

# Von der Vitrine zur interaktiven Forschungsinfrastruktur

## Das Digitale Archiv Mathematischer Modelle

---

Robert Päßler

### Materielle mathematische Modelle

Zahlreiche Universitäten und Hochschulen sind im Besitz von Sammlungen materieller mathematischer Modelle.<sup>1</sup> Materielle mathematische Modelle ermöglichen es, einfache, aber auch komplexe mathematische Sachverhalte visuell und haptisch erfahrbar zu machen.<sup>2</sup> In den Jahrzehnten um 1900 erlebten diese Lehrmittel eine beachtliche Konjunktur und waren weit verbreitet, um den akademischen Unterricht anschaulicher zu gestalten. Ab den 1920er Jahren verloren die mathematischen Modelle jedoch zunehmend an Bedeutung und gerieten vielerorts in Vergessenheit. So sind einige Objekte über die letzten Jahrzehnte verloren gegangen oder lagern in den Abstellkammern der mathematischen Institute. Nicht so in Dresden: Die Sammlung der hiesigen Technischen Universität – mit etwa 500 erhaltenen Objekten eine der größten in Deutschland – exponiert ihre Modelle gut sichtbar und für alle Interessierten zugänglich in beleuchteten Vitrinen auf den Fluren des Fakultätsgebäudes. Vor allem aber wird mit den historischen Lehrmitteln weiterhin gelehrt und geforscht.

### Digitales Archiv Mathematischer Modelle (DAMM)

Seit 2001 wird die Dresdner Sammlung von Prof. Daniel Lordick betreut und auch online präsentiert. Darüber hinaus begann er mit einer Tiefenerschließung des umfangreichen Bestandes. Eine Förderung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Bereich der Wissenschaftlichen Literaturversorgungs- und Informationssysteme ermöglichte den Ausbau der Webpräsenz. So entstand

---

<sup>1</sup> Eine unvollständige Liste von Sammlungen materieller mathematischer Modelle ist unter [www.math.tu-dresden.de/rpaesse/damm/](http://www.math.tu-dresden.de/rpaesse/damm/) einsehbar [30.06.2020].  
<sup>2</sup> Zur Bedeutung und Geschichte mathematischer Modelle vgl. Mehrtens (2004).

DAMM – ein Digitales Archiv Mathematischer Modelle<sup>3</sup>. Das DAMM-Projekt begann im Jahr 2012 und umfasste:

- die Digitalisierung und Archivierung der mathematischen Modelle für die frei zugängliche, multimediale Präsentation und flexible Recherche via Internet,
- eine vollumfängliche Inventarisierung der Sammlung,
- die Entwicklung eines Konzepts zur Visualisierung der Modelle insbesondere mit 3D-Verfahren sowie
- eine Vertiefung der wissenschaftlichen Dokumentation.

Die Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) digitalisierte darüber hinaus die zur Sammlung Mathematische Modelle in Dresden gehörende »graue Literatur«, also Kataloge, Firmenschriften oder sonstige Publikationen zu den Modellen, die seitdem in Ergänzung der Modelle in DAMM frei abrufbar ist.

Im Anschluss des Projekts wurde mit einer überregionalen Vernetzung ausgewählter Daten von DAMM begonnen, die bis heute fortgesetzt wird. So besitzt DAMM eine Schnittstelle zur Deutschen Digitalen Bibliothek (DDB)<sup>4</sup> und es lassen sich in wenigen Schritten alle erforderlichen Daten einer Sammlung für den Transfer in die DDB zusammenstellen.

Die Arbeitsgruppe »Geometrische Modellierung und Visualisierung<sup>5</sup> sowie der DAMM-Projektpartner, Prof. Rainer Groh (Professur für Mediengestaltung an der TU Dresden<sup>6</sup>), entwickeln DAMM kontinuierlich weiter, um DAMM als Forschungsinfrastruktur international zur Verfügung zu stellen. Hierfür werden nicht nur Modelle der Sammlung Mathematische Modelle in Dresden, sondern auch solche aus Sammlungen anderer Standorte in DAMM integriert.<sup>7</sup> Bereits im Projektzeitraum wurden Objekte der Sammlung historischer mathematischer Modelle der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg<sup>8</sup> digitalisiert, um Lücken der Dresdner Bestände zumindest digital zu schließen. Das langfristige Ziel ist es, möglichst alle materiellen mathematischen Modelle in DAMM abzubilden.

3 DAMM ist verfügbar unter der URL: [mathematical-models.org](http://mathematical-models.org) [30.06.2020].

4 Das Portal der DDB ist erreichbar unter: [www.deutsche-digitale-bibliothek.de](http://www.deutsche-digitale-bibliothek.de) [30.06.2020].

5 Informationen zur Arbeitsgruppe finden sich unter: [tu-dresden.de/mn/math/geometrie/lordick](http://tu-dresden.de/mn/math/geometrie/lordick) [30.06.2020].

6 Tätigkeitsfelder und Kontaktdaten dieser Professur können folgender Webseite entnommen werden: [tu-dresden.de/ing/informatik/smt/mg/die-professur/mitarbeiter/prof-dr-ing-habil-rainer-groh](http://tu-dresden.de/ing/informatik/smt/mg/die-professur/mitarbeiter/prof-dr-ing-habil-rainer-groh) [30.06.2020].

7 Dank der Stabsstelle Internationalisierung der TU Dresden wird DAMM aktuell internationale und steht künftig auch für Nichtdeutschsprechende zur Verfügung.

8 Die Modelle der Sammlung können über [www2.mathematik.uni-halle.de/modellsammlung/](http://www2.mathematik.uni-halle.de/modellsammlung/) [30.06.2020] eingesehen werden.

## Visualisierung historischer materieller mathematischer Modelle in DAMM

Zur Visualisierung der 3D-Digitalisate der materiellen mathematischen Modelle wird in DAMM ein Viewer namens »Mediabox« eingesetzt. Diese Eigenentwicklung ist ein erweiterungsfähiges Plug-in-System (technisch gesehen ein Ordner mit Dateien), das über einen Inlineframe Inhalte, die ein Webbrower darstellen kann, zur Verfügung stellt (Fotos, Videos, 3D-Darstellungen oder sonstige, beliebige Formate). Folgende Dateien müssen hierfür mindestens hinterlegt werden:

- eine Index-Datei (im HTML-Format), in der interne und externe Javascripts (`jQuery9` und `x3dom10`), Stylesheets, die Datei(en) des Digitalisats sowie eine zum Digitalisat gehörende Toolbar eingebunden werden,
- ein Vorschaubild (Thumbnail) – erst nach einem Klick auf dieses Bild wird die zum Teil große Datenmenge des Digitalisats vom Server geladen und im Browser angezeigt,
- eine JSON-Datei, mit deren Hilfe die Daten im Back-End verwaltet werden können, und
- die Daten, die das 3D-Modell darstellen.

## Herstellung der 3D-Modelle

Die Digitalisierung der Modelle ist abhängig von der Materialität und der Funktion der Objekte (Abb. 1). Im Rahmen des DAMM-Projekts haben wir vier Kategorien unterschieden:

1. Gips- und Holzmodelle mit geschlossener Oberfläche
2. Stab- oder Fadenmodelle
3. Kunststoffmodelle mit glänzender bzw. durchsichtiger Oberfläche
4. veränderliche bzw. bewegliche Modelle

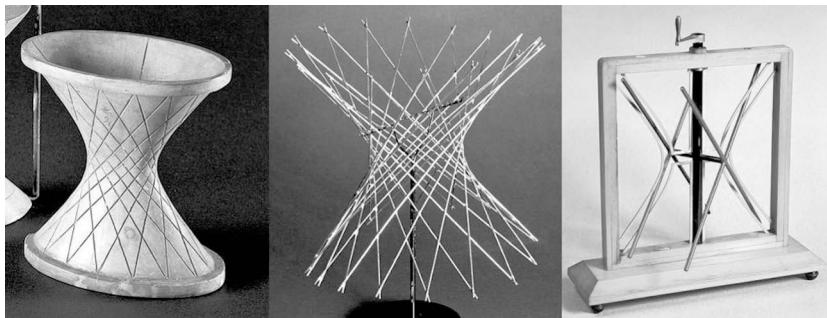
Jede dieser Modellgruppen erfordert letztlich einen eigenen Digitalisierungsprozess. Bei der Entwicklung der Workflows haben wir außerdem auf eine möglichst breite Verwendung von Open Source-Software und entsprechenden Programmzbibliotheken<sup>11</sup> Wert gelegt sowie weiterhin auf einen möglichst hohen Grad an Automatisierung mit möglichst wenigen manuellen Eingriffen.

<sup>9</sup> Mehr Informationen zu jQuery gibt es unter: <http://jquery.com> [30.06.2020].

<sup>10</sup> Die Seite [www.x3dom.org](http://www.x3dom.org) informiert über das X3DOM-Format und damit verbundene Projekte [30.06.2020].

<sup>11</sup> Der Workflow lässt sich so anwenderfreundlicher auf andere Projekte übertragen.

*Abbildung 1: Drei Modelle aus verschiedenen Materialien, die alle ein einschaliges Hyperboloid darstellen. Foto: Lutz Liebert.*



### Gipsmodelle mit geschlossener Oberfläche

Gipsmodelle mit geschlossener Oberfläche durchlaufen zwei Digitalisierungsschritte. Zum einen wird mit einem industriellen optischen 3D-Digitalisierer eine detaillierte Punktwolke erzeugt<sup>12</sup> (siehe Abb. 3 linker Pfad). Tests mehrerer Scanner ergaben, dass ein GOM ATOS<sup>13</sup> für unsere Belange das beste Resultat liefert. Beim Scanvorgang wird ein Objekt (wenn erforderlich) manuell auf verschiedene Seiten gelegt und schrittweise aufgenommen. Dabei werden präzise Streifenmuster auf die Oberfläche eines Objekts projiziert und von zwei Kameras erfasst. Vollautomatisch werden so vom System Punkt für Punkt auf der Modell-Oberfläche Koordinaten bestimmt. Das Resultat, eine (aus eventuell mehreren Vorgängen entstehende) Menge an Koordinaten, wird in einer Datei zusammengeführt. Sie besteht meist aus mehreren Millionen Koordinaten. Diese Koordinaten werden im nächsten Schritt durch mathematische Verfahren miteinander vernetzt. Die Oberfläche eines gescannten Objekts wird nach dieser Triangulierung ausschließlich durch ebene Dreiecksflächen repräsentiert.

Für diesen Vorgang werden Referenzmarken auf die Objekte aufgebracht und vom Scanner mit registriert. Die Koordinaten dieser Referenzpunkte werden separat in einer Datei abgespeichert. So können unter anderem die verschiedenen Scans zu einer Punktwolke zusammengefasst werden. Da der verwendete, hochpräzise 3D-Digitalisierer keine entsprechend qualitativ hochwertigen Aufnahmen

12 Für die Nutzung der Scan-Technik, die auch heute noch projektbezogen ermöglicht wird, ergibt ein großer Dank an Frau Dr.-Ing. habil. Christine Schöne und Herrn Dr.-Ing. Stefan Holtzhausen von der Professur für Konstruktionstechnik/CAD.

13 Weiterführende Informationen zum Scanner finden sich auf der Seite: [www.gom.com/de/messsysteme/atos/atos-triple-scan.html](http://www.gom.com/de/messsysteme/atos/atos-triple-scan.html) [30.06.2020].

der Textur ermöglichte, haben wir die Texturierung über ein nachgeschaltetes Verfahren realisiert.

In diesem Schritt wurden Fotoserien der Modelle aus unterschiedlichen Perspektiven angefertigt (siehe Abb. 3 rechter Pfad). Dazu diente eine dafür konzipierte vollautomatische Vorrichtung, bestehend aus einem Drehteller und einem Kamera-Kran-Arm (Abb. 2). Die Steuerung der beiden unabhängig voneinander arbeitenden Motoren für Drehteller und Kran erfolgt mit zwei frei programmierbaren Controllern der Firma isel Germany AG<sup>14</sup>, die über eine mit der Programmiersprache Python geschriebene Software namens »Steuermann« bedient werden.

*Abbildung 2: Vorrichtung aus Drehteller und Kamera-Kran-Arm zum vollautomatischen Aufnehmen beliebig vieler Fotos. Foto: Arbeitsgruppe.*



Im Anschluss wertet AICON 3D-Studio, eine Photogrammetrie-Software und die einzige kommerzielle Software im beschriebenen Digitalisierungsverfahren, die mit einer Nikon D-600 erzeugten Fotos aus und fertigt ein Protokoll an, in dem ebenfalls die Koordinaten der Referenzmarken vermerkt werden.<sup>15</sup>

Ein eigens programmiertes System, gewissermaßen das »Herz des Digitalisierungsprozesses«, führt schließlich den 3D-Scan und die Fotos zusammen. Es ordnet mittels beider Referenzpunkte-Protokolle jedem Punkt der Punktwolke das

<sup>14</sup> Informationen zum Hersteller der Controller gibt es unter: <https://www.isel.com/de> [30.06.2020].

<sup>15</sup> Eine Optimierung des Photogrammetrie-Prozesses wurde mit Herrn Dr.-Ing. Danilo Schneider von der Professur für Photogrammetrie der TU Dresden erarbeitet.

beste Pixel der Fotografien zu. Hierfür wird das Pixel ausgewählt, das im Verhältnis zum Objekt möglichst orthogonal aufgenommen wurde und demzufolge mit dem besten Farbabgleich ausgewählt werden kann.<sup>16</sup> Als Resultat entstehen zwei Dateien:

- aus dem 3D-Scan wird eine X3D-Datei generiert. Sie enthält UV-Koordinaten, die ein 3D-Objekt durch 2D-Koordinaten beschreiben. Zur Erstellung der UV-Koordinaten wird eine Funktion der Open Source 3D-Grafik-Software Blender<sup>17</sup> genutzt.
- die ausgewählten Pixel werden diesen UV-Koordinaten zugewiesen und im Rastergrafikformat PNG gespeichert.

Beide Dateien werden schließlich durch eine Index-Datei verknüpft und liefern die texturierten 3D-Daten im Browser.

Das Scannen mit dem GOM ATOS dauert etwa 15 Minuten, kann bei komplexen Objekten aber auch längere Zeit in Anspruch nehmen. Hinzu kommen wenige Minuten, die zum Aufkleben der Referenzmarken eingeplant werden müssen. Erfahrungen zeigen, dass 164 Fotos pro Modell eine sehr gute Grundlage für die Texturierung liefern, für die ebenfalls ca. 15 Minuten benötigt werden. Für die Darstellung in DAMM werden die Punktwolken stark reduziert, um die Größe der zu ladenden Daten gering zu halten. Es genügt oft eine Reduzierung der Punkte auf 5 % der absolut berechneten Punktemenge oder weniger. Die Berechnungen und das Abspeichern der Textur-Datei benötigt ungefähr weitere 5 Minuten. Die finalen Dateien für die Präsentation in DAMM besitzen eine Größe von etwa 5 MB. Ließe man die Punktwolke vollständig, könnten die Berechnungen mehrere Stunden dauern und die Dateien mehrere hundert MB groß werden.

## Andere Modelltypen

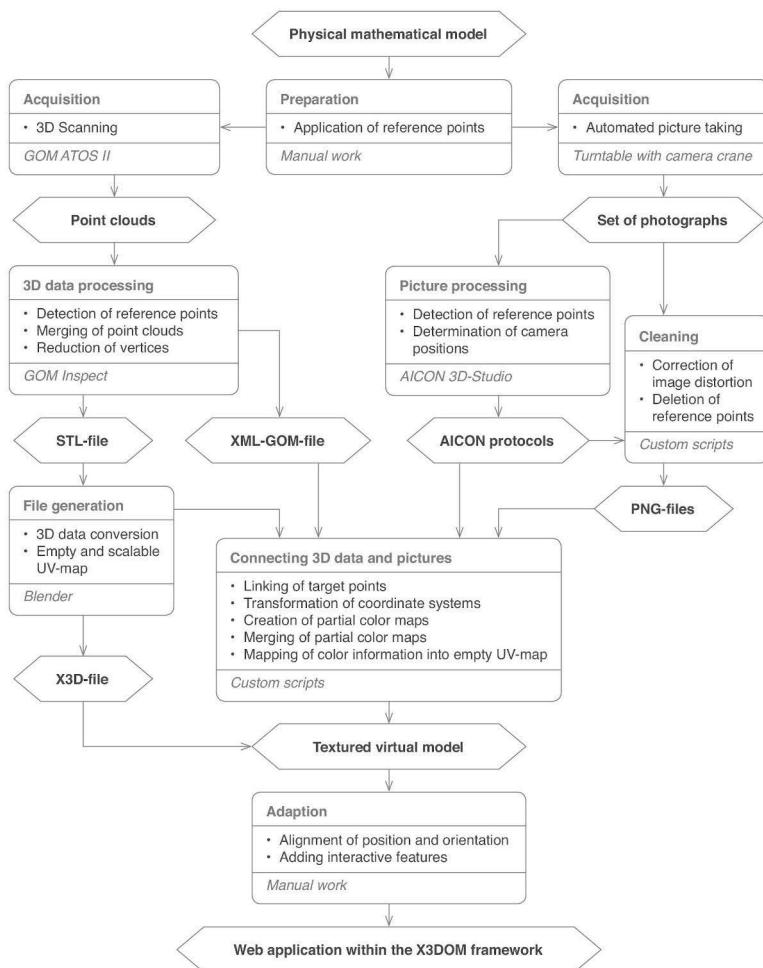
Das skizzierte Verfahren lässt sich leider nicht bei anderen Modelltypen anwenden. Reflektierende bzw. durchsichtige Oberflächen sowie dünne Stäbe bzw. Drähte werden vom 3D-Scanner nicht erfasst. Reflektierende oder durchsichtige Oberflächen lassen sich zwar mittels sogenannter Scansprays für den Scanvorgang matt sprühen – ein in industriellen Anwendungsszenarien oft verwendetes Verfahren. Für historische und zum Teil sehr empfindliche Objekte ist ein Mattierungsspray aber keine Option. Bei Stab- bzw. Drahtmodellen lassen sich zumindest die Rahmen, die aus Holz oder mattem Metall sind, digital erfassen. Die Stäbe bzw. Drähte

---

<sup>16</sup> Das Verfahren wird detailliert in Bornemann et al. (2014) beschrieben (siehe auch Abb. 3).

<sup>17</sup> Das Programm und Informationen dazu gibt es unter: [www.blender.org](http://www.blender.org) [30.06.2020].

Abbildung 3: Übersicht des Digitalisierungs- und Texturierungsprozesses.



können dann anschließend mit CAD-Software, zum Beispiel Blender, nachmodellierend hinzugefügt werden. DAMM bindet solche Hybride aus gescannten und programmierten Daten ein. Auch hier werden X3D-Dateien mit PNG-Grafiken verknüpft.

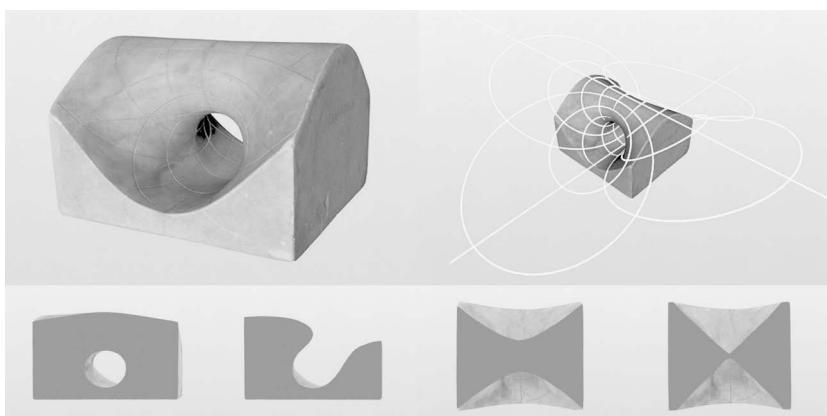
Die Drehteller-Kran-Arm-Apparatur bietet sich darüber hinaus für Structure from Motion-Verfahren an. Hier werden durch Überlappung zeitversetzt aufgenommener Fotos 3D-Informationen berechnet. Eine allgemeine Umsetzung für

veränderliche bzw. bewegliche Modelle ist aber noch unklar. Hier müssen digitale Modelle erstellt werden.

## Mathematische digitale Modelle

Durch die flexible Mediabox von DAMM haben sich zahlreiche Nutzungsmöglichkeiten ergeben, die zu Beginn des DAMM-Projekts noch gar nicht absehbar waren. Geplant und im Projektzeitraum umgesetzt wurden intuitive Interaktionen an und mit ausgewählten 3D-Digitalisaten. So lässt sich beispielsweise mit dem Mausrad in ein Modell zoomen oder per gedrückter linker Maustaste das Modell beliebig drehen. Darüber hinaus wurde eine Möglichkeit implementiert, die Modelle zu schneiden (Abb. 4). Per Klick lässt sich eine Schnittebene einblenden, die mit einem Schieberegler bewegt werden kann. Es lassen sich also interaktiv Teile der 3D-Daten ausblenden.

Abbildung 4: Ein digitalisiertes Modell mit Annotationen und in verschiedenen Schnitt-Ansichten.



Ein naheliegender Schritt ist umgekehrt, den Modellen Daten interaktiv hinzuzufügen, z.B. Annotationen. Hierfür wird CindyJS<sup>18</sup>, ein Javascript-Framework für interaktive mathematische Animationen im Web, genutzt. Die Skriptsprache CindyScript – Teil von CindyJS – stellt eine Reihe an geometrischen Operationen zur Verfügung. So lassen sich etwa mittels Raytracing Oberflächen auf Grundlage vorgegebener Gleichungen visualisieren. Beim Raytracing wird berechnet, welche

18 Das Projekt zu CindyJS wird vorgestellt unter: [cindyjs.org](https://cindyjs.org) [30.06.2020].

Koordinaten von einem Ausgangspunkt aus zu sehen sind und welche verdeckt werden. Eine Veränderung des Ausgangspunkts hat eine neue Berechnung aller Informationen zur Folge. Ein großer Vorteil ist, dass in Gleichungen Parameter eingesetzt werden und Veränderungen an den Gleichungen in Echtzeit visualisiert werden, sodass die Nutzer\*innen interaktiv mit den Modellen arbeiten können. Ein solches Raytracing-Modell kann als eigenständiges digitales Modell in DAMM zu einem 3D-Modell eines materiellen Modells hinzugefügt werden. Es lassen sich mit CindyJS auch didaktisch intendierte Annotationen zu Modellen anbringen. Die X3D-Datei wird hierzu mit zusätzlichen Daten bestückt:

- Annotationen können am Modell Details erklären. An Gipsmodellen befinden sich zum Beispiel Ritzungen, deren mathematischer Gehalt durch hinzugefügte farbige Kurven demonstriert werden kann.
- Des Weiteren können Annotationen den mathematischen Sachverhalt, den ein Modell darstellen soll, textlich und durch Formeln detailliert beschreiben.
- Schließlich kann im Abgleich mit mathematisch berechneten Daten die Korrektheit eines historischen Modells geprüft werden. Stellt ein Modell auch wirklich die Fläche mit der angegebenen Gleichung dar? Das historische Modell im Vergleich mit der durch Raytracing erstellten Fläche ermöglicht eine Kontrolle. Färbt man nun noch die Fläche ein, je nachdem, wie groß der Abstand zum gescannten Modell ist, lässt sich präzise der Grad der Abweichungen visualisieren.

Auch ohne größere Programmierkenntnisse bietet die Mediabox einen einfachen Zugang zu interaktiver Mathematik. Als Beispiel hierfür lässt sich GeoGebra<sup>19</sup> nennen. Diese Geometrie- und Algebra-Software wird teilweise bereits im Schulunterricht genutzt.<sup>20</sup> Sie ermöglicht ein Anfertigen von eigenen Applikationen mittels elementarer mathematischer Funktionen. Diese Applikationen können ebenfalls als Mediabox in DAMM eingebunden werden. Hierfür steht in GeoGebra eine Export-Funktion bereit, die das Programmierte browserfähig speichern lässt. In die Mediabox muss schließlich nur diese eine exportierte HTML-Datei geladen werden. Es stehen sogar einige Einstellungsmöglichkeiten zur Verfügung, sodass in DAMM interaktiv mit der GeoGebra-Applikation gearbeitet werden kann.

Insbesondere für die vom 3D-Scanner nicht erfassbaren Objekte bieten CindyJS oder auch GeoGebra anderweitige Möglichkeiten zur digitalen Abbildung. Tatsächlich sind die damit erstellten Digitalisate kein getreues Abbild der Modelle aus der Vitrine, aber sie vermitteln weiterhin den visuellen Gehalt eines solchen Modells.

---

<sup>19</sup> GeoGebra, <https://www.geogebra.org> [30.06.2020].

<sup>20</sup> Dank der von der *Gesellschaft von Freunden und Förderern der TU Dresden* bereitgestellten Mittel konnte die Sammlung in eine Beziehung zur Anwendung in der Schule gesetzt werden.

## Fazit und Ausblick

Für die digitale 3D-Darstellung von materiellen mathematischen Modellen können – wie gezeigt – verschiedene Techniken zur Anwendung kommen. Zunächst einmal sollte man sich aber die Frage stellen, weshalb man Objekte, die selbst Abstraktionen mathematischer Sachverhalte (z.B. Flächen) darstellen, überhaupt derart aufwändig digitalisieren sollte. Immerhin könnte man all die mathematischen Kurven, Flächen oder Funktionen, denen materielle mathematische Modelle eine Form geben, auch ohne die physischen Vorbilder mittels geeigneter Software visualisieren oder mit entsprechenden CAD-Verfahren modellieren. Ein solcher Blickwinkel ließe allerdings die historische Dimension der Modelle und ihre physische Präsenz außer Acht.<sup>21</sup> Es geht bei den mathematischen Modellen der Sammlung sowie bei ihrer Digitalisierung nicht alleine um den mathematischen, sondern auch um den wissenschaftsgeschichtlichen, den kunsthistorischen und den fachdidaktischen Aspekt. Die ästhetische wie auch die epistemische Qualität dieser aus Gips, Seidenfäden, Messing und Holz gefertigten »realen« materiellen Objekte mit all ihren Abnutzungsspuren oder bewusst hinzugefügten Markierungen lässt sich nicht einfach mit mathematischen Formeln simulieren.

Darüber hinaus stellt die hier nachgezeichnete Digitalisierung der Modelle eine neue Form der Erschließung (und damit der Objektforschung) dar. Das daraus hervorgehende Digitalisat ist selbst wieder ein Objekt mit eigenem Herstellungsprozess (und somit eigener Provenienz) und bietet eine völlig neue Art der Präsentation und Nutzung. Dies erlaubt Analysen und Erkenntnisse, die bisherige Formen der Digitalisierung nicht bieten konnten. So lassen sich beispielsweise Daten eines »realen« Objekts per Schieberegler entfernen oder per Mausklick hinzufügen, um noch intensiver damit arbeiten zu können (siehe Abb. 4). Für weitere Nutzungszenarien werden derzeit Schnittstellen zu neuen, immersiven Visualisierungstechniken analysiert. Weitere Herausforderungen bestehen in der Integration veränderlicher bzw. beweglicher mathematischer Modelle sowie in der Aufbereitung der Daten für 3D-Displays oder Unterhaltungselektronik wie etwa VR-Geräten. Die mathematischen Modelle der TU Dresden sind somit längst nicht nur in Vitrinen exponierte Zeugnisse der Mathematik- und Universitätsgeschichte, sondern Gegenstände aktueller Forschung und Lehre.

---

<sup>21</sup> Mehrtens (2004).

## Literatur

- Bornemann, Martin/Melzer, Sebastian/Lordick, Daniel: Automated High Precision Texturing of 3D-Scans, in: Hans-Peter Schröcker/Manfred Husty (Hg.): Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics, Innsbruck 2014, S. 93-102.
- Mehrtens, Herbert: Mathematical Models, in: Soraya De Chadarevian/Nick Hopwood (Hg.): Models. The third dimension of science, Stanford, California 2004, S. 276-306.

