Fortschritt-Berichte VDI

VDI

Reihe 8

Mess-,
Steuerungs- und
Regelungstechnik

Dipl.-Ing. Christoph Hartung,
München

Nr. 1247

Zur algebraischen Untersuchung der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme

Zur algebraischen Untersuchung der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme

Christoph Hartung

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Prüfungsvorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. Matthias Gerdts

1. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

2. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack

Die Dissertation wurde am 15. April 2015 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 7. September 2015 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 9. September 2015 statt.

Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 8

Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik

Dipl.-Ing. Christoph Hartung, München

Nr. 1247

Zur algebraischen Untersuchung der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme

VDI verlag

Hartung, Christoph
Zur algebraischen Untersuchung der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme
Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 1247. Düsseldorf: VDI Verlag 2016.
130 Seiten, 8 Bilder, 1 Tabelle.
ISBN 978-3-18-524708-8, ISSN 0178-9546,
€ 52,00/VDI-Mitgliederpreis € 46,80.

Für die Dokumentation: Steuerbarkeit – Stabilisierbarkeit – Lineare Systeme – Unsichere Systeme – Strenge Surjektivität – Strukturelle Steuerbarkeit – Strenge strukturelle Steuerbarkeit – Vorzeichen-Steuerbarkeit – Vorzeichen-Stabilität – Vorzeichen-Stabilisierbarkeit

Das Verhalten von den meisten technischen Prozessen lässt sich zumindest in Arbeitspunkten hinreichend genau mit linearen zeitinvarianten Systemen der Form dx/dt = A*x + B*u beschreiben. Zwei wichtige Eigenschaften solcher Systeme sind die Steuerbarkeit und die Stabilisierbarkeit, welche zu den wesentlichen Voraussetzungen modernen Methoden der Steuerungs- und Regelungstechnik zählen. In dieser Arbeit werden algebraische Methoden zum Nachweis der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit dieser Systeme untersucht. Dafür wird der Begriff des unsicheren Systems eingeführt, welcher strukturelle Systeme und Vorzeichen-Systeme vereint. Ein unsicheres System ist streng strukturell steuerbar, vorzeichen-steuerbar, vorzeichen-stabil oder vorzeichen-stabilisierbar, wenn jeweils jedes System der Klasse steuerbar, stabil oder stabilisierbar ist. In dieser Arbeit werden zwei bisher ungelöste Probleme, die Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit, gelöst. Dabei wird eine Methode verwendet, welche sich deutlich zu bisherigen Ansätzen unterscheidet.

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter http://dnb.ddb.de abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek
(German National Library)
The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie (German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at http://dnb.ddb.de.

Dissertation
Universität der Bundeswehr München

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9546

ISBN 978-3-18-524708-8

Vorwort

Die folgende Arbeit entstand in den Jahren 2009 bis 2015 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Steuer- und Regelungstechnik an der Universität der Bundeswehr München.

Mein herzlicher Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek für die hervorragende fachliche Betreuung und die sehr schöne und erlebnisreiche Zeit, die er mir an seinem Institut ermöglicht hat. Ebenso danke ich Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack für das entgegengebrachte Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Zweitgutachtens. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Matthias Gerdts danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

All meinen Kollegen an der Universität der Bundeswehr danke ich für die zahlreichen fachlichen Diskussionen und nichtfachlichen Gespräche in den letzten Jahren. Herrn Dr.-Ing. Klaus-Dieter Otto möchte ich darunter besonders hervorheben. Außerdem danke ich im Besonderen Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. Dr. habil. Gunther Reißig für die erfolgreiche Zusammenarbeit.

Meinen Eltern und meiner Familie danke ich von ganzem Herzen für ihre Unterstützung und ihr Interesse an meiner Arbeit. Mein größter Dank gilt Kathleen für ihre Liebe, ihre Geduld und für ihre unermüdliche Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur VII

Kurzfassung IX

Abstract X

1 Einleitung 1

1.1 Einordnung der Arbeit 2

1.2 Zielsetzung, Beiträge und Aufbau der Arbeit 5

2 Mathematische Grundlagen 7

2.1 Notation und grundlegende Zusammenhänge 7

2.2 Grundlagen zu linearen zeitinvarianten Systemen 9

2.3 Unsichere Zahlen, Matrizen und Vektoren 11

2.4 Rechnen mit unsicheren Zahlen 13

2.5 Algebraische Bedeutung und weitere Eigenschaften 17

3 Lineare Systeme mit unsicheren Matrizen 20

3.1 Strenge Surjektivität von unsicheren Matrizen 20

3.2 Strenge Strukturelle Steuerbarkeit 24

3.3 Vorzeichen-Steuerbarkeit 28

3.4 Vorzeichen-Stabilität 32

3.5 Vorzeichen-Stabilisierbarkeit 34

3.6 Strenge strukturelle Steuerbarkeit für zeitvariante Systeme 38

4 Komplexe Eigenpaare von Vorzeichenmatrizen 46

4.1 Der komplexe Vorzeichenvektor 46

4.2 Verschiedene Eigenschaften komplexer Vorzeichenvektoren 50

4.3 Der Kokern einer Vorzeichenmatrix 57

4.4 Vorzeichenmatrizen mit rein imaginären Eigenwerten 62

4.5 Vorzeichenmatrizen mit komplexen Eigenwerten 68

5 Vorzeichen-Steuerbarkeit und -Stabilisierbarkeit 79

5.1 Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und -Stabilisierbarkeit . . . 79

5.2 Weitere Eigenschaften komplexer Vorzeichenvektoren 81

5.3 Überprüfung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und -Stabilisierbarkeit 95

5.4 Zwei weitere Beispiele 102

5.4.1 Modell eines F-8 Strahlflugzeugs 102

5.4.2 Modell eines unbemannten Helicopters 104

6 Zusammenfassung und Ausblick 108

Stichwortverzeichnis 112

Literaturverzeichnis 113

Nomenklatur

In der folgenden Auflistung werden die grundlegenden Symbole dieser Arbeit erläutert.

$\mathbb{Z}$	Die Menge aller ganzen Zahlen.
$\mathbb{N}$	Die Menge aller positiven ganzen Zahlen.
$\mathbb{R}$	Die Menge aller reellen Zahlen.
$\mathbb{C}$	Die Menge aller komplexen Zahlen.
$\mathbb{K}^n$	Die Menge aller Vektoren der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ mit Einträgen aus $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}^{n\times m}$	Die Menge aller $n \times m$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$.
a, b, ...	Skalare oder Vektoren mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ werden mit kleinen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.
A, B, ...	Matrizen mit reellen Einträgen werden mit großen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.
$X_{i,k}$	Der Eintrag in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte von der Matrix X.
x_i	Der i-te Eintrag des Vektors x.
X^T	Die Transponierte von der Matrix X.
$\|X\|$,	Die Determinante einer quadratischen Matrix X.
$\|x\|$	Der absolute Betrag einer Zahl $x \in \mathbb{C}$
j	Die imaginäre Einheit.
$\Re(x)$	Der Realteil einer komplexen Zahl oder eines komplexen Vektors x.
$\Im(x)$	Der Imaginärteil einer komplexen Zahl oder eines komplexen Vektors x.
I_n	Die Einheitsmatrix der Dimension n.
0	Eine Matrix, die nur den Eintrag 0 enthält.

Symbole zu unsicheren Zahlen, Vektoren und Matrizen

$\bigcirc$	$= \{0\}$, die Menge, die nur die Null enthält.
$+$	$= \{x \in \mathbb{R} \| x > 0\}$, die Menge aller positiven reellen Zahlen.
$-$	$= \{x \in \mathbb{R} \| x < 0\}$, die Menge aller negativen reellen Zahlen.
$\oplus$	$= \{x \in \mathbb{R} \| x \geq 0\}$, die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen.
$\ominus$	$= \{x \in \mathbb{R} \| x \leq 0\}$, die Menge aller nicht-positiven reellen Zahlen.
$\star$	$= \{x \in \mathbb{R} \| x \neq 0\}$, die Menge aller von Null verschiedenen Zahlen.
$\circledast$	$= \mathbb{R}$, die Menge aller reellen Zahlen.
$\mathbb{V}$	$= \{\bigcirc, +, -\}$, die Menge aller Vorzeichen.
$\mathbb{U}$	$= \{\bigcirc, +, -, \ominus, \oplus, \star, \circledast\}$, die Menge aller unsicheren Zahlen.
$\mathbb{S}$	$= \{\bigcirc, \star\}$, die Menge aller strukturellen Zahlen.
$\tilde{\mathbb{S}}$	$= \{\bigcirc, \star, \circledast\}$.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ...	Zahlen, Vektoren oder Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{U}$ werden mit kaligraphischen Großbuchstaben bezeichnet.
$\mathcal{I}_n$	Eine $n \times n$ Matrix mit $(+)$-Einträgen auf der Diagonalen und $\bigcirc$-Einträgen auf allen sonstigen Positionen.
$\mathcal{I}_n^{\mathbb{S}}$	Eine $n \times n$ Matrix mit $(\star)$-Einträgen auf der Diagonalen und $\bigcirc$-Einträgen auf allen sonstigen Positionen.
$\bigcirc$	Eine Matrix mit $\bigcirc$-Einträgen auf allen Positionen.

Symbole und Notation zu komplexen Vorzeichenvektoren

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ...	Komplexe Vorzeichenvektoren werden mit Frakturbuchstaben bezeichnet.
${}^{w}\mathcal{D}_v$	Das Vorzeichen von $r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)$, wenn $q = r \cdot e^{j\varphi} \in \mathfrak{D}$.
${}^{w}\mathcal{P}_v$	Das Vorzeichen von $r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w)$, wenn $q = r \cdot e^{j\varphi} \in \mathfrak{D}$.
$({}^{w}\mathcal{D}, {}^{w}\mathcal{P})$	Das w-te charakteristische Vorzeichenmuster eines komplexen Vorzeichenvektors $\mathfrak{D}$ (siehe Definition 4.3 auf Seite 50).
${}^{w}q$	$= q/q_w$, wenn w von Null verschieden in $\mathfrak{D}$ ist $(q_w \neq 0)$.
$\varrho_q(v, w)$	$= (\varphi_v - \varphi_w) \bmod \pi/2 \geq 0$ ist der Abstand von w zu v in q.
$\varrho_q(w)$	Der geringste Abstand von w in q.
${}^{w^*}\mathcal{D}_v$	Das Vorzeichen von $r_v r_w \cos(\varphi_v - \varphi_w - \epsilon)$ mit $\varrho_q(w) > \epsilon > 0$.
${}^{w^*}\mathcal{P}_v$	Das Vorzeichen von $r_v r_w \sin(\varphi_v - \varphi_w - \epsilon)$ mit $\varrho_q(w) > \epsilon > 0$.
$({}^{w^*}\mathcal{D}, {}^{w^*}\mathcal{P})$	Vorzeichen des verdrehten w-ten charakteristischen Vorzeichenmusters.
U^*	$= U \cup \{i^* \mid i \in U\}$ für eine Menge $U \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
R	Die Menge der Vorzeichenrotationsmatrizen (siehe (4.4) auf Seite 54).
$\overline{\mathfrak{D}}$	Der konjugiert komplexe Vorzeichenvektoren von $\mathfrak{D}$.
ν	Eine Funktion zur Beschreibung eines komplexen Vorzeichenvektors (siehe Satz 5.3 auf Seite 82).
$\kappa(n)$	Die Anzahl aller komplexen Vorzeichenvektoren der Ordnung $n \in \mathbb{N}$.

Kurzfassung

Das Verhalten von den meisten technischen Prozessen lässt sich zumindest in Arbeitspunkten hinreichend genau mit linearen zeitinvarianten Systemen der Form $dx/dt = A \cdot x + B \cdot u$ beschreiben. Zwei wichtige Eigenschaften solcher Systeme sind die Steuerbarkeit und die Stabilisierbarkeit, welche zu den wesentlichen Voraussetzungen modernen Methoden der Steuerungs- und Regelungstechnik zählen. Beide Eigenschaften können anhand der Matrizen A und B numerisch untersucht werden. In den Modellen zur Beschreibung eines technischen Prozesses basieren die Matrizen oft auf experimentell ermittelten Daten, sodass die Einträge nur mit einer gewissen Genauigkeit bekannt und die numerischen Nachweise nicht mehr anwendbar sind.

In dieser Arbeit werden algebraische Methoden zum Nachweis der Steuerbarkeit und der Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme unabhängig von konkreten numerischen Parametern untersucht. Dafür werden sieben Symbole zur Beschreibung verschiedener Teilmengen der reellen Zahlen definiert und es wird der Begriff des unsicheren Systems als Klasse linearer zeitinvarianter Systeme eingeführt. Allgemein bekannte Spezialfälle von unsicheren Systemen sind strukturelle Systeme, bei denen die Einträge der Matrizen entweder identisch Null oder von Null verschieden sind, und Vorzeichen-Systeme, bei denen nur das Vorzeichen der Einträge bekannt ist. Durch diesen Ansatz wird daher der strukturelle Ansatz mit dem Ansatz über Vorzeichenmuster vereint. In einem unsicheren System ist es z.B. im Gegensatz zum strukturellen Ansatz möglich, dass manche Systemparameter sowohl den Wert Null als auch einen von Null verschiedenen Wert annehmen können. Ein unsicheres System ist streng strukturell steuerbar, vorzeichen-steuerbar, vorzeichen-stabil oder vorzeichen-stabilisierbar, wenn jeweils jedes System der Klasse steuerbar, stabil oder stabilisierbar ist. In dieser Arbeit werden verschiedene bekannte Resultate zu diesen Eigenschaften auf unsichere Systeme verallgemeinert und es werden zwei bisher ungelöste Probleme, die Charakterisierung der Vorzeichen-Steuerbarkeit und der Vorzeichen-Stabilisierbarkeit, gelöst.

Neben zahlreichen akademischen Beispielen werden die Resultate der Arbeit an bekannten Modellen verschiedener technischer Systeme vorgeführt. Dabei werden z.B. jeweils die Steuerbarkeit, die Stabilität und die Stabilisierbarkeit der Wankdynamik von Zweirädern, der Bewegung eines Satelliten, der Längsdynamik eines F-8 Strahlflugzeugs und der Dynamik eines unbemannten Helikopters im Schwebeflug untersucht.

Abstract

The behavior of most technical processes can be describe with sufficient precision with linear time-invariant systems of the form $dx/dt = A \cdot x + B \cdot u$. Two important properties of such systems are the controllability and stabilizability which are the preconditions of most methods in modern control engineering. Both properties can be analyzed with the matrices A and B by numerical tests. In the models used to describe a technical process, the entries of the matrices are often known only with a certain accuracy, so that the numerical tests are no longer applicable.

Hence, algebraic methods for the analysis of the controllability and the stabilizability of linear time-invariant systems independent of numerical values are investigated in this work. Therefore, seven symbols to describe different subsets of the real numbers are defined and the notion of the uncertain system as a class of linear time-invariant systems is introduced. Common special cases of uncertain systems are structural systems, where the entries are either zero or nonzero and signed systems, where the entries are positive, negative or zero. Thus, this new approach combines the structural and the signed approach to describe uncertainties in linear time-invariant systems. Moreover, in contrast to structural systems, it is possible, that some entries can be zero as well as nonzero in an uncertain system. An uncertain system is strong structural controllable, sign controllable, sign stable or sign stabilizable if every system in the class is controllable, stable or stabilizable, respectively. In this work, different known results to these properties are generalized to uncertain systems and two unsolved problems, the characterization of sign controllability and sign stabilizability are solved.

In addition to numerous academic examples, the results of this work are demonstrated to known models of various technical systems. Therefore, the controllability, the stability and the stabilizability of the roll dynamic of bicycles, the motion of a satellite, the dynamic of an F-8 jet airplane and the dynamic of an unmanned helicopter are analyzed.