RUTZ, Peter: Zweiwertige und mehrwertige Logik. Ein Beitrag zur Geschichte und Einheit der Logik. (Two-Valued and Many-Valued Logics. A Treatise Concerning History and Unity of Logics). München: Ehrenwirth 1973. 107 p. Ab 1980: München: Philosophia Verl., ISBN 3-88405-039-7.

English Abstract of Review: The formal unity of two-valued and many-valued logics is pointed out by Rutz. Tautologies of two-valued logics are *valid by analogy* in many-valued logics. Vice versa expressions of many-valued logics ($\underline{n}$ finite) are decidable in two-valued logics.

In der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik können alle Aussagen genau in eine von zwei Klassen eingeordnet werden, entweder in die Klasse der wahren Aussagen oder in die Klasse der falschen Aussagen. Bei mehrwertigen Logiken zerfallen die Mengen aller Aussagen in mehrere disjunkte Klassen, und zwar entweder in eine der i Klassen der nicht-ausgezeichneten Geltungswerte ($i > 1$) oder in eine der j Klassen der ausgezeichneten Geltungswerte ($j \geqslant 1$). „Bei dieser Zersplitterung der Menge aller Aussagen kommt es vor, daß gewisse Sätze (d.h. allgemeingültige Formeln) der klassischen Logik, die darin als fundamental betrachtet werden, wie das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten oder das Nichtwiderspruchs-Prinzip, in einer mehrwertigen Logik nicht allgemeingültig sind“ (S.11). Die Anzahl möglicher mehrwertiger Systeme ist unbegrenzt groß, und seit Anfang des 20. Jahrhunderts wurden auch diverse mehrwertige Logiksysteme ausgearbeitet. „Wir haben also seit 1920 (dem Erscheinungsjahr klassischer Arbeiten von *Jan Łukasiewicz* und *Emil L. Post*, St.) eine große Schar heterodoxer logischer Systeme, die neben der orthodoxen, zweiwertigen Logik stehen“ (S.37). Die zentrale Frage für *Peter Rutz* ist das Problem des Zusammenhangs zwischen zweiwertiger und mehrwertiger Logik: „Gibt es mehrere einander widersprechende logische Systeme? Ist die Existenz der mehrwertigen Systeme ein Argument für einen logischen Relativismus? Gibt es nur *eine* wahre Logik“ (S.37)? *Rutz'* Antwort ist: „Hat eine erste Betrachtung mehrwertiger Systeme dazu geführt, sie als heterodox zu bezeichnen, . . ., so zeigen die Ergebnisse dieser Arbeit, daß es nicht nur zu allen Sätzen der klassischen Aussagenlogik n-wertige analoge Sätze gibt, sondern daß sogar jedem Ausdruck . . . einer $\underline{n}$-wertigen Logik (n endlich) eindeutig ein Ausdruck der klassischen Logik zugeordnet werden kann, der bezüglich der Gültigkeit dem n-wertigen äquivalent ist“ (S.70). Dies ist eine starke Behauptung im Sinne einer Einheit der Logik; wir werden sie im Folgenden nachprüfen.

Zunächst aber sollten wir rechtfertigen, warum wir ein schon 1973 erschienenes Buch erst jetzt besprechen. Das Buch ist der erste Band der von *J.M. Bochenski, H. Burkhardt* und *Chr. Thiel* herausgegebenen Reihe „Analytica“, die zunächst im Ehrenwirth-Verlag begonnen wurde. Diese Reihe ruhte bis 1980, und mit dem Beginn des Philosophia-Verlages wurde das Buch von *P. Rutz* übernommen und die Reihe dort weitergeführt. Aber nicht nur wegen des aktuellen Verlagswechsels ist das Buch für uns relevant, sondern vor allem wegen der nach wie vor interessanten Thesen, die *Peter Rutz* vertritt.

Das Buch gliedert sich nach der Einleitung (S.11–12) in die sechs Kapitel „1. Grundbegriffe der Aussagenlogik“ (S.13–20), „2. Entstehung und Entwicklung der mehrwertigen Logikkalküle“ (S.21–36), „3. Einheit und Vielfalt der Logik“ (S.37–42), „4. Gültigkeit von Sätzen der zweiwertigen in einer mehrwertigen Logik“ (S.43–55), „5. Darstellbar- und Entscheidbarkeit mehrwertiger Ausdrücke im vollen zweiwertigen System“ (S.56–69) und „6. Zusammenfassung“ (S.70). Anmerkungen (S.71–80), eine Bibliographie (S.81–101), ein Verzeichnis verwendeter Zeichen und Symbole (S.102–103), ein Sachregister (S.104–106) sowie ein Namensverzeichnis (S.107) runden die Arbeit ab.

Wir wollen nun den *Rutz-Hauptsatz I* vorstellen. Er lautet: „Jede Übertragung klassischer Aussagenfunktoren in ein n-wertiges System mit s ausgezeichneten Wahrheitswerten unter Berücksichtigung der Analogie dritter Art läßt alle Sätze der zweiwertigen Logik in den n-wertigen gelten“ (S.55).

Die „Analogie 3. Art“ ist eine Sorte von Verwandtschaft zwischen n-wertigen und zweiwertigen Funktoren vom gleichen Typus l. Seien F und F′ Funktoren, f und f′ Geltungsfunktionen (*Rutz* spricht hier von „Wahrheitsfunktionen“, was bei mehrwertigen Ausdrücken, wo „Wahrheit“ einen anderen Sinn hat als im Zweiwertigen, aber Fehldeutungen provozieren kann), Q_2 und Q_n Mengen zwei- bzw. n-wertiger Funktoren, l der Funktorentypus sowie A_2 und A_n Mengen von Geltungswerten, so lassen sich Funktoren wie folgt definieren:

(1) $F \in Q_2$ habe die Geltungsfunktion $f : A_2^l \to A_2$

und

$F' \in Q_n$ habe die Geltungsfunktion $f' : A_n^l \to A_n$.

Wenn B die Menge der ausgezeichneten Geltungswerte ist, so heißt die Abbildung μ: $A_n \to A_2$ *(n,s)-zerlegungstreu*, falls

(2) $\mu(B_{n,s}) = \{1\}$ und $\mu(A_n - B_{n,s}) = \{0\}$

gilt.

Eine Abbildung ν: $A_n \to A_2$ heißt *strikt (n,s)-treu*, falls

(3) a) $\nu\,(n, s)$-zerlegungstreu und

b) $\nu(0) = 0$ sowie $\nu(n-1) = 1$

erfüllt ist.

Ein n-wertiger Funktor $F' \in Q_n$ ist nun ein *Analogon 3.Art* eines zweiwertigen Funktors $F \in Q_2$, wenn gilt:

(4)
$$\begin{tikzcd} A_n^l \arrow[r, "\kappa_3 \times \cdots \times \kappa_3"] \arrow[d, "f'"'] & A_2^l \arrow[d, "f"] \\ A_n \arrow[r] & A_2 \end{tikzcd}$$

ist kommutativ für alle *strikt (n,s)-treuen* Abbildungen κ_3 (vgl. S.45).

Rutz führt zwar noch andere Arten von Analogien zwischen Funktoren ein, hält aber die Analogie 3. Art für die „wesentliche und notwendige Verwandtschaft aussagenlogischer Konstanten zweier verschiedenwertiger Systeme, die die gleiche intuitive Bedeutung haben wollen“ (S.48).

Betrachten wir zur Illustration der Analogie 3. Art zwei Beispiele. Wir nehmen an, wir haben zwei fünfwertige Funktoren, einen monadischen Funktor F-1(5) und einen dyadischen Funktor F-2(5). Wir wollen nunmehr wissen, welche zweiwertigen Funktoren den beiden analog sind. Der fünfwertige Kalkül enthält die Geltungswerte 0, 1, 2, *3 und *4, wobei wir *3 und *4 als ausgezeichnete Werte festlegen.

F-1(5) habe die Geltungsfunktion

$$f': \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ {*3} \\ {*4} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} {*4} \\ {*3} \\ {*3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Gemäß der *(n,s)-Zerlegungstreue* müssen wir die ausgezeichneten Geltungswerte, also *3 und *4, auf 1 abbilden und die restlichen, also 0, 1, und 2, auf 0. Die „Eckwerte", also 0 und 4, müssen im Sinne der *strikten n-s-Treue* auf 0 und 1 abgebildet werden.

Dies ergibt:

$$\left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ {*3} \\ {*4} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} {*4} \\ {*3} \\ {*3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\right] \xrightarrow{\kappa_3} \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\right]$$

Da $N \in Q_2$ die Geltungsfunktion

$$f: \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

hat, ist unser fünfwertiger Funktor F-1(5) eine Analogie 3. Art zur zweiwertigen Negation.

Wenn wir dieses Verfahren auf unseren (ebenfalls willkürlich gewählten dyadischen Funktor F-2(5) anwenden, erhalten wir Folgendes.

$$f': \left[\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & {*3} \\ 0 & {*4} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & {*3} \\ 1 & {*4} \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & {*3} \\ 2 & {*4} \\ {*3} & 0 \\ {*3} & 1 \\ {*3} & 2 \\ {*3} & {*3} \\ {*3} & {*4} \\ {*4} & 0 \\ {*4} & 1 \\ {*4} & 2 \\ {*4} & {*3} \\ {*4} & {*4} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ {*3} \\ {*3} \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ {*3} \\ {*4} \end{Bmatrix}\right] \xrightarrow{\kappa_3} \left[\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right]$$

Da $K \in Q_2$ die Geltungsfunktion

$$f: \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

hat, ist unser fünfwertiger Funktor F-2(5) eine Analogie 3.Art zur zweiwertigen Konjunktion.

Sätze der zweiwertigen Logik bleiben auch in mehrwertigen Logiken erhalten *unter der Voraussetzung*, daß alle verwendeten mehrwertigen Funktoren Analoga 3. Art der entsprechenden zweiwertigen Funktoren sind. Die Tautologien der zweiwertigen Logik gelten somit in analoger Form auch in mehrwertigen.

Geben wir auch hier ein Beispiel! Der Satz

$$-(p \wedge -p),$$

das klassische Nichtwiderspruchsprinzip, ist eine Tautologie zweiwertiger Logik. Unser Funktor F-1(5) wurde als Analogon zur Negation und unser Funktor F-2(5) als Analogon zur Konjunktion erkannt. Der Satz

$$F-1(5)\,[(p)\ F-2(5)\ \ F-1(5)\,(p)]$$

müßte somit eine Tautologie im fünfwertigen Kalkül sein. Wie der Leser leicht nachrechnen kann, ist dies in der Tat der Fall. (Die entsprechende Lösungsmatrix enthält in allen 25 Zeilen den ausgezeichneten Geltungswert *3.)

Soweit unsere Darstellung zum Hauptsatz I. Kommen wir nun zum *Rutz-Hauptsatz II*. Dieser lautet: „Die Entscheidbarkeit für einen mehrwertigen Ausdruck (ist) zweiwertig durchführbar" (S.69). *Rutz* will also zeigen, „daß jedem Satz einer mehrwertigen Aussagenlogik ein Satz der zweiwertigen klassischen Logik entspricht" (S.56).

Zunächst muß eine der mehrwertigen Matrix $M_{n,s}$ isomorphe „zweiwertige" Matrix $M^*_{n,s}$ konstruiert werden, also

$$t : A^*_n \rightarrow A_2$$

$$\text{mit } t(a) = \begin{cases} 0, \text{ falls } a \in A^*_n - B^*_{n,s} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} \qquad (5)$$

Die Mengen A^*_n bzw. B

Die Mengen A^*_n bzw. $B^*_{n,s}$ werden über die *n*-Artigkeit der Funktion a, d.h. die endlich große Mächtigkeit von a (|a|), so definiert:

$$A^*_n \ := \{a \in A^k_n |\ |a| \qquad \text{und}$$

$$B^*_{n,s} \ := \{a \in A^*_n |\ |a| \in B_{n,s} \qquad (6)$$

ei M

Sei $M(G)$ die Menge aller Aussageformen über die Funktorenmenge G, φ eine Bewertung aus der Gesamtmenge der Bewertungen Φ und $k \in \mathbb{N}$, so entspricht der Operation t aus (5) in Q_2 ein Funktor T vom Typus k folgendermaßen:

$$\begin{tikzcd} M^k(G_2) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi k"'] & M(G_2) \arrow[d, "\varphi"] \\ A^k_2 \arrow[r, "t"] & A_2 \end{tikzcd} \qquad (7)$$

ist kommutativ für alle $\varphi \in \Phi/A_2$ (vgl. S.61)

Damit ist nun in der zweiwertigen Logik nachprüfbar, ob ein gegebener Ausdruck einer mehrwertigen Logik allgemeingültig ist.

Damit sollten die *Rutz*schen Hauptsätze hinreichend genau skizziert sein. Was ist aber dadurch erreicht worden? *Rutz* konnte zeigen, *erstens*, daß eine gewisse Menge mehrwertiger Funktoren Analogien zu zweiwertigen darstellen und damit die Sätze der zweiwertigen Logik in analoger Form auch in mehrwertigen gelten und *zweitens*, daß Ausdrücke mehrwertiger Logiksysteme durch geeignete Reduktionen der jeweiligen Geltungswerte auf die klassischen Werte 0 und 1 in der zweiwertigen Logik entscheidbar sind.

Der springende Punkt der ganzen Bemühungen ist, mehrwertige Systeme zu „verzweiwertigen": die ausgezeichneten Geltungswerte werden zum Wahrheitswert 1 (wahr) und die nicht-ausgezeichneten zum Wert 0 (falsch). Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, fällt viel von der ursprünglich angenommenen Brisanz der *Rutz*schen Thesen hinfort. *Formal* gesehen, ist das Vorgehen von *Rutz* gerechtfertigt (und ein Argument für die formale Einheit der Logik); *inhaltlich* gesehen, ist das Vorgehen völlig witzlos: ein dritter (und weiterer) Geltungswert wurde sicherlich nicht in die Logik eingeführt, um danach wieder durch 0 oder 1 ersetzt zu werden, sondern verlangt eine Interpretation (etwa als „unbestimmt"). Die durch die Mehrwertigkeit geschaffenen neuen *inhaltlichen Ausdrucksmöglichkeiten logischer Systeme* (z.B. zur Konstruktion einer „Logik der Mikrowelt", einer Handlungslogik oder einer Modallogik) werden von *Rutz* überhaupt nicht beachtet. In diesem Sinne drücken unsere Beispielsätze

$-(p \wedge -p)$

und

$F-1(5)\,[(p)\;\; F-2(5)\;\; F-1(5)\;\; (p)]$

– obgleich formal analog – inhaltlich völlig anderes aus.

Wolfgang G. Stock

Dr. W.G. Stock, Langegg-Ort 25
A-8302 Nestelbach bei Graz