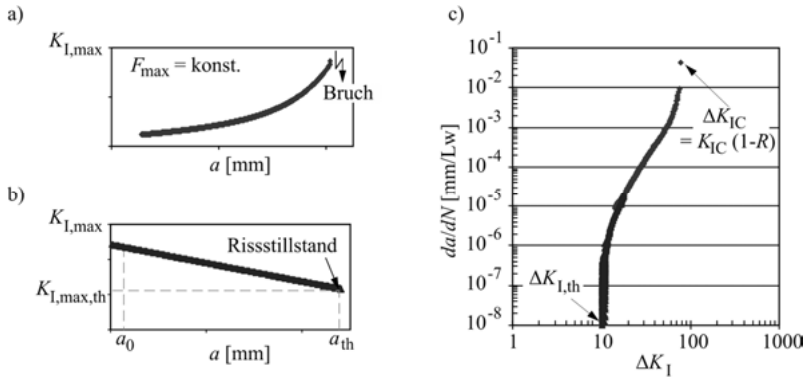
Grundlage jeder bruchmechanischen Bauteilbewertung sind, neben der Rissbeanspruchung, die bruchmechanischen Werkstoffkennwerte. Diese sind materialabhängig und werden darüber hinaus durch Fertigungsverfahren sowie eventuelle Wärmenachbehandlungen beeinflusst. Mitunter können dabei wesentliche Veränderungen charakteristischer Größen wie  $\Delta K_{I,th}$  oder  $K_{IC}$  hervorgerufen werden, weshalb für jeden Werkstoff bzw. jede Gefügestruktur experimentelle Untersuchungen durchzuführen sind.

Die Aufnahme der zur Beschreibung der Rissfortschrittskurve und ihrer charakteristischen Größen notwendigen  $da/dN$ - $\Delta K_I$ -Datensätze erfolgt gemäß der Norm ASTM E 647-08 [AST08]. Hier werden unter anderem sog. CT-Proben (engl. Compact Tension Specimen) als Prüfkörper (Abbildung 2-22) aufgeführt, die sich in der Praxis aufgrund ihrer einfachen Geometrie sowie der geringen benötigten Prüfkraft bewährt haben.



**Abbildung 2-22:** Geometrie und Belastungsrichtung der CT-Probe nach Norm ASTM E 647-8

Für eine vollumfängliche Abbildung der Rissfortschrittskurve sind ergänzend zwei Typen von Versuchen notwendig, denen jeweils das Einschwingen eines Risses in den Probenkörper vorhergeht. Anhand der einzelnen Bereiche der Rissfortschrittskurve lassen sich die beiden Versuchstypen charakterisieren (Abbildung 2-23).



**Abbildung 2-23:** Experimentelle Ermittlung der Rissfortschrittskurve nach [SR04]

- Versuchstyp 1 mit  $F_{\max} = \text{konstant}$
- Versuchstyp 2 mit abnehmender Spannungsintensität
- Zusammengesetzte Rissfortschrittskurve aus a) und b)

Versuchstyp 1 beschreibt den mittleren und oberen Bereich der Rissfortschrittskurve. Hierbei erfolgt die schwingende Belastung der Probenkörper mit jeweils konstant bleibender maximaler und minimaler Kraft ( $F_{\max}$  bzw.  $F_{\min}$ ), woraus eine konstante Kraftschwingbreite ( $\Delta F$ ) resultiert. Mit zunehmender Risslänge  $a$  steigt folglich der zyklische Spannungsintensitätsfaktor  $\Delta K_I$  an, bis bei Erreichen der zyklischen Risszähigkeit  $\Delta K_{IC}$  die Probe bricht.

Den mittleren und unteren Bereich der Rissfortschrittskurve umfasst Versuchstyp 2. Die Spannungsintensität sinkt bei konstantem  $R$ -Verhältnis soweit, bis der Rissfortschritt zum Stillstand kommt. Als Abbruchbedingung gilt nach ASTM E 647-8 eine Rissfortschrittsrate von  $10^{-7}$  mm/Lw, wobei sich in der Praxis ein Wert von  $10^{-8}$  mm/Lw als praktikabel erwiesen hat [Rie15]. Durch Zusammensetzen der in den beiden Versuchstypen ermittelten  $da/dN$ - $\Delta K_I$ -Datensätze ergibt sich die Rissfortschrittskurve.

### 3 BRUCHMECHANISCHE BAUTEILBEWERTUNG IM KONTEXT DER MODERNEN PRODUKTENTSTEHUNG UND -NUTZUNG

In diesem Kapitel werden zunächst die Charakteristika der modernen Produktentstehung näher erläutert. Die virtuelle Absicherung von Produkteigenschaften sowie die parallele Bearbeitung von Arbeitsschritten in Zusammenhang mit der Industrie 4.0 (Kapitel 3.1) spielen dabei eine Rolle. Außerdem wird auf bruchmechanische Fragestellungen eingegangen, die im Laufe eines Produktlebens auftreten können (Kapitel 3.2). Das Kapitel schließt mit der Ableitung von Anforderungen an eine effiziente und robuste bruchmechanische Bauteilbewertung (Kapitel 3.3).

#### 3.1 Virtuelle Entstehung technischer Produkte

Die Produktentstehung hat sich in den letzten Jahrzehnten rapide gewandelt. So stellt heutzutage der Einsatz virtueller Techniken einen wesentlichen Erfolgsfaktor dar. Derartige Hilfsmittel werden unter dem Begriff Computer Aided Engineering (CAE) zusammengefasst und beinhalten beispielsweise die FEM (vgl. Kapitel 4.2.1) [FG13, SR08]. Die mit dem Einsatz von Simulationswerkzeugen verbundene hohe Erwartungshaltung zielt in erster Linie auf die Einsparung von Prototypenversuchen und somit auf eine Zeitersparnis bis zur Produkteinführung ab [SR08]. Abbildung 3-1 stellt in diesem Zusammenhang die historische Entwicklung von Hilfsmitteln der Produktentstehung dar.

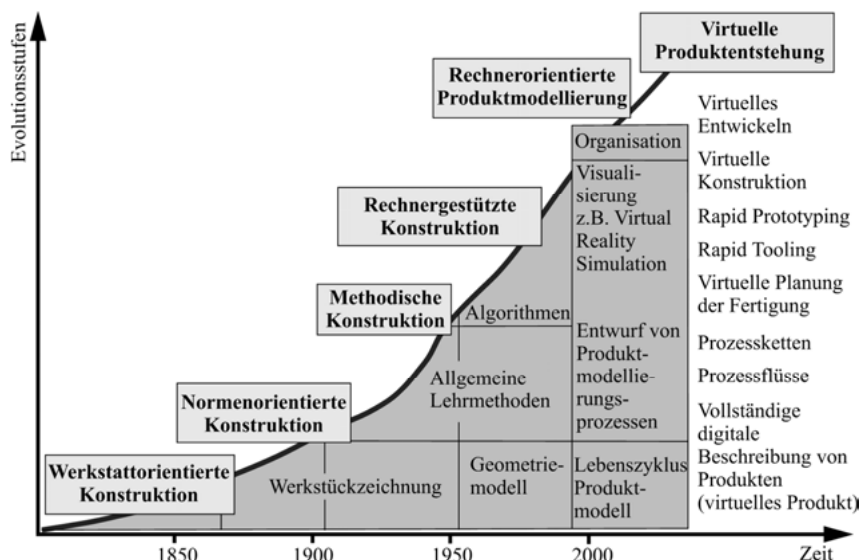


Abbildung 3-1: Zeitliche Entwicklung der Hilfsmittel der Produktentstehung nach [SK97]



In späten Phasen der Entwicklung steht die Überprüfung des Produkts im Hinblick auf eine virtuelle Freigabe im Vordergrund. Modelle hoher Güte erfordern entsprechenden Detaillierungsgrad sowie hohe Qualität der Eingangsdaten. Gesteigerte Kosten und Bearbeitungszeiten ergeben sich bei diesen Berechnungen [SR08].

Während des Bauteilbetriebs können Simulationen und geeignete Modelle für den Nutzer eines technischen Produkts hilfreich sein. Der reguläre Betriebszustand wird überwacht, Komponentenausfall vorhergesagt oder die weitere Nutzbarkeit bei Auftreten von Schäden geklärt [KWH13].

Insbesondere im Zusammenhang mit der Industrie 4.0 kommt der Nutzung virtueller Simulationsmodelle eine erhöhte Bedeutung zu. Der Begriff Industrie 4.0 umfasst sowohl die vollständige Digitalisierung und Vernetzung von Produktion und Produktionssystem als auch deren digitale Abbildung am Rechner mit Hilfe von Simulationsmodellen. Ziel ist die Beherrschbarkeit der zunehmenden Komplexität von Produkt und Produktionssystem bereits in frühen Entwicklungsphasen. Leistungsfähige und abgestimmte Simulationswerkzeuge unterstützen dieses Ziel. Eine wirtschaftliche Modellerstellung und -berechnung steht hierbei im Vordergrund [KWH13, APW15, BHV14].

### 3.2 Bruchmechanische Fragestellungen während Produktentstehung und Bauteilbetrieb

Bruchmechanische Untersuchungen sind vor allem für technische Strukturen, an die besonders hohe Sicherheitsanforderungen zum Schutz von Mensch und Umwelt gestellt werden oder deren Ausfall schwerwiegende wirtschaftliche Konsequenzen mit sich bringt, erforderlich. Fragestellungen können in diesem Zusammenhang in unterschiedlichen Situationen eines Produktlebenszyklus auftreten.

- **Produktentstehung:** Im Rahmen der Konstruktion treten vor allem Fragestellungen hinsichtlich der Bauteildimensionierung sowie der maximal zulässigen Belastung auf. Außerdem ist die Auswahl des Werkstoffs in der Form zu treffen, dass die allgemeinen mechanischen Anforderungen bei gleichzeitig hohem Widerstand gegen Rissausbreitung erfüllt sind. Hintergrund bei diesen Fragestellungen ist der Nachweis der bruchmechanischen Dauerfestigkeit nicht vermeidbarer oder nicht detektierbarer Risse und Fehlstellen. Eine Auswahl geeigneter Fertigungstechnologien sowie zerstörungsfreier Prüfverfahren im Rahmen der Qualitätssicherung geht damit einher.
- **Bauteilbetrieb:** Treten während des Betriebs Risse bzw. Fehlstellen auf, sind die entsprechenden Bauteile auf ihre gegenwärtige und zukünftige Gebrauchseignung zu bewerten. Die Frage nach der kritischen Risslänge für Ermüdungsrisssausbreitung oder für instabiles Bauteilversagen steht dabei an erster Stelle. Für den Fall wachstumsfähiger Fehler ist die Restnutzungsdauer zu quantifizieren. Darüber hinaus müssen Inspektionsintervalle definiert werden.

- **Schadensanalyse:** Unzulässig hohe Betriebslasten, ein falscher Werkstoff, Werkstoffveränderungen durch Umwelteinflüsse oder Einwirkungen Dritter können zu einem technischen Schadensfall durch Risswachstum führen. Derartige Ursachen müssen identifiziert werden, um geeignete Abhilfemaßnahmen einleiten zu können.

Ausgehend von der jeweiligen Fragestellung ist daher die Wahl einer angepassten Herangehensweise zur Bestimmung der bruchmechanischen Beanspruchungsgrößen sinnvoll. Die wirtschaftliche Bestimmung bruchmechanischer Beanspruchungsgrößen sowie deren Genauigkeit sollten dabei oberste Priorität haben. So kann die Bewertung der bruchmechanischen Wachstumsfähigkeit unter Umständen mit Hilfe einer Herangehensweise erfolgen, die im Vergleich zu einer umfassenden Rissausbreitungssimulation weniger aufwendig ist.

### 3.3 Anforderungen an die effiziente bruchmechanische Bauteilbewertung

Insbesondere die virtuelle Produktentstehung in Kombination mit dem Trendthema Industrie 4.0 bilden die Basis, um eine bruchmechanische Bauteilbewertung effizient durchführen zu können. Im Zusammenhang mit Effizienzgedanken lassen sich Anforderungen an die Werkzeuge und Hilfsmittel der bruchmechanischen Bewertung ableiten. Diese speziellen Anforderungen werden nachfolgend zusätzlich zu den allgemeinen Anforderungen an eine robuste bruchmechanische Bewertung erläutert.

**A1) Skalierbarkeit des Verhältnisses Aufwand/Ergebnisgenauigkeit:** In frühen Entwicklungsphasen technischer Produkte sind Herangehensweisen mit geringem Berechnungsaufwand und damit einhergehender reduzierter Ergebnisqualität die erste Wahl. In späten Phasen der Produktentstehung hingegen sind exakte Aussagen relevant. Abhängig vom jeweiligen Stand des Entwicklungsprojekts müssen daher situationsgerechte Herangehensweisen zur Verfügung stehen, welche die Möglichkeit einer Anpassung des Verhältnisses von Aufwand zur Ergebnisgenauigkeit ermöglichen.

**A2) Nutzung vorhandener Spannungsdaten:** Vor dem Hintergrund der virtuellen Produktentstehung liegen die Spannungsdaten fehlstellenfreier Bauteile unabhängig von einer etwaigen bruchmechanischen Untersuchung bereits vor. Deren Nutzung sollte aus Effizienzgründen möglich sein, um aufwändige Neumodellierungen und -berechnungen zu vermeiden.

**A3) Berücksichtigung der Mehrachsigkeit der Spannungsfelder:** Die Komplexitätsreduzierung des Ausgangsproblems auf eine lediglich einachsige Rissbeanspruchung kann zu erheblichen Ergebnisabweichungen führen. Bei einer bruchmechanischen Bauteilbewertung muss dieser Tatsache durch die Berücksichtigung der mehrachsigen Beanspruchung begegnet werden.

**A4) Exakte Abbildung der Rissgeometrie:** Fehlstellen und Risse können verschiedenste Geometrien aufweisen. Im Sinne einer realitätsnahen Untersuchung dieser muss die Rissgeometrie originalgetreu abbildbar sein. Vereinfachungen sind nur in sehr geringem Umfang zulässig.

**A5) Robustheit der Ergebnisse:** Die Forderung nach einer hohen Ergebnisgenauigkeit bei der Bestimmung von Rissbeanspruchungsgrößen ist wesentlich. Herangehensweisen, Methoden und Simulationsprogramme müssen dieser durch robuste Ergebnisse Rechnung tragen.

**A6) Bestimmung von Risspfad und Restlebensdauer:** Treten wachstumsfähige Risse während des Bauteilbetriebs auf, ist eine Aussage über die Restnutzungsdauer des Bauteils zu treffen. Exakte Berechnungen zu Risspfad und Restlebensdauer sind in diesem Zusammenhang von Bedeutung und müssen möglich sein.

**A7) Geringer Modellierungs- und Berechnungsaufwand:** Wirtschaftlichkeit spielt bei der bruchmechanischen Bauteilbewertung eine große Rolle. Effiziente Herangehensweisen müssen daher Möglichkeiten zur Vereinfachung der Problemstellung bieten, um den Modellierungs- und Berechnungsaufwand zu reduzieren.

**A8) Universelle Einsetzbarkeit:** Bauteile und Strukturen können durch verschiedenste Randbedingungen, beispielsweise Temperaturgradienten, belastet sein. Die Berücksichtigung sämtlicher Umwelteinflüsse als Randbedingungen muss möglich sein.

**A9) Flexibilität hinsichtlich der einzusetzenden Software:** Im betrieblichen Umfeld finden, begonnen bei der CAD-Software, über FE-Preprozessoren und FE-Solvern, bis hin zu FE-Postprozessoren, verschiedenste Programme Einsatz. Effiziente bruchmechanische Herangehensweisen müssen bei der Wahl der Software flexibel sein, um die unmittelbare Einsetzbarkeit zu gewährleisten und kostenintensive Neuanschaffungen zu vermeiden.

## 4 VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DER BRUCHMECHANISCHEN BEANSPRUCHUNGSGRÖßEN

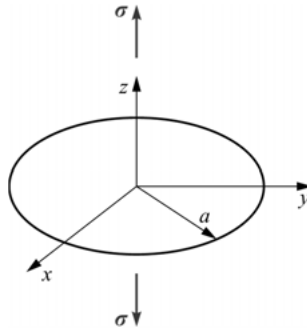
Dieses Kapitel beinhaltet verschiedene Methoden zur Bestimmung bruchmechanischer Kenngrößen. Nachdem zunächst die Thematik der analytischen Berechnung von Basislösungen (Kapitel 4.1) erörtert wird, folgt daraufhin die Beschreibung numerischer Methoden (Kapitel 4.2). Diese finden für die Bestimmung der Rissbeanspruchung auf Basis allgemeiner Finite-Elemente-Programme Einsatz oder aber sind in automatisierte Rissausbreitungssimulationsprogramme (Kapitel 4.3) implementiert. Die vorgestellten Methoden werden darüber hinaus auf ihre Ergebnisgenauigkeit hin untersucht und anhand der im vorhergehenden Kapitel abgeleiteten Anforderungen an eine effiziente bruchmechanische Bauteilbewertung beurteilt (Kapitel 4.4).

### 4.1 Grundlegende Ansätze für Basislösungen

Basislösungen für Spannungsintensitätsfaktoren werden in der Regel in Katalogen als statische Beanspruchungswerte für den ruhenden Riss angegeben und erfordern bei der bruchmechanischen Bauteilbewertung den geringsten Zeitaufwand. Derartige Kataloge können entweder als Handbuch, zum Beispiel von MURAKAMI [Mur87] oder THEILIG ET AL. [TNE+87], veröffentlicht sein oder werden in Form von programm-basierten Bibliotheken als kommerzielle Software (siehe Kapitel 4.1.2) vertrieben. Die Basislösungen sind für standardisierte Riss- und Bauteilgeometrien hinterlegt, lassen sich aber zumeist mit Hilfe verschiedener Variablen dem Ausgangsproblem annähern. Methodisch werden die Lösungen analytisch exakt, mit Hilfe alternierender Verfahren oder aber mit auf der FEM aufbauenden Ansätzen näherungsweise bestimmt. Diese Näherungslösungen weisen in der Regel eine Genauigkeit von 5% auf [NR86, Ede15].

#### 4.1.1 Analytische Lösungen

Exakte analytische Lösungen sind vergleichsweise wenig bekannt und gleichzeitig auf einfache Fälle der Riss- und Bauteilgeometrie und einachsige Belastung beschränkt. Häufig gelten diese für Risse in Bauteilen mit unendlichen Abmessungen. Ein Beispiel hierfür ist die erstmalig von SNEDDON [SNE46] entwickelte exakte Lösung für den kreisförmigen Riss im unendlich ausgedehnten Körper (Abbildung 4-1).



**Abbildung 4-1:** Analytische Lösung des kreisförmigen Risses im unendlich ausgedehnten Körper [Mur87]

Die als Randwertproblem mit Hilfe der sog. HANKEL-Transformation entwickelten Formulierungen für die Spannungs- und Verschiebungsverteilung am Riss beruhen auf einer konstanten Rissbelastung durch einen Innendruck  $p$  und bilden die Grundlage zur Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors. Im Unendlichen verschwindende Spannungen und Verschiebungen werden dabei angenommen [Ede15]. Der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  ergibt sich mit:

$$K_I = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (4.1).$$

#### 4.1.2 Programmbasierte Bibliotheken

Am Markt existiert eine Vielzahl programmbasierter Bibliotheken zur Berechnung des Ermüdungsrisswachstums und der damit einhergehenden Lebensdauer rissbehafteter Bauteile. Häufig basieren die vorhandenen Standardrissfälle auf analytischen Lösungen. Programme wie NASGRO [Nas00], AFGROW [Gra04] sowie CrackWISE [HEB+16-ol] sind in diesem Zusammenhang zu nennen. Stellvertretend wird das Programm NASGRO nachfolgend vorgestellt.

NASGRO ist ein von der NASA sowohl entwickeltes als auch vertriebenes Programm zur Berechnung des Ermüdungsrisswachstums und basiert auf einer Bibliothek von Standardlösungen, die größtenteils auf analytischem Wege bestimmt sind. Für die Berechnung der Lebensdauer wird auf die, unter anderem als NASGRO-Gleichung bekannte, FORMAN/METTU-Gleichung zurückgegriffen. In diesem Zusammenhang ist die sehr umfassende Datenbank von Materialparametern zu erwähnen. Darüber hinaus ist in dem Programm eine Vielzahl von typischen Rissproblematiken als vereinfachtes Modell mit den entsprechenden  $K_I$ - und  $Y_I$ -Lösungen integriert. Diese können mit Hilfe von diversen Parametern an die Ausgangsproblematik des Anwenders angenähert werden. Eine Rissausbreitungssimulation für Bauteile beliebiger Geometrie ist mit diesem Programm nicht möglich. NASGRO arbeitet mit einer graphischen Benutzeroberfläche, die das Programm sehr anwenderfreundlich gestaltet. Geringe Hardwareanforderungen ergeben sich durch die analytische Vorgehensweise des Programms [Nas00].

## 4.2 Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen

Die in der Literatur vorhandenen analytischen Lösungen bieten den Vorteil einer exakten Spannungsintensitätsfaktorbestimmung. Allerdings bringen sie eine Reihe von Einschränkungen mit sich. So ist zum einen die Vielfalt der verfügbaren Rissgeometrien stark limitiert. Zum anderen liefern die analytischen Modelle weitestgehend nur Lösungen für Mode I-Beanspruchungen. Die Vernachlässigung einer in der Realität vorherrschenden Mixed-Mode-Beanspruchung kann jedoch schnell zu einer erheblichen Fehlbewertung des Anrisses führen.

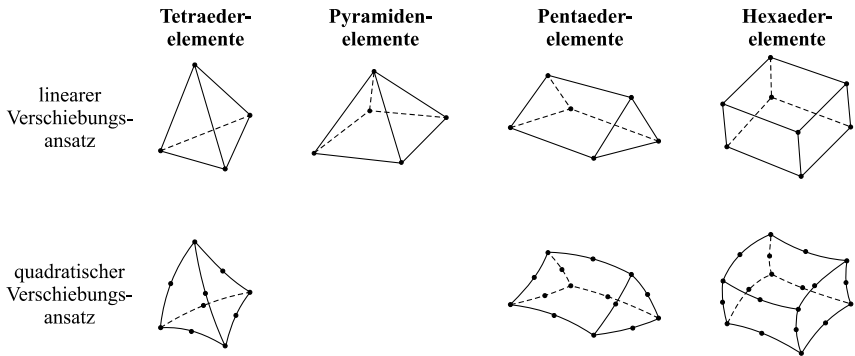
Vor allem bei komplexer Rissgeometrie sowie mehrachsiger Beanspruchung empfiehlt sich daher die Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren mit Hilfe numerischer Simulationswerkzeuge. Die Grundlagen der Numerik sowie darauf basierende Ansätze zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung werden dementsprechend nachfolgend vorgestellt.

### 4.2.1 Grundlagen der Finite-Elemente-Methode

Ein im Zusammenhang mit moderner Computertechnik seit Jahren bewährtes numerisches Berechnungswerkzeug zur Lösung verschiedenster Problemstellungen der Ingenieurwissenschaften ist die FEM. In Kombination mit der rechnerunterstützten Konstruktion (CAD) wird das Verfahren heutzutage standardmäßig zur realitätsnahen Absicherung der physikalischen Eigenschaften von Bauteilen während des Produktentwicklungsprozesses eingesetzt [Kle15].

Grundgedanke der FEM ist die Approximation des Bauteils durch eine Vielzahl endlicher Gebiete, sog. finiter Elemente. Den einzelnen Elementen werden Ansatzfunktionen zugewiesen, welche das Elementverhalten, zum Beispiel Verschiebungen, ausdrücken. Knoten, die Kräfte und Verschiebungen übertragen, verknüpfen die einzelnen Elemente zu einem Gesamtsystem von Gleichungen. Reale Umgebungseinflüsse, wie zum Beispiel wirkende Kräfte, Temperaturen, Beschleunigungen etc., sind dem Gesamtsystem als Randbedingungen zugewiesen. Die Lösung des so entstehenden Gleichungssystems ergibt die Verformungen und Belastungen der einzelnen Elemente, aus denen sich wiederum die Lösung für das Gesamtbauteil zusammensetzt. Aus diesen Ergebnissen können beispielsweise die Spannungen innerhalb des Bauteils berechnet werden. Die Anwendung der FEM besteht dabei grundsätzlich aus drei aufeinanderfolgenden Schritten [Kle15, Hah76].

Das sog. **Preprocessing**, welches die Erstellung des FE-Modells beinhaltet, bezeichnet den ersten Arbeitsschritt. Dazu wird das Bauteil zunächst mit Hilfe eines CAD-Programms erstellt und in das FE-Programm importiert. Symmetrien bei Geometrie und Belastung sind zu nutzen, um die Rechenzeit zu reduzieren. Die physikalische Beschreibung des Modells durch Materialverhalten, Belastungen und Lagerungen ist neben der Diskretisierung des Modells eine Hauptaufgabe des Preprocessing. Bei der Diskretisierung, auch Vernetzung genannt, wird das Modell mit Hilfe von Elementen in kleine Teilgebiete zerlegt. Abbildung 4-2 zeigt eine Auswahl dreidimensionaler Elementtypen, die in dem FE-Programm ABAQUS zur Verfügung stehen [Nas12].



**Abbildung 4-2:** Reguläre dreidimensionale Elementarten mit linearen und quadratischen Verschiebungsansätzen nach [Nas12]

Die Wahl des Elementtyps, der Elementgröße sowie des Verschiebungsansatzes hat erheblichen Einfluss auf die Ergebnissenauigkeit und ist daher wohlüberlegt zu treffen [RK13]. Maßgebend für die Art der Vernetzung ist die geforderte Ergebnissenauigkeit. Für das Simulationsergebnis unwichtige Bereiche können daher, genauso wie Bereiche mit geringen Spannungsgradienten, in niedriger Qualität vernetzt werden [Ste98].

Anhand des im vorherigen Schritt erstellten FE-Modells erfolgt beim **Solving** die eigentliche Berechnung des Bauteils mit Hilfe eines FE-Gleichungslösers. Dazu werden in einem ersten Schritt sog. Topologiefelder festgelegt, die den einzelnen Elementen globale Knotennummern zuweisen und dadurch die örtliche Anordnung der Elemente zueinander beschreiben. Für die jeweiligen Elemente werden daraufhin Elementsteifigkeitsmatrizen aufgestellt und anhand der Topologiefelder zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix verknüpft. Das mit Hilfe der Randbedingungen aufgestellte Gleichungssystem

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{U} = \underline{F} \quad (4.2)$$

wird reduziert und numerisch gelöst. Dabei steht  $\underline{\underline{K}}$  für die Steifigkeitsmatrix,  $\underline{U}$  für den Verschiebungsvektor und  $\underline{F}$  für den Kraftvektor der äußeren Lasten. Als Ergebnis dieser Berechnung sind die Verschiebungen eines jeden einzelnen Knotenpunktes bekannt, woraus sich zum Beispiel für ein linear-elastisches Problem mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes die Spannungen innerhalb des Elements berechnen lassen [Kle15, KW92].

Das **Postprocessing** realisiert die Aufbereitung der Ergebnisse des vorherigen Schrittes. Im Fokus steht dabei die Visualisierung der Spannungs- und Dehnungsverteilung im Bauteil durch entsprechende Farbskalen. Darüber hinaus kann das Bauteilverhalten durch die Darstellung der Verformung analysiert werden. Moderne Post-Prozessoren bieten zahlreiche weitere Funktionen [Kle15, Sch11].

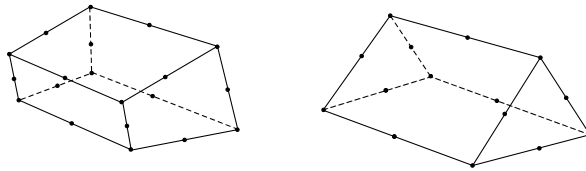
## 4.2.2 Ansätze der Finite-Elemente-Methode zur Beschreibung der Gegebenheiten an der Risssspitze

Im Zusammenhang mit der bruchmechanischen Untersuchung von Rissen ist das Ziel der FEM-Analyse die Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren an der Risssspitze, welche letztendlich die Koeffizienten der hier auftretenden Spannungssingularität sind. Die realitätsgetreue Darstellung dieser Singularität gestaltet sich bei einem Näherungsverfahren, wie der FEM, zunächst grundlegend schwierig. Daher wurden in der Vergangenheit verschiedene Vernetzungsstrategien und Techniken entwickelt, die in Abhängigkeit der gewählten Elementart eine weitgehend exakte Bestimmung der Beanspruchungsgrößen ermöglichen.

Stehen dem Anwender lediglich reguläre Elementarten, vor allem Tetraeder und Hexaeder (vgl. Abbildung 4-1), für die Bauteilvernetzung zur Verfügung, so hängt die Ergebnisgenauigkeit der zu bestimmenden Spannungsintensitätsfaktoren direkt von der Diskretisierung um die Risssspitze ab. Eine möglichst feine Vernetzung ist zu wählen, sodass die relevanten Größen innerhalb der Nahfeldlösung hinreichend genau aufgelöst werden. Die kleinste Elementgröße  $L^*$  an der Risssspitze sollte anhand der Größe des durch die Risslänge  $a$  determinierten Nahfeldes mit dem Radius  $r_K$  bestimmt werden. Erfahrungsgemäß stellt sich für  $L^* < a/100 \dots a/20$  bei  $r_K \approx a/50 \dots a/10$  eine gute Genauigkeit der Spannungsintensitätsfaktoren ein. Innerhalb dieser Richtwerte ist die Wahl der Elementgröße insbesondere von der Methode zur Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren (vgl. Kapitel 4.2.3) abhängig [Kun08].

Eine derart feine Vernetzung erhöht den Berechnungsaufwand im Rahmen einer FE-Analyse enorm. Es wurden deshalb spezielle Elemente sowie Elementanordnungen entwickelt, welche die Singularität an der Risssspitze deutlich genauer wiedergeben. Diese werden als sog. Rissspitzenelemente bezeichnet. In der ingenieurmäßigen Berechnung finden aus Gründen einer realitätsnahen Abbildung meist dreidimensionale Ansätze Verwendung. Quadratische Verschiebungsansätze sind dabei, sofern möglich, den linearen Verschiebungsansätzen vorzuziehen.

Auf die Genauigkeit der ermittelten Spannungsintensitätsfaktoren hat die Zahl der Elemente um die Risssspitze einen erheblichen Einfluss. Um hier eine Diskretisierung mit mehr als nur vier Elementen vornehmen zu können, wurden sog. entartete Hexaederelemente entwickelt. Bei diesen auf herkömmlichen Hexaederelementen basierenden Elementen ist eine Seite kollabiert, sodass drei Elementknoten an derselben Position sowie zwei Mittelknoten an einer Position befindlich sind (Abbildung 4-3). Für linear-elastische Problemstellungen sind die zusammenfallenden Knotenpunkte fest miteinander verbunden [FT76]. Geometrisch gleichen die kollabierten Hexaederelemente den Pentaederelementen (Abbildung 4-2), wobei erstere für Berechnungen im Rahmen der Bruchmechanik meist besser geeignet sind [RV07, BS89, BS92, Bar76].

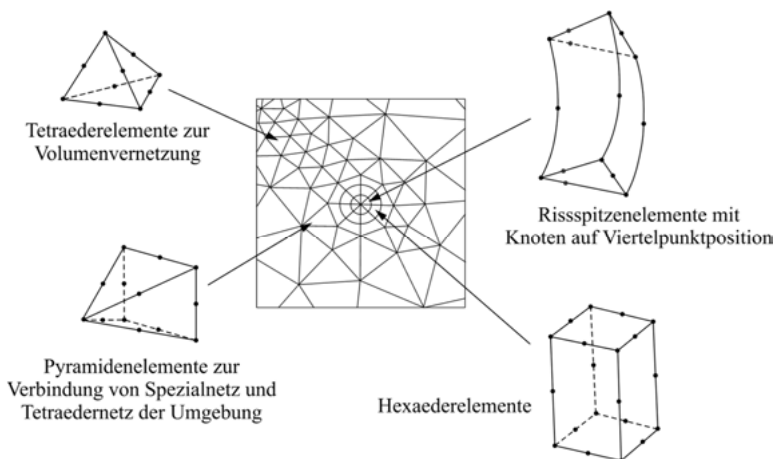


**Abbildung 4-3:** Herkömmliches und kollabiertes Hexaederelement

Die Keilelemente werden fächerförmig um die Risspitze angeordnet. Mit Hilfe von herkömmlichen Hexaederelementen werden mehrere Elementreihen derart angegliedert, dass sich eine spinnwebartige Netzstruktur um die Risspitze ergibt. Ein stetiger Übergang von sehr feiner Diskretisierung hin zu gröberer Netzeinteilung in weiterem Abstand ist somit gewährleistet, was einen positiven Effekt bei der Auswertung der FEM-Daten im Rahmen der Spannungsintensitätsfaktorermittlung zur Folge hat [Kun08, Bar76, BS89].

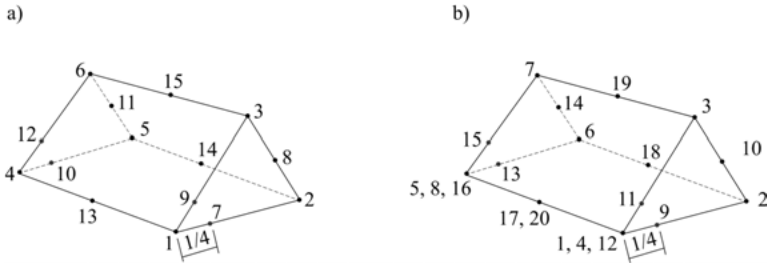
Die so entstehende Netzsituation wird auch als Spezialnetz bezeichnet. Neben der größeren Anzahl von Elementen an der Risspitze ist darüber hinaus die symmetrische Netzsituation ein entscheidender Vorteil gegenüber einer herkömmlichen wahllosen Vernetzung. Symmetrie ist für die Anwendung einiger Methoden zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung Grundvoraussetzung.

Bei komplexer Bauteilgeometrie ist eine Diskretisierung mit Tetraederelementen unabdingbar. Pyramidalelemente stellen in diesem Zusammenhang eine Möglichkeit dar, die Kompatibilität von Spezialnetz und dem Netz der verbleibenden Bauteilgeometrie herzustellen (Abbildung 4-4).



**Abbildung 4-4:** Aufbau eines Spezialnetzes um die Risspitze

Eine weitere Möglichkeit zur besseren Abbildung der  $1/\sqrt{r}$ -Singularität an der Risssspitze sind Viertelpunktelemente. Hierbei erfolgt die Modifikation isoparametrischer Elemente quadratischen Ansatzes dahingehend, dass die Lage ihrer Mittelknoten in Richtung der Risssspitze auf die Viertelposition der Elementkante verlegt wird. Die derartige Verschiebung des Mittelknotens erzeugt im Verschiebungsansatz des sog. Risssspitzelements einen  $\sqrt{r}$ -Term, der differenziert im Dehnungsverlauf eine  $1/\sqrt{r}$ -Singularität darstellt (Abbildung 4-5) [Kun08, BS89, BS92, HCZ81, Man83, Bar77].



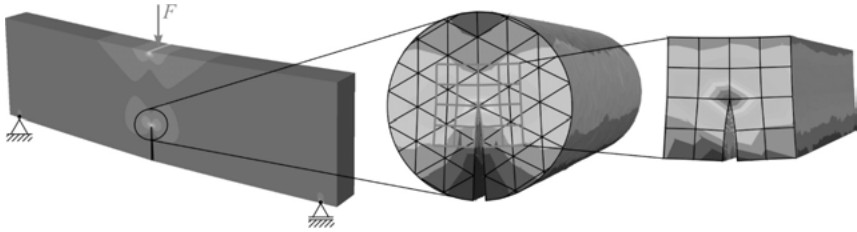
**Abbildung 4-5:** Viertelpunktelemente zur Vernetzung der Risssspitze

- a) Pentaederelement
- b) Kollabiertes Hexaederelement

In Verbindung mit den meisten Auswertungsmethoden liefern Viertelpunktelemente exaktere Ergebnisse. Vor allem in Verbindung mit dem zuvor erläuterten Spezialnetz ergeben sich weitreichende Vorteile. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass eine Mindestzahl kollabierter Hexaederelemente mit Viertelpunkt fächerförmig um die Risssspitze angeordnet ist. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass die Anzahl von acht Teilstücken zu einer optimalen Ergebnissenauigkeit führt. Ein Radius des Spezialnetzes von 10-20% der gesamten Risslänge kann unter Genauigkeitsaspekten als zielführend empfohlen werden. Bei zu erwartender Mixed-Mode-Rissbeanspruchung sind eher kleinere Werte zu wählen. Das Spezialnetz sollte im Allgemeinen aus drei Ringen gleicher Elementkantenlänge bestehen.

Bei komplexer Rissgeometrie gestaltet sich die Generierung eines Spezialnetzes abhängig von der verwendeten Vernetzungssoftware zuweilen schwierig. In diesem Fall ist eine Vernetzung durch Hexaederelemente mit Viertelpunkt zu empfehlen, auch wenn dadurch die Winkelabhängigkeit der Nahfeldlösung nicht in einer solchen Exaktheit abgebildet wird [Kun08].

Eine weitere Möglichkeit die durch die Vielzahl der Elementtypen des Spezialnetzes auftretende Komplexität der Vernetzungsalgorithmen zu reduzieren, ist die Verwendung der Submodelltechnik. Diese erlaubt die Untersuchung einzelner Teilgebiete eines FE-Modells mit einem modifizierten feineren Netz. Für das globale Netz reduziert sich die Komplexität dadurch erheblich. Geometrische Gestalt sowie Elementtypen des Submodells sind nicht vom globalen Modell abhängig, sodass hier keinerlei Beschränkungen bestehen und sich zwei eigenständige Netze ergeben (Abbildung 4-6) [Ful02].



**Abbildung 4-6:** Zusammenhang von globaler Vernetzung und Submodell an der Risspitze

Das Submodell weist die aus der Lösung des globalen Modells ermittelten Verschiebungen als äußere Randbedingungen auf. Anhand der Position der äußeren Knoten des Submodells im globalen Modell werden die entsprechenden Verschiebungswerte interpoliert. Diese Technik ist in den meisten FE-Programmen als Automatismus implementiert und ermöglicht eine an die Anforderungen der Methoden zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung ideal angepasste Netzgeometrie. Üblicherweise wird diese Vorgehensweise dann eingesetzt, wenn die Methoden besondere Anforderungen an die Netzsymmetrie um die Risspitze stellen. Davon abhängig ist auch der Einsatz linearer oder quadratischer Hexaederelemente.

Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit zeigen, dass hinsichtlich der Erzielung exakter Ergebnisse die optimale Größe des Submodells von der globalen Elementgröße abhängt. Eine allgemeingültige Formulierung lässt sich durch das Verhältnis  $q$  aus Submodellelementgröße  $l_s$  zur globalen Elementgröße  $l_G$  mit

$$q = \frac{l_s}{l_G} = 0,75 \quad (4.3)$$

ausdrücken. Ausgehend von der Risspitze führt die Anzahl von zwei Elementen in die jeweilige Richtung zur größtmöglichen Ergebnisgenauigkeit. Im Allgemeinen dürfen die Außenkanten des Submodells nicht in den am Riss liegenden globalen Elementen positioniert sein.

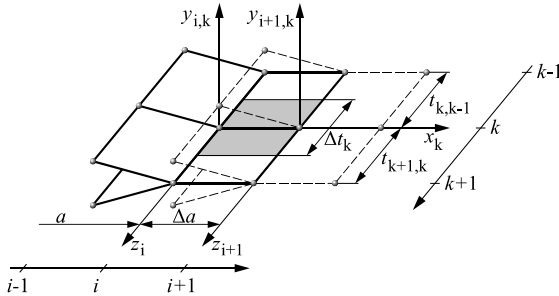
Verglichen mit dem Spezialnetz generiert die Submodelltechnik durch die grobe Risswiedergabe des globalen Modells und der damit einhergehenden Komplexitätsreduzierung der FE-Berechnung vor allem Zeitvorteile. Auch der reduzierte Vernetzungsaufwand für die Risspitze sowie die geringe Variantenvielfalt der eingesetzten Elementtypen sind vorteilhaft. Jedoch kann sich bei dieser Herangehensweise ein nicht zu vernachlässigender Fehler aufgrund der Interpolation der globalen Ergebnisse zur Bestimmung der Randbedingungen des Submodells ergeben.

### 4.2.3 Spannungsintensitätsfaktorbestimmung auf Basis der Finite-Elemente Methode

Zur Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren aus FE-Ergebnissen existiert eine Vielzahl von Verfahren unterschiedlicher Herangehensweisen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wesentliche Verfahren werden nachfolgend näher erläutert. Besonderheiten bzgl. deren Anwendung sowie spezielle Anforderungen an die Netzsituation um die Rissspitze finden darüber hinaus Beachtung.

#### 4.2.3.1 Einfaches und modifiziertes Rissschließungsintegral

Die modifizierte Rissschließungsintegralmethode (Modified Virtual Crack Closure Integral, MVCCI) beruht auf der Berechnung der Energiefreisetzungsraten  $G_I$ ,  $G_{II}$  und  $G_{III}$  für die entsprechenden Rissbeanspruchungsarten. Abbildung 4-7 zeigt die bei einer Berechnung der Energiefreisetzungsraten relevanten geometrischen Zusammenhänge [RK77].



**Abbildung 4-7:** Risserweiterung bei der modifizierten Rissschließungsintegralmethode [RS12]

Entsprechend der Notation in Abbildung 4-7 werden die Energiefreisetzungsraten, unter der Voraussetzung kleiner  $\Delta a$ , wie folgt berechnet:

$$G_I(a, \Delta t_k)_k = \frac{1}{\Delta t_k \Delta a} W_k^y \quad \text{mit } W_k^y = \frac{1}{2} \left[ F_{i,k}^y(a) \cdot \Delta u_{i-1,k}^y(a) \right] \quad (4.4),$$

$$G_{II}(a, \Delta t_k)_k = \frac{1}{\Delta t_k \Delta a} W_k^x \quad \text{mit } W_k^x = \frac{1}{2} \left[ F_{i,k}^x(a) \cdot \Delta u_{i-1,k}^x(a) \right] \quad (4.5),$$

$$G_{III}(a, \Delta t_k)_k = \frac{1}{\Delta t_k \Delta a} W_k^z \quad \text{mit } W_k^z = \frac{1}{2} \left[ F_{i,k}^z(a) \cdot \Delta u_{i-1,k}^z(a) \right] \quad (4.6).$$

Die für ein Rissschließen um die Länge  $\Delta a$  notwendigen Arbeiten  $W_k^y$ ,  $W_k^x$  und  $W_k^z$  ergeben sich aus den Knotenpunktkräften  $F_{i,k}^y$ ,  $F_{i,k}^x$  und  $F_{i,k}^z$  sowie den relativen Rissuferverschiebungen  $\Delta u_{i-1,k}^y$ ,  $\Delta u_{i-1,k}^x$  und  $\Delta u_{i-1,k}^z$ . Exakt definiert sind diese Zusammenhänge für  $\Delta a \rightarrow 0$ , liefern jedoch auch für relativ große  $\Delta a$  eine hohe Ergebnisgenauigkeit [BBI92].

Die Variable  $\Delta t_k$  definiert die effektive Elementdicke:

$$\Delta t_k = \frac{\Delta t_{k+1,k} + \Delta t_{k,k+1}}{2} \quad (4.7).$$

Aus den Energiefreisetzungsdaten ergeben sich letztlich die Spannungsintensitätsfaktoren. Unter Annahme des ebenen Verzerrungszustandes (EVZ) gilt:

$$G_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2, \quad G_{II} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2, \quad G_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (4.8).$$

Für den ebenen Spannungszustand (ESZ) gilt analog:

$$G_I = \frac{1}{E} K_I^2, \quad G_{II} = \frac{1}{E} K_{II}^2, \quad G_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (4.9).$$

Die hier beschriebene MVCCI-Methode ist lediglich für Elemente mit linearem Ansatz gültig. Bei Elementen mit quadratischem Verschiebungsansatz ist die MVCCI-Methode ebenfalls anwendbar, was jedoch wesentlich komplexere Berechnungen zur Folge hat.

Im Rahmen einer praktischen Anwendung der MVCCI-Methode ist für jeden Knotenpunkt der Rissfront ein lokales Koordinatensystem entsprechend der Vorgaben von Abbildung 4-7 zu definieren. Für einen manuellen Einsatz ohne entsprechende algorithmische Umsetzung steigt der Aufwand daher in bestimmten Situationen auf ein nicht vertretbares Maß. Insbesondere bei komplexen Bauteilen ist die Methode nur in Kombination mit einem Submodell (vgl. Abbildung 4-6) einsetzbar. Nur so lassen sich lineare Hexaederelemente mit gleicher Elementgröße vor und hinter der Risspitze ohne signifikante Abstriche bei der Genauigkeit der Simulationsergebnisse für das globale Modell realisieren. Die Bestimmung der effektiven Elementdicken für gekrümmte Rissfronten gestaltet sich aufgrund der Netzsituation schwierig. Eine universelle Verwendung zur direkten Spannungsintensitätsfaktorbestimmung aus Berechnungsergebnissen beliebiger FE-Programme ist daher nicht ohne Weiteres empfehlenswert, weshalb sich der Einsatz in der Regel auf automatisierte Rissausbreitungssimulationsprogramme, wie zum Beispiel in ADAPCRACK3D, beschränkt.

#### 4.2.3.2 $J$ -Integral

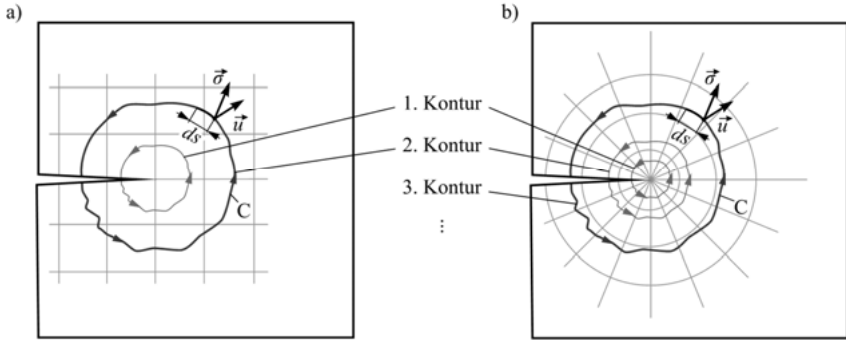
Bei der Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren mit Hilfe des  $J$ -Integrals wird ein Linienintegral mit geschlossenem Integrationsweg um die Risspitze eingeführt. [IW03] Der Wert  $J$  entspricht physikalisch der freigesetzten Energie bei Rissfortschritt und ergibt sich mit

$$J = \int_C \bar{U} dy - \vec{\sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \quad (4.10)$$

und

$$\bar{U} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (4.11).$$

$\bar{U}$  ist dabei die elastische Energiedichte,  $\vec{\sigma}$  der Spannungsvektor,  $\vec{u}$  der Verschiebungsvektor auf dem Integrationsweg  $C$  und  $ds$  die Wegkoordinate.  $\sigma_{ij}$  ist der Spannungs- und  $\varepsilon_{ij}$  der Dehnungstensor im jeweiligen Integrationspunkt (Abbildung 4-8).



**Abbildung 4-8:** Netzsituation an der Rissspitze sowie Integrationskonturen und relevante Größen des  $J$ -Integrals

- a) Vernetzung der Rissspitzenumgebung mit Hexaederelementen
- b) Spezialnetz durch Rissspitzenelemente und Spezialnetz

Bei der Anwendung des  $J$ -Integrals für den elastisch plastischen Bereich ist dieses wegunabhängig. Der Wert des  $J$ -Integrals ist für den Fall, dass Kleinbereichsfließen (LEBM) vorliegt, identisch mit der Energiefreisetzungsrate  $G$ . Es gelten die Zusammenhänge

$$J_I = \frac{K_I^2}{\bar{E}} = G_I \quad (4.12),$$

$$J_{II} = \frac{K_{II}^2}{\bar{E}} = G_{II} \quad (4.13),$$

$$J_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 = G_{III} \quad (4.14)$$

mit  $\bar{E} = E$  für den ESZ und  $\bar{E} = E/(1-\nu^2)$  für den EVZ. Das gesamte  $J$ -Integral setzt sich aus der Addition der Werte der verschiedenen Moden zusammen:

$$J = J_I + J_{II} + J_{III} \quad (4.15).$$

Für eine Mixed-Mode Beanspruchung gilt daher:

$$J = \frac{1}{\bar{E}} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (4.16).$$

Die Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren bei der Mixed-Mode-Beanspruchung aus dem  $J$ -Integral ist nicht ohne Weiteres möglich, da die einzelnen Anteile  $J_I$ ,  $J_{II}$  sowie  $J_{III}$  in dem gesamten Integralwert nicht bekannt sind [Gro09, Kun08].

Für eine möglichst robuste Spannungsintensitätsfaktorermittlung ist die Auswertung einer Mehrzahl von Konturen um die Risspitze empfehlenswert, um mehr Elemente um die Risspitze herum berücksichtigen zu können (vgl. Abbildung 4-8). Allgemein ist die Berechnung von mindestens fünf Konturen in unterschiedlichem Abstand zur Risspitze zu empfehlen. Untersuchungsergebnisse legen nahe, die der Risspitze am nächsten liegende Kontur bei der Spannungsintensitätsfaktorermittlung aufgrund der ungenauen Abbildung der Singularität zu ignorieren. Bei homogener Risspitzenvernetzung treten lediglich geringe Abweichungen zwischen den weiteren Konturen auf.

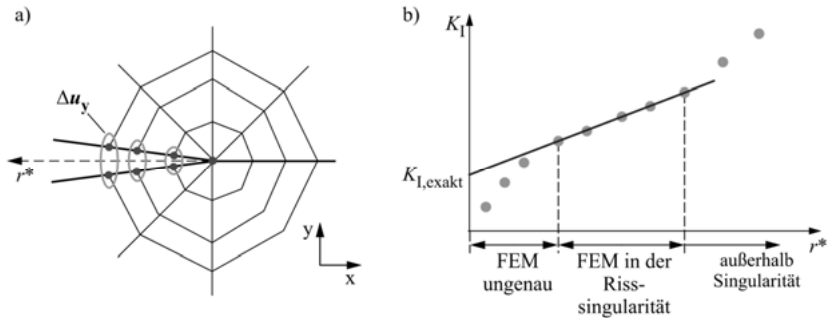
Bei Mixed-Mode-Beanspruchungszuständen wird die Zerlegung des  $J$ -Integrals in die einzelnen Moden vorgeschlagen. Bedingung hierfür ist die symmetrische Vernetzung der Risspitze, welche bei räumlichen Mixed-Mode-Situationen oft zu Problemen bei der Netzgenerierung führt. Höchste Ergebnissenauigkeit wird bei Verwendung eines Spezialnetzes an der Rissfront (vgl. Abbildung 4-4) erzielt. Allerdings bieten symmetrische Netze aus quadratischen Hexae-derelementen durchaus hinnehmbare Ergebnissenauigkeiten. Bei einer Rissbeanspruchung durch thermische Randbedingungen sind spezielle Formulierungen des  $J$ -Integrals notwendig. Die Verwendung des  $J$ -Integrals ist in der Regel nur dann effizient möglich, wenn entsprechende Algorithmen im Postprocessor des verwendeten FE-Programms implementiert sind.

#### 4.2.3.3 $M$ -Integral

Das  $M$ -Integral ist ein auf dem  $J$ -Integral basierendes Konzept des wegunabhängigen Linienintegrals. Mit Hilfe des  $M$ -Integrals können Rissprobleme in anisotropen oder aus mehreren Materialien bestehenden Bauteilen berechnet werden. Dazu wird unter der Annahme linear elastischen Materialverhaltens das  $M$ -Integral für eine Superposition der Lösungen von zwei Gleichgewichtszuständen bestimmt. Weitergehende Informationen sind in [Suo00, WCB05, RR03] zu finden.

#### 4.2.3.4 Verschiebungskorrelationsmethode

Ein weiterer Ansatz zur Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren ist die Verschiebungskorrelationsmethode. Dieses Verfahren basiert auf den Verschiebungsfeldern in der Rissumgebung. Aus den relativen Verschiebungen im numerisch exakt abgebildeten Bereich der Rissflanken lassen sich für entsprechende Knotenpunktpaare direkt Spannungsintensitätsfaktoren berechnen und auf die Risspitze extrapolieren, siehe Abbildung 4-9, [Kun08].



**Abbildung 4-9:** Anwendung der Verschiebungskorrelationsmethode nach [Kun08, RS12]  
a) Verschiebungsauswertung der Knotenpunktpaare auf den Rissflanken  
b) Extrapolation zur Ermittlung des Spannungsintensitätsfaktors

Die Spannungsintensität an der Rissfront ergibt sich durch Extrapolation aus dem Nahfeld, in dem die Rissingularität numerisch wiedergegeben werden kann. Für die einzelnen Beanspruchungsmoden gilt somit:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{array} \right\} = \lim_{r^* \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r^*}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{E}}{8} \Delta u_y(r^*) \\ \frac{\bar{E}}{8} \Delta u_x(r^*) \\ \frac{E}{8(1+\nu)} \Delta u_z(r^*) \end{array} \right\} \quad (4.17).$$

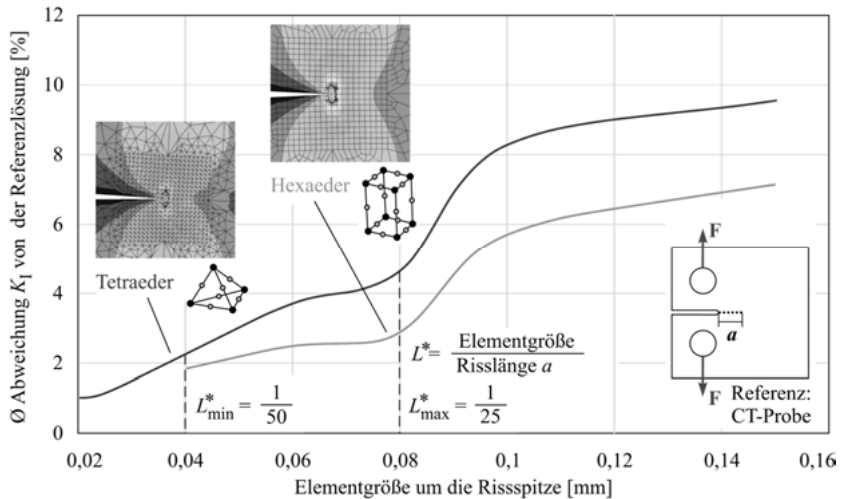
In ähnlicher Form ist diese Methode für das Spannungsfeld in der Nähe der Risspitze anwendbar. Die Ergebnisse sind im Allgemeinen jedoch ungenauer [RS12].

Die Verschiebungskorrelationsmethode gilt als die einfachste und am besten nachzuvollziehende Methode zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung. Dies liegt unter anderem an den geringen Anforderungen an die Netzsituation um die Risspitze. Es können Hexaeder- oder Tetraederelemente genutzt werden. Hierbei erlaubt vor allem die Bauteilvernetzung durch Tetraeder die Berechnung komplexer Bauteile. Vor dem Hintergrund dieser flexiblen Netzgestaltung eignet sich die Methode vor allem dann, wenn ein Spezialnetz um die Rissfront nicht generiert werden kann oder die Verwendung eines Submodells nicht praktikabel ist. Spannungsintensitätsfaktoren lassen sich so ohne Umwege aus der Bauteilgeometrie ermitteln.

Maßgeblich für die Ergebnissenauigkeit der Methode ist die Netzsituation an der Risspitze. Der Zusammenhang zwischen Netzsituation und Ergebnisabweichung wird anhand der analytischen Referenzlösung einer CT-Probe aus [Mur87] in Abbildung 4-10 verdeutlicht.

Voraussetzung für die Exaktheit der Ergebnisse ist eine ausreichend feine Diskretisierung der Rissumgebung, welche sich allgemeingültig als Verhältnis  $L^*$  von Elementgröße zur Risslänge  $a$  ausdrücken lässt. Im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Untersuchungen zeigen, dass eine Überschreitung des Wertes  $L^* = 1/25$  erhebliche Ergebnisabweichungen mit sich bringt. Darüber hinaus ist die Wahl der Extrapolationsgrenzen durch den Anwender entscheidend, was

gegebenenfalls zu Abweichungen führen kann. Weitere Informationen hierzu sind in [Kun08] zu finden.

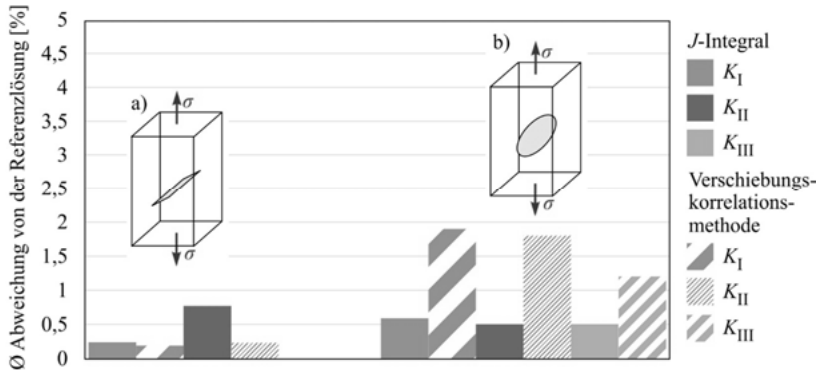


**Abbildung 4-10:** Zusammenhang zwischen Elementgrößen an der Risssspitze sowie Elementart und Ergebnissenauigkeit

Bereits vor der eigentlichen Simulation steht die Definition mehrerer Auswertungspositionen. In deren Abhängigkeit ist die Rissfläche derart zu vernetzen, dass die auszuwertenden Knotenpaare auf einem orthogonal zur Rissfront stehendem Pfad liegen. In diesem Zusammenhang ist vor allem bei schräg liegenden Rissen eine Koordinatentransformation durchzuführen, welche den Auswertungsaufwand dieser Methode deutlich erhöht. Für einen effizienten Einsatz sind daher unterstützende Softwaretools zu empfehlen.

#### 4.2.4 Untersuchungen zur Ergebnissenauigkeit

In der Praxis befinden sich Fehlstellen und Risse in der Regel in einem mehrachsigen Spannungsfeld, woraus eine Mixed-Mode-Beanspruchung resultiert. Anhand der analytischen Referenzlösung eines rechteckförmigen geneigten Durchgangsrisse und eines geneigten Penny-Shaped-Crack aus [Mur87] wurden im Rahmen dieser Arbeit die manuelle Anwendbarkeit sowie die Ergebnissenauigkeit des  $J$ -Integrals sowie der Verschiebungskorrelationsmethode untersucht. Abbildung 4-11 zeigt die durchschnittlichen Abweichungen von der Referenzlösung entlang der Rissfront. Ähnliche Ergebnisse für andere Rissproblematiken zeigt auch [Kun08].



**Abbildung 4-11:** Ergebnisgenauigkeit des  $J$ -Integrals sowie der Verschiebungskorrelationsmethode  
a) Ebener Mixed-Mode bei einem rechteckförmigen geneigten Durchgangsris  
b) Räumlicher Mixed-Mode bei einem geneigten Penny-Shaped-Crack

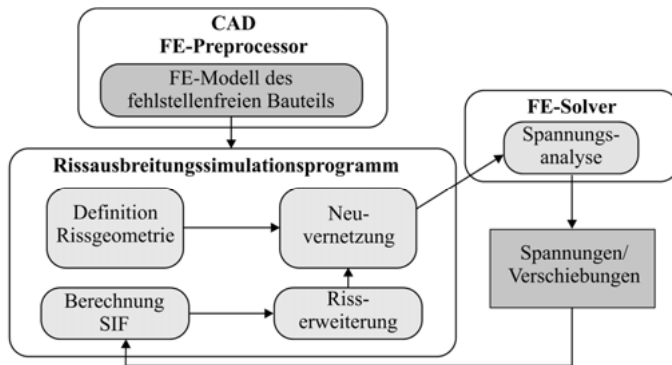
Für die ebene Mixed-Mode-Beanspruchung des rechteckförmigen geneigten Durchgangsris ergibt sich für beide Methoden eine Abweichung zur Referenzlösung kleiner als 1%. Deren Genauigkeit konnte somit validiert werden.

Die Ergebnisabweichungen des geneigten Penny-Shaped-Crack liegen für beide Verfahren leicht höher. Ergebnisse mit Fehlerwerten von unter 2% können dennoch als hinreichend robust angesehen werden.

### 4.3 Automatisierte numerische Simulation des Ermüdungsrisswachstums

Neben dem manuellen Einsatz der vorhergehend erläuterten Ansätze zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung besteht weitergehend die Möglichkeit einer Implementierung in automatisierten Rissausbreitungssimulationsprogrammen. Der Ablauf einer Rissausbreitungssimulation folgt dabei programmunabhängig einem ähnlichen Schema (Abbildung 4-12).

Derartige Programme sind eng mit herkömmlichen FE-Programmpaketen verknüpft. Neben den zuvor erläuterten Anforderungen an die Netzsituation im Bereich des Risses sind bei einer Rissausbreitungssimulation dementsprechend auch die Restriktionen und Anforderungen der FE-Programmpakete zu berücksichtigen.



**Abbildung 4-12:** Ablauf von automatisierten Rissausbreitungssimulationsprogrammen

### 4.3.1 Automatisierte Rissausbreitungssimulationsprogramme

Der nachfolgende Abschnitt gibt Überblick über eine Auswahl von Rissausbreitungssimulationsprogrammen. Eine Auflistung weiterer Programme ist in [Kun08] zu finden.

#### 4.3.1.1 Programmsystem FRANC/FAM

FRANC/FAM ist ein Computerprogramm zur Simulation von zweidimensionalem Risswachstum. Ursprünglich an der Cornell University entwickelt, wurde das Programm an der Universität Paderborn weiter vorangetrieben. Geometrieinformationen werden in Form eines FE-Netzes aus dem Programm I-DEAS übernommen. Allgemeine Randbedingungen werden in FRANC/FAM selbst aufgebracht. Neben der Rissausbreitungssimulation bietet das Programm außerdem die Möglichkeit zur Berechnung von Ort sowie benötigter Schwingungszahl der Rissinitiation. Zur bruchmechanischen Auswertung sind die Verschiebungskorrelationsmethode, das  $J$ -Integral sowie die MVCCI-Methode implementiert. Das Materialverhalten wird nach einem modifizierten Ansatz von ERDOGAN und RATWANI berücksichtigt. Vor allem die graphische Benutzeroberfläche, die damit verbundene direkte Auswertemöglichkeit der Simulationsergebnisse sowie die hohe Simulationsstabilität machen das Programm benutzerfreundlich und effizient. Darüber hinaus ist die hohe Simulationsgeschwindigkeit zu erwähnen, welche vor allem aus der kleinen Elementanzahl resultiert. Hierdurch ergeben sich jedoch auch Restriktionen bzgl. der Geometrie [RMS98].

#### 4.3.1.2 Programmsystem ADAPCRACK3D

Das an der Universität Paderborn entwickelte Programmsystem ADAPCRACK3D ermöglicht dreidimensionale Rissausbreitungssimulationen. Geometrieinformationen von Bauteil und Riss in Form eines FE-Netzes sowie Randbedingungen können aus I-DEAS oder ABAQUS eingelesen werden. Letzteres dient gleichzeitig als FE-Solver. Zur bruchmechanischen Auswertung ist die MVCCI-Methode implementiert. Das Materialverhalten wird durch die FORMAN/METTU-Gleichung berücksichtigt. Die Verwendung der Submodelltechnik gewährleistet geringe Anforderungen an die Netzsituation des globalen Modells. Vergleichsweise

kurze Berechnungszeiten sind die Folge. Eine fehlende graphische Benutzeroberfläche erfordert jedoch eine relativ hohe Einarbeitungszeit [Ful03, Sch01, FR03, FSR00].

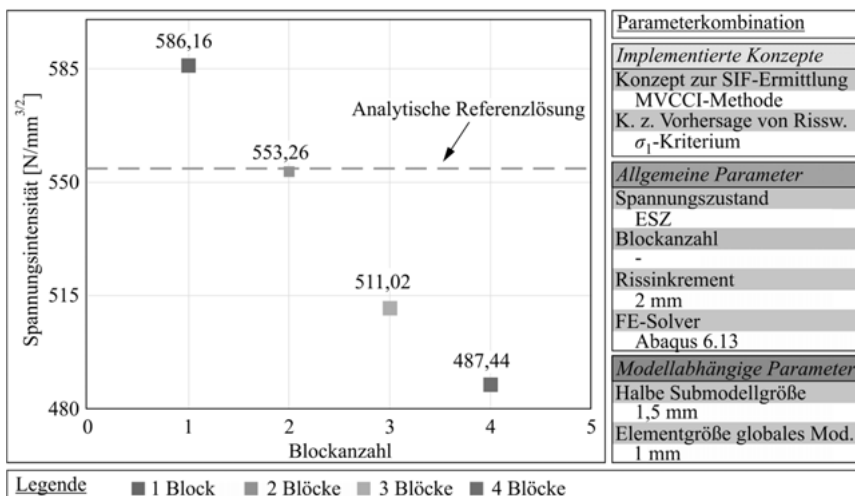
#### 4.3.1.3 Programmsystem FRANC3D

FRANC3D ist ein ursprünglich an der Cornell University entwickeltes Computerprogramm zur Simulation von dreidimensionalen Risswachstumsvorgängen. Das Programm basiert auf der FEM. Eingangsdaten sind existierende FE-Modelle aus den Programmen ABAQUS, ANSYS oder NASTRAN, die gleichzeitig auch als FE-Solver dienen. Für die bruchmechanische Auswertung wird wahlweise die Verschiebungskorrelationsmethode oder das  $M$ -Integral herangezogen. Eine Vielzahl von Risswachstumsgesetzen, u. a. für mehrachsige Beanspruchungszustände, sowie mehrere Ansätze zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens sind hinterlegt. In diesem Zusammenhang besteht die Möglichkeit einer Lebensdauerberechnung. Das Programm ist benutzerfreundlich, da eine graphische Benutzeroberfläche mit direkten Auswertemöglichkeiten vorhanden ist. Die Verwendung eines mitbewegten Spezialnetzes und die damit einhergehende sehr große Elementanzahl stellen jedoch hohe Anforderungen an die Hardwareressourcen [WC109].

#### 4.3.2 Untersuchungen zur Ergebnisgenauigkeit

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Untersuchung der Rissausbreitungssimulationsprogramme ADAPCRACK3D und FRANC3D hinsichtlich ihrer Ergebnisgenauigkeit. Die richtige Wahl der Simulationsparameter hat sich in diesem Zusammenhang als entscheidend herausgestellt. Auf eine detaillierte Diskussion der Vielzahl der Parameter, ihrer Variationsmöglichkeiten und daraus sich ergebender Parameterkombinationen wird nachfolgend verzichtet. Stellvertretend wird der Einfluss je eines wesentlichen Parameters der Programme ADAPCRACK3D und FRANC3D auf das Ergebnis diskutiert.

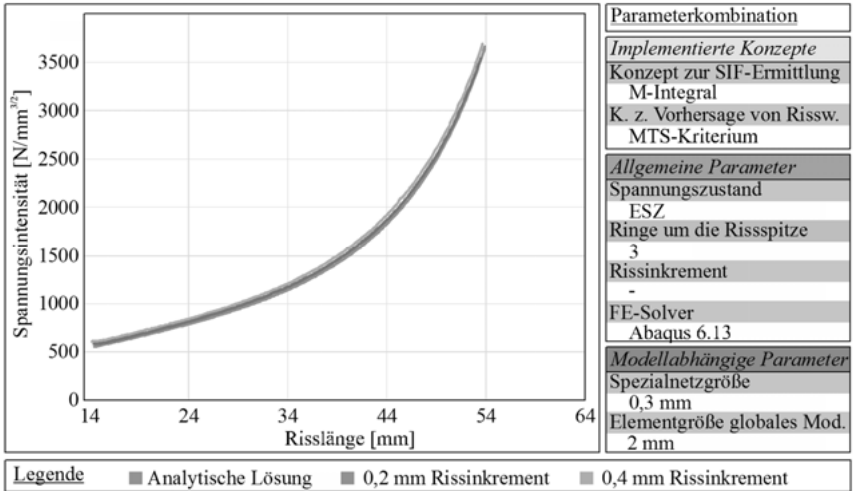
Das Programm ADAPCRACK3D verwendet zur Berechnung der Rissbeanspruchung ein sog. Submodell, welches aus einer wählbaren Anzahl von Blöcken in Form von Hexaederelementen besteht. Die Blockanzahl gibt die Anzahl der Elemente ausgehend von der Risspitze in eine Richtung an. Abbildung 4-13 zeigt den Einfluss der Blockanzahl auf die Spannungsintensität am Modell einer CT-Probe für den ersten Simulationsschritt.



**Abbildung 4-13:** Einfluss der Blockanzahl des Submodells auf die Ergebnissenauigkeit des Rissausbreitungssimulationsprogramms ADAPCRACK3D am analytischen Modell einer CT-Probe

Anhand der Simulationsergebnisse werden die erheblichen Auswirkungen der Blockanzahl auf die Ergebnissenauigkeit deutlich. Dabei hängt die Spannungsintensität  $K_{I,\max}$  umgekehrt proportional von der Blockanzahl ab. Während bei einer Anzahl von vier Blöcken die Spannungsintensität mit -12,26% Abweichung erheblich unterschätzt wird, kann bei zwei Blöcken das Ergebnis mit lediglich -0,41% Abweichung als exakt bezeichnet werden. Ähnlich starken Einfluss auf die Ergebnissenauigkeit haben vor allem die Variation der Submodellgröße sowie die globale Elementgröße und das Rissfortschrittsinkrement. Diese sind daher wohlüberlegt zu bestimmen. Weitere Informationen hierzu bietet [Ful03]. Allgemein zeigt sich das Programm ADAPCRACK3D sehr empfindlich gegenüber suboptimalen Parameterkombinationen. Abweichungen bis zu 20% von der Referenzlösung treten im Laufe der Untersuchungen auf. Weitergehende Forschungsarbeiten zeigen, dass die Implementierung von Ausgleichsfunktionen zur Glättung der Spannungsintensitätsfaktoren entlang der Rissfront Ergebnissenauigkeit und Programmstabilität erheblich steigern [DSK+16].

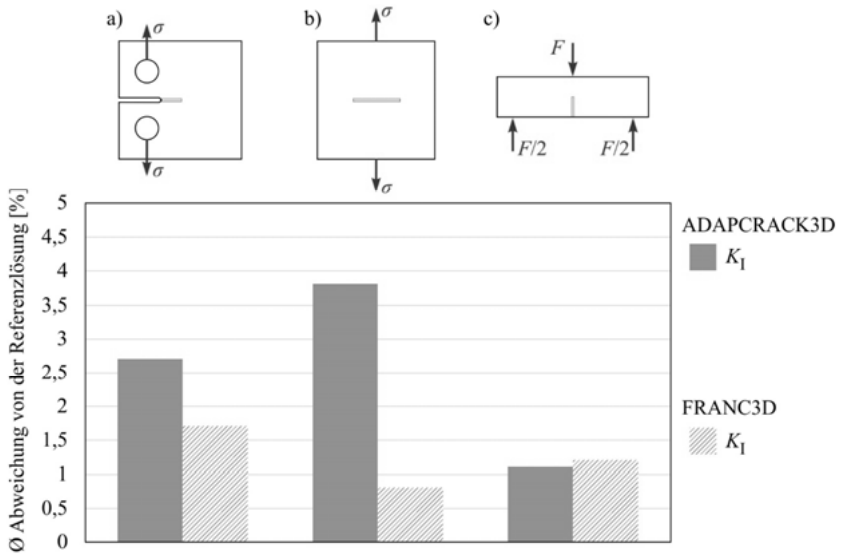
Für Rissausbreitungssimulationen mit dem Programm FRANC3D stellt die Größe des Rissfortschrittsinkrements einen entscheidenden Parameter dar. Abbildung 4-14 zeigt den Verlauf von berechneter Spannungsintensität mit Rissinkrementen von 0,2 mm sowie 0,4 mm und die Referenzlösung über die zunehmende Risslänge einer CT-Probe.



**Abbildung 4-14:** Einfluss der Größe des Rissfortschrittsinkrementes über mehrere Simulationsschritte auf die Ergebnissenauigkeit des Programms FRANC3D für das Modell einer CT-Probe

Im Rahmen der Robustheitsuntersuchung von FRANC3D zeigt sich das Programm hinsichtlich der Variation diverser Parameter vergleichsweise unempfindlich. Sowohl Simulationsstabilität als auch Ergebnissenauigkeit sind größtenteils zufriedenstellend. Diese Tatsache spiegeln auch die vorhergehend dargestellten Spannungsintensitätsfaktorverläufe wider. Im Mittel liegen bei einem Inkrement von 0,2 mm die Abweichungen zur Referenzlösung bei 2,1% und bei einem Inkrement von 0,4 mm bei 1,7%. Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang die im Vergleich zum Programm ADAPCRACK3D kleineren Werte des Rissinkrements. Simulationen mit Werten von über 0,8 mm zeigen realitätsfremd deformierte Rissfronten mit stark abweichenden Spannungsintensitätsfaktoren. Ursächlich hierfür ist die mathematische Berechnung der resultierenden Rissfrontgeometrie des nachfolgenden Berechnungsschrittes.

Die wohlüberlegte Wahl einer Parameterkombination für die Rissausbreitungssimulation mit ADAPCRACK3D oder FRANC3D ist elementar für eine zufriedenstellende Ergebnissenauigkeit. Untersuchungen einer Vielzahl von Parametervariationen und -kombinationen verdeutlichen diese Notwendigkeit. Hinsichtlich eines verlässlichen Einsatzes der Programme im weiteren Verlauf dieser Arbeit gilt es, deren Genauigkeit für verschiedene Situationen nachzuweisen. Abbildung 4-15 zeigt für drei verschiedene Modelle mit reiner Mode I-Rissbeanspruchung die durchschnittlichen Abweichungen zur Referenzlösung bei optimaler Parameterkombination.



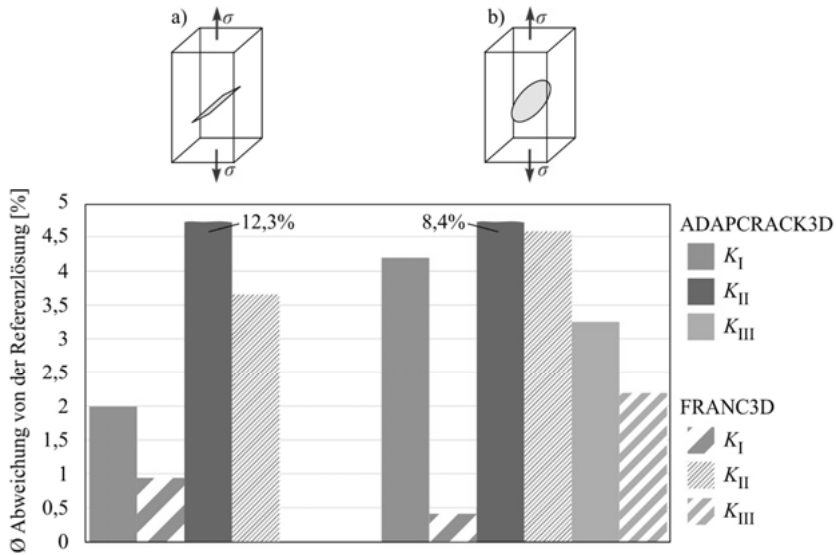
**Abbildung 4-15:** Robustheit der Rissausbreitungssimulationsprogramme ADAPCRACK3D und FRANC3D bei Mode I-Rissbeanspruchung

- a) CT-Probe
- b) Penny-Shaped-Crack
- c) Drei-Punkt-Biegeprobe

Die Ergebnisabweichungen der Programme ADAPCRACK3D und FRANC3D liegen im Bereich von wenigen Prozent. Signifikante Unterschiede zwischen den Programmen treten nur bei dem Modell eines Penny-Shaped-Cracks auf. Während FRANC3D hier um lediglich 0,8% von der analytischen Referenzlösung abweicht, liegt die Abweichung mit 3,8% bei ADAPCRACK3D signifikant höher. Die durchgeführten Untersuchungen weisen eine zufriedenstellende Ergebnissenauigkeit der für die gezeigten Mode I-Rissbeanspruchungsfälle nach. Demnach kann auf eine allgemein gute Ergebnissenauigkeit auch bei anderen Mode I-Rissproblemen geschlossen werden.

Single-Mode-Rissbeanspruchungen treten in der Realität nur selten auf. Vielfach sind Risse ebenen oder räumlichen Mixed-Mode-Beanspruchungen ausgesetzt. Die Ergebnissenauigkeit der Programme in derartigen Beanspruchungssituationen ist daher elementar. Abbildung 4-16 zeigt die Resultate der entsprechenden Robustheitsuntersuchung.

Bei den Untersuchungen zu ebener sowie räumlicher Mixed-Mode-Rissbeanspruchung ergeben sich größtenteils höhere Ergebnisabweichungen als bei den Untersuchungen zur Single-Mode-Rissbeanspruchung. Vor allem die automatisierte Berechnung von  $K_{II}$  führt zu Abweichungen von bis zu 12,3% bei ADAPCRACK3D sowie 4,6% bei FRANC3D. Mit 3,3% bei ADAPCRACK3D sowie 2,2% bei FRANC3D fallen die Abweichungen von  $K_{III}$  deutlich niedriger aus.






**Abbildung 4-16:** Robustheit der Rissausbreitungssimulationsprogramme ADAPCRACK3D und FRANC3D bei Mixed-Mode-Rissbeanspruchung  
a) Ebene Mixed-Mode bei einem rechteckförmigen geneigten Durchgangsriss  
b) Räumliche Mixed-Mode bei einem geneigten Penny-Shaped-Crack

Verglichen mit der Ergebnisgenauigkeit bei manueller Anwendung des  $J$ -Integrals sowie der Verschiebungskorrelationsmethode (vgl. Abbildung 4-11) zeigen die durch Rissausbreitungssimulationsprogramme automatisiert bestimmten Spannungsintensitätsfaktoren deutlich höhere Ergebnisabweichungen. Als Ursache hierfür kann die Netzsituation an der Rissfront identifiziert werden. Automatische Vernetzungsalgorithmen bieten nicht die Netzqualität, die bei manueller Vernetzung durch einen erfahrenen Anwender gewährleistet ist. Der Vergleich mit den Streuungen experimentell bestimmter Materialkennwerte, welche im Bereich des Threshold-Wertes in einigen Fällen bei Standardabweichungen um 20% liegen, relativiert die Abweichungen der Rissausbreitungssimulationsprogramme von den Referenzlösungen. Vor dem Hintergrund einer deutlichen Reduzierung des Arbeitsaufwands ist die Verwendung von Rissausbreitungssimulationsprogrammen, sofern möglich, zu empfehlen.

Da über die Vielzahl der durchgeführten Simulationen FRANC3D, insbesondere bei Mixed-Mode-Rissbeanspruchung, geringere Ergebnisabweichungen zeigt, wird für weitere Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit eben dieses Programm verwendet.

#### 4.4 Bewertung der Verfahren zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung in Bauteilen und Strukturen

Die untersuchten Verfahren zur Bestimmung der Rissbeanspruchung werden jeweils mit den in Kapitel 3.3 aufgestellten verglichen. Im Folgenden wird die Bewertung je Anforderung zusammengefasst. Das Ergebnis ist in Abbildung 4-17 dargestellt. Im Rahmen der Bewertung wird dabei von der vollumfänglichen bruchmechanischen Untersuchung eines komplexen Bauteils mit den Aspekten der Wachstumsfähigkeit sowie der Bestimmung von Risspfad und Restlebensdauer ausgegangen.

Bewertungsskala: voll erfüllt  teilweise erfüllt  nicht erfüllt 



















				Ansätze	
				(analytische) Lösungs- bibliotheken	Rissausbreitungs- simulations- programme
Anforderungen (A)	Produkt- entstehungs- prozess	Skalierbarkeit von Aufwand / Ergebnisgenauigkeit	A1		
		Nutzung vorhandener Spannungsdaten	A2		
	Bruchmechanische Bewertung	Berücksichtigung der Mehrachsigkeit der Spannungsfelder	A3		
		Exakte Abbildung der Rissgeometrie	A4		
		Robustheit der Ergebnisse	A5		
		Bestimmung von Risspfad und Restlebensdauer	A6		
	Anwendbarkeit	Reduzierter Rechen- und Modellierungsaufwand	A7		
		Universelle Einsetzbarkeit	A8		
		Flexibilität hinsichtlich der einzusetzenden Software	A9		

Abbildung 4-17: Bewertung der untersuchten Verfahren anhand der Anforderungen

Die manuelle Bestimmung der bruchmechanischen Kenngrößen (Kapitel 4.2.3) führt zu hoher Ergebnisgenauigkeit (Kapitel 4.2.4). Vor allem bei der Vernetzung der Rissumgebung sowie der späteren manuellen Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren entlang der Rissfront ist derart hoher Aufwand zu betreiben, dass ein alleinstehender Einsatz dieser zur Untersuchung

komplexer Bauteile aus wirtschaftlichen Aspekten nicht zu vertreten ist. Daher werden nachfolgend nur (analytische) Lösungsbibliotheken sowie automatisierte Rissausbreitungssimulationsprogramme anhand der zuvor aufgestellten Anforderungen bewertet.

**A1) Skalierbarkeit des Verhältnisses Aufwand/Ergebnisgenauigkeit:** Keines der untersuchten Verfahren erfüllt diese Anforderung in vollem Umfang. Vor allem die Nutzung von Rissausbreitungssimulationsprogrammen ist durch gleichbleibend hohen Aufwand bei der Modellerstellung gekennzeichnet. Programmbasierte Bibliotheken erfordern geringen Aufwand bei jedoch schwankender Ergebnisgenauigkeit.

**A2) Nutzung vorhandener Spannungsdaten:** Programmbasierte Bibliotheken nutzen vorhandene Spannungsdaten aus der Simulation ungerissener Bauteile und tragen so der zunehmenden Bauteilsimulation vor dem Hintergrund der Industrie 4.0 Rechnung. Die Nutzung dieser Daten bei herkömmlicher vollumfänglicher Simulation von komplexen Bauteilen mit Rissausbreitungssimulationsprogramm ist nicht möglich.

**A3) Berücksichtigung der Mehrachsigkeit der Spannungsfelder:** Rissausbreitungssimulationsprogramme bilden die Gegebenheiten am Riss und damit auch die in der Regel mehrachsigen Spannungssituationen realitätsnah ab. Die Lösungen programmbasierter Bibliotheken beruhen in der Regel auf der Nutzung der größten Hauptnormalspannung, welche in Teilen die Mehrachsigkeit des Spannungsfeldes widerspiegelt. Dennoch kann dieser Ansatz bei Mixed-Mode-Beanspruchung des Risses zu erheblichen Abweichungen (vgl. Kapitel 5.1) führen.

**A4) Exakte Abbildung der Rissgeometrie:** In der Praxis auftretende Fertigungs- und Materialfehler können verschiedenste geometrische Ausprägungen annehmen. Rissausbreitungssimulationsprogramme berücksichtigen diese Tatsache. Bibliotheken bieten zwar eine Reihe von Standardgeometrien, deren Übereinstimmung mit der Fehlstellengeometrie jedoch nicht immer gegeben ist.

**A5) Robustheit der Ergebnisse:** Grundsätzlich weisen die untersuchten Verfahren hohe Ergebnisgenauigkeiten auf. Bei der Nutzung programmbasierter Bibliotheken können dennoch gravierende Fehlbewertungen, insbesondere bei der Beurteilung der Wachstumsfähigkeit von Fehlstellen, auftreten. Diese Tatsache ist jedoch nicht der Genauigkeit der hinterlegten Lösung, sondern vielmehr der Nutzung der Hauptnormalspannung, geschuldet.

**A6) Bestimmung von Risspfad und Restlebensdauer:** Rissausbreitungssimulationsprogramme berechnen automatisiert Risspfad und Restlebensdauer und geben somit detailliert Aufschluss über das Ermüdungsrissowachstum. Die Restlebensdauer wird von Programmbibliotheken berechnet.

**A7) Reduzierter Modellierungs- und Berechnungsaufwand:** Derartiger Aufwand ist bei Programmbibliotheken auf ein Minimum reduziert. Aussagen sind innerhalb weniger Minuten möglich. Dahingegen sind für Rissausbreitungssimulationsprogramme angepasste Modelle mit erheblichem Aufwand zu generieren. Die komplexe Netzsituation in der Rissumgebung erfordert erhebliche Berechnungskapazität.

**A8) Universelle Einsetzbarkeit:** Rissausbreitungssimulationsprogramme sind in bestimmten Situationen hinsichtlich der Randbedingungen limitiert. Es existieren Einschränkungen in der Art der Belastungen sowie spezielle Anforderungen an deren Modellierung. Lösungsbibliotheken sind im Hinblick auf die Bauteilgeometrie nicht universell einsetzbar.

**A9) Flexibilität hinsichtlich der einzusetzenden Software:** Rissausbreitungssimulationsprogramme sind in der Regel auf FE-Programme angewiesen und haben entsprechende Anforderungen an diese. Die Kompatibilität zu im Unternehmen vorhandener Software bereitet daher häufig Probleme. Lösungsbibliotheken sind eigenständige Programme und auf keine weitere Software angewiesen.

Die Untersuchungen zeigen, dass vor allem Rissausbreitungssimulationsprogramme eine Vielzahl der Anforderungen erfüllen. Im Hinblick auf eine aussagekräftige und robuste bruchmechanische Bauteilbewertung können umfassende Potentiale generiert werden. Diesen stehen jedoch vor allem in den Bereichen des Produktentstehungsprozesses sowie bei der allgemeinen Anwendbarkeit wesentliche Defizite entgegen, welche negative Auswirkungen auf die Wirtschaftlichkeit und die Anwendbarkeit im betrieblichen Alltag mit sich bringen. Es besteht somit Handlungsbedarf, *effiziente bruchmechanische Herangehensweisen für eine wirtschaftliche Produktentstehung und einen sicheren Bauteilbetrieb* zu entwickeln.

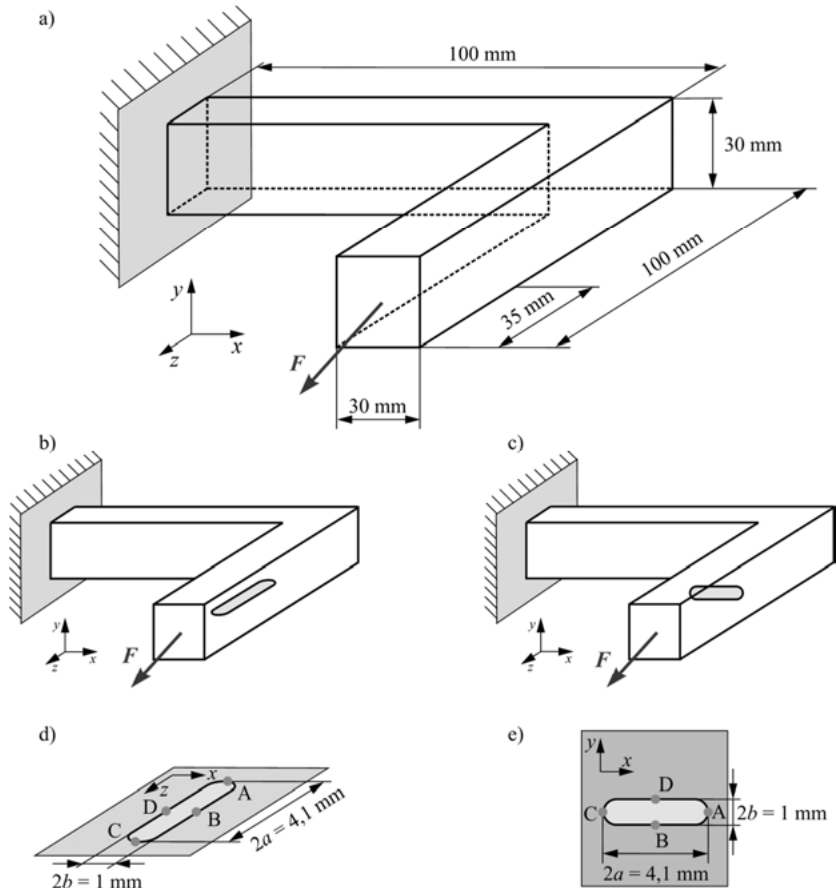
## **5 EFFIZIENTE BRUCHMECHANISCHE HERANGEHENSWEISEN FÜR PRODUKTENTSTEHUNG UND BAUTEILBETRIEB**

Die nachfolgend vorgestellten Herangehensweisen und Konzepte haben das Ziel, die bruchmechanische Bauteilbewertung bei vorhandenen Rissen durch die Reduzierung von Modellierungs- und Rechenaufwand effizient zu gestalten. Kerngedanke ist dabei die Nutzung bereits vorliegender Simulationsergebnisse in Form von mehrachsigen Spannungsfeldern aus fehlerstellenfreien Bauteilen. Der Einsatz kubischer Ersatzmodelle unterstützt hierbei den Effizienzgedanken maßgeblich. Alle Herangehensweisen setzen detektierte Risse und Fehlerstellen voraus, deren Geometrie, Lage und Position im Bauteil bekannt sind.

In Kapitel 5.1 wird zunächst das in der Literatur weit verbreitete Hauptnormalspannungskonzept erläutert. Kapitel 5.2 beschreibt die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte mehrachsige halbanalytische Herangehensweise. Die Nutzbarkeit von Schnittspannungsfeldern wird in Kapitel 5.3 erläutert. Kapitel 5.4 umfasst einen praxisorientierten Ansatz zur Verwendung parametrisierter Einflussfunktionen. Abschließend erfolgt in Kapitel 5.5 die Bewertung der einzelnen Herangehensweisen und Konzepte.

Für ein besseres Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge der Herangehensweisen werden wesentliche Charakteristika dieser anhand einer einfachen Demonstratorgeometrie erläutert. Abbildung 5-1 zeigt die Demonstratorgeometrie in Form einer abgewinkelten Rahmenstruktur mit stirnseitiger schräger Belastung.

Unabhängig voneinander werden zwei passfederförmige Fehlerstellen in verschiedenen Ebenen auszugsweise analysiert. Die mit Hilfe der Herangehensweisen und Konzepte dieses Kapitels bestimmten Spannungsintensitätsfaktoren werden zur Überprüfung der Ergebnisgenauigkeit einer Referenzlösung gegenüber gestellt. Zur Erstellung der Referenzlösung wird das Rissausbreitungssimulationsprogramm FRANC3D herangezogen. Dessen Genauigkeit ist in Kapitel 4.3.2 nachgewiesen.



**Abbildung 5-1:** Beispiel einer Rahmenstruktur zur Verdeutlichung wesentlicher Charakteristika der Herangehensweisen

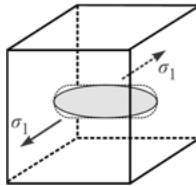
- Abmessungen der Rahmenstruktur
- Schematische Darstellung der Fehlstelle in  $x$ - $z$ -Ebene
- Schematische Darstellung der Fehlstelle in  $x$ - $y$ -Ebene
- Abmessungen und Bewertungspunkte der Fehlstelle in  $x$ - $z$ -Ebene
- Abmessungen und Bewertungspunkte der Fehlstelle in  $x$ - $y$ -Ebene

## 5.1 Hauptnormalspannungskonzept

Eine weit verbreitete Möglichkeit zur zeitsparenden Bestimmung der Rissbeanspruchung detektierter Risse ist das sog. Hauptnormalspannungskonzept. Grundlage dieses Konzepts sind in der Regel bereits vorliegende Basislösungen zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung (vgl. Kapitel 4.1).

### 5.1.1 Idee des Hauptnormalspannungskonzepts

Das Hauptnormalspannungskonzept bedient sich Strukturmodellen verfügbarer Spannungsintensitätsfaktorlösungen. Diese sind so zu wählen und anzupassen, dass die Geometriesituation in der unmittelbaren Fehlstellenumgebung sowie die Fehlstellengeometrie möglichst originalgetreu abgebildet werden. Eine möglichst große Übereinstimmung von Rissgeometrie der gewählten Basislösung und der tatsächlichen Fehlstellengeometrie ist für die Verlässlichkeit der Ergebnisse elementar. Entsprechende Basislösungen liegen allerdings nicht immer vor (Abbildung 5-2).



**Abbildung 5-2:** Annäherung der vorhandenen passfederförmigen Fehlstelle durch das Strukturmodell einer elliptischen Fehlstelle und Belastung durch die größte Hauptnormalspannung  $\sigma_1$  orthogonal zur Rissebene

Die Abmessungen des Strukturmodells orientieren sich an der Querschnittsgröße, in der sich der Fehler im Bauteil befindet. Als Eingangsdaten für die Belastung dienen örtliche Spannungen, welche bei einem fehlerfreien Bauteil in dem Bereich auftreten würden, über den sich gedanklich die Rissflanken erstrecken. Da die Spannungsintensitätsfaktoren im Wesentlichen von der Riss- und Bauteilaußenkontur und der lokalen Spannungssituation abhängen, sind derartige Vereinfachungen zulässig.

Basislösungen liegen häufig nur für einachsige Belastungssituationen vor. Das Hauptnormalspannungskonzept sieht daher eine Drehung der im Bauteil vorhandenen Fehlstellen im Rahmen der Strukturmodellierung in eine Vergleichsebene vor. Die entsprechende Ebene orientiert sich am Aufbau der Basislösungen und liegt senkrecht zur größten Hauptnormalspannung  $\sigma_1$ . Der in der Regel mehrachsige Spannungszustand im Bauteil wird somit auf eine Mode I-Rissbeanspruchung in Abhängigkeit der größten Hauptnormalspannung  $\sigma_1$  reduziert. Dieses Konzept ist unter bestimmten Voraussetzungen konservativ [FKM09].

5.1.2 Anwendbarkeit

Das Hauptnormalspannungskonzept eignet sich insbesondere aufgrund des geringen zeitlichen Aufwands für erste Abschätzungen der Rissbeanspruchung in frühen Entwicklungsphasen technischer Produkte und den damit einhergehenden unreifen Eingangsdaten. Zudem ist das Konzept alternativlos, wenn eine Simulation der Rissbeanspruchung mit Hilfe der FEM nicht möglich ist.

Unter Umständen ergeben sich bei diesem Konzept signifikante Schwankungen in der Ergebnissenauigkeit. Ursächlich hierfür ist vor allem die Wahl der Hauptnormalspannung als rissbeanspruchungsrelevante Größe. Diese repräsentiert letztlich die einzelnen Komponenten des mehrachsigen Spannungsfeldes. In Teilen werden dadurch die Mehrachsigkeit des Spannungsfeldes und der daraus resultierende Einfluss auf die Rissbeanspruchung vernachlässigt.

Die größte Hauptnormalspannung setzt sich mathematisch aus allen Komponenten des Spannungstensors zusammen. Abhängig von der Risslage sind manche Komponenten für die Rissbeanspruchung irrelevant (vgl. Kapitel 5.2.1), was in bestimmten Situationen zu einer Überschätzung (Tabelle 5.1 und Abbildung 5-3a) oder zu einer Unterschätzung (Tabelle 5.2 und Abbildung 5-3b) der Spannungsintensität führt. Das Verhältnis der Hauptnormalspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  zueinander sowie die Zusammensetzung des Spannungsfeldes können Indizien für mögliche Ergebnisabweichungen dieser Methode sein.

**Tabelle 5.1:** Spannungstensoren und die daraus bestimmten Spannungsintensitätsfaktoren für die passfederförmige Fehlstelle der  $x$ - $z$ -Ebene (vgl. Abbildung 5-1) sowie deren Abweichungen zur Referenzlösung

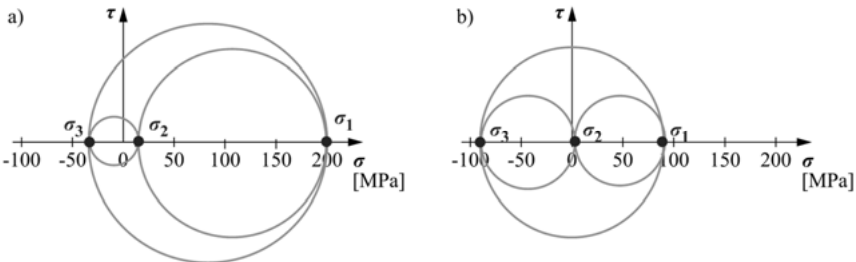
Spannungen ( $x$ - $z$ -Ebene, Auswertungspunkt A)									Hauptnormalspannungskonzept	Abweichung
[MPa]									[N/mm <sup>3/2</sup> ]	[%]
$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{zy}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$K_I$	$K_V$
2,1	-0,3	158,6	-3,1	-64,5	-57,2	196,2	3,9	-39,6	113,5	66,1

Eine Überschätzung der Spannungsintensität tritt häufig auf, wenn für die Rissbeanspruchung irrelevante Normalspannungskomponenten vergleichsweise hohe Werte im Zugbereich aufweisen und damit hohe Werte der größten Hauptnormalspannung einhergehen (Abbildung 5-3a). Im vorliegenden Beispiel ist die Spannungskomponente  $\sigma_z$  mit einem Wert von 158 MPa bestimmend für die größte Hauptspannung  $\sigma_1$ . Die Lage der untersuchten Fehlstelle hat zur Folge, dass  $\sigma_z$  jedoch keinerlei Rissbeanspruchung hervorruft. Eine deutliche Überschätzung der Spannungsintensität durch das Hauptnormalspannungskonzept um ca. 66% im Vergleich zur Vergleichsspannungsintensität der Referenzlösung ist die Folge. Unter Konservativitätsaspekten ist eine derartige Überschätzung hinnehmbar. Insbesondere die aus Gründen des Leichtbaus geforderte Reduzierung übermäßiger Konservativitäten wird dadurch jedoch konterkariert.

**Tabelle 5.2:** Spannungstensoren und die daraus bestimmten Spannungsintensitätsfaktoren für die passfederförmige Fehlstelle in  $x$ - $y$ -Ebene (vgl. Abbildung 5-1) sowie deren Abweichungen zur Referenzlösung

Spannungen ( $x$ - $y$ -Ebene, Auswertungspunkt C)									Hauptnormalspannungskonzept	Abweichung
[MPa]									[N/mm <sup>3/2</sup> ]	[%]
$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$K_I$	$K_V$
1,7	-0,4	1,0	-2,8	-62,3	-65,1	89,6	2,3	-90,1	51,8	-43,2

Die Gefahr der Unterschätzung der Spannungsintensität durch das Hauptnormalspannungskonzept besteht, wenn die nicht-rissbeanspruchungsrelevanten Tensorkomponenten vergleichsweise niedrige Werte annehmen und gleichzeitig hohe rissbeanspruchungsrelevante Schubspannungen auftreten. Die kleinste Hauptnormalspannung nimmt Werte weit negativen Bereich an. In diesem Fall ist die größte Hauptnormalspannung kleiner als die Summe der beiden rissbeanspruchungsrelevanten Schubspannungen, was eine Unterschätzung der Rissbeanspruchung zur Folge haben muss (Abbildung 5-3b). Verstärkt wird diese Unterschätzung außerdem durch die Berücksichtigung der höheren Rissempfindlichkeit (vgl. Abbildung 2-16) bei Mode II-Beanspruchung im Rahmen einer Berechnung der Vergleichsspannungsintensität (vgl. Gleichung 2.17), die durch das Hauptnormalspannungskonzept nicht abgebildet werden kann.



**Abbildung 5-3:** Hauptnormalspannungen am Riss  
a) Spannungssituation bei Überschätzung der Spannungsintensität  
b) Spannungssituation bei Unterschätzung der Spannungsintensität

Trotz möglicher Ergebnisabweichungen ist die insbesondere durch den Zeitfaktor bei der Bestimmung der Rissbeanspruchung gegebene Daseinsberechtigung des Hauptnormalspannungskonzepts hervorzuheben. Für eine erste Abschätzung der Spannungsintensität ist zu beachten, dass das Spannungsfeld keine wesentlichen Druckspannungen aufweisen darf. Darüber hinaus ist eine Drehung der Fehlstelle im Rahmen der Strukturmodellierung um mehr als 20° nicht zulässig [FKM09].

## 5.2 Mehrachsige halbanalytische Herangehensweise

Ausgangspunkt der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise sind die einzelnen Komponenten der Spannungstensoren, die aus den Simulationsergebnissen des fehlerstellenfreien

Bauteils ermittelt werden. Dazu müssen entlang der Risskontur entsprechende Bewertungspunkte durch den Anwender definiert werden. Die Risslage im Bauteil sowie die Rissgeometrie sind hierbei ausschlaggebend.

Für die Bewertungspunkte werden Spannungstensoren an dem Ort im fehlstellenfreien Bauteil ausgelesen, an dem sich gedanklich die Rissgeometrie befindet. Diese Spannungstensoren stellen auf den Außenflächen eines rissbehafteten kubischen Ersatzmodells die Randbedingungen dar. Sie sind ausschlaggebend für Art und Größe der Rissbeanspruchung, sodass sich für jeden Bewertungspunkt entlang der Risskontur ein bzgl. der Randbedingungen unterschiedliches eigenständiges Ersatzmodell ergibt (Abbildung 5-4). Die Größe des Ersatzmodells ist so zu wählen, dass der Riss verhältnismäßig klein hierzu ist.

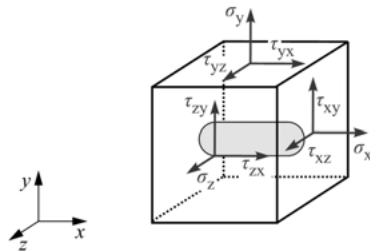


Abbildung 5-4: Kubisches Ersatzmodell mit Fehlstelle und mehrachsigen Spannungsfeld

5.2.1 Rissbeanspruchungsrelevante Komponenten des mehrachsigen Spannungsfeldes

Die Idee der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise besteht aus der Superposition der einzelnen Komponenten des Spannungstensors am Ersatzmodell zur Gesamtlösung, um die Auswirkungen dieser auf die Rissbeanspruchung identifizieren zu können. Alle durch die einzelnen Tensorkomponenten bestimmten Teillösungen setzen sich schließlich zu einer Gesamtlösung zusammen, die äquivalent zur ursprünglichen Rissbeanspruchung ist (Abbildung 5-5).

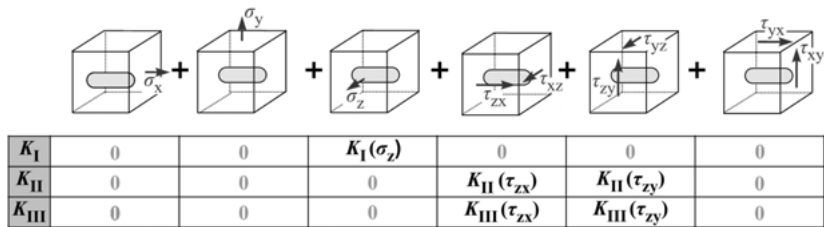


Abbildung 5-5: Superposition des mehrachsigen Spannungsfeldes zur Identifikation rissbeanspruchungsrelevanter Tensorkomponenten

Sofern eine Koordinatenachse orthogonal zu einer ebenen Rissfläche steht, identifiziert die Analyse der so entstehenden Teillösungen lediglich drei Tensorkomponenten als rissbeanspru-

chungsrelevante Größen. Es gilt allgemein, dass die senkrecht zum Riss liegende Normalspannung eine Mode I-Beanspruchung hervorruft sowie die Schubspannungen mit Schnittebene durch die Rissfläche jeweils für Mode II- und Mode III-Beanspruchungen verantwortlich sind (Tabelle 5.3). Die entsprechende Ausrichtung des Koordinatensystems sowie die Ausgabe der Spannungsdaten in dessen Abhängigkeit kann dank moderner Post-Prozessoren effizient realisiert werden.

**Tabelle 5.3:** Relevante Spannungskomponenten in Abhängigkeit der Fehlstellenlage

Koordinatenachse senkrecht zur Rissfläche	Rissbeanspruchungsrelevante Spannungskomponenten
x-Achse	$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$
y-Achse	$\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$
z-Achse	$\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$

5.2.2 Idee der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise

Der prinzipielle Ablauf der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise gliedert sich in vier Schritte. Die *numerische Simulation der Fehlstellenbeanspruchung* sowie die *Berechnung der Basislösung* sind einmalig durchzuführen und basieren auf numerischen Simulationen. Die *analytische Bestimmung der Rissbeanspruchung für weitere Spannungssituationen* sowie die *bruchmechanische Bewertung* sind in Abhängigkeit von der Anzahl der zu untersuchenden Lastfälle sowie der Zahl von Bewertungspunkten mehrmalig zu durchlaufen. Die Bearbeitung dieser Schritte erfolgt ohne Durchführung weiterer Simulationen. Die einzelnen Schritte werden beispielhaft in Abbildung 5-6 gezeigt.

**Numerische Simulation der Fehlstellenbeanspruchung:** Den Ausgangspunkt dieses Schrittes bilden die Rissgeometrie sowie die Risslänge des zu untersuchenden Risses, die in einem kubischen Ersatzmodell abgebildet werden. Randbedingungen sind die rissbeanspruchungsrelevanten Komponenten  $\sigma_{B,z}$ ,  $\tau_{B,zx}$  und  $\tau_{B,zy}$  eines Basistensors, die zunächst beliebige, gleichzeitig jedoch realitätsnahe Werte annehmen können. Dadurch entstehen letztlich drei eigenständige FE-Modelle, für die mit Hilfe der in Kapitel 4.2 und Kapitel 4.3 erläuterten Methoden Spannungsintensitätsfaktoren entlang der Rissfront berechnet werden. Für den Fall einer nicht-automatisierten Spannungsintensitätsfaktorbestimmung sind die Werte mindestens an den zuvor definierten Bewertungspunkten zu berechnen.

**Berechnung der Basislösung:** Die durch die jeweiligen rissbeanspruchungsrelevanten Spannungskomponenten des Basistensors determinierten Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{I,B,z}$ ,  $K_{II,B,zx}$ ,  $K_{III,B,zx}$ ,  $K_{II,B,zy}$  und  $K_{III,B,zy}$  sind Grundlage zur Berechnung der Basislösung. Da für jede Spannungskomponente ein eigenständiges Modell berechnet wird, sind die Spannungsintensitätsfaktoren diesen direkt zuordenbar. Durch Umstellen der Gleichungen 2.11 und Einsetzen der bekannten Werte werden Geometriefaktoren ermittelt. Entlang der Rissfront rufen die beiden rissbeanspruchungsrelevanten Schubspannungen sowohl Mode II als auch Mode III hervor, wodurch sich zusammen mit der für Mode I maßgeblichen Normalspannung letztlich fünf un-

abhängige Geometriefaktoren  $Y_{I,z}$ ,  $Y_{II,zx}$ ,  $Y_{III,zx}$ ,  $Y_{II,zy}$  und  $Y_{III,zy}$  ergeben. Diese drücken den Einfluss der jeweiligen Spannungskomponente auf die Rissbeanspruchung allgemeingültig und unabhängig von der Höhe der Basisspannung aus.

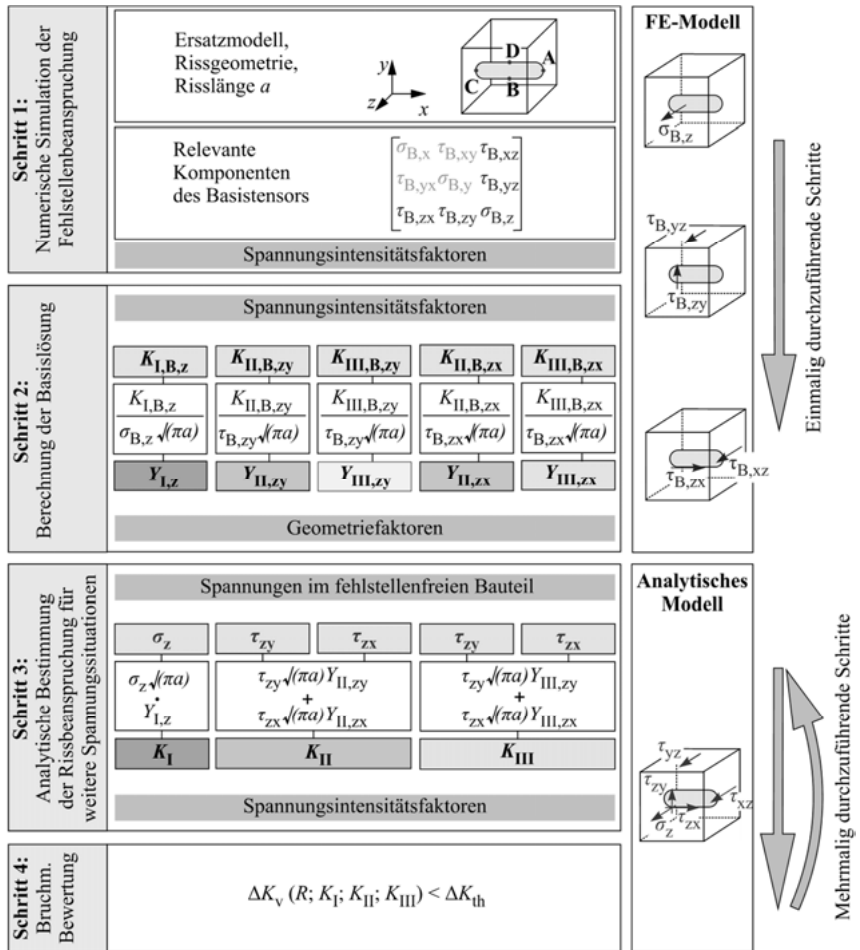


Abbildung 5-6: Ablauf der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise

**Analytische Bestimmung der Rissbeanspruchung für weitere Spannungssituationen:** In diesem Schritt kann mit Hilfe der zuvor erstellten Basislösung ohne weitere numerische Berechnung die Rissbeanspruchung für verschiedene Lastfälle analytisch bestimmt werden. Grundlage dazu sind die aus dem fehlstellenfreien Bauteil am gedanklichen Ort des Risses für die Bewertungspunkte ausgelesenen Spannungstensoren. Dazu sind die Spannungskomponenten mit den zuvor ermittelten Geometriefaktoren der Basislösung nach den Gleichungen 2.11

zu multiplizieren. Auf die Spannungsintensitätsfaktoren bei Mode II und Mode III haben beide rissbeanspruchungsrelevante Schubspannungen Einfluss. Die Gesamtlösung setzt sich in den jeweiligen Moden aus der Summe der Spannungsintensitätsfaktoren entsprechend zusammen.

**Bruchmechanische Bewertung:** Ziel dieses Arbeitsschrittes ist die Aussage über die Ausbreitungsfähigkeit der untersuchten Fehlstelle. Hierfür sind die experimentell zu ermittelnden Materialkennwerte, insbesondere Risszähigkeit und Thresholdwert, sowie die Rissbeanspruchung und das  $R$ -Verhältnis ausschlaggebend.

### 5.2.3 Anwendbarkeit

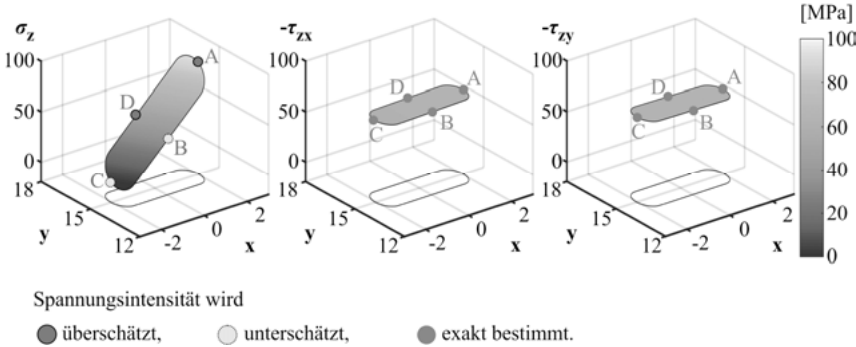
Bei der bruchmechanischen Bewertung fehlerstellenbehafteter Bauteile verspricht die mehrachsige halbanalytische Herangehensweise umfassende Zeitersparnisse. Vorhandene Spannungsdaten werden genutzt und die Mehrachsigkeit des rissbeanspruchungsrelevanten Spannungsfeldes findet Berücksichtigung. Gegenüber der Bestimmung der Rissbeanspruchung in herkömmlichen Bauteilmodellen ergibt sich bereits während der Berechnung der Basislösung durch die vereinfachte Geometrie des Ersatzmodells eine erhebliche Einsparung bei Modellierungsaufwand sowie Rechenzeit und -kapazität. Im Rahmen der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise erfordern diese ersten zwei, einmalig durchzuführenden, Arbeitsschritte den größten Arbeitsaufwand. Insbesondere durch die Einbindung geeigneter Kalkulationsprogramme (vgl. Kapitel 5.6) lässt sich anhand der Basislösung die Rissbeanspruchung für weitere Spannungssituationen besonders zeitsparend bestimmen. In diesem Zusammenhang ist die ideale Einsetzbarkeit für die Untersuchung von Bauteilen, die einer Vielzahl verschiedener Lastfälle ausgesetzt sind, hervorzuheben.

Die mehrachsige halbanalytische Herangehensweise basiert letztlich auf einer geometrischen Vereinfachung der Rissumgebung sowie einer idealisierten homogenen Spannungsverteilung im kubischen Ersatzmodell. Einbußen der Ergebnisqualität können durch derartige Annahmen begründet sein. Der ingenieurmäßige Einsatz dieser Methode erfordert daher Kenntnisse über den Zusammenhang von Ergebnisgenauigkeit und Inhomogenität des rissbeanspruchungsrelevanten Spannungsfeldes im fehlerstellenfreien Bauteil. Tabelle 5.4 zeigt die relevanten Spannungen des fehlerstellenfreien Bauteils, die mit der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise bestimmte Rissbeanspruchung sowie deren Abweichung zur Referenzlösung.

**Tabelle 5.4:** Spannungstensoren und die daraus bestimmten Spannungsintensitätsfaktoren (SIF) für die passfederförmige Fehlstelle in x-y-Ebene (vgl. Abbildung 5-1) sowie deren Abweichungen zur Referenzlösung

		Spannungen im fehlstellenfreien Bauteil			SIF der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise				Abweichungen zur Referenzlösung			
		[MPa]			[N/mm <sup>3/2</sup> ]				[%]			
		$\sigma_z$	$\tau_{zx}$	$\tau_{zy}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	$K_V$	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	$K_V$
Position	A	89,5	-63,4	-64,1	77,8	65,5	43,0	134,3	5,3	0,2	-0,9	2,0
	B	34,4	-64,3	-64,3	42,2	76,7	-76,2	139,9	-13,3	-0,6	0,0	-3,0
	C	1,0	-62,3	-65,1	0,9	-65,8	-42,7	87,6	-83,4	-2,5	1,6	-4,0
	D	55,9	-64,0	-64,2	68,8	-76,8	75,9	156,1	8,5	-0,6	-0,3	1,9

Die Analyse der Ergebnisse zeigt eine Abweichung der Spannungsintensitätsfaktoren von der Referenzlösung von unter 3% für die Moden II und III. Für den Mode I ergibt sich, eine signifikant hohe Spannungsintensität vorausgesetzt, die Unterschätzung der Spannungsintensität von bis zu ca. 13%. Die Ursache für derartige Unterschiede in der Ergebnissenauigkeit liegt in der Verteilung der Spannungen aus dem fehlstellenfreien Bauteil entlang der Rissgeometrie (Abbildung 5-7).



**Abbildung 5-7:** Spannungsverteilung im fehlstellenfreien Bauteil entlang der Rissgeometrie und deren Auswirkung auf die Ergebnissenauigkeit der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise

Die mehrachsige halbanalytische Herangehensweise geht vereinfachend von einer homogenen Spannungsverteilung im Ersatzmodell aus, welche lediglich für den jeweiligen Bewertungspunkt Gültigkeit besitzt. Die Visualisierung des Spannungsfeldes macht deutlich, dass die Ergebnisabweichung bei Mode I aus dem inhomogenen Normalspannungsverlauf über die Rissfläche resultiert. Bei inhomogener Spannungsverteilung wird bei gegenüberliegenden Bewertungspunktpaaren die Spannungsintensität am Punkt mit niedrigerer Spannung unterschätzt. Am Punkt mit höherer Spannung tritt eine im Vergleich zur Referenzlösung dementsprechend überschätzte Spannungsintensität auf.

Bei stark inhomogenen Spannungsfeldern kann die mehrachsige halbanalytische Herangehensweise zu Abweichungen führen. Dennoch ist diese Methode insbesondere in frühen Entwicklungsphasen mit unreifen Eingangsdaten als hinreichend robust bzgl. der Ergebnisgenauigkeit zu bezeichnen. Die bedeutenden Einsparungen von Aufwand und Bearbeitungszeit überwiegen eventuelle Unsicherheiten bei der Höhe der Spannungsintensitätsfaktoren deutlich.

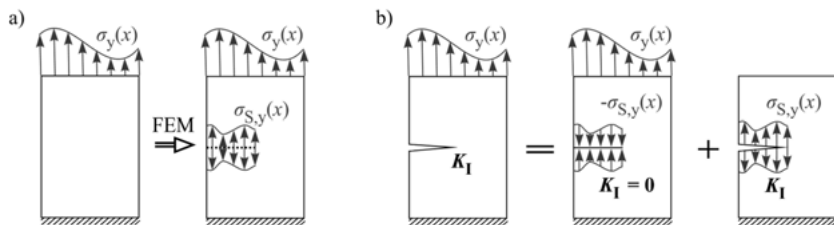
Darüber hinaus sind Rissbeanspruchung und Materialbeanspruchbarkeit bei jeder bruchmechanischen Bewertung gegenüber zu stellen. Bereits die experimentelle Bestimmung der Thresholdwerte ergibt nicht selten Schwankungen von bis zu 20% innerhalb einer Versuchsreihe. Entsprechende Konservativitätsfaktoren, welche unter anderem mögliche Abweichungen der hier beschriebenen Herangehensweise ansetzen, sind daher bei jeder bruchmechanischen Bewertung auf Basis unreifer Daten zu berücksichtigen.

### 5.3 Konzept der Schnittspannungsfelder

Während die mehrachsige halbanalytische Herangehensweise von Spannungen an einzelnen Bewertungspunkten ausgeht und für den Fall deutlich inhomogener Spannungsverteilungen damit Ergebnisgenauigkeiten einhergehen, bezieht das Konzept der Schnittspannungsfelder derartige Inhomogenität mit ein. Die mathematische Beschreibung der rissbeanspruchungsrelevanten Schnittspannungsverläufe des fehlstellenfreien Bauteils am Ort der Fehlstelle bildet den Kern dieses Konzepts.

#### 5.3.1 Idee des Konzepts der Schnittspannungsfelder

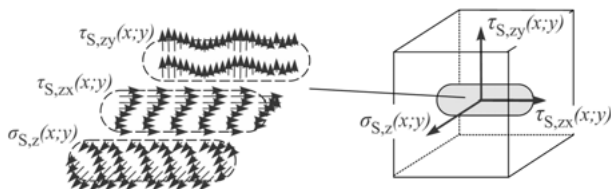
Die rissbeanspruchungsrelevanten Schnittspannungsverläufe ergeben sich direkt aus den Simulationsdaten des fehlstellenfreien Bauteils. Dazu werden die Spannungen an einer Mehrzahl von Punkten in dem Bereich ausgewertet, über den sich gedanklich die Rissfläche erstreckt (Abbildung 5-8a). Mit Hilfe multivariabler Ansatzfunktionen können die so ermittelten Schnittspannungsfelder approximiert werden. In der Regel haben derartige Funktionen einen linearen oder quadratischen Ansatz und sind von zwei Variablen abhängig. Diese Variablen repräsentieren das Koordinatensystem, in dessen Abhängigkeit die Schnittspannungen angegeben werden (siehe Gleichung 5.1). Als Koordinatenursprung empfiehlt sich bei Anwendung dieser Methode der geometrische Mittelpunkt der zu initiiierenden Rissfläche, wobei auch hier eine Koordinatenachse senkrecht auf der Rissfläche stehen sollte. Der bruchmechanische Nutzen der Schnittspannungsfelder kann mit Hilfe des Superpositionsprinzips deutlich gemacht werden (Abbildung 5-8b).



**Abbildung 5-8:** Nutzung von Schnittspannungsfeldern in der Bruchmechanik  
a) Bestimmung der Schnittspannungsfelder aus dem fehlstellenfreien Bauteil  
b) Superposition der Schnittspannungsfelder zur Gesamtlösung

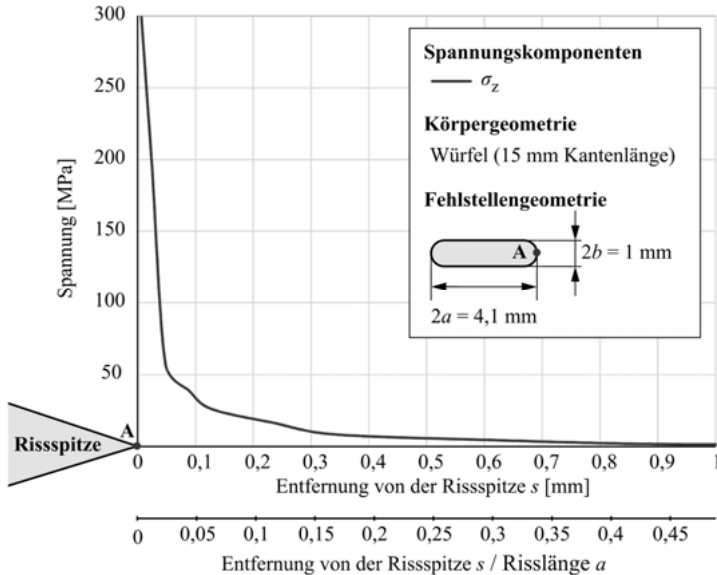
Das Superpositionsprinzip, welches im Rahmen der LEBM Anwendung findet, postuliert die Zusammensetzung von Teillösungen unterschiedlicher Randwerte zu einer Gesamtlösung, welches dem Ausgangsproblem entspricht. Klassischerweise wird das Ausgangsproblem durch einen Riss im Bauteil, welches einer äußeren Belastung unterliegt, beschrieben. In diesem Fall setzt sich die Lösung des Gesamtproblems aus zwei Teillösungen zusammen. Die erste Teillösung besteht aus einem durch äußere Randbedingungen belasteten Bauteil mit Riss. An den Rissufern greifen die zuvor im fehlstellenfreien Bauteil ermittelten Schnittspannungen mit entgegengesetztem Vorzeichen an, so dass der Riss geschlossen bleibt. Für den Fall einachsiger Belastung ergibt sich somit  $K_I = 0$ . Bei der zweiten Teillösung greifen die Schnittspannungen an den Rissufern vorzeichenrichtig an. Gleichzeitig sind am Bauteil keine äußeren Belastungen vorhanden. Die dadurch entstehende Rissbeanspruchung ist identisch zu der des Ausgangsproblems. Auf diese Weise können beliebige Bauteilbelastungen, u. a. auch Massenkkräfte oder Temperaturlasten, in eine äquivalente Rissuferbelastung umgewandelt werden. Den Schnittspannungen sind alle äußeren Bauteilbelastungen inhärent. Daher ermöglichen die aus fehlstellenfreien Bauteilen ausgewerteten Schnittspannungsverläufe eine vereinfachte Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren [And17].

Das hier für den Mode I-Fall dargestellte Konzept ist leicht auf Mixed-Mode-Situationen und die damit verbundenen mehrachsigen Spannungsfelder erweiterbar. Dazu werden die rissbeanspruchungsrelevanten Schnittspannungskomponenten (vgl. Kapitel 5.2.1) entsprechend analysiert und mathematisch beschrieben. Bei Variante I des Konzepts der Schnittspannungsfelder erfolgt die Belastung der Rissufer durch die rissbeanspruchungsrelevanten Schnittspannungen im Ersatzmodell (Abbildung 5-9).



**Abbildung 5-9:** Konzept der Schnittspannungsfelder im kubischen Ersatzmodell (Variante I)

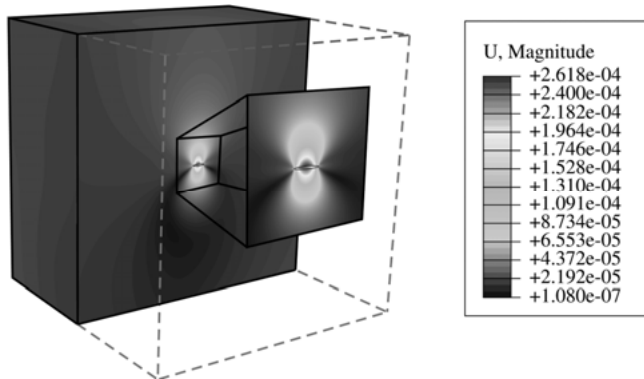
Bei der Berechnung der Rissbeanspruchung im Ersatzmodell sind die Komplexitätsreduzierung sowie die Verkürzung der Rechenzeit vorteilhaft. Eine im Hinblick auf die Ergebnissenauigkeit dieses Konzepts wesentliche Rolle spielt die Mindestgröße des Ersatzmodells im Verhältnis zur Risslänge. Die Kantenlänge des Ersatzmodells ist dabei so zu wählen, dass die Spannungen deutlich vor Erreichen der Außenkanten des kubischen Ersatzmodells abgebaut sind (Abbildung 5-10). Dadurch lässt sich ein möglichst geringer Einfluss der geometrischen Vereinfachung der Rissumgebung auf die Ergebnissenauigkeit sicherstellen.



**Abbildung 5-10:** Spannungsabfall mit zunehmender Entfernung von der Rissspitze für verschiedene Kantenlängen des kubischen Ersatzmodells

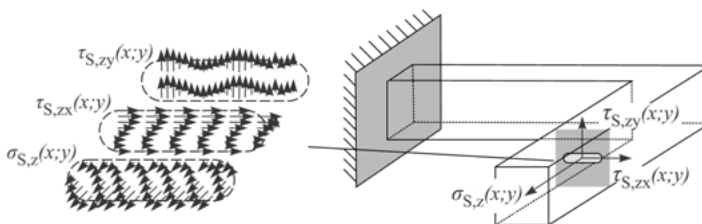
Die Analyse der Spannungsverteilungen im Ersatzmodell zeigt einen signifikanten Abfall mit zunehmender Entfernung von der Rissspitze. Dabei ist die Größe des Ersatzmodells zunächst ohne Einfluss auf den Verlauf des Spannungsabfalls, wie die Untersuchung eines Modells mit 15 mm Kantenlänge ergibt. Die rissbeanspruchungsrelevanten Spannungen im Bauteil sind bereits bei einem Wert des Verhältnisses der Entfernung von der Rissspitze zur Risslänge von ca. 0,5 vollständig abgebaut. Dieser Wert sollte als Mindestmaß für die Dimensionierung des Ersatzmodells berücksichtigt werden.

Bei dem vorliegenden Konzept empfiehlt sich die Verschiebungskorrelationsmethode (vgl. Kapitel 4.2.3.4) zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung. Die Analyse des Verschiebungsfeldes im Ersatzmodell zeigt dessen lediglich lokale Bedeutung (Abbildung 5-11). Bei hinreichender Ersatzmodellgröße ist daher von einer guten Ergebnissenauigkeit auszugehen.



**Abbildung 5-11:** Verschiebungen in Folge von Schnittspannungen auf den Rissflanken in direkter Rissumgebung

Bei Variante II des Konzepts der Schnittspannungsfelder werden die Schnittspannungen auf die Rissufer eines in der ursprünglichen Bauteilgeometrie modellierten Risses aufgebracht (Abbildung 5-12). Die Spannungsintensitätsfaktorlösung ist dabei identisch zu der des Ausgangsproblems. Variante II ist vor allem bei komplexer Bauteilgeometrie und damit einhergehenden Geometrieinflüssen durch die Rissumgebung heranzuziehen. Trotz Betrachtung der vollständigen Ausgangsgeometrie reduziert sich insbesondere bei komplexen Randbedingungen der Modellierungsaufwand, da diese in den vergleichsweise leicht zu modellierenden Schnittspannungen bereits enthalten sind.



**Abbildung 5-12:** Konzept der Schnittspannungsfelder in der Bauteilgeometrie (Variante II)

### 5.3.2 Anwendbarkeit

Bei der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise treten bei Mode I Ergebnisabweichungen aufgrund der inhomogenen Spannungsverteilung  $\sigma_z$  auf. Insbesondere bei inhomogenen Spannungsverteilungen im Bereich der Rissgeometrie ist dagegen das Konzept der Schnittspannungsfelder geeignet. Nachfolgend wird Variante I näher betrachtet. Variante II wird hier nicht näher untersucht, da deren Spannungsintensitätsfaktorlösung äquivalent zum Ausgangsproblem ist (vgl. Abbildung 5-9).

Basis des Konzepts ist die mathematische Beschreibung der Schnittspannungen entlang der Rissgeometrie. In diesem Fall gilt:

$$\sigma_{S,z}(x; y) = 45,25 + 21,58 \cdot x - 21,52 \cdot y$$

(5.1).

Das vorliegende Konzept führt durch die Beachtung der Inhomogenität des Spannungsfeldes zu einer deutlich gesteigerten Ergebnisqualität. Trotz der erheblichen Geometrievereinfachung ergeben sich Abweichungen von der Referenzlösung unter 2% (Tabelle 5.5).

**Tabelle 5.5:** Ergebnissenauigkeit des Konzepts der Schnittspannungsfelder bei Nutzung des Ersatzmodells

		Konzept der Schnittspannungsfelder Variante I	Abweichung zur Referenzlösung
		[N/mm <sup>3/2</sup> ]	[%]
		<i>K<sub>I</sub></i>	<i>K<sub>I</sub></i>
Position	A	73,3	-0,8
	B	48,3	-0,8
	C	5,3	1,9
	D	62,9	-0,8

Für jede Belastungssituation ist bei diesem Konzept eine gesonderte Simulation und damit einhergehend die Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren durchzuführen. Insbesondere bei einer Vielzahl von Lastfällen spiegelt sich diese Tatsache in einem deutlich gesteigerten Aufwand wider. Das Konzept der Schnittspannungsfelder eignet sich daher vor allem für einen Einsatz bei inhomogener Spannungsverteilung in späten Phasen der Produktentstehung, wenn Eingangsdaten guter Qualität vorliegen und Ergebnisse hoher Güte gefragt sind.

5.4 Konzept der parametrisierten Einflussfunktionen

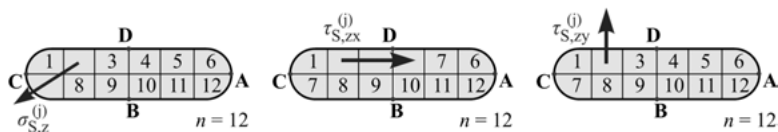
Im vorhergehenden Abschnitt wird das Konzept der Schnittspannungsfelder vorgestellt. Das Konzept der parametrisierten Einflussfunktionen baut auf diesem auf und ist vor allem bei einer Vielzahl unterschiedlicher Lastfälle in Verbindung mit im Bereich der Rissfläche erheblicher Inhomogenität des Spannungsfeldes ein vielversprechender Ansatz. Prinzipiell beruht das hier vorgestellte Konzept auf dem für Mode I bereits bekannten Ansatz der Einflussfunktionen [Kun08, BBF07, Var 98, WAR98, AP84, Par 82]. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine praxisorientierte Herangehensweise bei mehrachsiger Rissbeanspruchung eingeführt, die den erforderlichen Aufwand auf ein Minimum reduziert.

5.4.1 Idee des Konzept der parametrisierten Einflussfunktionen

Die Anwendung des Konzepts der parametrisierten Einflussfunktionen gliedert sich in vier grundlegende Teilschritte. Die *Numerische Simulation der Fehlstellenbeanspruchung infolge partieller Belastung* und die *Berechnung der Einflussfunktionen aller Teilgebiete* sind einmalig

durchzuführende Schritte und basieren auf numerischen Simulationen. Die *analytische Bestimmung der Rissbeanspruchung für weitere Spannungssituationen* sowie die *bruchmechanische Bewertung* werden in Abhängigkeit der zu untersuchenden Lastfälle mehrmals durchlaufen. Den Aufbau des Konzepts sowie den Arbeitsinhalt der einzelnen Schritte zeigt Abbildung 5-15.

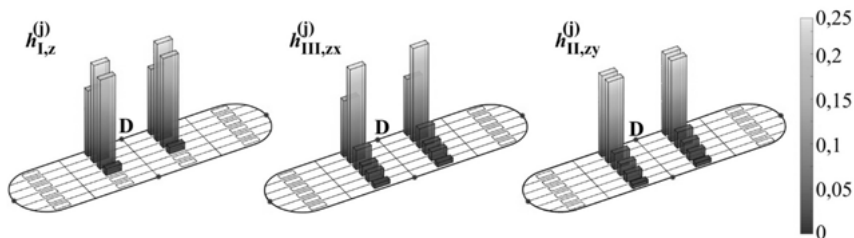
**Numerische Simulation der Fehlstellenbeanspruchung infolge partieller Belastung:** In diesem ersten Teilschritt wird die Rissbeanspruchung an den Bewertungspunkten in Folge einer rissbeanspruchungsrelevanten Basisschnittspannung in einem definierten Teilgebiet der Rissgeometrie berechnet. Ausgangspunkt dafür ist die zu untersuchende Rissgeometrie, die zunächst in eine Anzahl von Teilgebieten  $n$  zu diskretisieren ist (Abbildung 5-13).



**Abbildung 5-13:** Beanspruchung der einzelnen Teilgebiete der Fehlstelle mit Basisspannungen

Die Basisschnittspannungen  $\sigma_{S,z}^{(j)}$ ,  $\tau_{S,zx}^{(j)}$  und  $\tau_{S,zy}^{(j)}$  können zunächst beliebige Werte annehmen. Für jedes Teilgebiet  $j = 1 \dots n$  ist der Einfluss der rissbeanspruchungsrelevanten Spannungskomponenten auf die Spannungsintensität separat zu berechnen. Bei einer Anzahl von  $n = 12$  Teilgebieten und drei rissbeanspruchungsrelevanten Spannungskomponenten ergeben sich also 36 eigenständige FE-Modelle, die es zu simulieren gilt. Für jedes der Modelle sind die Spannungsintensitätsfaktoren an den Bewertungspunkten zu berechnen.

**Berechnung der Einflussfunktionen aller Teilgebiete:** Die Spannungsintensitätsfaktoren an den Bewertungspunkten sind bestimmt durch die Basisspannungen in den Teilgebieten und dienen als Grundlage zur Berechnung der Einflussfunktionen. Mit jedem Teilgebiet  $j$  und den dort aufgetragenen Basisspannungen ist eine Spannungsintensitätsfaktorkombination  $K_{I,S,z}^{(j)}$ ,  $K_{II,S,zx}^{(j)}$ ,  $K_{III,S,zx}^{(j)}$ ,  $K_{II,S,zy}^{(j)}$  und  $K_{III,S,zy}^{(j)}$  verknüpft. Anhand dieser wird durch einfache Rückrechnung der Einfluss einer Spannung in einem Teilgebiet  $j$  auf die Rissbeanspruchung berechnet. Das Ergebnis hieraus sind die Einflussfunktionen  $h_{I,z}^{(j)}$ ,  $h_{II,zx}^{(j)}$ ,  $h_{III,zx}^{(j)}$ ,  $h_{II,zy}^{(j)}$  und  $h_{III,zy}^{(j)}$ . Für den Betrachtungspunkt D ergeben sich insgesamt drei von null verschiedene Einflussfunktionen (Abbildung 5-14).



**Abbildung 5-14:** Einflussfunktionen bzgl. des Bewertungspunktes D der rissbeanspruchungsrelevanten Spannungskomponenten

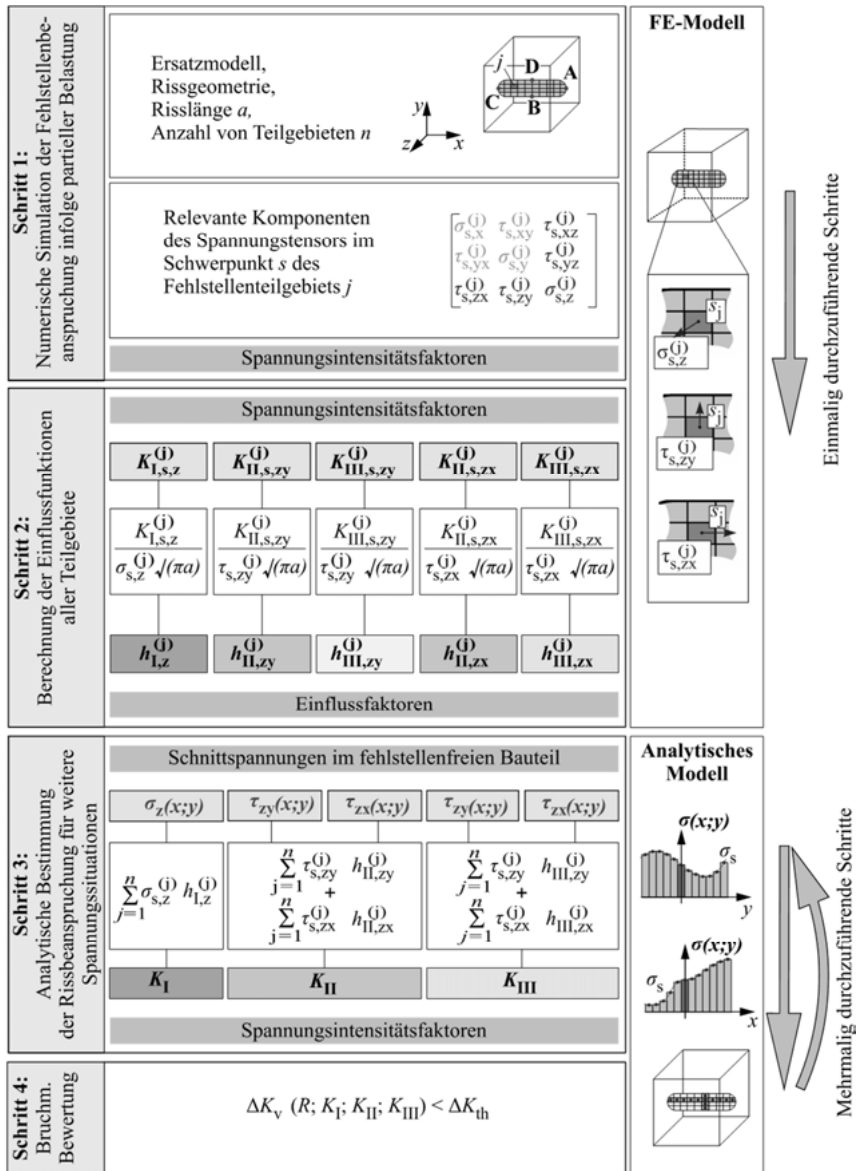
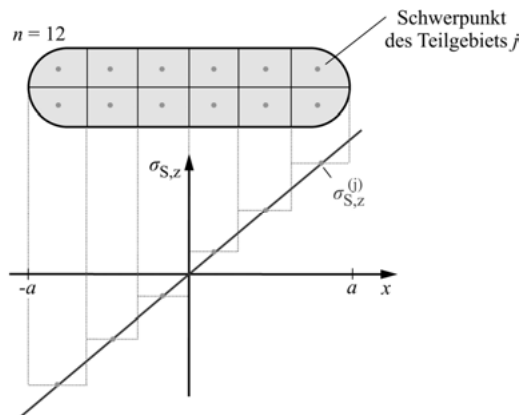


Abbildung 5-15: Vorgehensweise zur Anwendung des Konzepts der parametrisierten Einflussfunktionen

Die Werte der Einflussfunktionen sind unabhängig von der Höhe der Basisspannungen. Es zeigt sich, dass diese Werte umso höher sind, je näher die Teilgebiete an dem jeweiligen Bewertungspunkt liegen. Den Einflussfunktionen sind sowohl die Risslänge als auch die Rissgeometrie und -lage inhärent.

**Analytische Bestimmung der Rissbeanspruchung:** Mit Hilfe der vorhergehend erstellten Einflussfunktionen wird in diesem Schritt ohne weitere numerische Berechnung die Rissbeanspruchung der zu untersuchenden Lastfälle analytisch bestimmt. Grundlage dafür ist die mathematische Beschreibung der Schnittspannungsverläufe entlang der Rissgeometrie (Gleichung 5.1). Da die Koordinaten des Schwerpunktes für die einzelnen Teilgebiete bekannt sind, lässt sich aus den mathematischen Schnittspannungsverläufen leicht die tatsächlich im Schwerpunkt wirkende Schnittspannung bestimmen (Abbildung 5-16).



**Abbildung 5-16:** Bestimmung der Spannungswerte in den Schwerpunkten der einzelnen Teilgebiete

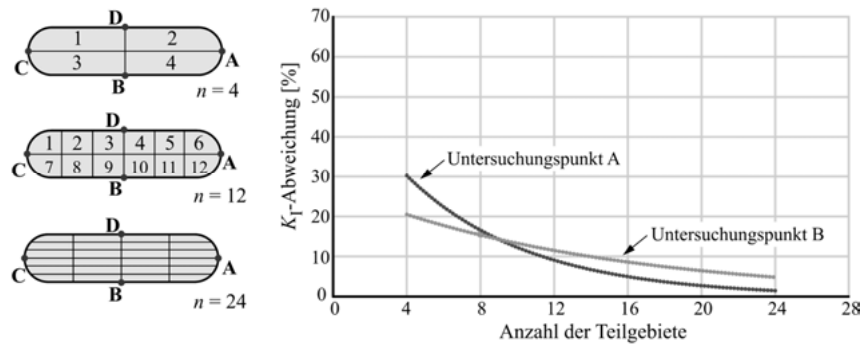
Der so bestimmte Spannungswert im jeweiligen Teilgebiet wird mit dem entsprechenden Wert der zugehörigen Einflussfunktion multipliziert. Diese Berechnung ist für alle Teilgebiete durchzuführen, sodass eine Zahl von  $n$  Teillösungen in Form von Spannungsintensitätsfaktoren für einen Bewertungspunkt vorliegt. Letztlich ergibt sich die Gesamtlösung der Rissbeanspruchung am jeweiligen Bewertungspunkt aus der Superposition dieser Teillösungen.

**Bruchmechanische Bewertung:** Eine Aussage über die Ausbreitungsfähigkeit der untersuchten Fehlstelle wird in diesem Schritt getroffen. Dazu wird der zyklische Vergleichsspannungsintensitätsfaktor dem Thresholdwert gegenüber gestellt.

## 5.4.2 Anwendbarkeit

Das vorliegende Konzept eignet sich insbesondere dann für die Nutzung vorliegender Spannungsdaten bei der bruchmechanischen Bauteilbewertung, wenn die Schnittspannungsfelder inhomogen sind und eine besonders große Zahl von Belastungsfällen vorliegt. Die Genauigkeit des Konzepts hängt stark von der Diskretisierung der Rissgeometrie in Teilgebiete ab. Eine zunehmende Anzahl von Teilgebieten steigert durch die Vervielfachung der zu untersuchenden

Basismodelle den Berechnungsaufwand erheblich. Gleichzeitig nimmt die Abweichung der Spannungsintensität zur Referenzlösung überproportional ab (Abbildung 5-17).



**Abbildung 5-17:** Steigende Ergebnissenauigkeit mit zunehmend feinerer Fehlstellendiskretisierung

Für den vorliegenden Fall ergibt sich bei einer Anzahl von  $n = 24$  Teilgebieten eine hinreichend gute Ergebnissenauigkeit. Das hier beispielhaft untersuchte Normalspannungsfeld  $\sigma_{S,z}(x,y)$  (vgl. Abbildung 5-7 und Gleichung 5.1) führt dazu, dass die Abweichungen des Konzepts der parametrisierten Einflussfunktionen zur Referenzlösung etwas niedriger als die Abweichungen der mehrachsigen halbanalytischen Lösung sind (Tabelle 5.6). Ursächlich dafür ist die Berücksichtigung der Inhomogenität des Spannungsfeldes.

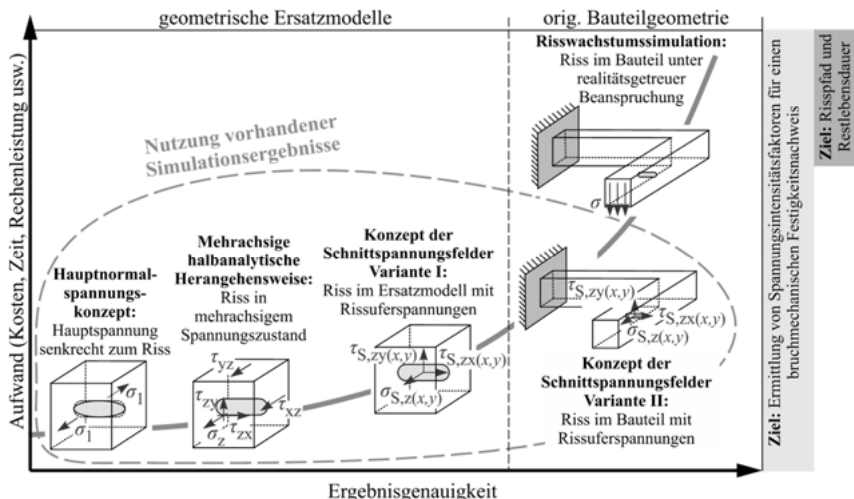
**Tabelle 5.6:** Ergebnissenauigkeit bei Anwendung der parametrisierten Einflussfunktionen

		Konzept der parametrisierten Einflussfunktionen	Abweichung zur Referenzlösung
		[N/mm <sup>3/2</sup> ]	[%]
		$K_I$	$K_I$
Position	A	72,8	-1,5
	B	47,3	-3,0
	C	5,6	5,0
	D	60,9	-3,9

Der Aufwand des vorliegenden Konzepts ist insbesondere bei einer hinreichend feinen Diskretisierung der Fehlstellengeometrie und der damit einhergehenden Vielzahl der Simulationsmodelle erheblich. Daher ist eine Verwendung nur bei einer besonders großen Anzahl von zu untersuchenden inhomogenen Spannungssituationen und gleichzeitig hohen Anforderungen an die Ergebnissenauigkeit zu empfehlen. Gleichwohl sollte die Verwendung durch Werkzeuge für eine automatisierte Berechnung der Modelle sowie für eine effiziente Spannungsintensitätsfaktorbestimmung begleitet werden (Kapitel 4.2.34).

## 5.5 Bewertung der entwickelten Herangehensweisen

Die vorgestellten Herangehensweisen und Konzepte unterscheiden sich vor allem in ihrer mit dem benötigten Aufwand zur Bestimmung der Spannungsintensitäten korrelierenden Ergebnisgenauigkeit. Abbildung 5-18 zeigt diesen Zusammenhang qualitativ. Das Konzept der parametrisierten Einflussfunktionen wird hier als Erweiterung des Konzepts der Schnittspannungsfelder behandelt und nicht gesondert aufgeführt.






**Abbildung 5-18:** Zusammenhang zwischen Ergebnisgenauigkeit und Aufwand der entwickelten Herangehensweisen




























Insbesondere in frühen Phasen der Produktentwicklung und bei unsicheren Eingangsdaten werden Herangehensweisen und Konzepte benötigt, die bei geringem Aufwand eine größtmögliche Ergebnisgenauigkeit bieten. Die Beachtung der Mehrachsigkeit des Spannungsfeldes, in dem sich der Riss befindet, ist dafür Grundvoraussetzung. Das Hauptnormalspannungskonzept kann in diesem Zusammenhang einen ersten Richtwert liefern. Vor allem bei der Untersuchung einer Vielzahl von Lastfällen eignet sich die mehrachsige halbanalytische Herangehensweise, da hier mit der einmalig zu berechnenden Basislösung zeitsparend die Rissbeanspruchung unter Berücksichtigung der Mehrachsigkeit des Spannungsfeldes bestimmbar ist. Bei inhomogenen Spannungsverteilungen entlang der Rissgeometrie ist das Konzept der Schnittspannungen Variante I anzuwenden, um für ausgewählte Lastfälle die Ergebnisse der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise abzusichern. Sind Geometrieinflüsse zu erwarten, sollte das Konzept der Schnittspannungen Variante II gewählt werden. Abhängig von der Anzahl der zu untersuchenden Lastfälle kann die Berechnung parametrisierter Einflussfunktionen sinnvoll sein. Eine umfassende Risswachstumssimulation ist aus Effizienzgründen nur dann zu empfehlen,

wenn Risspfad und Restlebensdauer von Interesse sind. Zielt die bruchmechanische Untersuchung lediglich auf die Bewertung der Wachstumsfähigkeit von Fehlstellen und Rissen ab, genügen die in den vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Herangehensweisen und Konzepte.

Letztlich sind diese in ihrer Gesamtheit als ein Katalog von sich ergänzenden Werkzeugen zur bruchmechanischen Bauteilbewertung zu interpretieren. Die Wahl des jeweiligen Ansatzes hängt von der Problemstellung sowie von der Phase der Produktentwicklung und dem damit einhergehenden Anspruch an die Ergebnisgenauigkeit ab.

Das übergeordnete Ziel dieser Arbeit ist die Effizienzsteigerung bei der bruchmechanischen Bauteilbewertung. Die entwickelten Herangehensweisen und Konzepte erfüllen in ihrer Gesamtheit die gestellten Anforderungen (vgl. Kapitel 3.3) vollumfänglich. Nachfolgend wird dies visualisiert (Abbildung 5-19) und erläutert.

Bewertungsskala:    voll erfüllt     teilweise erfüllt     nicht erfüllt 

				Ansätze		
				(analytische) Lösungsbibliotheken	Rissausbreitungssimulationsprogramme	Effiziente Herangehensweisen
Anforderungen (A)	Produktentstehungsprozess	Skalierbarkeit von Aufwand / Ergebnisgenauigkeit	A1			
		Nutzung vorhandener Spannungsdaten	A2			
	Bruchmechanische Bewertung	Berücksichtigung der Mehrachsigkeit der Spannungsfelder	A3			
		Exakte Abbildung der Rissgeometrie	A4			
		Robustheit der Ergebnisse	A5			
		Bestimmung von Risspfad und Restlebensdauer	A6			
	Anwendbarkeit	Reduzierter Rechen- und Modellierungsaufwand	A7			
		Universelle Einsetzbarkeit	A8			
		Flexibilität hinsichtlich der einzusetzenden Software	A9			

**Abbildung 5-19:** Entwickelte Herangehensweisen erfüllen größtenteils die Anforderungen an eine effiziente bruchmechanische Bauteilbewertung

**A1) Skalierbarkeit des Verhältnisses Aufwand/Ergebnisgenauigkeit:** Der jeweilige Stand im Produktentwicklungsprozess gibt den vertretbaren Aufwand einer bruchmechanischen Untersuchung sowie die geforderte Ergebnisgenauigkeit vor. Einschränkungen der zur Verfügung stehenden Bearbeitungszeit ergeben sich darüber hinaus häufig durch den betrieblichen Alltag. Die vorgestellten Herangehensweisen und Konzepte berücksichtigen diese Tatsache aufgrund ihrer mit dem Aufwand korrelierenden Ergebnisgenauigkeit.

**A2) Nutzung vorhandener Spannungsdaten:** Spannungsdaten fehlstellenfreier Bauteile werden umfassend genutzt. Aufwändige Neumodellierungen und -berechnungen können vermieden werden.

**A3) Berücksichtigung der Mehrachsigkeit der Spannungsfelder:** Die vorgestellten Herangehensweisen, mit Ausnahme des Hauptnormalspannungskonzepts, berücksichtigen die Mehrachsigkeit der Spannungsfelder. Darüber hinaus wird der Effizienzgedanke durch die Identifikation der rissbeanspruchungsrelevanten Spannungen im Vorfeld zur Bestimmung der bruchmechanischen Beanspruchungsgrößen verfolgt.

**A4) Exakte Abbildung der Rissgeometrie:** Durch die Möglichkeit der individuellen Modellierung können vorhandene Risse exakt abgebildet werden. Vereinfachungen oder Abwandlungen der Rissgeometrie sind, abgesehen vom Hauptnormalspannungskonzept, nicht notwendig.

**A5) Robustheit der Ergebnisse:** Je nach Ausgangsproblematik steht eine geeignete Herangehensweise zur Verfügung. Die Robustheit der Ergebnisse ist dadurch sichergestellt (siehe Kapitel 7).

**A6) Bestimmung von Risspfad und Restlebensdauer:** Die in diesem Kapitel vorgestellten Werkzeuge lassen eine Bestimmung von Risspfad und Restlebensdauer auf Basis vorhandener Spannungsdaten sowie mit Hilfe von Ersatzmodellen im Falle ausbreitungsfähiger Risse nicht zu. Hierfür sind vollumfängliche Risswachstumssimulationen durchzuführen.

**A7) Reduzierter Modellierungs- und Berechnungsaufwand:** Die Verwendung vorhandener Spannungsdaten reduziert den Modellierungsaufwand enorm. Komplexe Randbedingungen des Ausgangsproblems sind den in der Regel leicht zu modellierenden Schnittspannungen bereits inhärent. Darüber hinaus führen die verwendeten Ersatzmodelle zu kurzen Berechnungszeiten.

**A8) Universelle Einsetzbarkeit:** Alle relevanten Randbedingungen werden berücksichtigt. Es existieren keinerlei Restriktionen.

**A9) Flexibilität hinsichtlich der einzusetzenden Software:** Die vorgestellten Herangehensweisen und Konzepte sind im Hinblick auf die verwendete Software flexibel einsetzbar. Es gibt keine bestimmten Anforderungen an CAD- und FE-Programme. Die Spannungsintensitätsfaktoren können mit beliebigen Methoden bestimmt werden.

## 5.6 Umsetzung der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise in ein Berechnungstool

Letztlich erscheint nach Abwägung der Aspekte Ergebnisgenauigkeit und Aufwand die mehrachsige halbanalytische Herangehensweise in der Praxis am meisten Anwendung zu finden. Daher wurde für diese Herangehensweise ein Berechnungstool entwickelt. Im Folgenden wird dessen Umsetzung in einem auf MATLAB basierenden Programm beschrieben. Dieses Programm soll die Bestimmung der Rissbeanspruchung benutzerfreundlich und effizient ermöglichen. Abbildung 5-21 zeigt die Benutzeroberfläche des Programms.

Im **Bereich A** ist der zweite Schritt der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise umgesetzt. Hier werden alle Daten zur Berechnung der Basislösung abgefragt. Dafür ist zunächst die Lage des Koordinatensystems in der Basislösung anzugeben, indem die senkrecht auf der Rissfläche stehende Koordinatenachse definiert wird. Für den Fall elliptischer Rissgeometrie ist zusätzlich die Koordinatenachse festzulegen, die in Richtung der langen Ellipsenseite zeigt. Außerdem sind die zuvor numerisch bestimmten Spannungsintensitätsfaktoren der Basislösung einzulesen. Bei der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise werden dafür drei unabhängige Modelle auf Grundlage der rissbeanspruchungsrelevanten Spannungskomponenten simuliert. Die Ergebnisse sind in Form von drei Dateien einzulesen. Diese enthalten die Spannungsintensitätsfaktoren entlang der Rissfront und sind einer Spannungskomponente direkt zugeordnet. Abbildung 5-20 zeigt beispielhaft das Format einer solchen Datei für das Ersatzmodell mit der Spannung  $\tau_{zx}$ . Diese ruft sowohl Mode II- als auch Mode III-Rissbeanspruchung hervor.

```

npos, KI, KII, KIII, Crd-x, Crd-y, Crd-z
0, 0.0573199, -103.143, 9.4376, 12.0481, 9.95642, 10
0.00466987, 0.0292229, -102.577, 12.5718, 12.0424, 9.91318, 10
0.00933974, 0.0419883, -100.829, 18.7817, 12.033, 9.87059, 10
0.0140096, 0.0430046, -98.4025, 24.8876, 12.0198, 9.82899, 10
0.0186795, 0.0386683, -95.3021, 30.8435, 12.0032, 9.78869, 10
0.0233494, 0.0465621, -91.5691, 36.6224, 11.983, 9.75, 10
0.0280192, 0.0340009, -87.1943, 42.1904, 11.9596, 9.71321, 10
0.0326891, 0.0317231, -82.2231, 47.5181, 11.933, 9.67861, 10
0.037359, 0.0220552, -76.6996, 52.5789, 11.9036, 9.64645, 10
0.0420288, 0.0222455, -70.6368, 57.3553, 11.8714, 9.61698, 10
0.0466987, 0.0306351, -64.0861, 61.8361, 11.8368, 9.59042, 10
0.0513686, 0.04073, -57.0893, 66.0171, 11.8, 9.56699, 10
0.0560385, 0.0342583, -49.6628, 69.9167, 11.7613, 9.54685, 10
0.0607083, 0.0349757, -41.8838, 73.5642, 11.721, 9.53015, 10
0.0653782, 0.0374558, -33.7631, 77.0123, 11.6794, 9.51704, 10
0.0700481, 0.0556076, -25.3438, 80.4532, 11.6368, 9.5076, 10
0.074718, 0.0720921, -16.6728, 84.0495, 11.5936, 9.5019, 10
0.0793878, 0.0738597, -10.0221, 90.171, 11.55, 9.5, 10

```

**Abbildung 5-20:** Spannungsintensitätsfaktoren in Folge der Spannung  $\tau_{zx}$  als Eingangsinformationen zur Berechnung der Basislösung

**A** Mehrschichtige kontinuumsmechanische Herangehensweise

Koordinatenachse orthogonal zur Rissofläche  
☐ z-Achse ☐ x-Achse ☐ y-Achse  
 Achsenauswahl bestätigen

**Spannungintensitätsfaktoren zur Basislösung von Rissolänge 1**

SF infolge  $S_z$     
 SF infolge  $T_{zx}$     
 SF infolge  $T_{zy}$     
 Rissolänge 2a

Höhe der Basisspannungen Rissolänge 1  
 $S_z$    
 $T_{zx}$    
 $T_{zy}$

**B**

Koordinatenachse orthogonal zur neuen Rissofläche  
☐ z-Achse ☐ x-Achse ☐ y-Achse  
 Achsenauswahl bestätigen

Benutzereingaben zu berechnender Risso

Rissolänge 2a   
 normierte Fehlstellenposition   
 Spannungsverhältnis R   
 Zeichne Rissofront

Neuer Spannungstensor  
 $S_x$    
 $S_y$    
 $S_z$    
 $T_{xy}$    
 $T_{xz}$    
 $T_{yz}$

Tensorereingabe  
☐ direkte Eingabe ☐ Tabelle einlesen    
  
 Fehlermeldung

**C**

Lange Seite der elliptischen Fehlstelle in Richtung der  
☐ x-Achse ☐ y-Achse

**Skalierte Spannungintensitätsfaktorverläufe**

$K_I$   $K_{II}$   $K_{III}$

Resultierende Spannungintensitätsfaktoren

	Kv	dKv	dK1	dK2	dK3
Kv	132.425	dKv	132.425		
K1	61.7422	dK1	61.7422		
K2	-59.4726	dK2	-59.4726		
K3	68.1308	dK3	68.1308		

Thresholdvergleich  
 Thresholdwert

Abbildung 5-21: Benutzeroberfläche des Bewertungstools

In der Praxis ist die Erstellung einer Bibliothek von Basislösungen für verschiedene Risslängen und -geometrien sinnvoll. Um die Spannungsintensitätsfaktoren für beliebige Risslängen exakt bestimmen zu können, besteht im Berechnungstool die Möglichkeit, linear zwischen zwei Risslängen zu interpolieren. Die Eingangsdaten der zweiten Risslänge können dazu bei Bedarf eingelesen werden. Außerdem ist für die Berechnung der Basislösung die Angabe der Höhe der Basisspannungen notwendig.

Im **Bereich B** des Berechnungstools werden alle Daten abgefragt, die für eine analytische Bestimmung der Rissbeanspruchung für weitere Spannungssituationen (Schritt 3) notwendig sind. Zunächst ist die Lage der zu berechnenden Fehlstelle zu definieren. Diese kann sich zur Lage der Fehlstelle in der Basislösung unterscheiden. Das Berechnungstool führt automatisch die entsprechende Koordinatentransformation durch. Darüber hinaus werden Informationen zur Risslänge sowie zum gewünschten Bewertungspunkt in Form einer normierten Koordinate entlang der Rissfront abgefragt. Die betrachtete Rissgeometrie wird in diesem Zusammenhang abgebildet. Punkt A befindet sich an der normierten Position 0. Punkt C liegt an normierter Position 1. Punkt B visualisiert die positive Zählrichtung der normierten Rissfrontposition. Aus dem fehlerstellenfreien Bauteil ausgelesene Spannungssensoren für die Bewertungspunkte können manuell direkt in der Eingabemaske des Bewertungstools angegeben werden. Bei einer großen Zahl von zu untersuchenden Belastungssituationen besteht die Möglichkeit, die Spannungssensoren aus einem Excel-Tabellenblatt automatisiert einzulesen. Nach Eingabe aller Daten können die Spannungsintensitätsfaktoren entsprechend analytisch bestimmt werden.

**Bereich C** der Benutzeroberfläche umfasst die bruchmechanische Bewertung (Schritt 4). Die Spannungsintensitätsfaktoren sind von der Risslänge, der Position des Bewertungspunktes sowie vom Spannungssensor abhängig und werden hier ausgegeben. Die zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren ergeben sich durch das  $R$ -Verhältnis. Gleichzeitig bietet das Berechnungstool eine Möglichkeit zur Einordnung dieser Ergebnisse. Dazu werden drei Diagramme generiert, welche die skalierten Spannungsintensitätsfaktorverläufe entlang der normierten Rissfront in den einzelnen Moden für Risslänge 1 und Risslänge 2 der Basislösung zeigen. Die analytisch berechnete Beanspruchungssituation des Risses wird durch ein rotes Kreuz repräsentiert. Für die Beurteilung der Wachstumsfähigkeit von Rissen ist der Vergleich der Rissbeanspruchung mit dem Thresholdwert von elementarer Bedeutung. Daher bietet das Berechnungstool die Möglichkeit, den Verlauf des zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktors in Abhängigkeit der Risslänge darzustellen und mit dem Thresholdwert zu vergleichen.

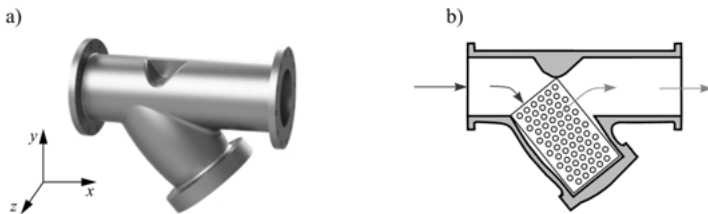
Das vorliegende Berechnungstool verzichtet bewusst auf die Verwendung von Einheiten, um universell einsetzbar zu sein. Im Rahmen dieser Arbeit beziehen sich alle Größen auf die Einheiten [mm] und [N].

## 6 VALIDIERUNG DER HERANGEHENSWEISEN UND KONZEPTE AN RISSEN IN DREIDIMENSIONALEN BAUTEILEN

In diesem Kapitel wird die Einsetzbarkeit der entwickelten Herangehensweisen und Konzepte für eine effiziente bruchmechanische Bewertung komplexer Bauteile aufgezeigt. Dazu werden Fehlstellen in einem Y-Siebfilter aus dem Kraftwerksbereich (Kapitel 6.1) sowie in der Kurbelwelle eines Verbrennungsmotors (Kapitel 6.2) bruchmechanisch untersucht.

### 6.1 Kraftwerksbauteil: Y-Siebfilter

Y-Siebfilter dienen im Rohrleitungsbau der mechanischen Entfernung ungewollter Feststoffe aus Flüssigkeiten, Gasen oder Dämpfen, um nachgelagerte empfindliche Komponenten, wie Turbinen, Messgeräte etc., vor Schäden zu schützen. Dies geschieht mit Hilfe eines perforierten Elements oder eines Drahtgewebes, welches so im Gehäuse des Bauteils positioniert wird, dass es vom zu filternden Medium durchströmt wird [Mal15, Col14]. Feststoffe setzen sich im Filter ab und das gereinigte Medium tritt aus dem Gehäuse aus (Abbildung 6-1).



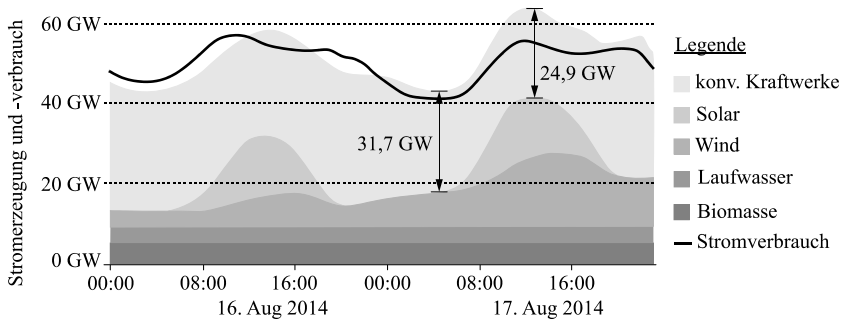
**Abbildung 6-1:** Y-Siebfilter zur mechanischen Entfernung ungewollter Feststoffe aus Flüssigkeit, Dampf oder Gas

In der Regel sind Gehäuse von Y-Siebfiltern in Stahlguss nach DIN EN 10213 ausgeführt [DIN16]. Der Anschluss an die Rohrleitung erfolgt durch Gewindeanschlüsse, Flansch- oder Schweißverbindungen. Die Abmessungen sowie das verwendete Material richten sich nach dem vorhandenen Durchfluss, dem im System herrschenden Druck sowie dem zu filternden Medium. Durch die kompakte zylindrische Bauform halten Y-Siebfilter hohen Belastungen stand. Innendrucke von bis zu 410 bar sowie hohe Dampftemperaturen von bis zu 550 °C sind dabei nicht unüblich [Mal15, Col14].

Die simple Funktionsweise der Y-Siebfilter macht sie zu einer kostengünstigen Filterlösung sowohl in der Chemie- und Petrolindustrie als auch im Energiesektor. Hier stellen sie die Standardlösung für Dampfanwendungen in konventionellen thermischen Kraftwerken dar.

Aufgrund der in Deutschland forcierten Energiewende ist eine steigende Integration erneuerbarer Energien in das existierende Stromnetz zu beobachten [EEG14]. Der Anteil des aus erneuerbaren Energien gewonnenen Stroms an der gesamten Netzlast ist jedoch aufgrund der äußeren

Witterungseinflüsse nicht plan- oder steuerbar und letztlich hoch volatil. Die Verpflichtung der Netzbetreiber zur Abnahme von Strom aus erneuerbaren Energien stellt vorhandene konventionelle Kraftwerke daher vor neue Herausforderungen [BM15]. Letztlich sind diese gezwungen, ihren Betrieb gegenüber der herkömmlichen Grund- und Mittellastfahrweise mit dem Ziel zu flexibilisieren, Schwankungen der erneuerbaren Energien zu kompensieren und dadurch das Netz zu stabilisieren (Abbildung 6-2).



**Abbildung 6-2:** Neuartige Belastungssituation konventioneller Kraftwerke [Ago17-ol]

Der Bedarf an Flexibilitätssteigerung der konventionellen Kraftwerke wird bei Betrachtung des typischen Verlaufs von Stromerzeugung und -verbrauch deutlich. Am 17. August 2014 gegen 05:00 Uhr betrug die Leistung konventioneller Kraftwerke 31,7 GW. Am selben Tag gegen 13:00 Uhr leisteten diese Kraftwerke 24,9 GW. Derartige Schwankungen führen zu deutlich häufigeren An- und Abfahrvorgängen sowie größeren Laständerungsgradienten der konventionellen thermischen Kraftwerke. Die aus dieser neuartigen Situation resultierende zyklische Bauteilbeanspruchung führt letztlich dazu, dass Ermüdungsrissswachstum in Komponenten thermischer Kraftwerke an Bedeutung gewinnt [MS16, Sch13].

Vor diesem Hintergrund wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Gussfehler im Gehäusemodell eines Y-Siebfilters mit entsprechenden Anschlussstücken bruchmechanisch untersucht. Die Randbedingungen dafür setzen sich aus einem Innendruck von 63 bar sowie einem Temperaturgradienten zusammen, welcher aus einer Umgebungstemperatur von 323,15 K sowie einer Dampftemperatur von 393,15 K resultiert. Angelehnt an eine realitätsnahe Lagerung mit Hilfe von Rohrunterstützungen erfolgt die Lagerung im Modell an den Schnittflächen der Anschlussstücke [FP14]. Dazu werden auf der linken Seite die Freiheitsgrade in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und auf der rechten Seite in  $y$ - und  $z$ -Richtung gesperrt.

Um die so entstehende gekoppelte mechanisch-thermische Situation mit Hilfe der FEM abbilden zu können, werden dem Modell die Werkstoffeigenschaften des warmfesten Gussstahls G17CrMo5-5 zugewiesen (Tabelle 6.1).

Tabelle 6.1: Werkstoffkennwerte des Materials G17CrMo5-5 [BSI07, Pur14, Mar12]

Werkstoffparameter	Wert
E-Modul	$E = 210.000 \frac{N}{mm^2}$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0,3$
Dichte	$\rho = 7,85 \cdot 10^{-9} \frac{t}{mm^3}$
Streckgrenze	$R_e = 315 \frac{N}{mm^2}$
Wärmeausdehnungskoeffizient	$\alpha = 11,8 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K}$
Spezifische Wärmekapazität	$c = 4,6 \cdot 10^8 \frac{mm^2}{s^2 K}$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda = 38,5 \frac{t \cdot mm}{s^3 K}$
Thresholdwert	$\Delta K_{th,0} = 184 N/mm^{3/2}$

Zur Anwendung der effizienten Herangehensweisen und Konzepte ist zunächst die Simulation des fehlstellenfreien Bauteils nötig. Aus diesen Simulationsdaten können die benötigten Eingangsdaten in Form von Spannungen am Ort der Fehlstelle ermittelt werden. Abbildung 6-3 zeigt die Spannungsverteilung im fehlstellenfreien Bauteil sowie die Geometrie und die Lage der zu untersuchenden Fehlstelle.

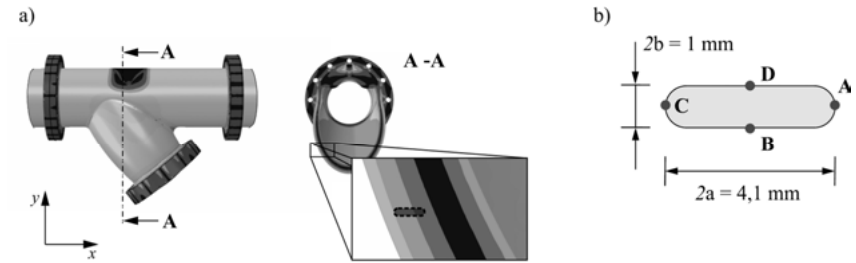


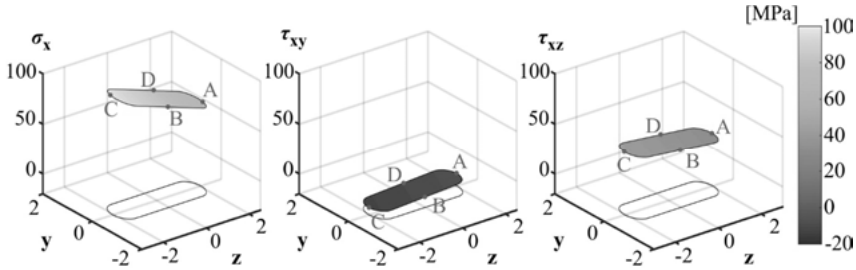
Abbildung 6-3: Modell des Y-Siebfilters  
a) Spannungsverteilung im fehlstellenfreien Bauteil sowie Position der detektierten Fehlstelle  
b) Passfederförmige Fehlstellengeometrie und Lage der Bewertungspunkte

Fehler in Form von Lunkern oder Einschlüssen können in Gussteilen vorkommen. Daher wird als Fehlstelle ein Gussfehler mit passfederförmiger Geometrie angenommen. Dieser wurde in der Gehäusewand im Bereich des Filterelements detektiert und hat eine Länge von  $2a = 4,1$  mm sowie eine Breite von  $2b = 1$  mm. In diesem Bereich des Gehäuses beträgt die Wandstärke 25 mm. Vier Bewertungspunkte werden im Rahmen der bruchmechanischen Untersuchung näher betrachtet. In Tabelle 6.2 sind die dort relevanten Spannungssensoren aufgeführt.

**Tabelle 6.2:** Spannungssensoren an den Bewertungspunkten im fehlerstellenfreien Bauteil

		Spannungen im fehlerstellenfreien Bauteil								
		[MPa]								
		$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
Position	A	65,7	70,4	21,5	-7,6	32,6	28,3	88,0	74,6	-6,2
	B	82,9	86,7	26,9	-10,7	38,1	32,5	105,7	94,2	-5,2
	C	97,5	100,2	30,8	-13,0	42,4	32,5	118,0	110,9	-1,9
	D	79,8	84,0	25,5	-9,9	37,0	31,6	102,6	90,8	-5,1

Zur Anwendung der auf Schnittspannungen basierenden Konzepte ist deren mathematische Approximation nötig. Die Schnittspannungsfelder der rissbeanspruchungsrelevanten Spannungskomponenten zeigt Abbildung 6-4. Der Verlauf über die Rissfläche ist teilweise inhomogen.



**Abbildung 6-4:** Schnittspannungsverläufe am Ort der betrachteten Fehlstelle im Y-Siebfilter

Mathematisch bietet sich eine lineare Beschreibung der Schnittspannungsverläufe an. Die Gleichungen lauten:

$$\sigma_{S,x}(y;z) = 81,6 - 3,01 \cdot y - 7,75 \cdot z \tag{6.1},$$

$$\tau_{S,xy}(y;z) = -10,3 + 0,8 \cdot y + 1,31 \cdot z \tag{6.2},$$

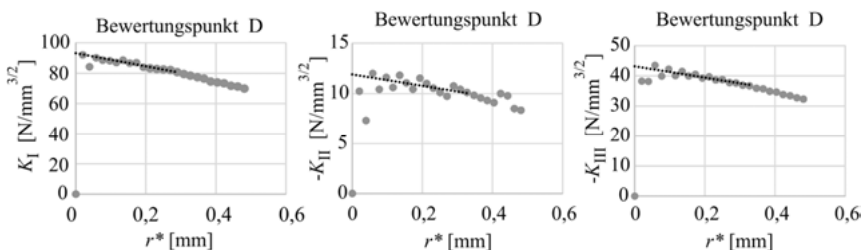
$$\tau_{S,xz}(y;z) = 37,5 - 1,1 \cdot y - 2,39 \cdot z \tag{6.3}.$$

Für Aussagen über die Ergebnisgenauigkeit der Herangehensweisen und Konzepte wird eine Referenzlösung benötigt. Die einzelnen Spannungsintensitätsfaktoren sowie die daraus bestimmten Vergleichsspannungsintensitäten sind Tabelle 6.3 zu entnehmen.

**Tabelle 6.3:** Spannungsintensitätsfaktoren der Referenzlösung

		Spannungsintensitätsfaktoren der Referenzlösung			
		[N/mm <sup>3/2</sup> ]			
		$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	$K_V$
Position	A	54,7	-32,9	5,3	74,5
	B	95,1	13,2	44,4	114,4
	C	77,7	41,8	-9,0	101,4
	D	93,1	-11,9	-43,2	111,5

Das Modell des Y-Siebfilters ist aufgrund der komplexen Geometrie mit Tetraederelementen vernetzt. Die Verschiebungskorrelationsmethode (vgl. Kapitel 4.2.3.4) stellt daher für eine exakte Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren der Referenzlösung die erste Wahl dar. Abbildung 6-5 zeigt exemplarisch die Extrapolation der Spannungsintensitätsfaktoren für den Bewertungspunkt D.

**Abbildung 6-5:** Verschiebungskorrelationsmethode für Bewertungspunkt D

Die mit Hilfe der einzelnen Herangehensweisen und Konzepte bestimmten Spannungsintensitätsfaktoren sind in Tabelle 6.4 aufgeführt. Darüber hinaus ist deren prozentuale Abweichung zur Referenzlösung angegeben.

Insbesondere beim Hauptnormalspannungskonzept treten signifikante Abweichungen der Vergleichsspannungsintensität zur Referenzlösung von bis zu -31% auf. Ein robuster bruchmechanischer Festigkeitsnachweis ist in diesen Situationen nicht gewährleistet. Ursächlich hierfür ist zum einen die fehlende Referenzlösung für die vorliegende Rissgeometrie und die damit einhergehende Annäherung mit Hilfe der Lösung für einen elliptischen Riss. Zum anderen führt die Annahme einer zum Riss senkrechten Belastung durch die größte Hauptnormalspannung zu Fehleinschätzungen. Weitestgehend geringe Abweichungen von unter 10% zeigt dagegen die mehrachsige halbanalytische Herangehensweise. Diese Ergebnisabweichungen lassen sich vor allem durch die mangelhafte Abbildung der inhomogenen Spannungsverteilung erklären. Das Konzept der Schnittspannungsfelder Variante I berücksichtigt diese Problematik und erzielt somit eine nochmals gesteigerte Ergebnisgenauigkeit, benötigt hierbei jedoch auch mehr Bearbeitungsaufwand. Beim Konzept der Schnittspannungsfelder Variante II sind die Abwei-

chungen zur Referenzlösung erwartungsgemäß minimal und den Methoden der Spannungsintensitätsfaktorbestimmung sowie der linearen Approximation des Spannungsfeldes geschuldet. Der Modellierungsaufwand und die Rechenzeit sind bei diesem Konzept jedoch noch einmal deutlich erhöht.

**Tabelle 6.4:** Spannungsintensitätsfaktoren sowie deren Abweichungen zur Referenzlösung

		Hauptnormalspannungskonzept	Mehrachsige halbanalytische Herangehensweise			Konzept der Schnittspannungsfelder Variante I			Konzept der Schnittspannungsfelder Variante II		
		[N/mm <sup>3/2</sup> ] [%]	[N/mm <sup>3/2</sup> ] [%]			[N/mm <sup>3/2</sup> ] [%]			[N/mm <sup>3/2</sup> ] [%]		
		<i>K<sub>I</sub></i>	<i>K<sub>I</sub></i>	<i>K<sub>II</sub></i>	<i>K<sub>III</sub></i>	<i>K<sub>I</sub></i>	<i>K<sub>II</sub></i>	<i>K<sub>III</sub></i>	<i>K<sub>I</sub></i>	<i>K<sub>II</sub></i>	<i>K<sub>III</sub></i>
Position	A	50,8	57,0	-34,2	3,9	56,3	-34,7	5,1	54,7	-33,0	4,8
		-31,8%	4,1%	4,1%	-25,3%	2,9%	5,4%	-3,9%	0,0%	0,4%	-9,0%
	B	123,4	101,2	12,8	45,2	97,1	12,3	43,7	95,8	11,8	43,2
		7,9%	6,4%	-3,2%	1,6%	2,1%	-7,1%	1,7%	0,7%	-10,5%	-2,8%
	C	69,6	84,8	44,2	-8,7	79,5	43,0	-8,4	77,6	41,4	-8,2
		-31,4%	9,1%	5,9%	3,4%	2,3%	3,0%	6,8%	-0,1%	-0,9%	-8,6%
	D	120,4	97,4	-11,8	-43,8	95,4	-12,2	-43,3	93,9	-12,0	-42,8
		8,0%	4,6%	0,8%	1,4%	2,5%	2,8%	0,2%	0,8%	0,8%	-0,9%

Tabelle 6.4 zeigt die Abweichungen in den einzelnen Moden. Insbesondere bei kleinen Spannungsintensitäten ergeben sich teilweise hohe prozentuale Abweichungen, die eine realitätsnahe Aussage über die Ergebnissenauigkeit verzerren. Für die bruchmechanische Bewertung eines mehrachsigt beanspruchten Bauteils ist jedoch letztlich die zyklische Vergleichsspannungsintensität ausschlaggebend. Diese ist dem Thresholdwert als Größe der Materialbeanspruchbarkeit gegenüberzustellen. Für das vorliegende Material G17CrMo5-5 ergibt sich ein Thresholdwert von 184 N/mm<sup>3/2</sup> bei *R* = 0 (vgl. Tabelle 6.1). Die untersuchte Fehlstelle ist damit nicht wachstumsfähig.

Für eine Relativierung der Ergebnisabweichungen wird der Thresholdwert jedoch als Bezugsgröße herangezogen. Es ergibt sich als relativer Fehler:

$$f = \frac{\text{Maximale absolute Abweichung } \Delta K_V}{\text{Thresholdwert } \Delta K_{th}} \cdot 100 \tag{6.4}$$

Letztendlich zeigen die so relativierten Abweichungen Werte, die ähnlich zu typischen Materialschwankungen bei einer experimentellen Thresholdwertbestimmung sind. Diese sind in Tabelle 6.5 aufgeführt.

Tabelle 6.5: Zyklische Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren und deren relativer Fehler

		Hauptnormalspannungskonzept	Mehrachsiges halbanalytische Herangehensweise	Konzept der Schnittspannungsfelder Variante I	Konzept der Schnittspannungsfelder Variante II
		[N/mm <sup>3/2</sup> ] [%]	[N/mm <sup>3/2</sup> ] [%]	[N/mm <sup>3/2</sup> ] [%]	[N/mm <sup>3/2</sup> ] [%]
		$\Delta K_V$ $f$	$\Delta K_V$ $f$	$\Delta K_V$ $f$	$\Delta K_V$ $f$
Position	A	50,8	77,3	77,4	74,5
		12,9%	1,5%	1,6%	0,0%
	B	123,4	119,9	115,4	113,8
		4,9%	3,0%	0,5%	-0,3%
	C	69,6	109,3	103,9	100,9
		17,3%	4,3%	1,4	-0,3
	D	120,4	115,6	113,7	111,9
		4,8%	2,2%	1,2%	0,3%

Die Analyse der Ergebnisse zeigt eine mit zunehmendem Bearbeitungsaufwand steigende Ergebnissenauigkeit. Abbildung 6-6 visualisiert diesen Zusammenhang. Insgesamt konnte die Ergebnissenauigkeit der Herangehensweisen und Konzepte nachgewiesen werden.

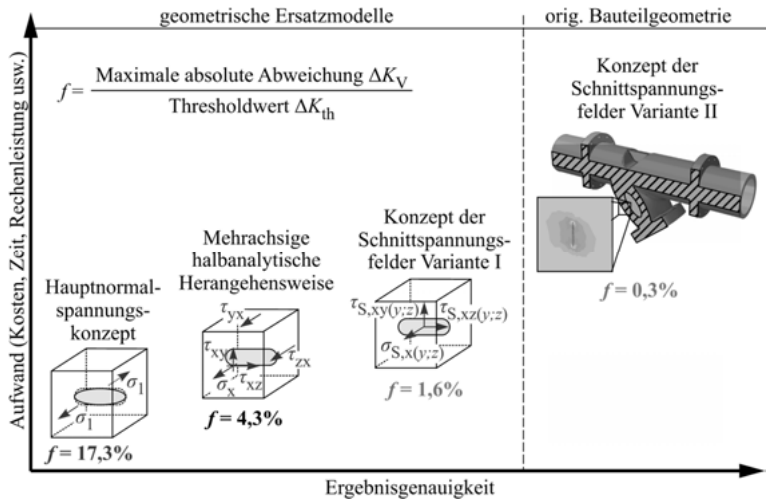


Abbildung 6-6: Zusammenhang zwischen Bearbeitungsaufwand und Ergebnissenauigkeit

## 6.2 Motorenkomponente: Kurbelwelle

Als hochbeanspruchte komplexe Bauteile in Verbrennungsmotoren sind Kurbelwellen in besonderem Maße durch ein Versagen in Folge von Ermüdungsrisswachstum gefährdet (vgl. Kapitel 2.2.2). Wachstumsfähige Risse nehmen ihren Ausgang insbesondere von lokalen Spannungskonzentrationen an Kerben sowie von Werkstoffinhomogenitäten kurz unterhalb der Oberfläche. Diese Problematik ist Ausgangspunkt für eine Validierung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Ansätze.

Im Verbrennungsmotor resultieren die auf die Kurbellwelle wirkenden Kräfte zum einen aus den Gaskräften, die von den Pleuelstangen in die Kröpfung eingeleitet und in Drehmomente umgewandelt werden. Zum anderen entstehen aus der Bewegung heraus Massenkkräfte. Für die Beanspruchung der Kurbelwelle sind im Allgemeinen die im Motorbetrieb auftreten Gaskräfte wesentlich und übersteigen die Massenkkräfte dabei um ein Vielfaches. Eine vollumfängliche Betrachtung der Massenkkräfte würde den Umfang dieser Arbeit übersteigen, weshalb nachfolgend lediglich Gaskräfte Berücksichtigung finden [Tod12, GZH06].

Die aus dem Überdruck im Brennraum entstehende Gaskraft ergibt sich in Abhängigkeit des Kurbelwinkels. Bei der hier betrachteten Kurbelwelle eines Vier-Takt-Motors findet ein komplettes Arbeitsspiel im Bereich des Kurbelwinkels  $\varphi = 0^\circ - 720^\circ$  statt. Abbildung 6-7 zeigt den Verlauf des normierten Überdrucks  $p_u$  über die vier Takte des Verbrennungsmotors.

Der höchste Überdruck ergibt sich dabei kurz nach dem Zündvorgang. In modernen Dieselmotoren herrschen sog. Zünddrücke von bis zu 250 bar. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wird ein maximaler Zünddruck von 65 bar angenommen. Die Abmessungen der untersuchten Kurbelwellenkröpfung orientieren sich an Literaturwerten [BS13b, Tod12, Köh01].

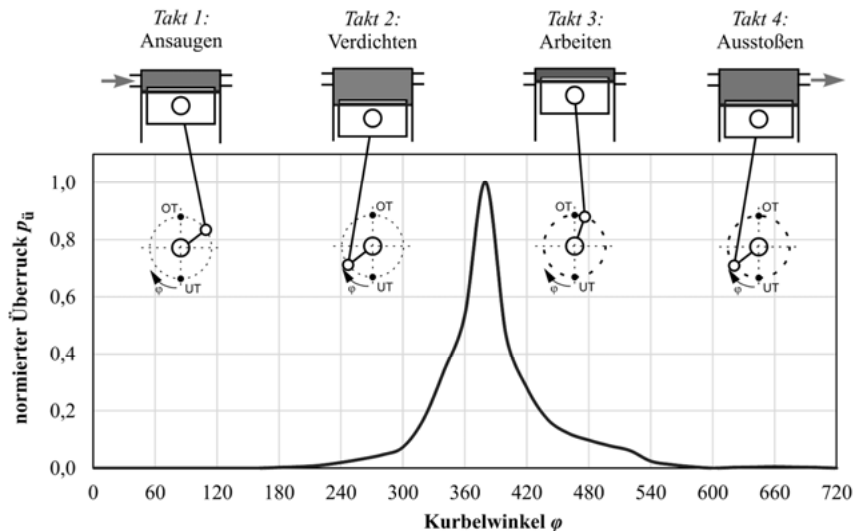
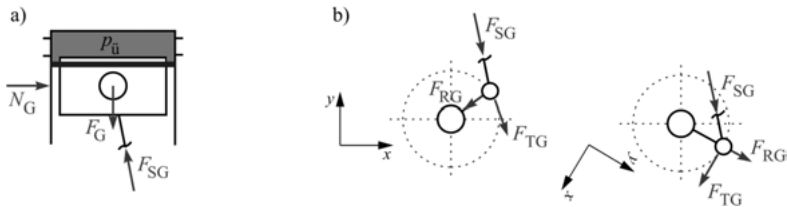


Abbildung 6-7: Überdruck im Brennraum eines Vier-Takt-Verbrennungsmotors nach [SC13]

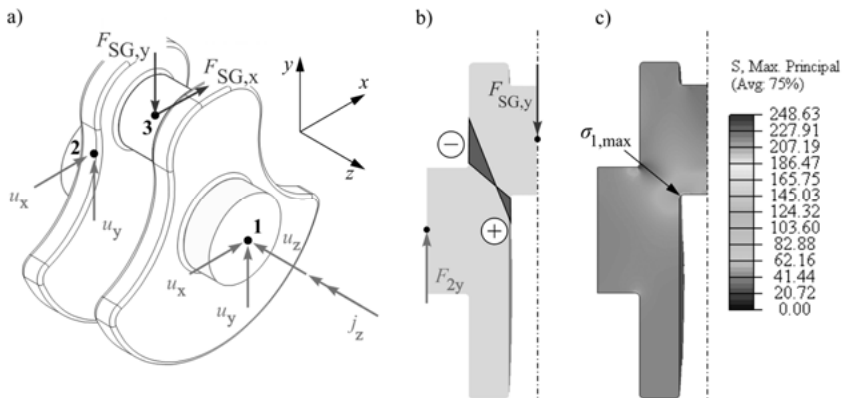
Hohe Gaskräfte wirken bei Kurbelwinkeln von  $300^\circ$  -  $500^\circ$ . Dieses Intervall wird deshalb näher betrachtet und mit Hilfe von elf Belastungsschritten ( $300^\circ$ ,  $320^\circ$ , ...  $500^\circ$ ) approximiert. Abhängig vom jeweiligen Belastungsschritt und der daraus resultierenden Stellung der Kurbelwellenkröpfung setzen sich die wirkenden Kräfte zusammen. Aus der seitlichen Abstützung  $N_G$  des Kolbens an der Zylinderwand in Folge der Pleuelschragstellung sowie der Gaskraft  $F_G$  ergibt sich die am Hubzapfen angreifende Kraft  $F_{SG}$ . Im Rahmen der Modellierung werden hieraus eine radial zum Hubzapfen wirkende Kraft  $F_{RG}$  und eine tangential Kraft  $F_{TG}$  berechnet (Abbildung 6-8).



**Abbildung 6-8:** Freischnitt des Kurbeltriebs nach [Tod12]

- a) Lastsituation am Hubkolben
- b) Lastsituation an der Kurbelwelle in Abhängigkeit des Kurbelwinkels

Die Anbindung der Kurbelwellenkröpfung erfolgt im Modell durch eine statische Radiallagerung. Dazu werden die Grundzapfenoberflächen mit Kinematikpunkten in der Rotationsachse der Kröpfung gekoppelt (Abbildung 6-9a).



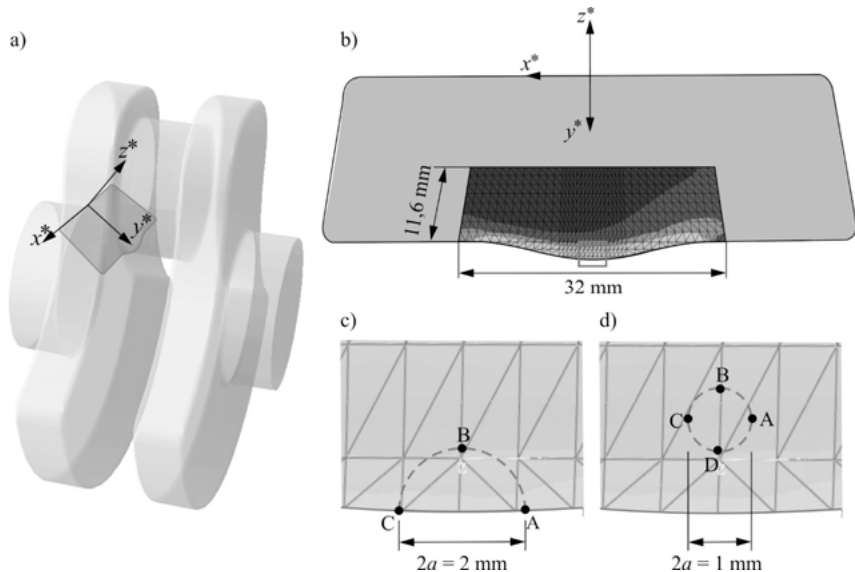
**Abbildung 6-9:** Lastsituation der Kurbelwellenkröpfung

- a) Lagerung und Belastungssituation
- b) Erkenntnisse der klassischen Mechanik
- c) Ergebnisse der FE-Spannungsanalyse

An Kinematikpunkt 1 sind die Verschiebungen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung sowie die Verdrehung um die  $z$ -Achse unterbunden. Kinematikpunkt 2 unterdrückt die Verschiebungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Radiale und tangential Komponenten der Gaskraft greifen am Kinematikpunkt 3 an, der in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung mit der Hubkolbenoberfläche gekoppelt ist. Dem Modell werden

die Eigenschaften eines Schmiedestahls zugewiesen. Die Ergebnisse der FE-Berechnung decken sich mit den Erkenntnissen der klassischen Mechanik und zeigen, dass im Bereich der Hohlkehle zwischen Kurbelwange und Hubzapfen die höchsten Zugspannungen auftreten (Abbildung 6-9b, 6-9c).

Von diesem hochbeanspruchten Bereich des Bauteils gehen in der Realität häufig Ermüdungsrisse aus. Abbildung 6-10 zeigt die Ebene, in der eine Kerbe in der Bauteiloberfläche sowie eine Werkstoffinhomogenität kurz unterhalb der Oberfläche unabhängig voneinander analysiert werden. Zur effizienten Anwendung der in Kapitel 5 vorgestellten Herangehensweisen und Konzepte empfiehlt sich die Transformation des Koordinatensystems in der Form, dass eine Koordinatenachse orthogonal zur Fehlstellenebene im Post-Prozessor ausgerichtet wird.



**Abbildung 6-10:** Fehlstellengeometrien in der Kurbelwellenkröpfung

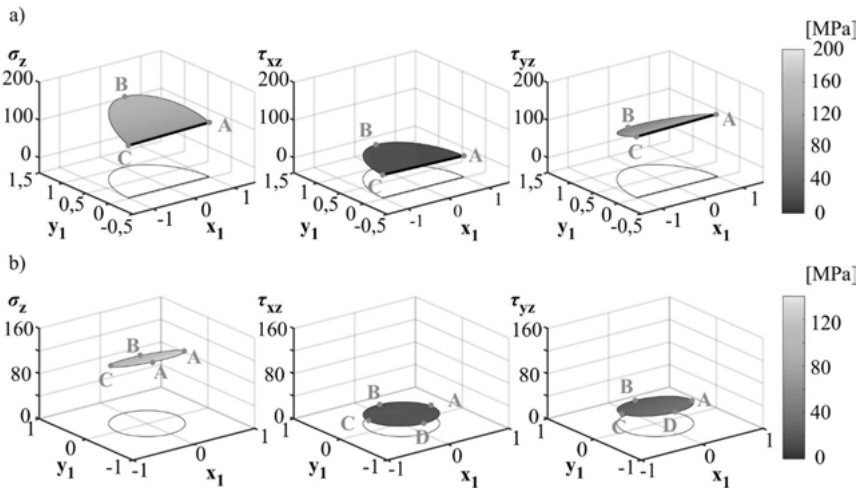
- Lage der Fehlstellenebene in der Kurbelwellenkröpfung und transformiertes Koordinatensystem
- Spannungssituation in der Fehlstellenebene
- Kerbe in der Bauteiloberfläche
- Werkstoffinhomogenität im Bauteil

Für die weitere bruchmechanische Bewertung ergibt die Analyse der Spannungsverläufe ein  $R$ -Verhältnis von null für die zyklischen Spannungsintensitäten. Die höchsten Spannungen treten bei einem Kurbelwinkel von  $380^\circ$  auf (vgl. Abbildung 6-7). Die Spannungen im fehlerstellenfreien Bauteil für diese Situation werden an den Bewertungspunkten der beiden betrachteten Fehlerstellen ausgelesen und zur Bestimmung der maximalen Rissbeanspruchung verwendet. Um Aussagen zur Genauigkeit der Spannungsintensitätsfaktoren treffen zu können, wird außerdem eine Referenzlösung mit FRANC3D erstellt (Tabelle 6.6).

**Tabelle 6.6:** Relevante Spannungskomponenten an den Bewertungspunkten im fehlerstellenfreien Bauteil sowie Spannungsintensitätsfaktoren der Referenzlösung

		Kerbe in der Bauteiloberfläche							Werkstoffinhomogenität im Bauteil						
		Spannungsdaten			Referenzlösung				Spannungsdaten			Referenzlösung			
		[MPa]			[N/mm <sup>3/2</sup> ]				[MPa]			[N/mm <sup>3/2</sup> ]			
Position		$\sigma_z$	$\tau_{zx}$	$\tau_{zy}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	$K_V$	$\sigma_z$	$\tau_{zx}$	$\tau_{zy}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	$K_V$
	A	102,6	15,6	128,6	177,9	-25,6	-91,4	219,9	116,8	16,8	31,6	84,0	-16,4	-21,2	92,7
	B	146,4	21,2	69,0	179,2	-84,2	20,4	223,4	95,2	14,8	21,2	76,4	-24,2	9,4	86,5
	C	97,6	21,0	123,8	159,8	25,6	105,6	215,6	113,6	16,8	29,6	83,8	14,8	20,8	91,7
	D	-	-	-	-	-	-	-	132,8	18,4	39,6	92,8	37,4	-11,4	110,8

Grundsätzlich resultiert aus der vielfältigen Menge an Randbedingungen für Motorenkomponenten und deren Variationsmöglichkeiten (Motorlast, -temperatur, Umgebungstemperatur etc.) eine große Anzahl verschiedenster Lastfälle, die es zu untersuchen gilt [KF11, Köh01]. Zwar wird im Rahmen dieser Validierung lediglich ein Lastfall näher untersucht, allgemein ist für derartige Problematiken jedoch die Anwendung der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise prädestiniert. Die Visualisierung der Schnittspannungen am Ort der Fehlstelle zeigt darüber hinaus nur gering ausgeprägte Inhomogenität (Abbildung 6-11), weshalb mit hinreichend exakten Ergebnissen gerechnet werden kann. Daher wird diese Herangehensweise nachfolgend näher betrachtet.



**Abbildung 6-11:** Schnittspannungsverläufe im fehlerstellenfreien Bauteil am Ort der Fehlstelle  
a) Kerbe in der Bauteiloberfläche  
b) Werkstoffinhomogenität im Bauteil

Die mit Hilfe der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweisen bestimmten Spannungsintensitätsfaktoren für die Bewertungspunkte beider Fehlstellengeometrien sind in Tabelle 6.7 aufgeführt. Das Verhältnis  $f$  von maximaler absoluter Abweichung des zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktors zum Thresholdwert ist für eine Einschätzung der Ergebnisabweichungen in Prozentzahlen angegeben. Für den Schmiedestahl der Kurbelwelle wurde ein Thresholdwert von  $164 \text{ N/mm}^{3/2}$  bei  $R = 0$  im Rahmen dieser Arbeit experimentell ermittelt (vgl. Kapitel 2.8.3).

**Tabelle 6.7:** Ergebnisgenauigkeit der Herangehensweisen und Konzepte

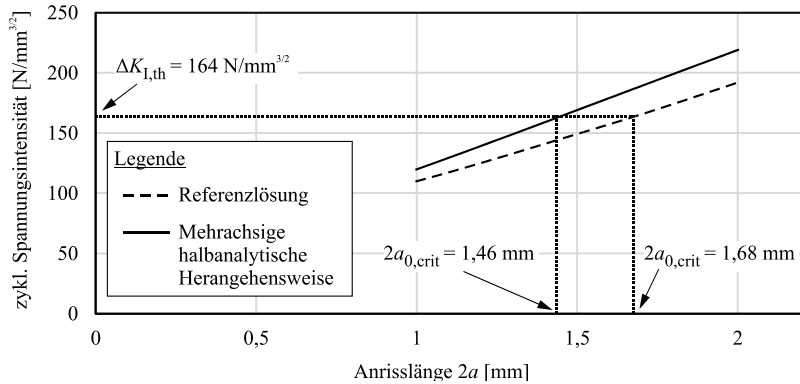
		Kerbe in der Bauteiloberfläche				Werkstoffinhomogenität im Bauteil			
		[N/mm <sup>3/2</sup> ]				[N/mm <sup>3/2</sup> ]			
		$f$ [%]				$f$ [%]			
		$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	$K_V$	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	$K_V$
Position	A	149,8	-12,4	-119,6	216,7	91,0	-16,6	-20,6	99,0
		-15,7	-51,5	30,8	-1,4	8,3	1,3	-2,8	6,8
	B	170,8	-92,6	20,6	223,8	74,0	-19,6	9,6	81,4
		-4,7	9,9	0,9	0,1	-3,1	-19,0	2,1	7,6
	C	142,6	39,6	129,2	225,8	91,0	15,6	20,9	98,7
		-10,7	54,6	22,3	4,7	-10,7	5,4	0,3	4,7
	D	-	-	-	-	103,8	36,6	-12,0	119,9
		-	-	-	-	11,8	-2,1	5,3	8,2

Die mehrachsige halbanalytische Lösung weist eine sehr gute Ergebnisgenauigkeit beim innenliegenden Riss auf. An der Kerbe in der Bauteiloberfläche zeigen dahingegen die Spannungsintensitäten große Abweichungen in den einzelnen Moden. In Teilen ist hierfür die leichte Inhomogenität des Spannungsfeldes verantwortlich. Wesentlich ist jedoch die unzureichend detaillierte Abbildung der rissumgebenden Geometrie im Ersatzmodell. Insbesondere in derart komplexen Geometriesituationen ist die Verwendung der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise zur Bestimmung der Rissbeanspruchung an außenliegenden Bewertungspunkten unter Umständen eingeschränkt. Letztlich treten am innenliegenden Bewertungspunkt B geringe Ungenauigkeiten auf. Die Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren weichen kaum von der Referenzlösung ab, weshalb kein Einfluss auf die bruchmechanische Bauteilbewertung erkennbar ist.

Unter Berücksichtigung des vorliegenden  $R$ -Verhältnisses und des Thresholdwertes erweist sich die innenliegende Werkstoffinhomogenität bei einer Größe von  $2a = 1 \text{ mm}$  als nicht wachstumsfähig:

$$\Delta K_{I,th} = 164 \text{ N/mm}^{3/2} > \Delta K_{V,max} = 119,9 \text{ N/mm}^{3/2} \tag{6.5}.$$

Mit Hilfe der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise wird die wachstumsfähige Anrisslänge durch lineare Interpolation zwischen den Basislösungen für  $2a = 1$  mm sowie für  $2a = 2$  mm ermittelt. In diesem Zusammenhang bietet sich der Vergleich der auf diese Weise ermittelten wachstumsfähigen Anrisslänge mit der wachstumsfähigen Anrisslänge der Referenzlösung an (Abbildung 6-12).



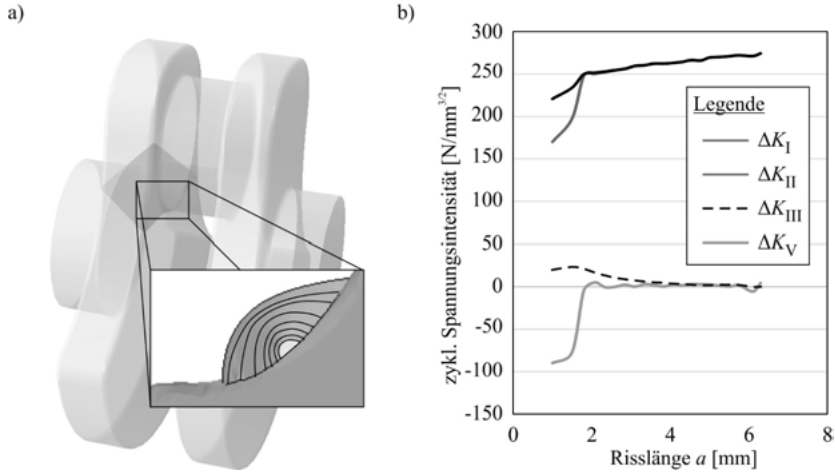
**Abbildung 6-12:** Ermittlung der wachstumsfähigen Anrisslänge mit Hilfe der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise und Vergleich zur wachstumsfähigen Anrisslänge der Referenzlösung

Die Gegenüberstellung der so ermittelten wachstumsfähigen Anrisslängen ergibt eine Differenz von 0,22 mm. Insbesondere im Vergleich mit den Bauteilabmessungen ist diese Differenz vernachlässigbar gering, was die hinreichende Ergebnissenauigkeit der mehrachsigen halbanalytischen Herangehensweise nachweist.

In der vorliegenden Abmessung von  $2a = 2$  mm ist die Kerbe in der Bauteiloberfläche hingegen unter den Aspekten des Ermüdungsrissswachstums ausbreitungsfähig:

$$\Delta K_{I,th} = 164 \text{ N/mm}^{3/2} < \Delta K_{V,max} = 225,8 \text{ N/mm}^{3/2} \quad (6.6).$$

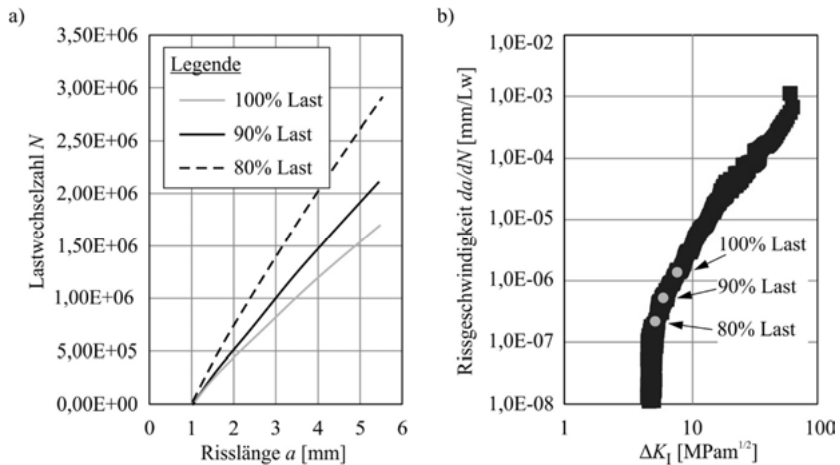
Zur Vorhersage des Risspfades und der verbleibenden Restlebensdauer ist eine Rissausbreitungssimulation durchzuführen (vgl. Kapitel 4.3). Abbildung 6-13a zeigt den Pfad der Rissausbreitung. Abknick- und Verdrehvorgänge in Folge der zyklischen räumlichen Mixed-Mode-Rissbeanspruchung sind deutlich erkennbar. In Abbildung 6-13b ist der Verlauf der Spannungsintensitätsfaktoren in den einzelnen Moden über die zunehmende Risslänge dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Riss normalspannungsgesteuert verläuft und sich somit die  $K_{II}$ - und  $K_{III}$ -Faktoren mit zunehmender Risslänge dem Wert von null annähern.



**Abbildung 6-13:** Ermüdungsrisswachstum in der Kurbelwellenkröpfung

- Abknick- und Verdrehvorgänge bei Ermüdungsrisswachstum der Kerbe in der Bauteiloberfläche
- Entwicklung der zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren mit zunehmender Risslänge

Die im Rahmen der Rissausbreitungssimulation ermittelten Spannungsintensitätsfaktorverläufe sind Grundlage für die Bestimmung der benötigten Lastwechselzahl. Hierzu wird die Rissgeschwindigkeitsgleichung integriert und die Lastwechselzahl bestimmt (Abbildung 6-14a).



**Abbildung 6-14:** Berechnung der Lebensdauer durch Integration der Rissgeschwindigkeitsgleichung

- Einfluss von Lastniveauevariationen auf die Lastwechselzahl
- Relevanz des unteren Bereichs der Rissgeschwindigkeitskurve für die Lastwechselzahl

Grundsätzlich hängt die Höhe der Spannungsintensitätsfaktoren proportional von der äußeren Belastung ab. Die Variation des Lastniveaus zeigt jedoch, dass die Reduzierung des Lastniveaus eine deutlich überproportionale Steigerung der Lastwechselzahl und damit einen Lebensdauergewinn zur Folge hat. Ursächlich hierfür ist die besondere Relevanz des unteren Bereichs der Rissgeschwindigkeitskurve für die Lastwechselzahl (Abbildung 6-14b).

Die in diesem Kapitel durchgeführte bruchmechanische Bewertung der Kurbelwellenkröpfung zeigt sowohl die Daseinsberechtigung der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Herangehensweisen und Konzepte als auch die Notwendigkeit von Rissausbreitungssimulationsprogrammen auf. Letztlich hängt die Entscheidung des verwendeten Ansatzes vom Ziel der bruchmechanischen Bauteiluntersuchung sowie dem hierfür vertretbaren Aufwand ab.

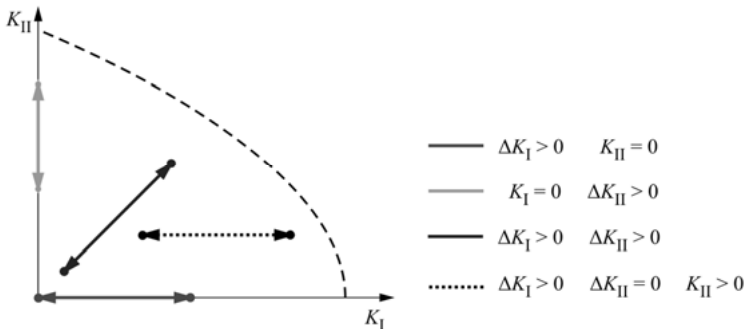
## 7 LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZU PRAXISRELEVANTEN FRAGESTELLUNGEN DER BRUCHM. BAUTEILBEWERTUNG

In der Praxis ergeben sich bei der Untersuchung von Rissen häufig Fragestellungen, deren Beantwortung erheblichen Spielraum lässt, jedoch entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis der bruchmechanischen Bauteilbewertung hat. In diesem Kapitel werden einige dieser Fragestellungen aufgegriffen und entsprechende Lösungsvorschläge vorgestellt.

In Kapitel 7.1 werden zunächst mögliche Ansätze zum Umgang mit nicht-proportionaler Mixed-Mode-Rissbeanspruchung erläutert. Kapitel 7.2 beschreibt den Einfluss unscharfer Materialdaten auf die Berechnungsergebnisse der Restlebensdauer. Der Einfluss anisotroper bruchmechanischer Materialkennwerte auf die Restlebensdauer ist in Kapitel 7.3 dargestellt.

### 7.1 Umgang mit nicht-proportionalen Mixed-Mode-Rissbeanspruchungen

Im Alltag unterliegen technische Bauteile häufig nicht-proportionalen Beanspruchungsüberlagerungen. So treten beispielsweise an Komponenten von Kraftwerken oder Verbrennungsmotoren thermische und zugleich mechanische Beanspruchungen auf, deren zeitliche Verläufe und Amplituden stark variieren. In Folge dessen ändert sich das Verhältnis von Normal-, ebener Schubspannung und nicht-ebener Schubspannung über den zeitlichen Verlauf, was zu veränderlichen Mode I-, Mode II- und Mode III-Anteilen der Rissbeanspruchung führt. Verglichen mit proportionaler Mixed-Mode-Rissbeanspruchung ergeben sich so weitere Kombinationsmöglichkeiten der grundlegenden Rissbeanspruchungsarten. Für den ebenen Mixed-Mode zeigt Abbildung 7-1 eine Auswahl möglicher Beanspruchungskombinationen.



**Abbildung 7-1:** Nicht-proportionale Rissbeanspruchungskombinationen für ebene Mixed-Mode-Fälle

Die zeitabhängigen Spannungsintensitätsfaktorverläufe können bei nicht-proportionaler Rissbeanspruchung in den einzelnen Moden verschiedene Frequenzen sowie Phasenverschiebungen

aufweisen. Im Allgemeinen setzen sich dann die Spannungsintensitätsfaktorverläufe einer harmonischen Sinusschwingung aus dem jeweiligen Mittelwert der Spannungsintensität ( $K_{I,m}$ ,  $K_{II,m}$ ) sowie den zugehörigen Amplituden ( $K_{I,a}$ ,  $K_{II,a}$ ) zusammen. Außerdem sind die Frequenzen ( $\omega_I$ ,  $\omega_{II}$ ) sowie die Phasenwinkel ( $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$ ) zu berücksichtigen. Es gilt:

$$K_I(t) = K_{I,m} + K_{I,a} \cdot \sin(\omega_I \cdot t + \Phi_I) \quad (7.1),$$

$$K_{II}(t) = K_{II,m} + K_{II,a} \cdot \sin(\omega_{II} \cdot t + \Phi_{II}) \quad (7.2).$$

Im Forschungsfeld der nicht-proportionalen Mixed-Mode-Rissbeanspruchung sind zurzeit noch viele Fragestellungen unbeantwortet. Insbesondere Einflüsse von Amplitude, Mittelspannung sowie Frequenz auf die Rissausbreitung müssen genauer untersucht werden. Nichtsdestotrotz sind in der Praxis bereits heutzutage Ansätze nötig, um die Wachstumsfähigkeit von Fehlstellen und Anrissen bei nicht-proportionaler Beanspruchung bestimmen zu können. Die zu diesem Thema in der Literatur diskutierten Hypothesen beschäftigen sich in erster Linie mit der Initiierung eines Anrisses und sind daher nur begrenzt zur Berechnung der wirkenden zyklischen Vergleichsspannungsintensität an vorhandenen Fehlstellen einsetzbar [HV16, ZV14, Hig09, QF96].

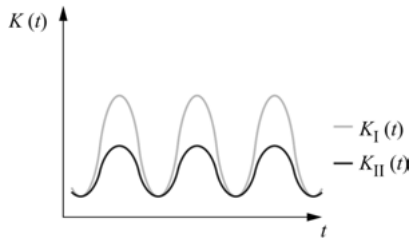
Nachfolgend werden auf dem  $K$ -Konzept (vgl. Kapitel 2.6.2, 2.6.3 und 2.7.4) basierende Vorschläge zur Bestimmung der zyklischen Vergleichsspannungsintensität und des zugehörigen  $R$ -Verhältnisses bei nicht-proportionaler Beanspruchung präsentiert. Vor allem die Bestimmung eines effektiven  $R$ -Verhältnisses ist dabei von besonderer Bedeutung, da letztlich das Thresholdwertverhalten des jeweiligen Werkstoffs hiervon abhängig ist. In diesem Zusammenhang seien die Ansätze nach DÖKER [Dök97, Dök02] und WALKER [Wal70] zur funktionalen Beschreibung der Thresholdwertkurve in Abhängigkeit des  $R$ -Verhältnisses genannt.

Ziel der Vorschläge ist die Untersuchung der Wachstumsfähigkeit detektierter Fehlstellen durch die Gegenüberstellung von zyklischer Vergleichsspannungsintensität und Thresholdwert in Abhängigkeit des effektiven  $R$ -Verhältnisses. Einflüsse nicht-proportionaler Beanspruchung auf das Ausbreitungsverhalten wachstumsfähiger Fehlstellen werden außer Acht gelassen.

Nachfolgend werden zum einen harmonisch gleichfrequente und gleichphasige Spannungsintensitätsfaktorverläufe betrachtet. Diese stellen einen Sonderfall der nicht-proportionalen Mixed-Mode-Beanspruchung dar (Kapitel 7.1.1 und 7.1.2). Es gilt  $\omega_I = \omega_{II}$  sowie  $\Phi_I = \Phi_{II} = 0$ . Zum anderen wird die Überlagerung einer zyklischen Rissbeanspruchung mit einer statischen Rissbeanspruchung untersucht (Kapitel 7.1.3).

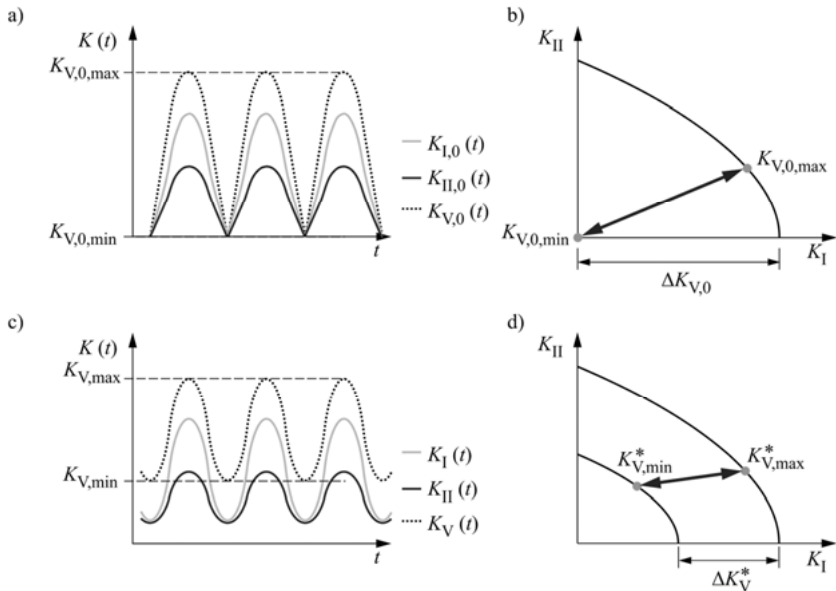
### 7.1.1 Ungleiche positive $R$ -Verhältnisse

In der Praxis können Bauteile Belastungen ausgesetzt sein, aus denen Mixed-Mode-Rissbeanspruchung mit ungleichen positiven  $R$ -Verhältnissen in den einzelnen Moden resultieren. In diesem Fall gleichfrequenter sowie gleichphasiger Spannungsintensitätsfaktorverläufe wirkt letztlich eine nicht-proportionale Rissbeanspruchung (Abbildung 7-2).



**Abbildung 7-2:** Nicht-proportionale Rissbeanspruchung bei ungleichen positiven  $R$ -Verhältnissen

Zur Bestimmung des zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktors mit zugehörigem  $R$ -Verhältnis können in dieser Situation zwei Ansätze alternativ als zielführend erachtet werden (Abbildung 7-3). In der Praxis empfiehlt sich situationsabhängig derjenige Ansatz, welcher im Hinblick auf die Gegenüberstellung mit dem für das vorliegende  $R$ -Verhältnis gültigen Thresholdwert die größte Konservativität aufweist.



**Abbildung 7-3:** Ansätze zur Berechnung der zyklischen Vergleichsspannungsintensität bei verschiedenen positiven  $R$ -Verhältnissen

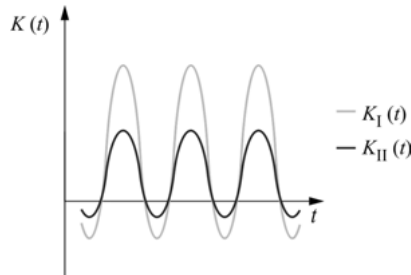
- Spannungsintensitätsfaktorverläufe bei Annahme von  $R = 0$
- Zyklische Vergleichsspannungsintensität bei Annahme von  $R = 0$
- Spannungsintensitätsfaktorverläufe in den einzelnen Rissbeanspruchungsmoden und daraus resultierender Vergleichsspannungsintensitätsfaktorverlauf
- Relevante zyklische Vergleichsspannungsintensität bei gewichtetem  $R$ -Verhältnis

Ein möglicher Ansatz zur Bestimmung der zyklischen Vergleichsspannungsintensität ist die Annahme eines  $R$ -Verhältnisses von  $R = 0$  in den einzelnen Rissbeanspruchungsmoden (Abbildung 7-3a). Aus den maximalen Spannungsintensitätsfaktoren im Zeitverlauf ( $K_{I,\max}$ ,  $K_{II,\max}$ ) ergeben sich so die zyklischen Spannungsintensitätsfaktoren ( $\Delta K_{I,0}$ ,  $\Delta K_{II,0}$ ), aus denen mit Gleichung 2.35 die zyklische Vergleichsspannungsintensität ( $\Delta K_{V,0}$ ) zu berechnen ist. Diese wird dem für  $R = 0$  gültigen Thresholdwert gegenübergestellt.

Alternativ sieht ein zweiter Ansatz die Berechnung eines zeitabhängigen Vergleichsspannungsintensitätsfaktorverlaufs auf Basis der Spannungsintensitätsfaktorverläufe der einzelnen Rissbeanspruchungsmoden vor. Aus maximalem und minimalem Vergleichsspannungsintensitätsfaktor im zeitlichen Verlauf ( $K_{V,\max}^*$ ,  $K_{V,\min}^*$ ) ergibt sich die für die bruchmechanische Bewertung relevante zyklische Vergleichsspannungsintensität ( $\Delta K_V^*$ ) sowie das zugehörige  $R$ -Verhältnis. Dieses präsentiert sich letztlich als gewichteter Wert auf Basis der  $R$ -Verhältnisse und Spannungsintensitätsfaktorgrößen in den einzelnen Moden.

### 7.1.2 Ungleiche negative $R$ -Verhältnisse

Neben ungleichen positiven  $R$ -Verhältnissen treten außerdem häufig ungleiche negative  $R$ -Verhältnisse der Rissbeanspruchung bei gleicher Frequenz und Phase auf (Abbildung 7-4). Diese erfordern wiederum eine gesonderte Betrachtung.

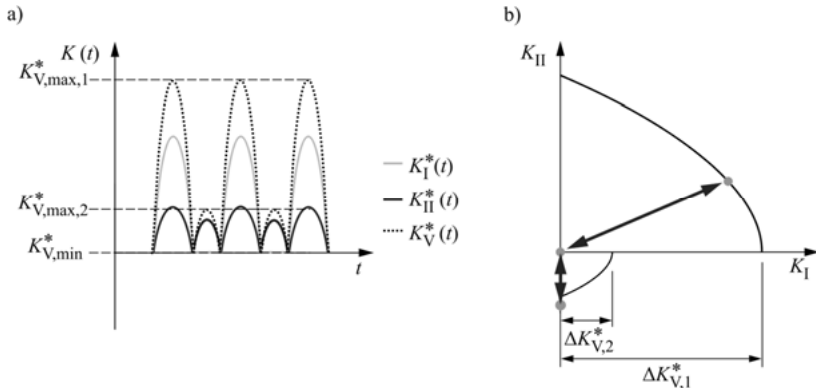


**Abbildung 7-4:** Nicht-proportionale Rissbeanspruchung bei ungleichen negativen  $R$ -Verhältnissen

Für den vorliegenden Fall wird zunächst die gesonderte Betrachtung des Spannungsintensitätsfaktorverlaufs für Mode I vorgeschlagen. Unter der Annahme, dass in diesem Mode lediglich rissöffnende Spannungsintensitätsfaktorkomponenten rissbeanspruchungsrelevant sind, werden nur positive Komponenten des Spannungsintensitätsfaktorverlaufs betrachtet [Wal70]. Für diesen Mode gilt daher  $R = 0$ . Die zyklische Spannungsintensität für Mode I ist dementsprechend gleich der maximalen Spannungsintensität für Mode I im zeitlichen Verlauf.

Der Ansatz zum Umgang mit negativen  $R$ -Verhältnissen für Mode II wird aus dem  $K_I$ - $K_{II}$ -Diagramm abgeleitet. Die dort aufgeführten bruchmechanischen Materialkennwerte für Mode II sind für positive  $R$ -Verhältnisse bestimmt. Das Vorzeichen des Spannungsintensitätsfaktors  $K_{II}$  hängt dabei von der Belastungsrichtung ab, hat jedoch keinerlei Einfluss auf den Thresholdwert. Vielmehr ist bei negativen  $R$ -Verhältnissen für Mode II und entsprechender

Rissbeanspruchung die Initiierung von zwei Rissen unabhängig voneinander zu beobachten. Der Teil der zyklischen Spannungsintensität für Mode II mit positivem Vorzeichen ist für den Riss mit theoretisch negativem Abknickwinkel entscheidend. Umgekehrt ist der Teil mit negativem Vorzeichen für den Riss mit theoretisch positivem Abknickwinkel maßgebend. Daraus folgt für den Mode II die Annahme eines effektiven  $R$ -Verhältnisses von null, welches im Rahmen der Wachstumsfähigkeitsuntersuchung heranzuziehen und dem entsprechenden Thresholdwert gegenüberzustellen ist. Eine Erweiterung des  $K_I$ - $K_{II}$ -Diagramms in den negativen Mode II-Bereich ist daher sinnvoll. Vor diesem Hintergrund zeigt Abbildung 7-5a den Verlauf der für die Risswachstumsbewertung effektiven Spannungsintensitätsfaktoren.



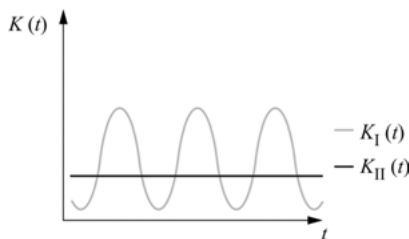
**Abbildung 7-5:** Berechnung der zyklischen Vergleichsspannungsintensität bei verschiedenen negativen  $R$ -Verhältnissen  
a) Effektive Spannungsintensitätsfaktorverläufe zur Risswachstumsbewertung  
b) Zyklische Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren in Folge der getrennten Betrachtung negativer und positiver Mode II-Rissbeanspruchung

Die getrennte Betrachtung positiver sowie negativer Komponenten des Spannungsintensitätsfaktorverlaufs für Mode II (Abbildung 7-5b) führt im Zeitverlauf zu zwei zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktoren ( $\Delta K_{V,1}^*$ ,  $\Delta K_{V,2}^*$ ). Natürlicherweise ist für die Bewertung der Ausbreitungsfähigkeit einer Fehlstelle oder eines Risses der größere der beiden Werte heranzuziehen. Da unter den hier getroffenen Annahmen in den einzelnen Moden  $R = 0$  gilt, ist dieser Wert auch für den zyklischen Vergleichsspannungsintensitätsfaktor anzusetzen.

Die hier gemachten Überlegungen zeigen, dass die simple Betrachtung der zyklischen Spannungsintensität in den einzelnen Moden bei negativen  $R$ -Verhältnissen nicht ausreichend ist. Diese Erkenntnis deckt sich mit den Untersuchungsergebnissen von DÖKER [DÖK97], VASUDEVAN und SADANANDA [SV04], wonach neben dem Thresholdwert  $\Delta K_{th}$  ebenso dessen zugehöriger maximaler Spannungsintensitätsfaktor  $K_{max,th}$  als zusätzlicher Schwellenwert im Rahmen des Zwei-Parameter-Ansatzes von entscheidender Bedeutung ist.

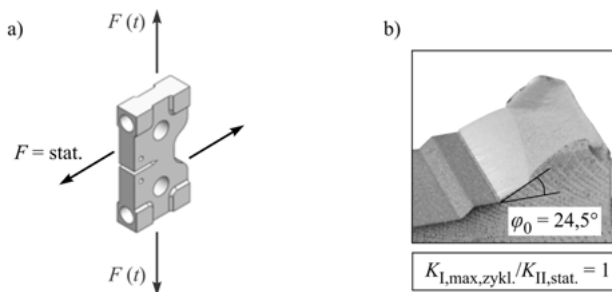
### 7.1.3 Statische Mode II-Beanspruchung

Eine weitere praxisrelevante Rissbeanspruchungssituation ist die Überlagerung eines zyklischen Spannungsintensitätsverlaufs mit einem statischen Verlauf. Beispielhaft wird hier eine zyklische Mode I-Rissbeanspruchung ( $R > 0$ ) sowie eine gleichzeitig auftretende statische Mode II-Rissbeanspruchung ( $R = 0$ ) betrachtet (Abbildung 7-6).



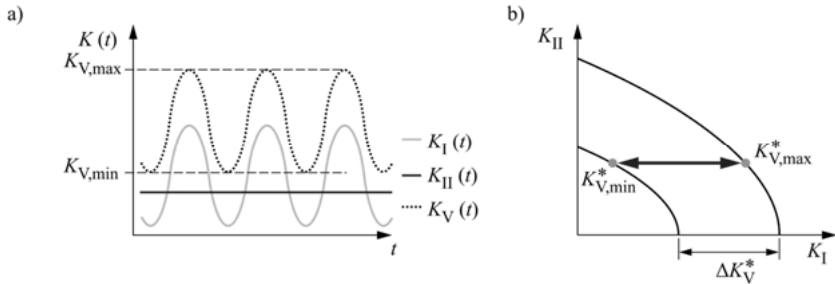
**Abbildung 7-6:** Überlagerung einer zyklischen Mode I-Rissbeanspruchung mit einer statischen Mode II-Rissbeanspruchung

Grundlegende Annahme bei der Bewertung dieser Beanspruchungssituation ist die Beeinflussung einer potentiellen Ermüdungsrissoausbreitung durch die statische Mode II-Belastung, obwohl hier  $\Delta K_{II} = 0$  gilt. Diese Annahme wird durch experimentelle Untersuchung von CTSR-Proben (Abbildung 7-7a) gestützt [Ebe16]. Bei einem Verhältnis von maximaler zyklischer Mode I-Belastung zu statischer Mode II-Belastung  $K_{I,max,zykl}/K_{II,stat} = 1$  ergibt sich ein Rissabknickwinkel  $\varphi_0 = 24,5^\circ$ , was den potentiellen Einfluss statischer Mode II-Rissbeanspruchung auf das Ermüdungsrissswachstum zeigt (Abbildung 7-7b).



**Abbildung 7-7:** Rissausbreitungsverhalten bei Überlagerung von zyklischer und statischer Rissbeanspruchung nach [Ebe16]  
a) CTSR-Probe  
b) Einfluss der statischen Mode II-Rissbeanspruchung auf das Ermüdungsrissswachstumsverhalten

Vor diesem Hintergrund wird die Berechnung der bewertungsrelevanten zyklischen Vergleichsspannungsintensität aus den Maximalwerten ( $K_{V,max}^*$ ,  $K_{V,min}^*$ ) im zeitlichen Verlauf vorgeschlagen. Dementsprechend ergibt sich das  $R$ -Verhältnis als gewichtete Größe (Abbildung 7-8).



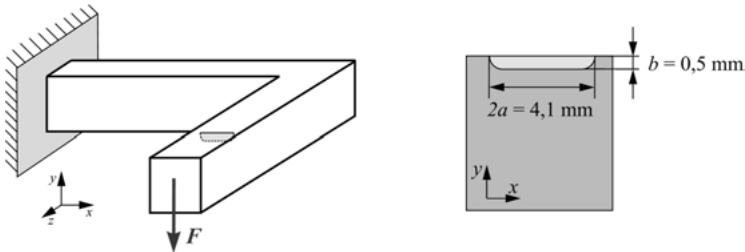
**Abbildung 7-8:** Berechnung der zyklischen Vergleichsspannungsintensität bei Überlagerung von zyklischer und statischer Rissbeanspruchung  
 a) Effektive Spannungsintensitätsfaktorverläufe zur Risswachstumsbewertung  
 b) Zyklischer Vergleichsspannungsintensitätsfaktor

## 7.2 Einfluss unscharfer Materialdaten auf die Restlebensdauer

Im Falle ausbreitungsfähiger Risse und Fehlstellen tritt in der Praxis häufig die Frage nach der verbleibenden Restlebensdauer bis zum Bauteilversagen auf. Neben dem Verlauf der Spannungsintensitätsfaktoren über die Risslänge ist in diesem Zusammenhang die Rissfortschrittskurve sowie deren mathematische Beschreibung wesentlich (vgl. Kapitel 2.7.3).

Die experimentell ermittelten Materialkennwerte weisen häufig Streuungen auf, wodurch Spielraum bei der Anpassung der FORMAN/METTU-Gleichung entsteht (Abbildung 7-10). Vor allem von unscharfen Materialdaten im unteren Bereich der Rissfortschrittskurve ist eine erhebliche Beeinflussung der Restlebensdauer zu erwarten. Bereits leichte Unterschiede einzelner Parameter können erhebliche Differenzen in den Berechnungsergebnissen der Restlebensdauer hervorrufen. Nachfolgend werden beispielhaft die Einflüsse des Thresholdwertes sowie der Parameter  $p$ ,  $C_{FM}$  und  $n_{FM}$  betrachtet.

Der Einfluss unscharfer Materialdaten mit der resultierenden Mehrzahl an Anpassungsmöglichkeiten auf die Restlebensdauer soll anhand eines größtenteils Mode I belasteten Risses ( $R = 0,1$ ) in einer Rahmenstruktur (vgl. Abbildung 5-1) aufgezeigt werden (Abbildung 7-9).



**Abbildung 7-9:** Rissgeometrie zur Untersuchung des Lebensdauereinflusses unscharfer Materialdaten

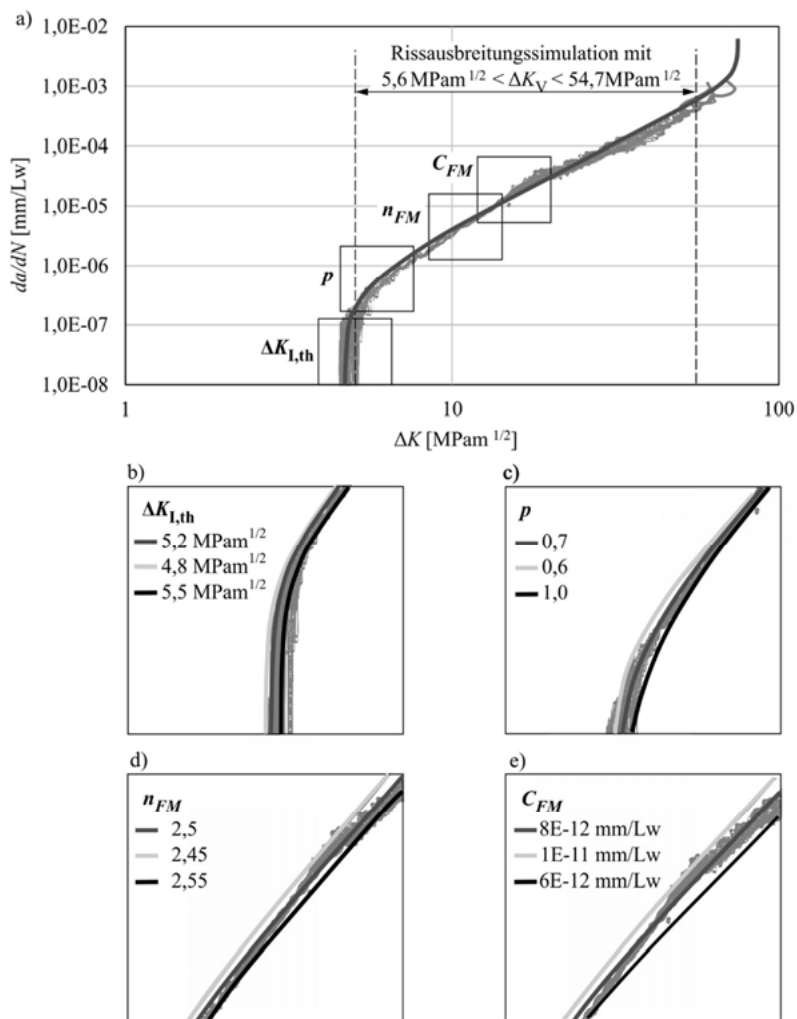


Abbildung 7-10: Möglichkeiten der FORMAN/METTU-Anpassung

Die Randbedingungen des Simulationsmodells sind so gewählt, dass ein möglichst großer Bereich der Rissfortschrittskurve durch die Rissbeanspruchung abgebildet ist. Zu Beginn der Rissausbreitung liegt die zyklische Vergleichsspannungsspannung mit  $5,6 \text{ MPam}^{1/2}$  knapp über dem Thresholdwert. Das Risswachstum wird bis zu einer Risslänge von  $b = 19,79 \text{ mm}$  simuliert. Die zyklische Rissbeanspruchung liegt hier bei  $54,7 \text{ MPam}^{1/2}$ . Tabelle 7.1 beinhaltet die auf einen

Referenzwert von  $1,84 \cdot 10^7$  Lw normierten Lebensdauern für die einzelnen Parameterkombinationen.

**Tabelle 7.1:** Lebensdauereinfluss ausgewählter Parameter der FORMAN/METTU-Gleichung

Thresholdwert [MPa <sup>m</sup> ] <sup>1/2</sup>		Parameter $p$ [-]		Parameter $C_{FM}$ [mm/Lw]		Parameter $n_{FM}$ [-]	
Wert	normierte Lebens- dauer	Wert	normierte Lebens- dauer	Wert	normierte Lebens- dauer	Wert	normierte Lebens- dauer
4,8	0,87	0,5	0,72	1E-11	0,70	2,55	0,78
5,2	1,00	0,7	1,00	7E-12	1,00	2,5	1
5,5	1,09	0,9	1,41	6E-12	1,17	2,45	1,28

Ausgehend von der Parameterkombination dieses Referenzwertes wird jeweils ein Parameter verändert. Die Ergebnisse der Lebensdauerberechnung zeigen teils erhebliche Unterschiede auf. Insbesondere die Parameter  $p$ ,  $C_{FM}$  und  $n_{FM}$  sind mit Lebensdauerunterschieden zum Referenzwert von bis zu 41% besonders sensibel. Dahingegen ergibt die Variation des Thresholdwertes nur geringe Differenzen in der Lebensdauer. Vielmehr hat dieser besonderen Einfluss auf die wachstumsfähige Anrisslänge.

Vor dem Hintergrund der hier gewonnenen Erkenntnisse sind etwaige Berechnungsergebnisse in der Praxis zu interpretieren und mit entsprechend großen Sicherheitsfaktoren zu beaufschlagen. Im Gesamtzusammenhang mit den in Kapitel 5 vorgestellten Herangehensweisen und Konzepten werden die dort auftretenden Ergebnisabweichungen relativiert.

### 7.3 Einfluss anisotroper Materialkennwerte auf die Restlebensdauer bei Mixed-Mode-Rissbeanspruchung

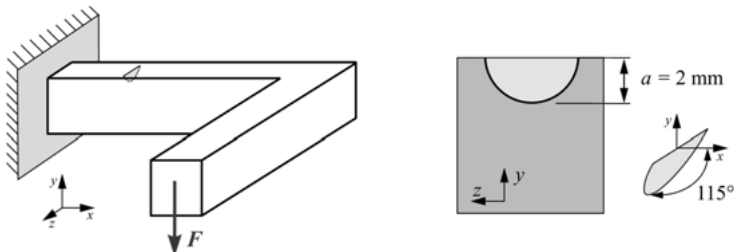
Bruchmechanische Materialkennwerte wie Thresholdwert oder Risszähigkeit weisen in der Regel anisotropes Verhalten bzgl. der Rissbeanspruchungsmoden auf. Zur Berücksichtigung dieser Tatsache bieten Ansätze zur Bestimmung der für die Restlebensdauerberechnung benötigten zyklischen Vergleichsspannungsintensität die Möglichkeit einer Anpassung an Versuchsergebnisse. So kann beispielsweise das 3D-Kriterium von RICHARD (Gleichung 2.36) mit Hilfe der Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  entsprechend verändert werden:

$$\Delta K_V = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\Delta K_I^2 + 4 \cdot (\alpha_1 \cdot \Delta K_{II})^2 + 4 \cdot (\alpha_2 \cdot \Delta K_{III})^2} \quad (7.3).$$

Ziel ist die Verschiebung von Thresholdwert- und Bruchgrenzfläche in Richtung der Versuchsergebnisse. Die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  geben in diesem Zusammenhang jeweils das Verhältnis der Risszähigkeiten für Mode II und Mode III zur Risszähigkeit bei Mode I an:

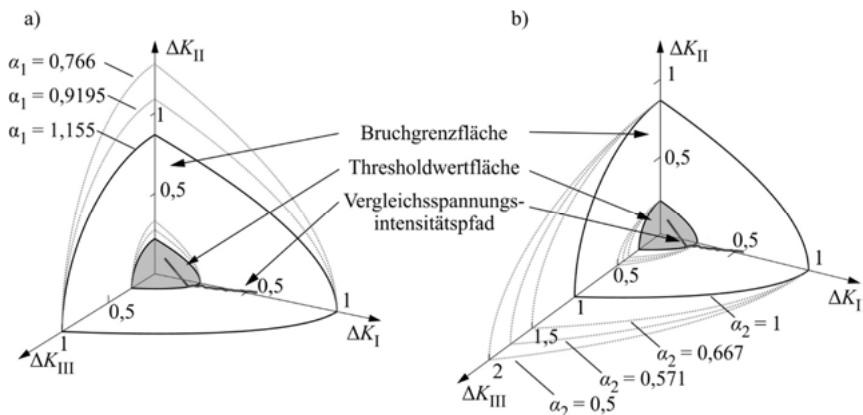
$$\alpha_1 = \frac{K_{IC}}{K_{IIC}} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{K_{IC}}{K_{IIIc}} \quad (7.4).$$

Experimentelle Untersuchungsergebnisse [Ebe16, Sch12, VP12] weisen die Konservativität der in der Praxis häufig verwendeten Koeffizienten  $\alpha_1 = 1,155$  und  $\alpha_2 = 1$  des 3D-Kriteriums von RICHARD nach. Nichtsdestotrotz treten vor dem Hintergrund des Leichtbaugedankens und des effizienten Ressourceneinsatzes immer wieder Forderungen nach dem Abbau von Konservativitäten auf. Daher wird nachfolgend der Einfluss entsprechender Anpassungen anhand eines geneigten, halbkreisförmigen Risses in einer Rahmenstruktur aufgezeigt (Abbildung 7-11). Dieser ist einer räumlichen Mixed-Mode-Rissbeanspruchung ( $R = 0,1$ ) ausgesetzt.



**Abbildung 7-11:** Rissgeometrie zur Untersuchung des Lebensdauereinflusses unscharfer Materialdaten

Im Rahmen dieser Untersuchung wurden die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  mehrfach variiert, um die Anpassung an etwaige Versuchsergebnisse bestmöglich abzubilden. Abbildung 7-12 zeigt die daraus resultierenden Thresholdwert- und Bruchgrenzflächen. Außerdem ist die Entwicklung des Spannungsintensitätsfaktorverlaufs bei zunehmender Risslänge dargestellt.



**Abbildung 7-12:** Anpassung von Thresholdwert- und Bruchgrenzfläche an experimentell ermittelte Materialkennwert

- a) Anpassung für den Mode II
- b) Anpassung für den Mode III

Der Spannungsintensitätsfaktorverlauf weist ein für Ermüdungsrissswachstum charakteristisches Verhalten auf und nähert sich normalspannungsgesteuert einer reinen Mode I-Rissbeanspruchung an. In dieser Tatsache ist der geringe Einfluss anisotroper Materialkennwerte auf die Lebensdauer begründet. Abweichungen in der zyklischen Vergleichsspannungsintensität ergeben sich lediglich zu Beginn des Rissswachstums. Bei einer Risslänge von 12,9 mm sind die berechneten Werte nahezu identisch. Bei der Anpassung des Koeffizienten  $\alpha_1$  ergibt sich somit eine maximale Abweichung von der Referenzlebensdauer ( $N = 1,57 \cdot 10^7$  Lw mit  $\alpha_1 = 1,155$  und  $\alpha_2 = 1$ ) von 5% (Tabelle 7.2).

**Tabelle 7.2:** Skalierung der Mode II-Materialeigenschaften (mit  $\alpha_2 = 1$ )

Risslänge [mm]	$\alpha_1 = 1,155$		$\alpha_1 = 0,9195$		$\alpha_1 = 0,766$	
	$\Delta K_V$ [N/mm <sup>3/2</sup> ]	normierte Lebens- dauer	$\Delta K_V$ [N/mm <sup>3/2</sup> ]	normierte Lebens- dauer	$\Delta K_V$ [N/mm <sup>3/2</sup> ]	normierte Lebens- dauer
2	654,3	-	584,2	-	542,2	-
12,9	1519,8	1	1519,4	1,03	1519,1	1,05

Auch die Anpassung des Koeffizienten  $\alpha_2$  für den Mode III hat erwartungsgemäß geringen Einfluss auf die verbleibende Lebensdauer. Einfluss haben die veränderten Koeffizienten lediglich auf die zyklische Vergleichsspannungsintensität zu Beginn der Ermüdungsrisssausbreitung. Es treten Unterschiede von maximal 9% in der berechneten Restlebensdauer auf.

**Tabelle 7.3:** Skalierung der Mode III- Materialeigenschaften (mit  $\alpha_1 = 1,155$ )

Risslänge [mm]	$\alpha_2 = 1$		$\alpha_2 = 0,667$		$\alpha_2 = 0,571$		$\alpha_2 = 0,5$	
	$\Delta K_V$ [N/mm <sup>3/2</sup> ]	normierte Lebens- dauer	$\Delta K_V$ [N/mm <sup>3/2</sup> ]	normierte Lebens- dauer	$\Delta K_V$ [N/mm <sup>3/2</sup> ]	normierte Lebens- dauer	$\Delta K_V$ [N/mm <sup>3/2</sup> ]	normierte Lebens- dauer
2	654,3	-	621,6	-	614,3	-	609,6	-
12,9	1519,8	1	1519,8	1,05	1519,5	1,08	1519,8	1,09

Die Untersuchungen zeigen die geringe Bedeutung anisotroper Materialkennwerte für die Restlebensdauerbestimmung. Ein erheblicher Einfluss kann sich jedoch bei der Bestimmung der Wachstumsfähigkeit von Fehlstellen und Rissen ergeben. Diese Tatsache ist bei der Wahl der Koeffizienten durch hinreichende Konservativität zu berücksichtigen.

## 8 FAZIT

Der proaktiven Identifikation kritischer Fehlstellen während der Produktentstehung und des Bauteilbetriebs kommt bei der Abwendung von Schäden durch Ermüdungsrissswachstum eine zentrale Bedeutung zu. Die Entscheidung über die technische Einsetzbarkeit fertigungs- oder prozessbedingt fehlerstellenbehafteter oder durch Einflüsse während des Betriebs beschädigter Bauteile wird im Rahmen des bruchmechanischen Festigkeitsnachweises getroffen. Dabei erfolgt die Gegenüberstellung von Rissbeanspruchung und experimentell zu ermittelnder Rissbeanspruchbarkeit in Form von bruchmechanischen Materialdaten. In diesem Kontext bestimmt unter anderem das mehrachsige Spannungsfeld in der direkten Rissumgebung die Rissbeanspruchung in Form von Spannungsintensitätsfaktoren. Für deren Berechnung stellen heutzutage auf der Finite-Elemente-Analyse basierende Ansätze den Stand der Technik dar.

Wichtige Daten, wie beispielsweise die im Bauteil wirkenden Spannungsfelder, sind zunächst unabhängig von der bruchmechanischen Bewertung etwaig auftretender Fehlstellen verfügbar. Bisher können diese jedoch bei herkömmlicher Bestimmung der Rissbeanspruchung mit Hilfe von Rissausbreitungssimulationsprogrammen kaum verwendet werden. Zeit- und kostenintensive Neumodellierungen sind häufig nötig und stehen den Potentialen der Rissausbreitungssimulationsprogramme, wie beispielsweise der nachgewiesenen hohen Ergebnissenauigkeit, entgegen. Der Fokus dieser Arbeit lag daher auf der Erarbeitung bruchmechanischer Herangehensweisen, welche die vorhandenen mehrachsigen Spannungsfelder fehlerstellenfreier Bauteile bei der Bestimmung der Rissbeanspruchung nutzbar machen und gleichzeitig den zuvor abgeleiteten Anforderungen der modernen Produktentstehung und -nutzung genügen.

In diesem Zusammenhang wird vor allem in frühen Phasen der Produktentstehung die Notwendigkeit von Herangehensweisen deutlich, die bei geringem Aufwand eine hinreichende Ergebnissenauigkeit bieten. Die erarbeiteten Herangehensweisen basieren daher größtenteils auf Ersatzmodellen, wodurch der Modellierungs- und Berechnungsaufwand erheblich reduziert werden kann. Während die auf Grundlage von Basislösungen bestimmte Rissbeanspruchung lediglich einen ersten Wert darstellt, beziehen die hier entwickelten Herangehensweisen die Mehrachsichtigkeit des Spannungsfeldes, in dem sich der Riss befindet, in die Berechnung mit ein. Eine signifikante Steigerung der Ergebnissenauigkeit im Vergleich zu den in der Regel einachsig belasteten Basislösungen ist die Folge.

In ihrer Gesamtheit sind die entwickelten Herangehensweisen als ein Katalog von sich ergänzenden Hilfsmitteln zur bruchmechanischen Bauteilbewertung zu interpretieren. Die Ergebnissenauigkeit korreliert dabei mit dem einzusetzenden Aufwand. Die Wahl des jeweiligen Ansatzes hängt letztlich von der Problemstellung, der Phase der Produktentstehung und dem damit einhergehenden Anspruch an die Ergebnissenauigkeit sowie der Anzahl der zu untersuchenden Lastfälle ab. Modellierungsaufwand sowie Rechenzeit können gezielt eingespart und an den jeweiligen Stand im Produktenstehungsprozess angepasst werden, da letztlich die erste Überprüfung der technischen Machbarkeit einer Produktidee geringere Ergebnissenauigkeit erfordert als die technische Freigabe in späten Phasen der Produktentstehung. Somit gestalten die

entwickelten Herangehensweisen den Prozess der bruchmechanischen Bauteilbewertung wesentlich effizienter. Eine weitergehende Umsetzung in analytische Berechnungstools steigert die Effizienz deutlich.

Die an den Beispielen eines Y-Siebfilters aus dem Kraftwerksbereich sowie einer Kurbelwelle im Verbrennungsmotor durchgeführte Validierung der Herangehensweisen weist deren Ergebnisgenauigkeit sowie Einsetzbarkeit nach und gibt Handlungsempfehlungen anhand dieser konkreten Problemstellungen. Insbesondere für den Einsatz bei bruchmechanischen Untersuchungen mit dem Ziel einer Wachstumsfähigkeitsbewertung von Fehlstellen und Rissen zeigen sich die entwickelten Herangehensweisen prädestiniert. Darüber hinaus wird im Zuge der Validierung die Daseinsberechtigung der Rissausbreitungssimulationsprogramme deutlich. Zur Bestimmung von Risspfad und Restlebensdauer für den Fall wachstumsfähiger Risse und Fehlstellen sind diese alternativlos.

Auch wenn mit Hilfe der Herangehensweisen dieser Arbeit und bei herkömmlicher Anwendung von Rissausbreitungssimulationsprogrammen nachweislich exakte Werte für die Rissbeanspruchung bestimmt werden können, so stehen diesen häufig unscharfe experimentelle Daten der materialabhängigen Rissbeanspruchbarkeit gegenüber. Insbesondere im Bereich der Restlebensdauerabschätzung zeigen die Untersuchungen teils erhebliche Einflüsse, welche entsprechend konservative Berücksichtigung finden müssen. Der Einfluss anisotroper Materialkennwerte auf die Restlebensdauer ist dagegen vernachlässigbar gering.

Zukünftiger Forschungsbedarf ergibt sich insbesondere im Bereich der nicht-proportionalen Mixed-Mode-Rissbeanspruchung. Hier fehlen momentan experimentell validierte Ansätze für den Umgang mit einer derartigen Beanspruchung im Hinblick auf die Bewertung der Wachstumsfähigkeit von Fehlstellen und Rissen. Da sich die Praxis allerdings bereits heute mit derartigen Problematiken konfrontiert sieht, sind in dieser Arbeit erste ingenieurmäßige Lösungsvorschläge hierzu aufgezeigt.

**LITERATURVERZEICHNIS**

- [Ago17-ol] Agora Energiewende: Stromerzeugung und -verbrauch. Unter: <https://www.agora-energiewende.de/de/themen/-agothem-/Produkt/produkt/76/Agorameter/>, 09.06.2017.
- [Alb94] ALBERS, A.: Simultaneous Engineering, Projektmanagement und Konstruktionsmethodik – Werkzeuge zur Effizienzsteigerung. In: Proceedings zum deutschen Konstrukteurtag, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1994, S. 73-106.
- [And17] ANDERSON, T. L.: Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications. 4<sup>th</sup> Edition, CRC Press, Boca Raton, 2017.
- [AP84] ANDRASIC, C. P.; PARKER, A. P.: Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack face loading. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 19, 1984, pp. 187-193.
- [APW+15] ANDERL, R.; PICARD, A.; WANG, Y.; FLEISCHER, J.; DOSCH, S.; KLEE, B.; BAUER, J.: Leitfaden Industrie 4.0 – Orientierungshilfe zur Einführung in den Mittelstand. VDMA-Verlag GmbH, Frankfurt/Main, 2015.
- [ASM15] ASME: Boiler and Pressure Vessel Code. American Society of Mechanical Engineers, 2015.
- [AST08] ASTM: Annual Book of ASTM Standards 2008. Section 3: Metals Test Methods and Analytical Procedures, Volume 03.01, Metals – Mechanical Testing; Elevated and Low-Temperature Tests; Metallography, E647-08, 2008.
- [AST09] ASTM: Annual Book of ASTM Standards 2009. Section 3: Metals Test Methods and Analytical Procedures, Volume 03.01, Metals – Mechanical Testing; Elevated and Low-Temperature Tests; Metallography, E399-09, 2009.
- [Bar76] BARSOUM, R. S.: On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. In: International Journal of Numerical Methods in Engineering, Volume 10, 1976, pp. 25-37.
- [Bar77] BARSOUM, R. S.: Triangular quarter point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. In: International Journal of Numerical Methods in Engineering, Volume 11, 1977, pp. 85-98.
- [BBF07] BEGHINI, M.; BERTINI, L.; FONTANARI, V.: A weight function for 2D subsurface cracks under general loading conditions. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 75, 2008, pp. 427-439.

- [BBI92] BITTENCOURT, T. N.; BARRY, A.; INGRAFFEA, A. R.: Comparison of Mixed-Mode stress intensity factors obtained through displacement correlation, J-integral formulation and modified crack closure integral. In: *Fracture Mechanics, Proceedings of the 22nd National Symposium, Volume 2, Atlanta, 1992*, pp. 69-82.
- [Bei95] BEITZ, W.: Simultaneous Engineering – Eine Antwort auf die Herausforderungen Qualität, Kosten und Zeit. In: *Strategien zur Produktivitätssteigerung – Konzepte und praktische Erfahrungen, ZfB-Ergänzungsheft, 3. Ausgabe, 1995*, S. 3-11.
- [Ber80] BERNIS, H.: Bruchverhalten der Stähle. In: *Zeitschrift Werkstofftechnik, 11. Ausgabe, 1980*, S. 145-153.
- [BHV14] BAUERNHANS, T.; TEN HOMPEL, M.; VOGEL-HEUSER, B.: *Industrie 4.0 in Produktion, Automatisierung und Logistik – Anwendung, Technologien, Migration*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2014.
- [BM15] BORNTROP, H.-J.; MARQUARDT, R.-M.: *Die Energiewende – Verteilungskonflikte, Kosten und Folgen*. PapyRossa-Verlag, Köln, 2015.
- [BP93] BLUMENAUER, H.; PUSCH, G.: *Technische Bruchmechanik*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1993.
- [BRR14] BÜRGEL, R.; RICHARD, H.A.; RIEMER, A.: *Werkstoffmechanik. Bauteile sicher beurteilen und Werkstoffe richtig einsetzen*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2014.
- [BS07] British Standard 10213: Steel castings for pressure purposes. British Standard Institution, London, 2007.
- [BS13a] British Standard 7910: Guide to methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures. British Standard Institution, London, 2013.
- [BS13b] BRAESS, H.-H.; SEIFFERT, U.: *Vieweg Handbuch Kraftfahrzeugtechnik*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2013.
- [BS89] BANK-SILLS, L.; SHERMAN, D.: On quarter-point three dimensional finite elements. In: *International Journal of Fracture, Volume 41, 1989*, pp. 177-196.
- [BS92] BANK-SILLS, L.; SHERMAN, D.: On the computation of stress intensity factors for threedimensional geometries by means of the stiffness derivative and J-Integral methods. In: *International Journal of Fracture, Volume 53, 1992*, pp. 1-20.
- [BMW17-ol] Bundesministerium für Energie und Wirtschaft: Entwicklung der Stromerzeugung und der installierten Leistung von Windenergieanlagen an Land und auf See. Unter: [http://www.erneuerbare-energien.de/EE/Redaktion/DE/Textbausteine/Banner/banner\\_windkraft.html](http://www.erneuerbare-energien.de/EE/Redaktion/DE/Textbausteine/Banner/banner_windkraft.html), 02.02.2017.

- [Col14] COLLINS, R.: A Power Plant Primer for District Energy Systems – A Very Basic introduction to power plant topics and terminology. RWCollins Publishing, Yoncalla, 2014.
- [DIN16] DIN EN 10213:2016, Stahlguss für Druckbehälter.
- [Dök97] DÖKER, H.: Fatigue crack growth threshold; implications, determination and data evaluation. In: International Journal of Fatigue, Volume 19, 1997, pp. 145-149.
- [Dök02] DÖKER, H.: Schwellenwert für Ermüdungsrisssausbreitung: Bestimmung und Anwendung. In: DVM-Bericht 234, Fortschritte der Bruch- und Schädigungsmechanik, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2002, S. 9-18.
- [DSK+16] DIBBLEE, K.; SCHRAMM, B.; KULLMER, G.; RICHARD, H. A.: Rissausbreitungssimulationen in bruchmechanisch gradierten Strukturen. In: DVM Bericht 248, Bruchmechanische Werkstoff- und Bauteilbewertung, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2016, S. 191-200.
- [Ebe16] EBERLEIN, A.: Einfluss von Mixed-Mode-Beanspruchung auf das Ermüdungsrissswachstum in Bauteilen und Strukturen. Fortschritt-Berichte VDI: Reihe 18, Mechanik, Bruchmechanik, Band 344, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2016.
- [Ede15] EDEL, K.-O.: Einführung in die bruchmechanischen Schadensbeurteilung. Springer-Verlag, Berlin, 2015.
- [EEG14] Erneuerbare-Energien-Gesetz vom 21. Juli 2014.
- [Elb70] ELBER, W.: Fatigue crack closure under cyclic tension. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 2, 1970, pp. 37-45.
- [FF08] FONTE, M.; DE FREITAS, M.: Marine main engine crankshaft failure analysis: A case study. In: Engineering Failure Analysis, Volume 16, 2008, pp. 1940-1947.
- [FG13] FELDHUSEN, J.; GROTE, K.-H.: Pahl/Beitz Konstruktionslehre – Methoden und Anwendung erfolgreicher Produktentwicklung. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2013.
- [FKM09] FKM-Richtlinie: Bruchmechanischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile. 3. Ausgabe, VDMA-Verlag, Frankfurt, 2009.
- [FKM12] FKM, Richtlinie: Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile. 6. Ausgabe, VDMA-Verlag, Frankfurt am Main, 2012.
- [FLR+13] FONTE, M.; LI, B.; REIS, L.; FREITAS, M.: Crankshaft failure analysis of a motor vehicle. In: Engineering Failure Analysis, Volume 35, 2013, pp. 147-152.
- [FM92] FORMAN, R. G.; METTU, S. R.: Behavior of Surface and Corner cracks subjected to Tensile and Bending Loads in Ti-6Al-4V Alloy. In: Ernst, H. A., Saxena A., McDowell D. L. (Eds.): Fracture mechanics. 22<sup>nd</sup> Symposium, Volume I, ASTM STP 1131. ASTM, Philadelphia, 1992, pp. 519-546.

- [FP14] FRANKE, W.; PLATZER, B.: Rohrleitungen. Carl Hanser Verlag, Leipzig, 2014.
- [FR03] FULLAND, M.; RICHARD, H. A.: Application of the FE-Method to the Simulation of fatigue crack growth in real structures. In: Steel Research International, Volume 74, 2003, pp. 584-590.
- [FSR00] FULLAND, M.; SCHÖLLMANN, M.; RICHARD, H. A.: ADAPCRACK3D – Development of the program for simulation of three-dimensional crack propagation processes. In: Atluri, S. N.; Brust, F. W. (eds.): Advances in Computational Engineering & Sciences, Vol. 1, Tech Science Press, Palmdale, 2000, S. 1405-1412.
- [FT76] FREESE, C. E.; TRACEY, D. M.: The natural triangle versus collapsed quadrilateral for elastic crack analysis. In: International Journal of Fracture, Volume 12, 1976, pp. 767-770.
- [Ful02] FULLAND, M.: Rissimulationen in dreidimensionalen Strukturen mit automatischer adaptiver Finite-Elemente-Netzgenerierung. Dissertation, Universität Paderborn, 2002.
- [GP14] GAUSEMEIER, J.; PLASS, C.: Zukunftsorientierte Unternehmensgestaltung – Strategien, Geschäftsprozesse und IT-Systeme für die Produktion von morgen. Carl Hanser Verlag, München, 2014.
- [Gra04] GRANDT, A. F. JR.: Fundamentals of Structural Integrity – Damage Tolerant Design and Nondestructive Evaluation. Wiley & Sons Inc, Hoboken, 2004.
- [Gri21] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Roy. Soc. London, 1921, pp. 163-198.
- [Gri10] GRIEB, P.: Digital Prototyping – virtuelle Produktentwicklung im Maschinenbau. Carl Hanser Verlag, München, 2010.
- [Gro92] GROHE, H.: Otto- und Dieselmotoren – Arbeitsweise, Aufbau und Berechnung Zweitakt- und Viertakt-Verbrennungsmotoren. Vogel Verlag, Würzburg, 1992.
- [Gro09] GROND, M.: Ermittlung eines Konzeptes zur Bewertung von rissbehafteten Bauteilen unter überlagerter statischer Normal- und Schubbelastung. Fortschritt-Berichte VDI: Reihe 18, Mechanik, Bruchmechanik, Band 318, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2009.
- [GS11] GROSS, D.; SEELIG, T.: Bruchmechanik. Mit einer Einführung in die Mikromechanik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [GZH06] GREUTER, E.; ZIMA, S.; HOFFMANN, W.: Motorschäden. Schäden an Verbrennungsmotoren und deren Ursachen. Vogel Buchverlag, Würzburg, 2006.
- [Hah76] HAHN, H. G.: Bruchmechanik. Teubner Verlag, Stuttgart, 1976.
- [Hau14] HAU, E.: Windkraftanlagen. Grundlagen, Technik, Einsatz, Wirtschaftlichkeit. Springer Vieweg Verlag, Berlin, 2014.

- [HCZ81] HUSSAIN, M. A.; COFFIN, L. F.; ZALESKI, K. A.: Three dimensional singular elements. In: Computers and Structures, Volume 13, 1981, pp. 595-599.
- [HD09] HAHN, B.; DOBSCHINSKI, J.: Deutscher Windmonitor – Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben Nr. 0327584. Fraunhofer Institut für Windenergie und Energiesystemtechnik, Kassel, 2009.
- [HEB+16-ol] HADLEY, I.; EREN, E.; BROWN, P.; RAJ, H.; LONDON, T.: Introducing CrackWISE® Version 5. Unter: <http://www.twisoftware.com/software/crackwise/>, 3.11.2016.
- [Hig09] HIGHSMITH, J.: Crack Path determination for non-proportional mixed-mode fatigue. Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, 2009.
- [Hul04] HÜLLMANN, G.: Schadensanalyse der gebrochenen Rotorwelle einer Windenergieanlage mit überraschendem Resultat. In: Praktische Metallographie, Band 42, 2004, S. 365-370.
- [HV16] HOS, Y.; VORMWALD, M.: Experimental study of crack growth under non-proportional loading along with first modeling attempts. In: International Journal of Fatigue, Volume 92, 2016, pp. 426-433.
- [Irw57] IRWIN, G.R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. In: Journal of Applied Mechanics, Volume 54, 1957, pp. 361-364.
- [IW03] INGRAFFEA, A. R.; WAWRZYNEK, P.: Finite Element methods for linear elastic fracture mechanics. In: MANG, H.; DE BORST, R. (eds.): Comprehensive Structural Integrity, Elsevier Science Ltd., Oxford, 2003.
- [IWE17-ol] Fraunhofer-Institut für Windenergie und Energiesystemtechnik: Windmonitor. Unter: [http://windmonitor.iwes.fraunhofer.de/windmonitor\\_de/index.html](http://windmonitor.iwes.fraunhofer.de/windmonitor_de/index.html), 05.04.2017.
- [KF11] KÖHLER, E.; FLIERL, R.: Verbrennungsmotoren. Motormechanik, Berechnung und Auslegung des Hubkolbenmotors. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011.
- [Kle15] KLEIN, B.: FEM – Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015.
- [Köh01] KÖHLER, E.: Verbrennungsmotoren: Motormechanik, Berechnung und Auslegung des Hubkolbenmotors. Vieweg Verlag, Braunschweig, 2001.
- [Kul93] KULLMER, G.: Tragfähigkeitsvorhersage für Bauteile mit Kerben und Rissen. Dissertation, Universität Gesamthochschule Paderborn, 1993.
- [Kul99] KULLMER, G.: Ein neues Modell zur Beschreibung der Ermüdungsrissoausbreitung. In: DVM-Bericht 231, Bruchmechanische Bewertungskonzepte im Leichtbau, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 1999, S.141-152.

- [Kun08] KUNA, M.: Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [KW92] KNOTHE, K.; WESSELS, H.: Finite Elemente – Eine Einführung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [KWH13] KAGERMANN, H.; WAHLSTER, W.; HELBIG, J.: Umsetzungsempfehlungen für das Zukunftsprojekt Industrie 4.0 – Abschlussbericht des Arbeitskreises Industrie 4.0 – Deutschlands Zukunft als Produktionsstandort sichern. acatech – Deutsche Akademie der Technikwissenschaften e. V., Plattform Industrie 4.0, Frankfurt/Main, 2013.
- [KWJ+08] KOÇAK, M.; WEBSTER, S.; JANOSCH, J. J.; AINSWORTH, R. A.; KOERS, R.: FITNET Fitness-For-Service (FFS) Procedure. Revision MK8. GKSS Research Centre, Geesthacht, 2008.
- [Lin95] LINCKE, W.: Simultaneous Engineering: neue Wege zu überlegenen Produkten. Carl Hanser Verlag, München, 1995.
- [Mal15] MALLICK, A. R.: Practical Boiler Operation Engineering and Power Plant. PHI Learning Private Limited, Delhi, 2015.
- [Man83] MANU, C.: Quarter-point elements for curved crack fronts. In: Computers and Structures, Volume 17, 1983, pp. 227-231.
- [Mar12] MARKS, P.: Amerikanische Stahlsorten – Leitfaden für den Vergleich amerikanischer Stahlsorten mit EN- bzw. DIN-Normen. Beuth Verlag, Berlin, Wien, Zürich, 2012.
- [MS16] MUTSCHLER, P.; SANDER, M.: Untersuchung der Einflüsse auf das Schwellenwertverhalten eines martensitischen Kraftwerkstahls bei erhöhter Temperatur. In: DVM Bericht 248, Bruchmechanische Werkstoff- und Bauteilbewertung, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2016, S. 91-100.
- [Mur87] MURAKAMI, Y. (ed.): Stress intensity factors handbook. Pergamon Books Ltd., Oxford, 1987.
- [Nas00] Nasa: Fatigue Crack Growth Computer Program „Nasgro Version 3.0“ – Reference Manual, Nasa, Lyndon B. Johnson Space Center, Texas, 2000.
- [Nas12] NASALA, L.: FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik – Hintergrundinformationen, Tipps und Tricks. Springer Verlag, München, 2012.
- [NEK+10] NEIDEL, A.; ENGEL, L.; KLINGELE, H.; MATIJASEVIC-LUX, B.; BROICHHAUSEN, J.; VÖLKER, J.; WANZEK, H.: Handbuch Metallschäden: REM-Atlas und Fallbeispiele zur Ursachenanalyse und Vermeidung. Carl Hanser Verlag, München, 2010.
- [OS75] OHTA, A.; SASAKI, E.: Fatigue Crack Closure at Stress Intensity Threshold Level. In: International Journal of Fracture, Volume 11, 1975, pp. 1049-1051.

- [Par82] PARKER, A. P.: Stress Intensity Factors, Crack Profiles and Fatigue Crack Growth Rates in Residual Stress Fields. Residual Stress Effects in Fatigue, ASTM STP 776, American Society for Testing and Materials, 1982, pp. 13-31.
- [PE63] PARIS, P. C.; ERDOGAN, F.: A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. In: Journal of Basic Engineering, Vol. 85, 1963, pp. 528-534.
- [PGA61] PARIS, P. C.; GOMEZ, M. P.; ANDERSON, W. E.: A rational analytic theory of fatigue. In: Trend in Engineering, Vol. 13, 1961, pp. 9-14.
- [Pur14] PURBA, S.: Fitness for Service of Cracked Valve on High Pressure Steam Line Header. In: Proceedings of 11th European Conference on Non-Destructive Testing, Prag, 2014.
- [QF96] QIAN, J.; FATEMI, A.: Mixed mode fatigue crack growth: a literature survey. Engineering Fracture Mechanics, Volume 55, 1996, pp. 959-990.
- [RBK+03] RICHARD, H. A.; BUCHHOLZ, F.-G.; KULLMER, G.; SCHÖLLMANN, M.: 2D- and 3D-Mixed Mode Fracture Criteria. In: BUCHHOLZ, F.-G.; RICHARD, H. A.; ALIABADI, M. H. (eds.): Advances in Fracture and Damage Mechanics, Zürich, 2003, pp. 251-260.
- [RFS05] RICHARD, H. A.; FULLAND, M.; SANDER, M.: Theoretical crack path prediction. In: Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures, Volume 28, 2005, pp.3-12.
- [RHB08] RÖSLER, J.; HARDERS, H.; BÄKER, M.: Mechanisches Verhalten der Werkstoffe. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [Ric79] RICHARD, H.A.: Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren aus spannungsoptisch bestimmten Kerbspannungen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1979.
- [Ric85] RICHARD, H.A.: Bruchvorhersagen bei überlagerter Normal- und Schubbeanspruchung von Rissen. VDI-Forschungsheft 631, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1985.
- [Ric03] RICHARD, H. A.: Bruchmechanischer Festigkeitsnachweis bei Mixed-Mode-Beanspruchung von Rissen. In: DVM Bericht 235, Fortschritte der Bruch- und Schädigungsmechanik Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., Berlin, 2003, S. 199-212.
- [Rie15] RIEMER, A.: Einfluss von Werkstoff, Prozessführung und Wärmebehandlung auf das bruchmechanische Verhalten von Laserstrahlschmelzbauteilen. Shaker Verlag, Aachen, 2015.
- [RK77] RYBICKI, E. F.; KANNINEN, M. F.: A Finite Element Calculation of Stress Intensity Factors by a modified Crack Closure Integral. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 9, 1977, pp. 129-143.

- [RK13] RICHARD, H.A.; KULLMER, G.: Biomechanik – Grundlagen und Anwendungen auf den menschlichen Bewegungsapparat. Springer-Verlag, Wiesbaden, 2013.
- [RMS98] RICHARD, H. A.; MAY, B.; SCHÖLLMANN, M.: Prediction of crack growth under complex loading with the software system FRANC/FAM. In: Brown, M. W.; de los Rios, E. R.; Miller, K. J. (eds.): Fracture from Defects. EMAS Publishing, West Midlands, 1988, pp. 1071-1076.
- [RR03] RAO, B.; RAHMAN, S.: An interaction integral method for analysis of cracks in orthotropic functionally graded materials. In: Computational Mechanics, Volume 32, 2003, pp. 40-51.
- [RS12] RICHARD, H.A.; SANDER, M.: Ermüdungsrisse. Erkennen - Sicher beurteilen - Vermeiden. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2012.
- [RV07] RADAJ, D.; VORMWALD, M.: Ermüdungsfestigkeit – Grundlagen für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [SC13] SENDYKA, B.; CYGNAR, M.: Stratified Charge Combustion in a Spark-Ignition Engine with Direct Injection System. In: Advances in Internal Combustion Engines and Fuel technologies, 2013, pp. 277-309.
- [Sch11] SCHIER, K.: Finite Elemente – Modelle der Statik und Festigkeitslehre. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [Sch12] SCHIRMEISEN, N.-H.: Risswachstum unter 3D-Mixed-Mode-Beanspruchung. Fortschritt-Berichte VDI: Reihe 18, Mechanik, Bruchmechanik, Band 335, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2012.
- [Sch13] SCHWEIZER, C.: Physikalisch basierte Modelle für Ermüdungsrisswachstum und Anrisslebensdauer unter thermischen und mechanischen Belastungen. Dissertation KIT, Schriftenreihe Werkstoffwissenschaft und Werkstofftechnik, Band 76/2013, Shaker Verlag, Aachen, 2013.
- [Sch01] SCHÖLLMANN, M.: Vorhersage des Risswachstums in ebenen und räumlichen Strukturen mittels numerischer Simulation. VDI Fortschritts-Berichte, Band 269, VDI Verlag, Düsseldorf, 2001.
- [Sch09] SCHIJVE, J.: Fatigue of Structures and Materials. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [Sch80] SCHWALBE, K.-H.: Bruchmechanik metallischer Werkstoffe. Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1980.
- [SIN99] SINTAP: Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry. Final Revision. EU-Project BE95-1426. Brite Euram Programme, Brüssel, 1999.
- [SK97] SPUR, G.; KRAUSE F.-L.: Das virtuelle Produkt – Management der CAD-Technik. Carl Hanser Verlag, München, 1997.

- [SN46] SNEDDON, I. N.: The Distribution of Stress in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid. In: Proceedings of the Royal Society, Ser. A, Vol. 187, London, 1946, pp. 229-260.
- [Suo00] SUO, Z.: Zener's Crack and the M-integral. In: Journal of Applied Mechanics, Vol. 67, 2000, pp. 417-418.
- [SP73] SCHMIDT, R. A.; PARIS, P. C.: Threshold for Fatigue Crack Propagation and the Effect of Load Ratio and Frequency. In: Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing, ASTM STP 536, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, 1973, pp. 79-94.
- [SR04] SANDER, M.; RICHARD, H. A.: Lebensdauervorhersage unter bruchmechanischen Gesichtspunkten. In: Materialprüfung, 46. Ausgabe, 2016, S. 495-500.
- [SR08] SEIFFERT, U.; RAINER, G.: Virtuelle Produktentstehung für Fahrzeug und Antrieb im Kfz – Prozesse, Komponenten, Beispiele aus der Praxis. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [SRK+02] SCHÖLLMANN, M.; RICHARD, H. A.; KULLMER, G.; FULLAND, M.: A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures. In: International Journal of Fracture, Volume 117, 2002, pp. 129-141.
- [SS06] STEINHILPER, W.; SAUER, B.: Konstruktionselemente des Maschinenbaus – Grundlagen der Berechnung und Gestaltung von Maschinenelementen. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [Ste98] STEINBUCH, R.: Finite Elemente – Ein Einstieg. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1998.
- [SV04] SADANANDA, K.; VASUDEVAN, A. K.: Crack tip driving forces and crack growth representation under fatigue. In: International Journal of Fatigue, Volume 26, 2004, pp. 39-47.
- [TNE+87] THEILIG, H.; NICKEL, J.; EDEL, K.-O.; HENTRICH, M.: Spannungsintensitätsfaktoren. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1987.
- [Tod12] TODSEN, U.: Verbrennungsmotoren. Carl Hanser Verlag, München, 2012.
- [Var98] VARFOLOMEYEV, I.: Weight Function for external circumferential cracks in hollow cylinders subjected to axisymmetric opening mode loading. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 60, 1998, pp. 333-339.
- [VP12] VOJTEK, T.; POKLUDA, J.: Paths of Shear-mode Cracks in Ferritic and Austenitic Steel. In: Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference of Crack Paths, Gaeta, 2012.
- [Wal70] WALKER, K.: The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminium. In: Rosenfeld, M. S. (ed.): Effect of environment and Complex Load History on Fatigue Life, ASTM STP 462. ASTM, Philadelphia, 1970, pp. 1-14.

- [WAR98] WEN, P. H.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D. P.: Mixed-Mode weight functions in three dimensional fracture mechanics: static. In: Engineering Fracture Mechanics, Volume 59, 1998, pp. 563-575.
- [WB97] WARSCHAT, J.; BULLINGER, H.-J.: Forschungs- und Entwicklungsmanagement – Simultaneous Engineering, Projektmanagement, Produktplanung, Rapid Product Development. Teubner Verlag, Stuttgart, 1997.
- [WCB05] WAWRZYNEK, P.; CARTER, B.; BANKS-SILLS, L.: The M-Integral for computing stress intensity factors in generally aniso-tropic materials. Technical Report NASA, Huntsville, 2005.
- [WCI09] WAWRZYNEK, P.; CARTER, B.; INGRAFFEA, T.: Advances in Simulation of Arbitrary 3D Crack Growth using FRANC3D/NG. In: Proceedings of ICF12, Ottawa, 2009.
- [ZV14] ZERRES, P.; VORMWALD, M.: Review of fatigue crack growth under non-proportional mixed-mode-loading. In: International Journal of Fatigue, Volume 58, 2014, pp. 75-83.

## Online-Shops



Fachliteratur und mehr -  
jetzt bequem online recher-  
chieren & bestellen unter:  
[www.vdi-nachrichten.com/](http://www.vdi-nachrichten.com/)  
Der-Shop-im-Ueberblick



Täglich aktualisiert:  
Neuerscheinungen  
VDI-Schriftenreihen



Im Buchshop von [vdi-nachrichten.com](http://vdi-nachrichten.com) finden Ingenieure und Techniker ein speziell auf sie zugeschnittenes, umfassendes Literaturangebot.

Mit der komfortablen Schnellsuche werden Sie in den VDI-Schriftenreihen und im Verzeichnis lieferbarer Bücher unter 1.000.000 Titeln garantiert fündig.

Im Buchshop stehen für Sie bereit:

### VDI-Berichte und die Reihe **Kunststofftechnik**:

Berichte nationaler und internationaler technischer Fachtagungen der VDI-Fachgliederungen

### Fortschritt-Berichte VDI:

Dissertationen, Habilitationen und Forschungsberichte aus sämtlichen ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen

### Newsletter „Neuerscheinungen“:

Kostenfreie Infos zu aktuellen Titeln der VDI-Schriftenreihen bequem per E-Mail

### Autoren-Service:

Umfassende Betreuung bei der Veröffentlichung Ihrer Arbeit in der Reihe Fortschritt-Berichte VDI

### Buch- und Medien-Service:

Beschaffung aller am Markt verfügbaren Zeitschriften, Zeitungen, Fortsetzungsreihen, Handbücher, Technische Regelwerke, elektronische Medien und vieles mehr – einzeln oder im Abo und mit weltweitem Lieferservice

## Die Reihen der Fortschritt-Berichte VDI:

- 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
  - 2 Fertigungstechnik
  - 3 Verfahrenstechnik
  - 4 Bauingenieurwesen
- 5 Grund- und Werkstoffe/Kunststoffe
  - 6 Energietechnik
  - 7 Strömungstechnik
- 8 Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik
  - 9 Elektronik/Mikro- und Nanotechnik
  - 10 Informatik/Kommunikation
  - 11 Schwingungstechnik
- 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
  - 13 Fördertechnik/Logistik
- 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
  - 15 Umwelttechnik
  - 16 Technik und Wirtschaft
  - 17 Biotechnik/Medizintechnik
  - 18 Mechanik/Bruchmechanik
  - 19 Wärmetechnik/Kältetechnik
- 20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE CAQ, CIM ...)
  - 21 Elektrotechnik
  - 22 Mensch-Maschine-Systeme
  - 23 Technische Gebäudeausrüstung

ISBN 978-3-18-334918-0