

Reihe 18

Mechanik/
Bruchmechanik

Nr. 346

Dipl.-Math. techn. Mathias Würkner,
Magdeburg

Numerische Homogenisierung von Faserverbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur

Numerische Homogenisierung von Faserverbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

von Dipl.-Math. techn. Mathias Würkner

geb. am 03.07.1978 in Aschersleben

genehmigt durch die Fakultät für Maschinenbau
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Ulrich Gabbert
Prof. Dr.-Ing. Andreas Öchsner, D.Sc.

Promotionskolloquium am 23.06.2016

Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 18

Mechanik/
Bruchmechanik

Dipl.-Math. techn. Mathias Würkner,
Magdeburg

Nr. 346

Numerische Homogeni-
sierung von Faserver-
bundwerkstoffen mit
periodischer Mikro-
struktur

VDI verlag

Würkner, Mathias

Numerische Homogenisierung von Faserverbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 346. Düsseldorf: VDI Verlag 2017.

146 Seiten, 77 Bilder, 28 Tabellen.

ISBN 978-3-18-334618-9, ISSN 0178-9457,

€ 57,00/VDI-Mitgliederpreis € 51,30.

Für die Dokumentation: Homogenisierung – Periodische Mikrostrukturen – FEM – Unidirektionale Faserverbundwerkstoffe – Imperfekter Phasenübergang – Repräsentatives Volumenelement

Die Grundlage zur Bestimmung und Berechnung von effektiven Materialeigenschaften von Verbundwerkstoffen bilden Homogenisierungsverfahren. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Weiterentwicklung von numerischen Homogenisierungsverfahren und der Berechnung der effektiven Materialeigenschaften für unidirektionale Faserverbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode. Der Fokus liegt dabei auf der Modellierbarkeit verschiedener Faseranordnungen, auf dem Einbeziehen eines imperfekten Phasenübergangs sowie auf der Erweiterung auf piezoelektrische Verbundwerkstoffe. Die diesbezüglich entwickelten Berechnungsmodelle werden anhand von Testbeispielen validiert. Des Weiteren werden der Einfluss des imperfekten Phasenübergangs und der Einfluss der Faseranordnung auf die effektiven Materialeigenschaften untersucht.

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Bibliothek

(German National Library)

The Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie (German National Bibliography); detailed bibliographic data is available via Internet at <http://dnb.ddb.de>.

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 2017

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9457

ISBN 978-3-18-334618-9

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Numerische Mechanik der Fakultät für Maschinenbau der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. Diesbezüglich möchte ich mich bei einigen Personen bedanken, die mich während der Zeit unterstützt und begleitet haben.

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Ulrich Gabbert, für die stets wohlwollende Unterstützung und wissenschaftliche Betreuung der Arbeit bedanken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Öchsner, D.Sc. danke ich für das wissenschaftliche Interesse und die Begutachtung der Arbeit.

Ich bedanke mich bei den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Numerische Mechanik, insbesondere Herrn Dr.-Ing. Harald Berger, für die vielen fachlichen Gespräche und Anmerkungen, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Mein weiterer Dank gilt Prof. Dr. Reinaldo Rodríguez-Ramos und seinem Team von der Universität von Havanna für die fachlichen Anregungen und die wissenschaftliche Zusammenarbeit.

Des Weiteren möchte ich mich bei allen aktuellen und ehemaligen Mitarbeitern des Instituts für Mechanik für die freundliche Atmosphäre und Hilfsbereitschaft bedanken.

Schließlich möchte ich mich ganz herzlich bei meinen Eltern Helmut und Uta, bei meinem Bruder Steffen und seiner Familie für die entgegengebrachte Geduld und den seelischen Ausgleich während der Anfertigung der Arbeit bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen	VII
Abstract	XIV
Kurzfassung	XV
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Forschung	4
1.3 Ziele und Gliederung der Arbeit	6
2 Modellierung von Werkstoffen	9
2.1 Grundlagen der linearen Elastostatik	9
2.2 Piezoelektrische Werkstoffe	13
2.2.1 Piezoeffekt	13
2.2.2 Grundlagen der Modellierung	14
2.3 Materialsymmetrien	16
2.3.1 Koordinatentransformation	17
2.3.2 Symmetrien des Elastizitätstensors	18
3 Homogenisierungsverfahren	21
3.1 Das repräsentative Volumenelement (RVE)	22
3.2 Nichtperiodische Mikrostruktur	26
3.2.1 CCA-Modellierung	26
3.2.2 Verallgemeinertes Selbstkonsistenzschema, GSCS	30
3.3 Periodische Mikrostruktur	33
3.3.1 RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt	37
3.4 Imperfekter Phasenübergang	41
3.5 Piezoelektrische Materialien	44
3.5.1 Imperfekter Phasenübergang	50
4 Modellbildung unter Verwendung der FEM	53
4.1 Grundlagen der FEM	53
4.2 Periodische Randbedingungen	57
4.3 Bestimmen der makroskopischen Größen	59
4.4 Imperfekter Phasenübergang	60
5 Berechnung effektiver Materialeigenschaften	65
5.1 Elastische unidirektionale Faserverbundstrukturen	70
5.1.1 Rhombischer RUC-Querschnitt mit perfektem Phasenübergang	70

5.1.2	Rhombischer RUC-Querschnitt mit imperfektem Phasenübergang .	81
5.1.3	Parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt mit perfektem Phasenübergang	89
5.1.4	Parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt mit imperfektem Phasenübergang	96
5.2	Piezoelektrische unidirektionale Faserverbundstrukturen	99
5.2.1	Rhombischer RUC-Querschnitt mit perfektem Phasenübergang . . .	99
5.2.2	Parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt mit perfektem Phasenübergang	105
5.2.3	Parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt mit imperfektem Phasenübergang	108
6	Zusammenfassung und Ausblick	113
A	Verallgemeinertes Selbstkonsistenzschema	117
B	Untersuchungen zur FE-Netzfeinheit	119
	Literaturverzeichnis	122

Formelzeichen

Kapitel 2

σ	Spannungstensor (2. Stufe)
\mathbf{f}	Vektor der Intensität infolge Volumenkräften
Ω	zusammenhängendes offenes Gebiet
ε	Verzerrungstensor (2. Stufe)
\mathbf{C}	Elastizitätstensor (4. Stufe)
\mathbf{S}	Nachgiebigkeitstensor (4. Stufe)
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
$\tilde{\sigma}$	Spannungsvektor (M-V-Notation)
$\tilde{\mathbf{C}}$	Elastizitätsmatrix (M-V-Notation)
$\tilde{\varepsilon}$	Verzerrungsvektor (M-V-Notation)
$\tilde{\mathbf{S}}$	Nachgiebigkeitsmatrix (M-V-Notation)
∇	Differentiationsmatrix
$\dot{\mathbf{u}}$	vorgeschriebener Verschiebungsvektor
Γ_u	DIRICHLET-Rand
$\hat{\mathbf{p}}$	vorgeschriebener Randspannungsvektor
Γ_σ	NEUMANN-Rand
\mathbf{n}	äußerer Normalenvektor
\mathbf{v}	dreidimensionale Testfunktion
$\delta \mathbf{u}$	Vektor der virtuellen Verrückungen
\mathbf{D}	Vektor der dielektrischen Verschiebung
\mathbf{E}	Vektor der elektrischen Feldstärke
\mathbf{e}	Tensor der piezoelektrischen Konstanten (3. Stufe)
κ	Tensor der dielektrischen Konstanten (2. Stufe)
ϕ	elektrisches Potential
∇_ϕ	Vektor partieller Operatoren bezüglich ϕ
$\tilde{\mathbf{e}}$	Matrixschreibweise des Tensors der piezoelektrischen Konstanten
$\hat{\phi}$	vorgeschriebenes elektrisches Potential
Γ_ϕ	elektrischer DIRICHLET-Rand
q	vorgeschriebene elektrische Randladung(-sdichte)
Γ_D	elektrischer NEUMANN-Rand
$T_i, i = 1, 2, 3$	Richtungskosinus
α'	eingeschlossener Winkel der x_1 -Achse mit der Strecke \overline{OP}
β'	eingeschlossener Winkel der x_2 -Achse mit der Strecke \overline{OP}
γ'	eingeschlossener Winkel der x_3 -Achse mit der Strecke \overline{OP}

\mathbf{T}	Transformationsmatrix
\mathbf{C}'	Elastizitätstensor (4. Stufe) nach Tensortransformation
$E_i, i = 1, 2, 3$	Elastizitätsmoduli
$G_i, i = 1, 2, 3$	Schubmoduli
ν_{ij}	Querkontraktionszahlen
E_l	longitudinaler Elastizitätsmodul
ν_l	longitudinale Querkontraktionszahl
G_l	longitudinaler Schubmodul
E_t	transversaler Elastizitätsmodul
ν_t	transversale Querkontraktionszahl
k_t	transversaler Kompressionsmodul
E	isotroper Elastizitätsmodul
ν	isotrope Querkontraktionszahl
G	isotroper Schubmodul

Kapitel 3

$x_i, i = 1, 2, 3$	Koordinaten auf der Makroebene
$y_i, i = 1, 2, 3$	Koordinaten auf der Mikroebene
Ω^f	Störphase eines RVE (Faser)
Ω^m	Phase des Grundmaterials eines RVE (Matrix)
Γ	Rand des RVE
Γ_{mf}	gemeinsamer Rand von Ω^m und Ω^f
$\sigma_{ij}^f, i, j = 1, 2, 3$	Spannungskomponenten in Ω^f
$\sigma_{ij}^m, i, j = 1, 2, 3$	Spannungskomponenten in Ω^m
$C_{ijkl}^f, i, j, k, l = 1, 2, 3$	Elastizitätskoeffizienten in Ω^f
$C_{ijkl}^m, i, j, k, l = 1, 2, 3$	Elastizitätskoeffizienten in Ω^m
\mathbf{u}^f	Verschiebungsvektor in Ω^f
\mathbf{u}^m	Verschiebungsvektor in Ω^m
n_j^f	Komponente des äußeren Normalenvektors auf Ω^f
n_j^m	Komponente des äußeren Normalenvektors auf Ω^m
$\langle \sigma_{ij} \rangle, i, j = 1, 2, 3$	makroskopische Spannungskomponenten (2. Stufe)
$\langle \varepsilon_{kl} \rangle, k, l = 1, 2, 3$	makroskopische Verzerrungskomponenten (2. Stufe)
$C_{ijkl}^{\text{eff}}, i, j, k, l = 1, 2, 3$	effektive (homogenisierte) Elastizitätskoeffizienten
$\langle \bar{\sigma}_p \rangle, p = 1, \dots, 6$	makroskopische Spannungskomponenten (M-V-Notation)
$\langle \bar{\varepsilon}_q \rangle, q = 1, \dots, 6$	makroskopische Verzerrungskomponenten (M-V-Notation)
$\bar{C}_{pq}^{\text{eff}}, p, q = 1, \dots, 6$	effektive Elastizitätskoeffizienten (M-V-Notation)
$\bar{S}_{pq}^{\text{eff}}, p, q = 1, \dots, 6$	effektive Nachgiebigkeitskoeffizienten (M-V-Notation)
$\sigma_{ij}^0, i, j = 1, 2, 3$	vorgegebene Spannungskomponenten auf Γ
$\varepsilon_{ij}^0, i, j = 1, 2, 3$	vorgegebene Verzerrungskomponenten auf Γ
\mathbf{u}^{per}	Vektor periodischer Verschiebungen bezüglich Ω
Ω^m	Matrixphase der CCA-Modellierung
Ω^f	Faserphase der CCA-Modellierung
Ω^R	restlicher freier Raum

Ω^{cc}	homogenes Teilgebiet
r_n^{f}	Radius der Faser im n-ten Zylinder
r_n^{Z}	Radius des n-ten Zylinders
E_l^{eff}	effektiver longitudinaler Elastizitätsmodul
ν_l^{eff}	effektive longitudinale Querkontraktionszahl
G_l^{eff}	effektiver longitudinaler Schubmodul
G_t^{eff}	effektiver transversaler Schubmodul
ν_t^{eff}	effektive transversale Querkontraktionszahl
E_t^{eff}	effektiver transversaler Elastizitätsmodul
k_t^{eff}	effektiver transversaler Kompressionsmodul
v^{f}	Faservolumenanteil
v^{m}	Matrixvolumenanteil
E_l^{f}	longitudinaler Elastizitätsmodul der Faser
E_l^{m}	longitudinaler Elastizitätsmodul der Matrix
ν_l^{f}	longitudinale Querkontraktionszahl der Faser
ν_l^{m}	longitudinale Querkontraktionszahl der Matrix
G_l^{f}	longitudinaler Schubmodul der Faser
G_l^{m}	longitudinaler Schubmodul der Matrix
G_t^{f}	transversaler Schubmodul der Faser
G_t^{m}	transversaler Schubmodul der Matrix
k_t^{f}	transversaler Kompressionsmodul der Faser
k_t^{m}	transversaler Kompressionsmodul der Matrix
P^{eff}	effektive Materialkonstante
P^{m}	Materialkonstante der Matrix
P^{f}	Materialkonstante der Faser
Var^m	Platzhalter für Materialkonstanten der Matrix
Var^f	Platzhalter für Materialkonstanten der Faser
Ω^{i}	Zwischenphase
Ω^0	homogene Phase
r^{m}	Radius der Matrix
r^{f}	Radius der Faser
r^{i}	Radius der Zwischenphase
t^{i}	Dicke der Zwischenphase
$u_i^k, i = r, \theta$	Verschiebungskomponenten der Phase $\Omega^k, k = \text{f, i, m, 0}$
$\sigma_{ij}^k, i, j = r, \theta$	Spannungskomponenten der Phase $\Omega^k, k = \text{f, i, m, 0}$
A^k	unbekannter Parameter der Phase Ω^k
B^k	unbekannter Parameter der Phase Ω^k
C^k	unbekannter Parameter der Phase Ω^k
D^k	unbekannter Parameter der Phase Ω^k
ν^k	Querkontraktionszahl der Phase Ω^k
G^k	Schubmodul der Phase Ω^k
b	Breite der RUC
h	Höhe der RUC
t	Tiefe der RUC
$A_i^+, i = 1, 2, 3$	Randflächen in positiver y_i -Richtung
$A_i^-, i = 1, 2, 3$	Randflächen in negativer y_i -Richtung

$\mathbf{y}^{A_i^+}$	Koordinaten eines Punktes auf A_i^+
$\mathbf{y}^{A_i^-}$	Koordinaten eines Punktes auf A_i^-
$\tilde{C}_{ij}^{\text{eff}}, i, j = 1, 2, 3$	effektive Elastizitätskoeffizienten (M-V-Notation)
α	Winkel der RUC mit Parallelogramm-Querschnitt
b	Länge der Kante in y_1 -Richtung
w	Länge der angeschrägten Kante
h	Höhe der RUC mit Parallelogramm-Querschnitt
n, s, t	lokale kartesische Koordinaten auf Γ_{mf}
\mathbf{t}	Randspannungsvektor
$K_i^\varepsilon, i = n, s, t$	imperfekte Kontaktparameter in lokalen kartesischen Koordinaten
$K_{ij}^\varepsilon, i, j = 1, 2, 3$	imperfekte Kontaktparameter in festen kartesischen Koordinaten
$K_i^\varepsilon, i = r, \theta, z$	imperfekte Kontaktparameter in zylindrischen Koordinaten
$\ \cdot \ $	Differenz der Größe „ \cdot “ zwischen Matrix und Faser
E^i	Elastizitätsmodul der Zwischenphase
ν^i	Querkontraktionszahl der Zwischenphase
δ_{jk}	KRONECKER-Delta
$D_i^f, i = 1, 2, 3$	dielektrische Verschiebungskomponenten in Ω^f
$D_i^m, i = 1, 2, 3$	dielektrische Verschiebungskomponenten in Ω^m
ϕ^f	elektrisches Potential in Ω^f
ϕ^m	elektrisches Potential in Ω^m
$e_{kij}^f, i, j, k = 1, 2, 3$	Koeffizienten des piezoelektrischen Tensors in Ω^f
$e_{kij}^m, i, j, k = 1, 2, 3$	Koeffizienten des piezoelektrischen Tensors in Ω^m
$\kappa_{ij}^f, i, j = 1, 2, 3$	Koeffizienten des dielektrischen Tensors in Ω^f
$\kappa_{ij}^m, i, j = 1, 2, 3$	Koeffizienten des dielektrischen Tensors in Ω^m
$\langle D_i \rangle, i = 1, 2, 3$	makroskopische dielektrische Verschiebungskomponenten
$\langle E_i \rangle, i = 1, 2, 3$	makroskopische elektrische Feldstärkekomponenten
ϕ^{per}	periodischer Anteil des elektrischen Potentials bezüglich Ω
$E_i^0, i = 1, 2, 3$	vorgegebene elektrische Feldstärkekomponenten
K^E	imperfekter Kontaktparameter
κ^i	dielektrische Konstante der Zwischenphase

Kapitel 4

N^e	Elementknotenanzahl
\mathbf{u}^e	Elementvektor des Verschiebungsansatzes
\mathbf{N}_u^e	Elementmatrix bestehend aus Formfunktionen
$\dot{\mathbf{u}}^e$	Elementvektor bestehend aus Verschiebungsfreiheitsgraden
$\xi_i, i = 1, 2, 3$	Elementkoordinaten
$\xi_{ki}, k = 1, 2, 3$	natürliche Koordinaten des Knotens i
\mathbf{K}_{uu}^e	mechanische Elementsteifigkeitsmatrix
\mathbf{B}_u	Matrix der differenzierten Formfunktionen (mechanisch)
\mathbf{F}_{uu}^e	mechanischer Elementlastvektor

M	Elementanzahl
\mathbf{L}^e	Zuordnungsmatrix (elementweise)
\mathbf{K}_{uu}	mechanische Gesamtsteifigkeitsmatrix
\mathbf{F}_{uu}	mechanischer Gesamtlastvektor
$\hat{\mathbf{u}}$	Gesamtvektor der Verschiebungsfreiheitsgrade
$\mathbf{K}_{uu}^{e,i}$	mechanische Elementsteifigkeitsmatrix des Elementes i
$\mathbf{F}_{uu}^{e,i}$	mechanischer Elementlastvektor des Elementes i
$\mathbf{L}^{e,i}$	Zuordnungsmatrix (elementweise) des Elementes i
ϕ^e	Elementansatz für das elektrische Potential
\mathbf{N}_ϕ^e	Elementmatrix bestehend aus Formfunktionen (elektrisch)
$\hat{\phi}^e$	Elementvektor bestehend aus Freiheitsgraden (elektrisch)
$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e$	Elementsteifigkeitsmatrix (elektrisch)
$\mathbf{F}_{\phi\phi}^e$	Elementlastvektor (elektrisch)
$\mathbf{K}_{u\phi}^e$	Kopplungsmatrix (mechanisch/elektrisch)
\mathbf{B}_ϕ	Matrix der differenzierten Formfunktionen (elektrisch)
$\mathbf{K}_{\phi\phi}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix (elektrisch)
$\mathbf{F}_{\phi\phi}$	Gesamtlastvektor (elektrisch)
$\mathbf{K}_{u\phi}$	Gesamtkopplungsmatrix (mechanisch/elektrisch)
$\hat{\phi}$	Gesamtvektor bestehend aus Freiheitsgraden (elektrisch)
S_V	Menge der Eckknoten
S_E	Menge der Kantenknoten
S_F	Menge der Flächenknoten
$\langle \tilde{\sigma}_k \rangle_*$, $k = 1, \dots, 6$	makroskop. Spannungskomponenten (FEM, M-V-Notation)
$\langle \tilde{\varepsilon}_k \rangle_*$, $k = 1, \dots, 6$	makroskop. Verzerrungskomponenten (FEM, M-V-Notation)
$\tilde{\sigma}_k^{e,i}$, $k = 1, \dots, 6$	Spannungskomponenten des Elementes i (M-V-Notation)
$\tilde{\varepsilon}_k^{e,i}$, $k = 1, \dots, 6$	Verzerrungskomponenten des Elementes i (M-V-Notation)
$ \Omega^{e,i} $	Volumen des Elementes i (M-V-Notation)
$\langle D_k \rangle_*$, $k = 1, \dots, 3$	makroskopische Komponenten des dielektrischen Verschiebungsvektors (FEM)
$\langle E_k \rangle_*$, $k = 1, \dots, 3$	makroskopische Komponenten des Vektors der elektrischen Feldstärke (FEM)
$D_k^{e,i}$, $k = 1, \dots, 3$	Vektorkomponenten der dielektrischen Verschiebung des Elementes i
$E_k^{e,i}$, $k = 1, \dots, 3$	Vektorkomponenten der elektrischen Feldstärke des Elementes i
F	Federkraft (eindimensional)
$K^{*,\varepsilon}$	Federsteifigkeit
\hat{u}^j	Verschiebungsfreiheitsgrad des Knotens j (eindimensional)
\hat{u}^i	Verschiebungsfreiheitsgrad des Knotens i (eindimensional)
F_i , $i = r, \theta, z$	Komponenten des Federkraftvektors in zylindrischen Koordinaten
$K_i^{*,\varepsilon}$, $i = r, \theta, z$	Federsteifigkeiten in zylindrischen Koordinaten
$\ \cdot \ _*$	Differenz von Freiheitsgraden einer Größe „ \cdot “
A^n	auf den Knoten n bezogener Flächeninhalt nach der FE-Diskretisierung
r^f	Faserradius

t	Faserlänge
c_{cs}	Anzahl der Eckknoten des Polygons
α	Winkel
M^m	Elementanzahl der Matrix
M^f	Elementanzahl der Faser
$\varepsilon_k^{e,m,i}, k = 1, \dots, 6$	Verzerrungskomponenten des Elementes i der Phase der Matrix (M-V-Notation)
$\varepsilon_k^{e,f,i}, k = 1, \dots, 6$	Verzerrungskomponenten des Elementes i der Phase der Faser (M-V-Notation)
$ \Omega^{e,m,i} $	Volumen des Elementes i der Phase der Matrix
$ \Omega^{e,f,i} $	Volumen des Elementes i der Phase der Faser
$\ u_s^o\ _*, s=1,2,3$	Differenzen der Verschiebungsfreiheitsgrade der Knotenpaarung, die den Knoten o enthält
$n_s, s = 1, 2, 3$	Komponenten des äußeren Normalenvektors der Phase der Faser
M	Summe von M^f und M^m
Q	elektrische Ladung
$K^{\star,E}$	Kapazität
$\hat{\phi}^i$	elektrischer Freiheitsgrad des Knotens i
$\hat{\phi}^j$	elektrischer Freiheitsgrad des Knotens j
$\ \phi^o\ _{**}$	Differenz (elektrischen Freiheitsgrad) von Faser zu Matrix der Knotenpaarung, die den Knoten o enthält

Kapitel 5

N	Anzahl an RUCs in eine Achsenrichtung
$C_{1212}^{\text{eff,LVRB}}$	effektiver Koeffizient C_{1212}^{eff} bei linearen Verschiebungsrandbedingungen
$C_{1212}^{\text{eff,USRB}}$	effektiver Koeffizient C_{1212}^{eff} bei homogenen Spannungsrandbedingungen
$C_{1212}^{\text{eff,per. RB}}$	effektiver Koeffizient C_{1212}^{eff} bei periodischen Randbedingungen
h	Höhe der RUC (Rechteck-Querschnitt)
b	Breite der RUC (Rechteck-Querschnitt)
α	Winkel, der die unidirektionale Faseranordnung charakterisiert
r^f	Faserradius
v^f	Faservolumenanteil
$E_1^{\text{eff,max}}$	maximaler effektiver Elastizitätsmodul in y_1' -Richtung für alle Faseranordnungen zu einem festen Faservolumenanteil
$E_1^{\text{eff,min}}$	minimaler effektiver Elastizitätsmodul in y_1' -Richtung für alle Faseranordnungen zu einem festen Faservolumenanteil
t^i	Dicke der Zwischenphase
η	Proportionalitätsfaktor zwischen Faserradius und Zwischenphasendicke

b	Kantenlänge der RUC (Parallelogramm-Querschnitt) in y_1 -Richtung
w	Länge der schrägen Kante der RUC (Parallelogramm-Querschnitt)
h	Höhe der RUC (Parallelogramm-Querschnitt)

Abstract

Composites are of enormous importance to the industry. The usage of such materials for industrial products has rapidly increased over the last years. Therefore, there is high interest in gaining a better understanding of these materials and their physical behaviour. Aside from performing experimental studies, this can also be achieved by using homogenisation methods. With these methods, the composite can be characterised in a macroscopic homogeneous manner by taking into account the microscopic heterogeneous structure. This approach provides the opportunity to calculate the so-called effective properties of the composite.

The focus of the present thesis is to develop and advance numerical homogenisation methods which are based on the finite element method (FEM). These methods developed are applicable to calculate the effective properties of unidirectional fibre reinforced composites with a periodic fibre distribution. In the developed numerical models repeated unit cells (RUCs) are used, whose cross sections can even be parallelogram shaped. The significant advantage of these models, especially those with the parallelogram shaped cross section, is the capability to simulate a wide range of unidirectional fibre reinforced composites with different fibre arrangements. This also includes the special cases of hexagonal and square fibre arrangements, which are commonly used in the literature.

The numerical models are extended by employing an imperfect contact formulation between the matrix and fibre phase to represent the presence of a very thin interphase, which is for instance caused by chemical reactions in manufacturing processes. Besides pure elastic considerations models capable of simulating piezoelectric composites are also developed.

In this thesis, all the developed models are, as far as possible, validated by comparing the calculated effective material properties to results from methods given by the literature or to results calculated from verification models. Furthermore, studies have been performed in order to investigate the influence of different fibre distributions, fibre volume fractions and imperfect contact conditions on the effective composite properties. All together, this gives a better insight into the material behaviour of composites as well as the modelling techniques.

Kurzfassung

In der Industrie sind Kompositwerkstoffe von großer Wichtigkeit. Der Einsatz solcher heterogenen Werkstoffe für industrielle Produkte ist in den letzten Jahren rasant angestiegen. Daher besteht ein sehr großes Interesse darin, diese Materialien und ihr physikalisches Verhalten besser zu verstehen. Um dies zu erreichen, können neben der Durchführung von experimentellen Untersuchungen Homogenisierungsverfahren genutzt werden. Diese Verfahren dienen dazu, den Kompositwerkstoff unter Berücksichtigung der mikroskopisch heterogenen Struktur in einer makroskopisch homogenen Weise zu charakterisieren. Unter bestimmten Annahmen lassen sich sogenannte effektive Materialeigenschaften berechnen. Der Schwerpunkt der vorliegenden Dissertation liegt in der Weiterentwicklung von numerischen Homogenisierungsverfahren, welche auf der Finite-Elemente-Methode (FEM) basieren. Diese werden zum Berechnen der effektiven Materialeigenschaften von unidirektional faserverstärkten Verbundwerkstoffen mit einer periodischen Faseranordnung verwendet. In den entwickelten numerischen Berechnungsmodellen werden Einheitszellen (RUCs) verwendet, deren Querschnitt sogar parallelogrammförmig sein kann. Der Vorteil dieser Modelle besteht darin, dass mit ihnen ein breites Spektrum an unidirektionalen Faserverbundwerkstoffen mit unterschiedlicher Faserverteilung simuliert werden kann. Das schließt auch die Spezialfälle der quadratischen und hexagonalen Faseranordnung mit ein, welche häufig in der Literatur zu finden sind.

Die Berechnungsmodelle werden auf einen imperfekten Phasenübergang erweitert, welcher sich als sehr dünne Verbindungsschicht zwischen der Matrix- und Faserphase interpretieren lässt. Die Ausprägung einer solchen Zwischenschicht kann zum Beispiel auf chemische Reaktionen im Herstellungsprozess zurückgeführt werden. Neben rein elastischen Betrachtungen werden auch Modelle entwickelt, mit denen piezoelektrische Faserverbundwerkstoffe simuliert werden können.

Alle in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodelle werden hinsichtlich ihrer Eignung überprüft. Dazu werden die berechneten effektiven Materialeigenschaften nach Möglichkeit mit Ergebnissen von Verfahren aus der Literatur oder mit Ergebnissen aus Verifizierungsmodellen verglichen. Darüber hinaus werden Studien durchgeführt, die den Einfluss der Faserverteilung, des Faservolumenanteils und des imperfekten Phasenübergangs auf die effektiven Werkstoffeigenschaften untersuchen. Dies führt zu einem besseren Verständnis des Materialverhaltens von Kompositwerkstoffen sowie der Modellierungstechniken.

1 Einleitung

1.1 Motivation

In der heutigen Zeit ist ein Wandel beim Materialeinsatz von Strukturbauteilen zu erkennen. Dieser äußert sich darin, dass Verbundwerkstoffe zunehmend homogenen Materialien bevorzugt werden. Die Ursache dafür sind neben ökonomischen (Preisentwicklung der Rohmaterialien) vor allem physikalische Gesichtspunkte, wie zum Beispiel die Gewichtsreduktion bei gleichbleibenden Festigkeitseigenschaften. Die Verbundwerkstoffe sind durch einen heterogenen Strukturaufbau charakterisiert. Bei solchen Werkstoffen, speziell den Faserverbundwerkstoffen, besteht die Struktur aus mindestens zwei Phasen. Mit dem Begriff Phase soll hier ein Bereich des Verbundwerkstoffes aus gleichem Material bezeichnet werden. Bei einem aus zwei Phasen bestehenden Kompositwerkstoff übernimmt die eine Phase die Aufgabe des Füllmaterials, und die andere Phase dient zur Verstärkung oder Verminderung bestimmter physikalischer Eigenschaften.

Durch das Kombinieren unterschiedlicher Ausgangsstoffe sind die Materialmodelle von Kompositwerkstoffen nicht mehr nur auf reine Modelle einer physikalischen Kategorie ausgelegt. Als Beispiel lässt sich hier der Einsatz von piezoelektrischen Fasern in Kombination mit elastischen Füll-/Bindematerialien nennen. Durch den piezoelektrischen Effekt werden elastische und elektrische Zustandsgrößen in Abhängigkeit zueinander gebracht. Infolge einer mechanischen Verformung oder durch Anlegen eines elektrischen Feldes kommt es zu elektrischen und elastischen Interaktionen zwischen den Phasen. Man spricht in diesem Fall von einem gekoppelten Feldproblem.

Die Analyse und Berechnung von Bauteilen aus Verbundwerkstoffen hinsichtlich ihrer Belastbarkeit und Anwendung ist mitunter sehr komplex. Dies resultiert hauptsächlich daraus, dass eine exakte Modellierung der heterogenen Struktur einen sehr hohen Rechenaufwand nach sich ziehen würde. Die Betrachtungsebene der heterogenen Struktur ist sehr viel größer als die atomare Ebene, wodurch eine Beschreibung der Heterogenität mittels klassischen Materialmodellen durchgeführt werden kann, aber sie ist zu klein, um bei einer Untersuchung von Bauteilen mit bloßen Augen sichtbar zu sein. Es entsteht der Eindruck, der betrachtete Werkstoff sei homogen. Die Betrachtungsebenen der Heterogenität und des Kompositwerkstoffes werden als Mikro- beziehungsweise Makrolevel bezeichnet. Jedes Level ist dabei durch spezifische Längenangaben charakterisiert. Diese leiten sich meistens aus geometrischen Größen ab. In manchen Fällen werden noch Zwischenebenen eingeführt (Mesolevel). Für klassische Materialien, wie Metalle oder Holz, lassen sich auch solche Betrachtungsebenen zuordnen. Metalle haben eine kristalline Struktur und Holz ist mit feinen Poren durchsetzt (Abb. 1-1). Für viele klassische Materialien wurden trotz dieser Kenntnis Materialeigenschaften abgeleitet, die ein homogenes Material suggerieren. Dadurch wird die Berücksichtigung solcher Materialien in Berechnungsmodellen vereinfacht. Somit ist es von Vorteil, im Fall der Verbundwerkstoffe, eine ähnliche Herangehensweise zu nutzen, um sogenannte effektive (homogene) Materialeigenschaften zu ermitteln.

Es gibt verschiedene Wege, um (effektive) Materialeigenschaften von (heterogenen) Werkstoffen zu bestimmen. Eine Möglichkeit besteht darin, diese Eigenschaften auf experimentellem Wege zu ermitteln. Bei rein elastischen Materialien werden sogenannte Zug-/Druck- und Schubtests durchgeführt [88], [101]. Hierfür werden spezielle Probekörper aus dem zu untersuchenden Material hergestellt. Im Fall der Zugprüfung besitzt die gewählte Probe einen länglich schlanken, mittleren Abschnitt mit einem konstanten, kreisförmigen Querschnitt. Die verdickten Enden der Probe, die mit Abrundungsradien in den mittleren Abschnitt übergehen, dienen zum Einspannen und zur Krafteinleitung. Der Testkörper wird in die Prüfmaschine biegungsfrei eingespannt und durch eine zunehmende Zugkraft gedehnt. Dabei erfährt er eine Verlängerung, die mittels Messaufnehmern (z.B. Dehnungsmessstreifen) in geeigneter Form abgegriffen wird. Eine weitere Möglichkeit der experimentellen Untersuchung von Materialkennwerten besteht in der Nutzung der Ultraschalltechnik [29]. Die Schallerzeugung und der -empfang erfolgen über Wandler mit piezoelektrischen, elektrodynamischen, magnetorestriktiven Effekten oder durch Laserpulse. Dabei ist der direkte Kontakt zwischen Probekörper und Wandler zur Schallübertragung nicht in allen Fällen erforderlich. Im Fall eines makroskopisch isotropen Probekörpers lassen sich die Materialeigenschaften aus den Geschwindigkeiten der Longitudinalwelle und der Transversalwellen ableiten. Die so ermittelten Materialkennwerte können unter Umständen von den Ergebnissen eines mechanischen Zug- oder Druckprüfverfahrens abweichen. Eine Ursache kann in dem Auftreten von plastischen Verformungen bei höherer Zug- beziehungsweise Druckbelastung liegen.

Die experimentellen Untersuchungen sind kostenintensiv, da geeignete Apparaturen zur Testdurchführung gekauft, geliehen oder gebaut werden müssen. Des Weiteren sind Kenntnisse im Umgang mit ihnen erforderlich, um mögliche Untersuchungsfehler so gering wie möglich zu halten.

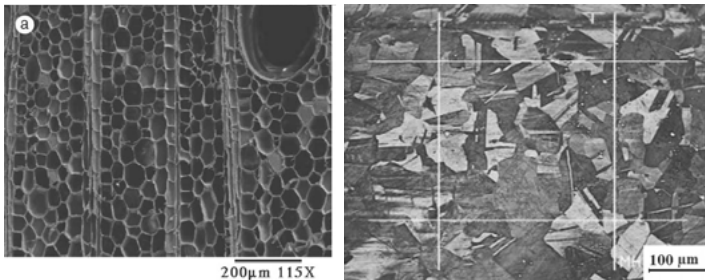


Abbildung 1-1: Heterogene Mikrostrukturen, links: Balsaholz [99], rechts: Kupfer [65]

Ein anderer Weg zur Ermittlung der Materialeigenschaften besteht in der Untersuchung des Werkstoffes mittels analytischer und/oder numerischer Methoden. Das Verhalten der Mikrostruktur wird dabei als physikalischer Zustand eines materiellen Punktes auf der Makroebene interpretiert. Der Übergang von einem mikroskopischen zu einem geeigneten makroskopischen Materialmodell wird als Homogenisierung bezeichnet. Die Nutzung analytischer Verfahren erfordert häufig eine Vereinfachung der zu untersuchenden mikroskopisch heterogenen Struktur. Durch diese Vereinfachung erhält man für einige Fälle einfach zu handhabende Formeln für die Berechnung von effektiven Materialeigenschaften

des heterogenen Kompositwerkstoffes. Dies können je nach Vereinfachung Koeffizienten des Elastizitätstensors oder physikalische Materialkonstanten, wie zum Beispiel der Elastizitätsmodul, sein. Im Gegensatz zu den analytischen Methoden ist bei einer Nutzung numerischer Berechnungsverfahren, speziell der Finite-Elemente-Methode (FEM), für die kommerzielle Softwareprodukte (z. B. ANSYS oder ABAQUS) zur Verfügung stehen, eine Vereinfachung der Mikrostruktur nicht erforderlich. Die Mikrostruktur kann in Form eines repräsentativen Volumenelementes (RVE), welches bei zufällig verteilten Mikroeinschlüssen bevorzugt wird, oder in Form einer sich periodisch fortsetzenden Einheitszelle, auch RUC (RUC-repeated unit cell) genannt, berücksichtigt werden.

Das makroskopische Materialverhalten heterogener Werkstoffe, speziell Verbundwerkstoffe, ist im hohen Maße von den beteiligten Phasen auf dem Mikrostrukturlevel abhängig. Einflussreiche Faktoren sind die Form, die Verteilung, die Materialeigenschaften und der Volumenanteil der Phasen des Kompositwerkstoffes. Sie sind dafür verantwortlich, dass sich ein richtungsabhängiges, effektives Stoffverhalten ausprägen kann. Diese Faktoren werden maßgeblich durch den Herstellungsprozess eines Verbundwerkstoffes beeinflusst. Typische Herstellungsprozesse von Faserverbundwerkstoffen sind das Handlaminieren/Faserspritzen, Wickelverfahren und Injektionsverfahren [8]. Beim Handlaminieren handelt es sich um das älteste und einfachste Herstellungsverfahren, mit dem man beispielsweise Bauteile aus glasfaserverstärkten, duroplastischen Kunststoffen herstellen kann (siehe Abb. 1-2 aus [8]). Viele der Verfahren werden zugunsten des Zeitaufwandes und der Wirtschaftlichkeit in automatisierten Prozessen realisiert (zum Beispiel das Profilziehverfahren). Dadurch ist man in der Lage, Verbundteile zu produzieren, die im Idealfall identische oder wenigstens ähnliche Mikrostrukturverteilungen aufweisen, wodurch Zufälligkeiten im Strukturaufbau reduziert werden.

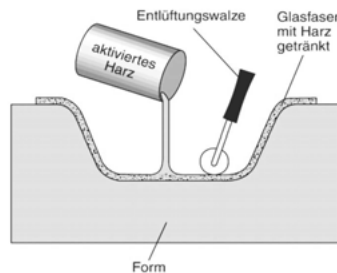


Abbildung 1-2: Darstellung des Verfahrens der Handlaminierung [8]

Infolge von Herstellungsprozessen von Faserverbundwerkstoffen kann es vorkommen, dass sich zwischen Faser und Matrix eine Zwischenschicht (nachfolgend auch Zwischenphase genannt) ausprägt [75], welche von den physikalischen Eigenschaften der Fasern und der Matrix verschieden ist (Abb. 1-3). Selbst bei keiner erkennbaren Ausprägung dieser Schicht kann man von einer Zwischenschicht sprechen und meint den Kontaktbereich, der durch den gemeinsamen Rand charakterisiert wird und eine Lastübertragung zwischen den Phasen gewährleistet [62]. Dieser Kontaktbereich beziehungsweise die Zwischenschicht hat Einfluss auf das makroskopische Verhalten des Verbundwerkstoffes. Die Eigenschaften dieser Zone sind in der Regel unbekannt. Die vorliegende Arbeit soll unter anderem auch einen

Beitrag zur Berechnung von effektiven Materialeigenschaften von Faserverbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur unter Berücksichtigung der Faseranordnung und des Phasenkontaktes leisten.

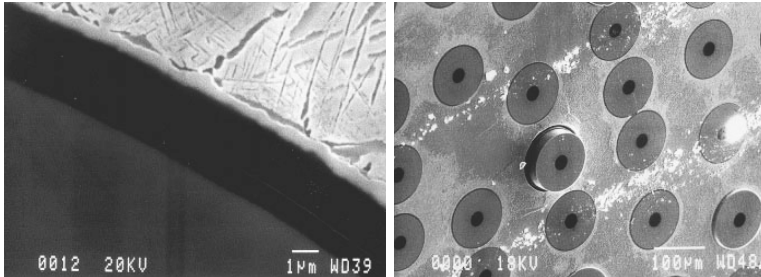


Abbildung 1-3: Mikrostruktur eines Faserverbundwerkstoffes mit einer Zwischenphase [75]

1.2 Stand der Forschung

Die rechnerische Ermittlung effektiver Materialeigenschaften unter Einbeziehung der Mikrostruktur eines Materials ist seit Jahrzehnten Gegenstand der Forschung, und es ist eine Vielzahl von Herangehensweisen entwickelt worden. Zwei der ersten Pioniere auf diesem Gebiet sind VOIGT [98] und REUSS [81]. Ihre Untersuchungen beziehen sich auf Polykristalle. Dabei nehmen sie an, dass auf makroskopischer Werkstoffebene ein quasiisotropes Materialverhalten zu Grunde liegt. Mit Hilfe von Mittelungsmethoden, unter der Annahme von homogenen Verzerrungen oder Spannungen in den einzelnen Kristallen, wurden Materialeigenschaften von Polykristallen abgeleitet. Infolge des gleichen Belastungszustandes aller Kristalle kommt es zu physikalischen Unstetigkeiten an den Kristallgrenzen [53]. Gleiche Verzerrungszustände von Kristallen produzieren Unstetigkeiten in den Spannungen zwischen benachbarten Kristallen. Aus gleichen Spannungszuständen resultieren Unstetigkeiten in den Verschiebungen. Das bedeutet, verformte benachbarte Kristalle passen an den Grenzen nicht mehr zusammen. Die effektiven Eigenschaften eines Polykristalls, die sich aus der Annahme eines homogenen Verzerrungs- oder eines homogenen Spannungszustands ergeben, unterscheiden sich. Die beiden unterschiedlichen Modellbetrachtungen, welche auch auf andere heterogene Strukturen angewendet werden können, liefern die Schranken von VOIGT und REUSS.

Genauere Berechnungen der Materialeigenschaften wurden durch die Nutzung von Variationsprinzipien erreicht [47], [48]. Die dabei verwendeten Methoden liefern für polykristalline Materialien eine obere und eine untere Schranke für die makroskopischen Materialeigenschaften, welche anisotroper Natur sein können. Diese Vorgehensweise lässt sich auch auf heterogene Verbundwerkstoffe übertragen. Die Schrankenbildung ist darin begründet, dass an einem repräsentativen Volumenelement, welches Bestandteil des Kompositwerkstoffes ist und im Mittel die gleiche Beanspruchung aufweist, keine Übereinstimmung mit den realen Randbedingungen im heterogenen Werkstoff gewährleistet ist, sondern stattdessen lineare Randverschiebungen oder homogene Randspannungen berücksichtigt werden.

Weitere Methoden, mit denen sich ebenfalls analytische Formeln zur Berechnung effektiver

elastischer Materialeigenschaften herleiten lassen, sind die Methode der wechselwirkungs-freien („dünnen“) Defektverteilung [35], [12] und das Selbstkonsistenzschema [35], [63], [50], wobei in [63] und [50] polykristalline Medien untersucht werden. In [100], [103], [24], [25] werden angepasste Betrachtungen an Kompositstrukturen behandelt. Weitere Methoden sind das Verfahren nach MORI-TANAKA [71], [12], [35] und das Differentialschema [70], [73], [35]. Die analytischen Verfahren lassen sich in zwei Klassen einordnen. Die erste Klasse beinhaltet Verfahren, mit denen sich Näherungslösungen für effektive Eigenschaften berechnen lassen. Diese greifen meist auf stark vereinfachte Modelle zurück, wie zum Beispiel ein unendlich ausgedehntes RVE und die Erfassung der Wirkung der heterogenen Materialverteilung durch die Betrachtung einer einzelnen Heterogenität. Die zweite Klasse beinhaltet Verfahren, die sich auf Variationsformulierungen oder Extremalprinzipien stützen. Diese ermöglichen es, aus Energiegleichungen obere und untere Schranken für effektive Eigenschaften abzuleiten.

Werden periodische, heterogene Strukturen betrachtet, so ist das repräsentative Volumenelement (RVE) der kleinste periodische Bereich der Struktur. Dieser wird in der Literatur auch als (sich wiederholende) Einheitszelle (RUC, repeated unit cell) bezeichnet [96]. Bezüglich solcher Strukturen sind die Randbedingungen, wie sie in den analytischen Betrachtungen verwendet werden, nicht mehr adäquat. Die Randbedingungen müssen dahingehend verändert werden, dass sie die Periodizität der RUC berücksichtigen. Das Konzept der RUC basiert auf einer Mikro-Makro-Betrachtung der Materialstruktur, einer Abhängigkeit bezüglich einer makroskopischen Variablen und einer mikroskopischen Variablen [96]. Eine ähnliche Betrachtung wird bei der Methode der asymptotischen Erweiterung (auch multiple Skalenmethode genannt) genutzt, welche eher in mathematischen Veröffentlichungen zu finden ist [26], [10]. Für die Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften ist es erforderlich, Randwertprobleme zu lösen. Dafür können verschiedene Berechnungsverfahren verwendet werden. In [37], [85], [107], [56] werden Verfahren beschrieben, die zum Lösen der Randwertprobleme komplexwertige Potentialfunktionen verwenden. Ein weiteres weit verbreitetes Verfahren stellt die Finite-Elemente-Methode dar [106], [17], [61], [96], [78].

Wie im Abschnitt 1.1 beschrieben, kann es im Herstellungsprozess für Verbundwerkstoffe zur Ausprägung einer Verbindungsschicht zwischen Faser und Matrix kommen. Selbst wenn keine eindeutige Ausprägung erkennbar ist, kann ein Bereich vorliegen, in dem sich die Eigenschaften der Faser in die der Matrix ändern. Dieser Bereich kann sehr dünn ausfallen. Daher wurden in den letzten Jahren zur Berücksichtigung des Kontaktbereiches zwischen Faser und Matrix verschiedene physikalische Modelle entwickelt und untersucht. Im Fall der Interpretation einer (sehr dünnen) Zwischenphasenbetrachtung haben sich zwei unterschiedliche Varianten etabliert. Bei der ersten Variante wird die Zwischenphase mit einem endlichen Volumen und zusätzlichen Phaseigenschaften berücksichtigt [75], [60], [5], wobei die Zwischenschicht auch aus mehreren Phasen bestehen kann [51], [52]. Die zweite Möglichkeit besteht darin, den Kontakt zwischen Faser und Matrix über Unstetigkeitsbedingungen, sogenannte imperfekte Phasenübergänge, zu beschreiben [46], [11], [6], [15], [13], [72], [33], [43], [90]. Diese Bedingungen ordnen der Kontaktbereichszone, die in der Regel als gemeinsame Grenzfläche zwischen Faser und Matrix modelliert ist, gewisse Eigenschaften zu, die die Interaktion der Phasen beschreiben. Der imperfekte Phasenübergang kann im Rahmen der Elastizitätstheorie durch Unstetigkeiten in den Spannungen, in den Verschiebungen oder in beiden physikalischen Größen charakterisiert werden. Die meisten Übergangsformulierungen werden aus einer isotropen Zwischenschichtmodellierung hergeleitet. In [80] und [108] werden Modelle beschrieben, bei denen die Kontaktzone in

Teilzonen unterschiedlichen Kontaktverhaltens unterteilt ist. In Kombination mit der Verwendung der FEM besteht der Vorteil einer imperfekten Phasenübergangsmodellierung darin, dass eine beliebig dünne Zwischenphase simuliert werden kann. Ein FE-Modell mit einem Zwischenphasenvolumen dagegen kann aufgrund der Diskretisierung nur bis zu einer gewissen minimalen Zwischenphasendicke realisiert werden.

Wie bereits im Abschnitt 1.1 erläutert, rücken immer mehr Verbundwerkstoffe mit gekoppelten physikalischen Effekten in den Fokus der industriellen Anwendung. Dazu zählen unter anderem Verbundwerkstoffe mit piezoelektrischen Eigenschaften. Daher ist man bestrebt, von diesen Materialien Eigenschaften zu bestimmen, die eine homogenisierte Beschreibbarkeit des Werkstoffverhaltens für Berechnungsuntersuchungen möglich machen. In [30], [20] und [73] sind bekannte analytische Homogenisierungsverfahren für elastische Materialien (Methode der „dünnen“ Verteilung, das Differentialschema, das Verfahren nach MORI-TANAKA, das Selbstkonsistenzschema, Schranken nach REUSS/VOIGT und HASHIN-SHTRIKMAN) auf piezoelektrische Materialien erweitert worden. Im Fall von periodischen Mikrostrukturen sind analoge Erweiterungen von Homogenisierungsverfahren zum Beispiel in [93], [28], [78], [39], [17] und [16] zu finden.

Die Bestimmung und Berechnung effektiver Materialeigenschaften unidirektional faserverstärkter Verbundmaterialien mit periodischer Mikrostruktur und variabler Faseranordnung, deren Phasenkontakteigenschaften durch eine imperfekte Phasenübergangsmodellierung charakterisiert wird, ist kaum erforscht. In [69] werden für Strukturen mit einer rhombischen Faseranordnung und einer imperfekten Phasenübergangsformulierung nach [43] effektive elastische Eigenschaften ermittelt. Diese resultieren aus einer makroskopischen Schubbelastung. Das betrachtete Homogenisierungsverfahren basiert auf der Verwendung von komplexwertigen Potentialfunktionen.

Modelle mit einer rhombischen Faseranordnung besitzen den Vorteil, durch eine Parametrisierung ein breites Spektrum an Verbundmaterialien mit periodischer Struktur abzudecken. Darunter fallen zum Beispiel auch Kompositwerkstoffe mit hexagonaler oder quadratischer Faseranordnung, welche in der Literatur sehr häufig betrachtet werden. In [34] und [56] werden Homogenisierungsverfahren unter Verwendung komplexwertiger Potentiale auf Kompositstrukturen mit festgelegten rhombischen Faserverteilungen angewendet und effektive Eigenschaften unter Nutzung einer makroskopischen Schubbelastung ermittelt. Das in [34] behandelte Homogenisierungskonzept ermöglicht es im Fall einer periodischen Faserverteilung, die durch einen parallelogrammförmigen RUC-Querschnitt charakterisiert ist, effektive Eigenschaften aus einer Schubbelastung zu bestimmen. Konzepte und Resultate zur Bestimmung aller Komponenten des Elastizitätstensors für Kompositwerkstoffe mit einem parallelogrammförmigen RUC-Querschnitt sind zum aktuellen Zeitpunkt nicht bekannt.

1.3 Ziele und Gliederung der Arbeit

Homogenisierungsverfahren bilden die Grundlage zur Bestimmung und Berechnung effektiver Materialeigenschaften von Verbundwerkstoffen. Wie bereits in Abschnitt 1.2 erläutert, existiert eine Vielzahl an Verfahren, die dafür genutzt werden können. Homogenisierungsverfahren unter Nutzung einer RUC besitzen große Vorteile und werden daher im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorzugsweise betrachtet. Da das Lösen von Differentialgleichungen beziehungsweise Variationsformulierungen erforderlich ist, hat sich die Verwendung

der Finite-Elemente-Methode als vorteilhaft erwiesen. Man ist in der Lage, auch komplexe dreidimensionale Geometrien als RUC zu berücksichtigen.

Die Literaturrecherche hat gezeigt, dass die Berechnung effektiver Materialeigenschaften für unidirektionale Faserverbundwerkstoffe mit einer periodischen Mikrostruktur, welche durch einen rhombischen oder parallelogrammförmigen RUC-Querschnitt widergespiegelt wird, bisher nur ungenügend betrachtet worden ist. Dies gilt insbesondere unter Einbeziehung imperfekter Phasenübergänge und gekoppelter Feldprobleme. Des Weiteren ist der Einfluss der Faseranordnung auf die effektiven Materialeigenschaften bei einem rhombischen oder parallelogrammförmigen RUC-Querschnitt nur für ausgewählte Elastizitätskoeffizienten untersucht worden. Die Entwicklung von dreidimensionalen Modellen zur Berechnung aller effektiven Materialkoeffizienten unter Nutzung der FEM und unter Berücksichtigung solcher Faserverbundstrukturen einschließlich imperfekter Phasenübergänge ist nach dem aktuellen Stand der Literatur noch nicht behandelt worden. Dies gilt sowohl für elastische als auch für piezoelektrische Verbundwerkstoffe. Es ergeben sich damit folgende Zielstellungen für die vorliegende Arbeit:

- Entwicklung von dreidimensionalen Berechnungsmodellen mit verallgemeinerter Faseranordnung (rhombischer, parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt) zur Berechnung aller effektiven Elastizitätskoeffizienten unter Verwendung der FEM,
- Untersuchung des Einflusses einer verallgemeinerten Faseranordnung auf die effektiven Koeffizienten,
- Erweiterung der Berechnungsmodelle auf einen imperfekten Phasenübergang,
- Untersuchungen zum Einfluss des imperfekten Phasenübergangs auf die effektiven Materialeigenschaften,
- Erweiterung der Berechnungsmodelle auf das Gebiet der Piezoelektrizität.

Dadurch soll ein wissenschaftlicher Beitrag zur Weiterentwicklung von geeigneten Homogenisierungskonzepten und zum besseren Verständnis des Materialverhaltens von Faserverbundwerkstoffen geleistet werden. Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert.

Im zweiten Kapitel werden die grundlegenden Gleichungen für die Berechnung elastischer und piezoelektrischer Materialien zusammenfassend dargestellt. Ebenso wird auf Symmetrieeigenschaften von materialbeschreibenden Tensoren eingegangen.

Das dritte Kapitel widmet sich der Homogenisierungstheorie. Es werden zwei Methoden zum Bestimmen effektiver Materialeigenschaften präsentiert und näher erläutert. Sie dienen später zur Validierung der entwickelten Berechnungskonzepte. Bei den beiden Methoden handelt es sich um analytische Verfahren, die auf einfache Formeln zur Berechnung der effektiven Materialeigenschaften führen. Darüber hinaus werden die in dieser Arbeit entwickelten Homogenisierungskonzepte für unidirektionale Faserverbundstrukturen mit periodischer Mikrostruktur in detaillierter Form beschrieben. Es wird dabei näher auf die Geometrieränderung der RUC, den imperfekten Phasenübergang sowie die Beschreibung der periodischen Randbedingungen eingegangen.

Das vierte Kapitel gibt einen Einblick in die Finite-Elemente-Methode. Dazu werden

grundlegende Gleichungen zur Beschreibung eines FE-Modells präsentiert. Es wird zusätzlich näher auf die Überführung der periodischen Randbedingungen und der imperfekten Phasenübergangsmodellierung in ein FE-Modell eingegangen.

Das fünfte Kapitel befasst sich mit der Berechnung und der Auswertung der effektiven Materialeigenschaften von Faserverbundwerkstoffen. Es werden Verbundwerkstoffe betrachtet, deren Phasen unterschiedlichen Materialsymmetrieklassen angehören. Weiterhin wird der Einfluss der Faseranordnung, des Faservolumenanteils und des imperfekten Phasenübergangs auf die effektiven Werkstoffeigenschaften untersucht.

Das letzte Kapitel enthält eine Zusammenfassung der Arbeit und eine Darstellung des Erkenntnisgewinns. Zusätzlich werden mögliche Inhalte für weiterführende Arbeiten diskutiert.

2 Modellierung von Werkstoffen

Für die analytische Untersuchung von Werkstoffen sind geeignete mathematische Modelle für die Beschreibung ihres Materialverhaltens erforderlich. Mittels eines Materialmodells lässt sich eine Problemstellung ableiten, die eine bestimmte physikalische Situation des Werkstoffes beschreibt. In den einfachsten Fällen besteht das Problem aus einer Differentialgleichung mit Randbedingungen. Zum Lösen solcher Randwertprobleme werden in der Regel zugehörige schwache Formulierungen (auch schwache Formen genannt) aufgestellt, die als Ausgangsbasis für eine Finite-Elemente-Analyse (kurz: FE-Analyse), welche ein numerisches Verfahren zum Lösen von Differentialgleichungsproblemen darstellt, dienen.

Zunächst werden grundlegende Gleichungen von Werkstoffen präsentiert, welche ein rein elastisches Verhalten widerspiegeln. Im Anschluss daran erfolgt eine Erweiterung der Modellbetrachtung auf Materialien mit piezoelektrischen Effekten. Dieses Kapitel wird mit Informationen zu speziellen Symmetrien von materialbeschreibenden physikalischen Größen beendet, wodurch sich die mathematischen Modelle vereinfachen können beziehungsweise explizit Materialkonstanten aus den Größen ableitbar sind.

Zur übersichtlichen und kompakten Darstellung von Gleichungen werden in dieser Arbeit zwei verschiedene Schreibweisen verwendet, die EINSTEINsche Summenkonvention und eine modifizierte VOIGTsche Notation. Bei der EINSTEINschen Summenkonvention wird über doppelt auftretende Indizes summiert (die Summenzeichen werden weggelassen)

$$\begin{aligned} \sum_i a_i b_i &= a_i b_i \quad , \\ \sum_j A_{ij} b_j &= A_{ij} b_j \quad , \\ \sum_{k,l} A_{ijkl} b_{kl} &= A_{ijkl} b_{kl} \quad . \end{aligned} \tag{2-1}$$

Die modifizierte VOIGTsche Notation wird im weiteren Verlauf des Kapitels näher erläutert. Zusätzlich werden alle grundlegenden Gleichungen in kartesischen Koordinaten des dreidimensionalen Raumes angegeben.

2.1 Grundlagen der linearen Elastostatik

Die Ausgangsbasis einer elastostatischen Berechnung ist ein System von Differentialgleichungen (kurz DGL-System) und zusätzliche Randbedingungen. Im Rahmen der linearen Elastostatik lassen sich die Differentialgleichungen aus der Betrachtung des Kräftegleichgewichtes am differentiell kleinen Volumenelement herleiten. Unter der Annahme, dass ein zusammenhängendes offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eines Körpers vorausgesetzt wird, sieht dieses DGL-System wie folgt aus

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3, \mathbf{x} \in \Omega \quad . \tag{2-2}$$

Mit $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ wird der (CAUCHYsche) Spannungstensor bezeichnet, welcher neun Komponenten $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$, $i, j = 1, 2, 3$ besitzt und als 3×3 -Matrix darstellbar ist

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{x}) & \sigma_{12}(\mathbf{x}) & \sigma_{13}(\mathbf{x}) \\ \sigma_{21}(\mathbf{x}) & \sigma_{22}(\mathbf{x}) & \sigma_{23}(\mathbf{x}) \\ \sigma_{31}(\mathbf{x}) & \sigma_{32}(\mathbf{x}) & \sigma_{33}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} . \quad (2-3)$$

Die Größen $f_i(\mathbf{x})$ sind die Komponenten des Vektors $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, welcher die Intensität infolge von verteilten Volumenkräften kennzeichnet. Wie man der Gleichung (2-2) entnehmen kann, gilt sie punktweise, das heißt für jedes $\mathbf{x} \in \Omega$. Aus Gründen der kompakteren Darstellung wird im weiteren Verlauf auf die Abhängigkeit der Größen von \mathbf{x} verzichtet. Aus den Momentengleichgewichten an einem differentiell kleinen Volumenelement erhalten wir die Beziehung

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} . \quad (2-4)$$

Unter der Angabe einer konstitutiven Gleichung, d. h. einer Gleichung, die das Materialverhalten eines betrachteten Werkstoffes festlegt, lässt sich das DGL-System umformulieren. Wir nehmen dazu an, dass der betrachtete Körper homogen ist, ein linear elastisches Materialverhalten aufweist und infolge von Belastungen nur hinreichend kleine Deformationen zugelassen werden. Das daraus resultierende Materialgesetz

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2-5)$$

beziehungsweise in inverser Form

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2-6)$$

wird auch HOOKEsches Gesetz genannt. Es verknüpft den Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$, gegeben durch die Komponenten ε_{kl} , mittels Proportionalitätsfaktoren, C_{ijkl} beziehungsweise S_{ijkl} , mit dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$. Die Verzerrungskomponenten sind durch

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2-7)$$

gegeben, wobei u_i die Komponenten eines Verschiebungsvektors $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ sind. Wenn im Folgenden von einer Verschiebung gesprochen wird, ist damit in der Regel der Verschiebungsvektor gemeint.

Die Gleichung (2-7) kann als ein Operator (Linearkombination zweier partieller Differentialoperatoren), angewendet auf eine Funktion \mathbf{u} , interpretiert werden. Wird aus dem Kontext klar, bezüglich welcher Funktion sich die Verzerrungskomponenten bilden, so wird ε_{kl} anstelle $\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})$ geschrieben. Der Verzerrungstensor lässt sich wie der Spannungstensor in Form einer 3×3 -Matrix

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

darstellen, und es gilt auch hier

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} . \quad (2-9)$$

Die Proportionalitätsfaktoren C_{ijkl} sind Komponenten eines Tensors \mathbf{C} vierter Stufe, die infolge der Homogenität des betrachteten Körpers invariant bezüglich \mathbf{x} und somit konstant sind. Dieser Tensor wird Elastizitätstensor genannt. Infolge der Symmetrieeigenschaften des Spannungs- und Verzerrungstensors aus Gleichung (2-4) beziehungsweise (2-9) verringert sich das Gleichungssystem (2-5) von neun auf sechs unabhängige Gleichungen, und die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten C_{ijkl} reduziert sich von 81 auf 36. Unter der Voraussetzung, dass ein quadratisches, elastisches Potential (Formänderungsenergiegedichte) existiert, lässt sich die Anzahl um weitere 15 auf 21 reduzieren [19], [97]. Im Allgemeinen gelten für die Koeffizienten des Elastizitätstensors folgende Symmetrieeigenschaften

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad . \quad (2-10)$$

Das Gleichungssystem (2-5) lässt sich unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften (2-4), (2-9) und (2-10) in einer modifizierten VOIGTschen Notation (kurz: M-V-Notation) darstellen

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_4 \\ \tilde{\sigma}_5 \\ \tilde{\sigma}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{33} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{36} \\ \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{56} \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{36} & \tilde{C}_{46} & \tilde{C}_{56} & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \tilde{\varepsilon}_3 \\ \tilde{\varepsilon}_4 \\ \tilde{\varepsilon}_5 \\ \tilde{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad (2-11)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= \sigma_{11}, & \tilde{\sigma}_2 &= \sigma_{22}, & \tilde{\sigma}_3 &= \sigma_{33}, & \tilde{\sigma}_4 &= \sigma_{12}, & \tilde{\sigma}_5 &= \sigma_{23}, & \tilde{\sigma}_6 &= \sigma_{13} \quad , \\ \tilde{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_{11}, & \tilde{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_{22}, & \tilde{\varepsilon}_3 &= \varepsilon_{33}, & \tilde{\varepsilon}_4 &= 2\varepsilon_{12}, & \tilde{\varepsilon}_5 &= 2\varepsilon_{23}, & \tilde{\varepsilon}_6 &= 2\varepsilon_{13} \end{aligned} \quad (2-12)$$

gilt. Die Koeffizienten \tilde{C}_{ij} der Elastizitätsmatrix $\tilde{\mathbf{C}}$ ergeben sich aus den C_{ijkl} mittels folgender Indexrelationen

$$\begin{aligned} 1 &\Longleftrightarrow 11, & 2 &\Longleftrightarrow 22, & 3 &\Longleftrightarrow 33 \quad , \\ 4 &\Longleftrightarrow 12 \text{ or } 21, & 5 &\Longleftrightarrow 23 \text{ or } 32, & 6 &\Longleftrightarrow 13 \text{ or } 31 \quad . \end{aligned} \quad (2-13)$$

Analoge Aussagen über die Symmetrieeigenschaften von C_{ijkl} lassen sich auch für die Koeffizienten S_{ijkl} formulieren. Der durch diese Koeffizienten definierte Tensor vierter Stufe wird Nachgiebigkeitstensor genannt. Aus der Beziehung (2-11) lässt sich die inverse Formulierung

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2-14)$$

ableiten, wobei $\tilde{\mathbf{S}}$ die Nachgiebigkeitsmatrix mit den Koeffizienten \tilde{S}_{ij} darstellt. Das DGL-System (2-2) sieht in der M-V-Notation wie folgt aus

$$-\nabla^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f} \quad . \quad (2-15)$$

Hierbei ist ∇ die folgende Differentiationsmatrix

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}^T \quad . \quad (2-16)$$

Zusätzlich zu dem DGL-System sind noch Randbedingungen erforderlich, wodurch der Verschiebungsvektor \mathbf{u} eindeutig bestimmt werden kann. Die geläufigsten Randbedingungen sind Verschiebungsrandbedingungen (DIRICHLET-Randbedingungen)

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (2-17)$$

und Randbedingungen infolge von Randspannungen (NEUMANN-Randbedingungen)

$$\mathbf{p} = \sigma_{ij} n_j = \hat{\mathbf{p}} \quad \text{auf } \Gamma_\sigma \quad (2-18)$$

Hierbei sind $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ und $\mathbf{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T$ eine vorgegebene Verschiebung, ein vorgegebener Randspannungsvektor beziehungsweise der äußere Normalenvektor. Weiterhin kann die Verschiebung \mathbf{u} auch durch festgelegte Zwangsbedingungen an einem Rand Γ_{ce} gegeben sein. Diese Bedingungen sind durch Gleichungen definiert, in denen physikalische Größen, wie zum Beispiel die Spannungen oder Verschiebungen, des betrachteten Körpers miteinander gekoppelt sein können. Diesbezüglich wird auf das Kapitel 3 verwiesen.

Schwache Formulierung

Eine Differentialgleichung beziehungsweise ein Differentialgleichungssystem mit gegebenen Randbedingungen kann in eine schwache Formulierung (auch schwache Form genannt) überführt werden. Dies ist einerseits dadurch motiviert, dass numerische Verfahren wie die FEM auf schwache Formulierungen zurückgreifen [57]. Ebenso werden spezielle Anforderungen an die Lösung (Verschiebungsfunktion) abgeschwächt. Damit sind zum Beispiel Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften gemeint. Eine schwache Formulierung besteht aus einer Gleichgewichtsbeziehung in integraler Form, durch welche die DGL (das DGL-System) und die Randbedingungen näherungsweise im integralen Mittel erfüllt werden. In mathematischer Literatur werden meistens noch ein Funktionenraum, in dem die Lösung dieses Gleichgewichts zu suchen ist, und ein Funktionenraum, aus dem Testfunktionen gewählt werden, angegeben. Hier soll nur die Gleichgewichtsbeziehung hergeleitet und betrachtet werden. Die Vorgehensweise für die Herleitung der schwachen Formulierung ähnelt grundlegenden Schritten der Methode der gewichteten Residuumen [109].

Ausgangspunkt der Betrachtung ist das in M-V-Notation gegebene DGL-System (2-15) in Ω , wobei sowohl Verschiebungsrandbedingungen (2-17) als auch Spannungsrandbedingungen (2-18) am betrachteten Körper aufgebracht sind. Es ist dabei zu bemerken, dass $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ gilt, das bedeutet, dass sich die Gebiete der Randbedingungen nicht überschneiden. Nach Multiplikation des Systems mit einer Testfunktion $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$, der anschließenden Integration über Ω und der Annahme, dass die gesuchte Funktion \mathbf{u} bereits die DIRICHLET-Randbedingungen (2-17) erfüllt, ergibt sich

$$-\int_{\Omega} \mathbf{v}^T (\nabla^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega \quad (2-19)$$

Nun wird die erste GREENsche Formel, welche einer partiellen Integration im Mehrdimensionalen entspricht, auf die linke Seite angewendet. Dadurch ist es möglich, eine Ableitungsordnung auf die Testfunktion zu übertragen. Man erhält

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{v}^T \mathbf{p} d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{v}^T \mathbf{p} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega \quad (2-20)$$

Als Nächstes wird die Randbedingung aus Gl. (2-18) in die Gl. (2-20) eingesetzt. Unter der Voraussetzung, dass die Testfunktion auf Γ_u den Wert Null annimmt, ergibt sich die integrale Gleichgewichtsbeziehung zu

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{p}} d\Gamma \quad . \quad (2-21)$$

Da

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} \quad (2-22)$$

gilt, lässt sich die Beziehung weiter umformen zu

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^T \tilde{\mathbf{C}} \nabla \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{p}} d\Gamma \quad . \quad (2-23)$$

Diese integrale Gleichgewichtsbeziehung ist äquivalent zur schwachen Form nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit, indem man

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{u} \quad (2-24)$$

setzt, wobei $\delta \mathbf{u}$ auch Vektor der virtuellen Verrückungen genannt wird.

2.2 Piezoelektrische Werkstoffe

Piezoelektrische Materialien werden für Sensoren oder Aktoren unter anderem bei Ultraschalluntersuchungen benötigt. Dabei spielen ferroelektrische Mischkeramiken wie beispielsweise Bleizirkonattitanat (PZT) eine wichtige Rolle [29]. Makroskopisch betrachtet sind diese Materialien nicht von Natur aus piezoelektrisch. Dies wird erst durch einen Polungsvorgang gewährleistet. Nachfolgend wird ein kurzer Einblick in das Verhalten solcher Materialien gegeben. Im Anschluss daran werden grundlegende Gleichungen zur mathematischen Beschreibung eines piezoelektrischen Modells präsentiert.

2.2.1 Piezoeffekt

Der piezoelektrische Effekt wurde erstmalig an natürlichen Kristallen, wie zum Beispiel Quarz und Turmalin, entdeckt [87]. Der Effekt bezeichnet die an Kristallen beobachtete Erscheinung, dass durch eine mechanische Verformung elektrische Ladungen auf Außenflächen des Kristalls auftreten. Dieser Effekt ist bezüglich Ursache und Wirkung proportional, und er lässt sich umkehren. Damit ist gemeint, dass infolge eines angelegten elektrischen Feldes eine Verlängerung oder Verkürzung eintritt. Ursache für den Effekt ist bei Einkristallen aus Quarz der unsymmetrische Kristallaufbau.

Piezokeramiken werden auf Elementarebene durch Perowskit-Strukturen charakterisiert [87]. Oberhalb der sogenannten CURIE-Temperatur besteht der elementare Aufbau solcher Materialien aus einer kubischen Gitterstruktur (siehe Abb. 2-1), bei der der Schwerpunkt der positiven und negativen Ladungen identisch ist. Es sind keine Unsymmetrien und somit keine Dipole vorhanden. Unterhalb der CURIE-Temperatur verändert sich der elementare Aufbau aus energetischen Gründen in tetragonale Gitter, wodurch die Schwerpunkte

nicht mehr identisch sind und ein elektrischer Dipol entsteht. Dipole beeinflussen sich gegenseitig, wodurch sich spontan Bereiche mit gleicher Dipolausrichtung bilden. Aus dem entstehenden Dipolmoment solcher Bereiche lässt sich die dazugehörige spontane Polarisation ableiten. Ein Kristallit beinhaltet mehrere Bereiche unterschiedlicher Ausrichtung. Infolge der statistisch verteilten Orientierung der kristallinen Struktur und damit der Dipolmomente tritt auf Makroebene keine Polarisation und somit auch kein piezoelektrischer Effekt auf. Daher wird gegen Ende des Herstellungsprozesses das piezokeramische Material polarisiert. Dies geschieht durch Anlegen eines starken elektrischen Feldes in einer gewünschten Richtung knapp unterhalb der CURIE-Temperatur. Nachdem das Material abgekühlt und das angelegte Feld abgeschaltet sind, bleibt die Richtung der Dipolmomente nahezu erhalten. Man spricht dann auch von einer remanenten Polarisierung.

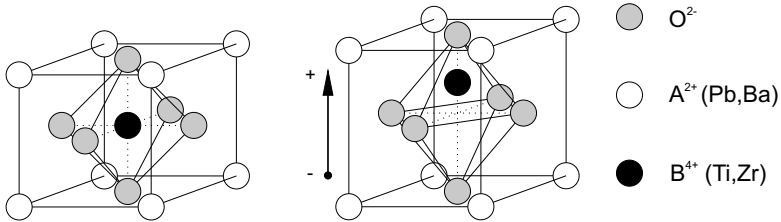


Abbildung 2-1: Elementarzelle einer Piezokeramik mit kubischem Gitter (links) beziehungsweise tetragonalem Gitter (rechts), nach [87]

2.2.2 Grundlagen der Modellierung

Nachfolgend wird eine Theorie für die mathematische Beschreibung eines piezoelektrischen Feldproblems für den Fall kleiner Feldstärken und Verformungen angegeben. Hierfür werden Feldgleichungen für physikalische Größen aus der Elastostatik mit der Elektrostatik kombiniert. Die Kopplung der Feldgrößen ergibt sich aus konstitutiven Gleichungen (Materialgesetz). Das DGL-System, welches sich aus den Bilanzgleichungen für das Kräftegleichgewicht und das Gleichgewicht der Ladungen herleiten lässt, wobei Volumenkräfte angreifen, aber keine freien Ladungen im betrachteten Körper Ω anliegen, lautet [64], [40]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} &= f_i \\ \frac{\partial}{\partial x_i} D_i &= 0 \end{aligned} \quad (2-25)$$

Die Größen σ_{ij} , f_i und D_i sind die Koeffizienten des Spannungstensors, die Koeffizienten des Intensitätsvektors infolge verteilter Volumenkräfte beziehungsweise die Koeffizienten des dielektrischen Verschiebungsvektors.

Die konstitutiven Gleichungen für ein piezoelektrisches Material sind durch

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i &= e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \kappa_{ik} E_k \end{aligned} \quad (2-26)$$

gegeben, wobei die physikalischen Größen E_k , e_{ikl} und κ_{ik} die Koeffizienten des Vektors der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , die Koeffizienten des Tensors der piezoelektrischen Konstanten \mathbf{e} beziehungsweise die Koeffizienten des Tensors der dielektrischen Konstanten $\boldsymbol{\kappa}$ sind. Die Koeffizienten der materialbeschreibenden Tensoren \mathbf{e} und $\boldsymbol{\kappa}$ besitzen die folgenden Symmetrieeigenschaften [58]

$$\begin{aligned} e_{ijk} &= e_{ikj} \quad , \\ \kappa_{ij} &= \kappa_{ji} \quad . \end{aligned} \quad (2-27)$$

Das bedeutet, die Tensoren besitzen im allgemeinsten Fall 18 beziehungsweise 6 unabhängige Koeffizienten.

Der Vektor der elektrischen Feldstärke ist durch den negativen Gradienten des elektrischen Potentials ϕ

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\phi}\phi \quad (2-28)$$

definiert. Das Symbol ∇_{ϕ} bezeichnet einen Vektor, dessen Komponenten partielle Ableitungsoperatoren sind

$$\nabla_{\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T . \quad (2-29)$$

Die konstitutiven Gleichungen aus Gl. (2-26) lassen sich unter Nutzung der Indexrelationen Gl. (2-13) (M-V-Notation) schreiben als

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_4 \\ \tilde{\sigma}_5 \\ \tilde{\sigma}_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{16} & -\tilde{e}_{11} & -\tilde{e}_{21} & -\tilde{e}_{31} \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{26} & -\tilde{e}_{12} & -\tilde{e}_{22} & -\tilde{e}_{32} \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{33} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{36} & -\tilde{e}_{13} & -\tilde{e}_{23} & -\tilde{e}_{33} \\ \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{46} & -\tilde{e}_{14} & -\tilde{e}_{24} & -\tilde{e}_{34} \\ \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{56} & -\tilde{e}_{15} & -\tilde{e}_{25} & -\tilde{e}_{35} \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{36} & \tilde{C}_{46} & \tilde{C}_{56} & \tilde{C}_{66} & -\tilde{e}_{16} & -\tilde{e}_{26} & -\tilde{e}_{36} \\ \tilde{e}_{11} & \tilde{e}_{12} & \tilde{e}_{13} & \tilde{e}_{14} & \tilde{e}_{15} & \tilde{e}_{16} & \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \tilde{e}_{21} & \tilde{e}_{22} & \tilde{e}_{23} & \tilde{e}_{24} & \tilde{e}_{25} & \tilde{e}_{26} & \kappa_{12} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \tilde{e}_{31} & \tilde{e}_{32} & \tilde{e}_{33} & \tilde{e}_{34} & \tilde{e}_{35} & \tilde{e}_{36} & \kappa_{13} & \kappa_{23} & \kappa_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \tilde{\varepsilon}_3 \\ \tilde{\varepsilon}_4 \\ \tilde{\varepsilon}_5 \\ \tilde{\varepsilon}_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2-30)$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & -\tilde{\mathbf{e}}^T \\ \tilde{\mathbf{e}} & \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} . \quad (2-31)$$

Unter Verwendung der Matrixschreibweise ergibt sich aus dem DGL-System (2-25) das System

$$\begin{aligned} -\nabla^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{f} \\ \nabla_{\phi}^T \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} . \quad (2-32)$$

Da im Vergleich zum rein elastischen Modell drei zusätzliche Differentialgleichungen hinzugekommen sind, müssen diesbezüglich auch zusätzliche Randbedingungen neben den Bedingungen (2-17) und (2-18) angegeben werden. Das sind die elektrischen DIRICHLET- und NEUMANN-Randbedingungen [40], [64], [95]

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{auf } \Gamma_{\phi} \quad (2-33)$$

beziehungsweise

$$q = D_i n_i = -\hat{q} \quad \text{auf } \Gamma_D . \quad (2-34)$$

Dabei sind $\hat{\phi}$ und \hat{q} ein vorgegebenes elektrisches Potential beziehungsweise eine vorgegebene elektrische Randladung(-sdichte).

Schwache Formulierung

Für das Aufstellen der Gleichgewichtsbeziehung in schwacher Form kann man in analoger Weise wie im rein elastischen Fall vorgehen. Es sei angenommen, dass die Randflächen Γ_ϕ und Γ_D die leere Menge als Mengendurchschnitt besitzen.

Ausgehend von dem DGL-System (2-32) werden die erste Gleichung mit der Testfunktion \mathbf{v} und die zweite Gleichung mit der Testfunktion w multipliziert und anschließend über Ω integriert und addiert. Unter der Annahme, dass die gesuchten Lösungen \mathbf{u} und ϕ die DIRICHLET-Randbedingungen (2-17) beziehungsweise (2-33) bereits erfüllen, ergibt sich der folgende Ausdruck

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T (\nabla^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Omega} w (\nabla_{\phi}^T \mathbf{D}) d\Omega = 0 \quad . \quad (2-35)$$

Unter Anwendung der partiellen Integration lassen sich Ableitungsordnungen auf die Testfunktionen übertragen. Man erhält

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla_{\phi} w)^T \mathbf{D} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mathbf{v}^T \mathbf{p} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^T \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\phi}} w q d\Gamma + \int_{\Gamma_D} w q d\Gamma = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2-36)$$

Unter der Bedingung, dass die Testfunktionen \mathbf{v} und w auf den Rändern Γ_u beziehungsweise Γ_{ϕ} den Wert Null annehmen, verschwinden der vierte und der sechste Term. Nach Einarbeiten der restlichen Randbedingungen (2-18) und (2-34) lässt sich die Gleichgewichtsbeziehung (2-35) wie folgt darstellen

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla_{\phi} w)^T \mathbf{D} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{p}} d\Gamma + \int_{\Gamma_D} w \hat{q} d\Gamma = 0 \quad . \quad (2-37)$$

Nach Einsetzen der konstitutiven Gleichungen aus Gl. (2-31) und der Gln. (2-22) und (2-28) in Gl. (2-37) und anschließendem Umformen erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^T \tilde{\mathbf{C}} \nabla \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^T \tilde{\mathbf{e}}^T \nabla_{\phi} \phi d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla_{\phi} w)^T \tilde{\mathbf{e}} \nabla \mathbf{u} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\nabla_{\phi} w)^T \boldsymbol{\kappa} \nabla_{\phi} \phi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{p}} d\Gamma + \int_{\Gamma_D} w \hat{q} d\Gamma = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2-38)$$

2.3 Materialsymmetrien

In den vorhergehenden Abschnitten wurden Tensoren eingeführt, die das Materialverhalten charakterisieren. Die Koeffizienten solcher Tensoren, welche in einem kartesischen Koordinatensystem $\{x_1, x_2, x_3\}$ dargestellt werden können, erfüllen im Allgemeinen grundlegende Symmetrieeigenschaften. Verwendet man für die Darstellung ein bezüglich x_1, x_2, x_3 gedrehtes kartesisches Koordinatensystem x'_1, x'_2 und x'_3 , so wird der gleiche Tensor in der Regel durch Komponenten repräsentiert, die beim Komponentenvergleich von ungleichem

Wert sind.

Sind die Koeffizienten bezüglich einer Koordinatentransformation, wie zum Beispiel der Rotation um eine Achse mit einem festen Winkel α , invariant, so besitzt der Tensor zusätzliche Symmetrien, welche auch materielle Symmetrien genannt werden. Je mehr Symmetrien vorliegen, desto weniger unabhängige Koeffizienten sind zur Darstellung des Tensors erforderlich. Die Symmetrien eines Tensors und damit eines Materials kann man in Symmetrieklassen einteilen. Zu möglichen Koordinatentransformationen zählen neben Rotationen auch Spiegelungen (Reflektionen) bezüglich Koordinatensystemebenen [97], [22], [18], [89].

Nachfolgend werden im Fall der Elastizität einige Klassen präsentiert, die im späteren Verlauf Verwendung finden beziehungsweise als Eigenschaften von Kompositwerkstoffen auftauchen. Analoge Symmetrieeigenschaften lassen sich auch für andere Materialtensoren beziehungsweise Materialien formulieren, wofür auf die weiterführende Literatur [94], [55] verwiesen wird.

2.3.1 Koordinatentransformation

Für Koordinatentransformationen sind die Richtungskosinus bezüglich der Koordinatenachsen von Bedeutung. Aus der Abb. 2-2 ergeben sich folgende Richtungskosinus

$$T_1 = \cos(\alpha'), \quad T_2 = \cos(\beta'), \quad T_3 = \cos(\gamma') \quad , \quad (2-39)$$

wobei α' , β' , γ' die eingeschlossenen Winkel der Strecke \overline{OP} mit den Achsen x_1 , x_2 beziehungsweise x_3 sind.

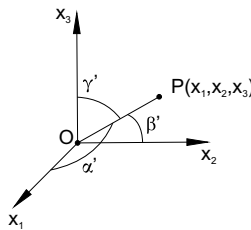


Abbildung 2-2: Strecke \overline{OP} bildet mit den Achsen x_1 , x_2 , x_3 die Winkel α' , β' , γ' [21]

Bei der Transformation eines Tensors bezüglich kartesischer Koordinaten ergeben sich pro Achse drei Richtungskosinus, das heißt insgesamt neun. Diese lassen sich in Matrixform schreiben

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad (2-40)$$

wobei die Richtungskosinus von x'_i bezüglich x_1 , x_2 , x_3 die Komponenten T_{i1} , T_{i2} , T_{i3} sind. Die Matrix wird auch Transformationsmatrix genannt. Für den Fall, dass das neue Koordinatensystem in Bezug zu dem alten System nur um den Winkel α um die x_3 -Achse

im entgegengesetzten Uhrzeigersinn gedreht ist, erhält man die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha') & \cos(90 - \alpha') & 0 \\ \cos(90 + \alpha') & \cos(\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & 0 \\ -\sin(\alpha') & \cos(\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2-41)$$

Mittels einer Transformationsmatrix ist man in der Lage, ein geeigneteres Koordinatensystem zur Darstellung von Tensoren zu wählen. Es seien dazu zwei kartesische Koordinatensysteme $\{x_1, x_2, x_3\}$ und $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ gegeben. Die Transformationsregel für den Elastizitätstensor \mathbf{C} ist dann durch

$$C'_{pqrs} = T_{pi} T_{qj} T_{rk} T_{sl} C_{ijkl} \quad (2-42)$$

definiert, wobei die T_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ die Richtungskosinus nach Gleichung (2-40) sind.

2.3.2 Symmetrien des Elastizitätstensors

In diesem Teilabschnitt werden einige Symmetrieklassen für den Elastizitätstensor präsentiert und daraus weitere Informationen abgeleitet. Wie bereits in den vorherigen Abschnitten beschrieben wurde, lässt sich der Tensor im allgemeinen Fall durch 21 unabhängige Koeffizienten beschreiben. Diese Anzahl kann infolge zusätzlicher Symmetrien reduziert werden. Die Klassifizierung der einzelnen Symmetrien ist durch die Darstellung des Elastizitätstensors bezüglich geeigneter Koordinatensysteme gegeben.

Monokline Symmetrie

Ein monoklines Material ist durch eine Symmetrieebene charakterisiert. Damit ist gemeint, dass Tensorkomponenten nach Transformationen mittels Gleichung (2-42), welche die Symmetrie berücksichtigen, invariant bleiben. Bezüglich eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems und unter der Annahme, dass die Symmetrieebene die x_1 - x_2 -Ebene ist, wird ein monoklines Material durch die folgende Darstellung des Elastizitätstensors in M-V-Notation repräsentiert

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{33} & \tilde{C}_{34} & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{56} & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix} . \quad (2-43)$$

Die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten reduziert sich auf 13.

Orthotropie

Orthotrope Materialien zeichnen sich dadurch aus, dass drei Symmetrieebenen vorliegen. Diese stehen orthogonal zueinander. Unter der Verwendung eines kartesischen Koordinaten-

tensystems, bei dem die Achsenrichtungen parallel zu den Normalenrichtungen der orthogonalen Symmetrieebenen verlaufen, lässt sich der Elastizitätstensor wie folgt schreiben

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix}. \quad (2-44)$$

Für diese Symmetrieklasse reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten auf neun. Die Koeffizienten der Gl. (2-44) lassen sich auch mit Hilfe der Elastizitätsmoduln E_i , der Schubmoduln G_i und der Querkontraktionszahlen ν_{ij} und ν_{ji} , $i, j = 1, 2, 3$ schreiben. Die Nachgiebigkeitsmatrix, geschrieben mit den Ingenieurkonstanten, lautet

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{pmatrix}. \quad (2-45)$$

Bei der Querkontraktionszahl ν_{ij} kennzeichnet der erste Index die Richtung der aufgetragenen Belastung und der zweite Index die Richtung der Antwort.

Aufgrund der folgenden Symmetrieeigenschaft

$$\tilde{S}_{ij} = -\frac{\nu_{ij}}{E_i} = -\frac{\nu_{ji}}{E_j} = \tilde{S}_{ji} \quad (2-46)$$

und da $E_i \neq E_j$ ist, gilt $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$.

Transversalisotropie

Ein transversal isotroper Werkstoff besitzt eine Isotropieebene. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass bezüglich beliebiger Rotationen um den Normalenvektor der Ebene die Darstellung des Elastizitätstensors invariant bleibt [18]. Unter Berücksichtigung eines Koordinatensystems in eine dieser Konfigurationen stellt sich der Tensor wie folgt dar

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} \end{pmatrix}. \quad (2-47)$$

Hier ist die Isotropieebene die x_1 - x_2 -Ebene, und die x_3 -Achse steht senkrecht dazu und ist damit parallel zum Normalenvektor der Ebene. Die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten beträgt fünf. Die Nachgiebigkeitsmatrix unter Verwendung der Ingenieurkonstanten lautet

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1/E_t & -\nu_t/E_t & -\nu_l/E_l & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_t/E_t & 1/E_t & -\nu_l/E_l & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_l/E_l & -\nu_l/E_l & 1/E_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_t)/E_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_l \end{pmatrix}. \quad (2-48)$$

Dabei kennzeichnet der Index „t“ die transversale Richtung und der Index „l“ die longitudinale Richtung. Eine weitere Materialkonstante, die im späteren Verlauf Anwendung findet, ist der transversale Kompressionsmodul. In Abhängigkeit von den Elastizitätskoeffizienten hat er die Form

$$k_t = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) \quad . \quad (2-49)$$

Isotropie

Im Fall, dass die Darstellung des Tensors unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems ist, repräsentiert der Tensor ein Material mit einem isotropen Stoffverhalten. Bezüglich eines beliebig gewählten kartesischen Koordinatensystems stellt sich der Elastizitätstensor wie folgt dar

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{12}) \end{pmatrix}. \quad (2-50)$$

Die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten des Elastizitätstensors reduziert sich auf zwei. Die dazugehörige Nachgiebigkeitsmatrix hat die Form wie Gleichung (2-45), wobei hier

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = E_3 = E \quad , \\ \nu_{ij} = \nu_{ji} = \nu_{kl} = \nu, \quad \forall i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad , \\ G_1 = G_2 = G_3 = G \end{aligned} \quad (2-51)$$

gilt. Weiterhin gilt die Beziehung

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad . \quad (2-52)$$

3 Homogenisierungsverfahren

Das Wissen über das Materialverhalten von Werkstoffen ist grundlegend für die Untersuchung von Bauteilen. Ist das Material homogen, so wird es durch konstante Koeffizienten materialbeschreibender Tensoren, wie zum Beispiel den Elastizitätstensor \mathbf{C} und den Tensor der dielektrischen Konstanten, charakterisiert. Nun ist im Allgemeinen bei detaillierter Betrachtung der Struktur, das heißt unter Verwendung eines Mikroskops, die Sichtweise der Homogenität nicht mehr gegeben. Es zeigt sich eine heterogene Struktur, in der zum Beispiel Risse oder Fremdeinschlüsse auftreten. Diese beiden Betrachtungsebenen, welche auch Skalen genannt werden, sind die Makroebene und die Mikroebene, wobei der Unterschied der charakteristischen Längen beider Skalen sehr groß ist. Daher werden für beide Skalen eigene Koordinaten eingeführt. In der Literatur findet man häufig x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 für die Bezeichnung der makroskopischen beziehungsweise der mikroskopischen Koordinaten.

Durch die Anwendung von Homogenisierungsmethoden ist es möglich eine feinskalierte heterogene Mikrostruktur eines Werkstoffes so zu „verschmieren“, dass das Material auf Makroebene als homogen betrachtet werden kann und sich ortsunabhängige effektive Materialeigenschaften zuordnen lassen. Dabei wird die Mikrostruktur in einem gemittelten Sinne berücksichtigt [35]. Dieser Übergang von einer Mikro- zur Makrobetrachtung wird Homogenisierung genannt.

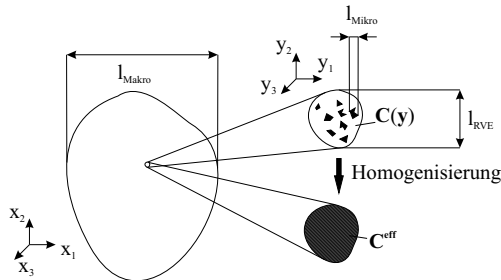


Abbildung 3-1: Heterogene Mikrostrukturen

Dieses Kapitel beinhaltet Grundlagen und Informationen zur Homogenisierung und zum Bestimmen der effektiven Materialeigenschaften von Verbundwerkstoffen. Zuerst werden einige grundlegende Gleichungen zur Homogenisierung in der linearen Elastizität angegeben. Im Anschluss daran werden zwei Methoden aus der Literatur vorgestellt, die zur Validierung eigener Untersuchungen verwendet werden. Das sind die CCA-Modellierung (CCA - composite cylinder assemblage) [46] und das verallgemeinerte Selbstkonsistenzschema [24], [25], [46]. Im dritten Abschnitt wird detaillierter auf den Fall periodischer Mikrostrukturen eingegangen. Der vierte Abschnitt widmet sich dem Einbeziehen eines

imperfekten Phasenübergangs in die Homogenisierungsbetrachtungen. Am Ende wird der Aspekt der Homogenisierung auf piezoelektrische Materialien erweitert.

3.1 Das repräsentative Volumenelement (RVE)

Bei der experimentellen Bestimmung von Materialeigenschaften werden geeignete Probekörper mittels Testvorrichtungen kraft- oder weggesteuert belastet. Die Messungen sind nur sinnvoll, wenn das Ergebnis nicht konkret vom betrachteten Probekörper abhängt oder von der Art der Laststeuerung. Mit anderen Worten der Probekörper muss „repräsentativ“ für den Werkstoff sein. Genau wie bei einer experimentellen Untersuchung am repräsentativen Probekörper wird bei einer theoretischen Betrachtung ein Volumenbereich Ω der Mikroebene gewählt, der repräsentativ für das gesamte Material ist. Das ist das repräsentative Volumenelement (kurz: RVE). Eine Bedingung für die Repräsentativität ist die Unabhängigkeit des Volumenbereiches von mikrostrukturellen Details im Sinne der Verteilung der Heterogenität. Damit ist gemeint, dass die mikrostrukturelle Anordnung innerhalb des Volumenbereiches zu jedem anderen gleichgroßen Volumenausschnitt des Materials äquivalent ist, so dass die Unabhängigkeit der abgeleiteten effektiven Materialeigenschaften bezüglich makroskopischer Koordinaten gewährleistet ist. Man spricht dann auch von einer statistisch homogenen Verteilung der Defekte oder Heterogenitäten im Material. Aus Sicht der Realität ist dies eine Annahme, die schwer zu erfüllen ist, da die Defektverteilung im Material im Allgemeinen regelfrei (zufällig) ist. Trotzdem soll angenommen werden, dass es möglich ist, ein geeignetes RVE zu wählen. Infolge dieser Wahl sollen hier zwei Fälle unterschieden werden. Diese sind die Wahl eines nichtperiodischen RVE, welches für ein Material mit einer zufällig verteilten Heterogenität repräsentativ ist, und die Wahl eines periodischen RVE, welches äquivalent für ein Material mit einer speziellen Verteilung der Defekte steht. Für den Fall einer zufälligen Mikrostruktur sollte das RVE eine „hinreichend“ große Anzahl an Defekten beinhalten [35], um näherungsweise als repräsentativ zu gelten, wobei das Wort „hinreichend“ nicht näher spezifiziert wird. Als richtungsweisend ist diesbezüglich die Beziehung

$$l_{\text{Mikro}} \ll l_{\text{RVE}} \ll l_{\text{Makro}} \quad (3-1)$$

zu sehen. Hierbei sind l_{Mikro} , l_{RVE} und l_{Makro} charakteristische Abmessungen aus der Mikroebene, für das RVE beziehungsweise aus der Makroebene (siehe Abb. 3-1). Die Abmessungen des RVE müssen die Gl. (3-1) erfüllen, damit das RVE repräsentativ für den Werkstoff ist. Im Fall einer periodischen Mikrostruktur wird in der Regel der kleinste periodisch fortsetzbare Strukturbereich als RVE benutzt.

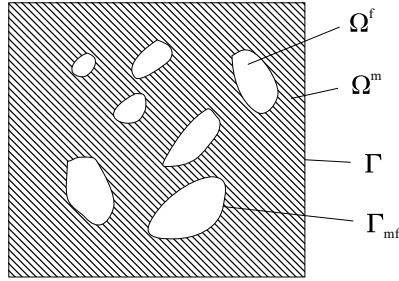


Abbildung 3-2: Repräsentatives Volumenelement für einen Kompositwerkstoff bestehend aus zwei Phasen

Für die weiteren Betrachtungen wird angenommen, dass der betrachtete Volumenbereich Ω , der als RVE genutzt wird, eine konvexe Form besitzt. Es wird weiterhin angenommen, dass der zu untersuchende Werkstoff aus zwei Phasen besteht, welche jeweils linear elastisch sind. Eine Phase dient als Basismaterial, Ω^m , während die andere Phase, Ω^f , welche in das Basismaterial eingebettet ist, als Störung des Basismaterials interpretiert werden kann (siehe Abb. 3-2). Der Rand, den die beiden Phasen gemeinsam haben, wird mit $\Gamma_{mf} = \Gamma^m \cap \Gamma^f$ bezeichnet. Der äußere Rand des RVE wird mit Γ bezeichnet.

Unter der Annahme, dass Volumenlasten fehlen, ergibt sich mit Verweis auf Gl. (2-2) für den Volumenbereich $\Omega = \Omega^f \cup \Omega^m$ das folgende DGL-System

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}(\mathbf{y}) = 0 \quad (3-2)$$

mit dem dazugehörigen konstitutiven Materialgesetz nach Gl. (2-5)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{y}) = C_{ijkl}(\mathbf{y}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{y})) \quad (3-3)$$

Hierbei sind $\sigma_{ij}(\mathbf{y})$, $C_{ijkl}(\mathbf{y})$ und $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ durch

$$\sigma_{ij}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sigma_{ij}^m(\mathbf{y}) & \text{wenn } \mathbf{y} \in \Omega^m \\ \sigma_{ij}^f(\mathbf{y}) & \text{wenn } \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases}, \quad (3-4)$$

$$C_{ijkl}(\mathbf{y}) = \begin{cases} C_{ijkl}^m & \text{wenn } \mathbf{y} \in \Omega^m \\ C_{ijkl}^f & \text{wenn } \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases}, \quad (3-5)$$

und

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{u}^m(\mathbf{y}) & \text{wenn } \mathbf{y} \in \Omega^m \\ \mathbf{u}^f(\mathbf{y}) & \text{wenn } \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases} \quad (3-6)$$

definiert. Auf dem gemeinsamen Rand der Phasen Γ_{mf} gelten die Bedingungen [1]

$$u_i^f = u_i^m \quad \text{auf } \Gamma_{mf}, \quad (3-7)$$

$$\sigma_{ij}^f n_j^f = -\sigma_{ij}^m n_j^m \quad \text{auf } \Gamma_{mf}. \quad (3-8)$$

Diese Übergangsbedingungen charakterisieren einen sogenannten perfekten Phasenübergang (auch perfekter Kontakt genannt). Erst in einem späteren Abschnitt (siehe Abschnitt 3.4) wird auch der Fall eines imperfekten Phasenübergangs behandelt.

Aus einer Zweiskalenbetrachtung heraus wird ein materieller Punkt der makroskopischen Ebene dem repräsentativen Volumenbereich zugeordnet [35], [96]. Da auf Mikroebene fluktuierende physikalische Felder vorliegen, werden die zur Beschreibung des mechanischen Zustands eines Punktes auf der Makroebene zugehörigen Makrospannungen und -verzerrungen durch folgende Volumenmittelwerte

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega \quad , \\ \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon_{kl} d\Omega\end{aligned}\quad (3-9)$$

der mikroskopischen Felder definiert. Hierbei bezeichnet $|\Omega|$ das Volumen von Ω . Unter Berücksichtigung der Bedingungen aus Gl. (3-7), (3-8) und dem Anwenden des GAUSSschen Integralsatzes lassen sich die Makrogrößen auch durch die folgenden Randintegrale darstellen

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \sigma_{ik} n_k y_j d\Gamma \quad , \\ \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} (u_k n_l + u_l n_k) d\Gamma \quad .\end{aligned}\quad (3-10)$$

Der effektive (homogenisierte) Elastizitätstensor \mathbf{C}^{eff} ist durch die Beziehung zwischen Makrospannungen und -verzerrungen

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{\text{eff}} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (3-11)$$

definiert. Für die Deutung von \mathbf{C}^{eff} als Materialeigenschaft wird gefordert, dass die HILL-Bedingung [35]

$$\frac{1}{2} \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (3-12)$$

erfüllt wird. Diese beschreibt die Äquivalenz der mittleren Formänderungsenergiedichte auf Mikroebene mit der Formänderungsenergiedichte auf Makroebene [54].

Es ist offensichtlich, dass im Rahmen der linearen Elastizität die Symmetrie der Makrospannungen und Makroverzerrungen und somit auch der Koeffizienten des effektiven Elastizitätstensors gewährleistet bleibt, wodurch die Beziehung Gl. (3-11) unter Verwendung der Indexrelationen Gl. (2-13) in M-V-Notation dargestellt werden kann

$$\langle \tilde{\sigma}_p \rangle = \tilde{C}_{pq}^{\text{eff}} \langle \tilde{\varepsilon}_q \rangle \quad p, q = 1, \dots, 6. \quad (3-13)$$

Die Größen $\tilde{C}_{pq}^{\text{eff}}$ sind die Koeffizienten der effektiven Elastizitätsmatrix $\tilde{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$. Durch

$$\langle \tilde{\varepsilon}_p \rangle = \tilde{S}_{pq}^{\text{eff}} \langle \tilde{\sigma}_q \rangle \quad (3-14)$$

lässt sich eine analoge Beziehung unter Verwendung der Koeffizienten der effektiven Nachgiebigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{S}}^{\text{eff}}$ formulieren.

Um effektive Elastizitätseigenschaften C_{ijkl}^{eff} aus der Beziehungsgl. (3-11) bestimmen zu können, ist es vorher von Nöten, die mikroskopischen Größen σ_{ij} und ε_{kl} im repräsentativen Volumenbereich Ω zu kennen. Somit muss vorher das DGL-System Gl. (3-2) gelöst werden.

Für eine vollständige Formulierung eines Randwertproblems fehlt noch die Angabe von geeigneten Randbedingungen auf Γ . Plausible Bedingungen sind homogene (konstante) Randspannungen oder lineare Randverschiebungen. Diese sind durch

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}n_j &= \sigma_{ij}^0 n_j \quad \text{auf } \Gamma, \\ u_i &= \varepsilon_{ij}^0 y_j \quad \text{auf } \Gamma\end{aligned}\tag{3-15}$$

gegeben, wobei σ_{ij}^0 und ε_{ij}^0 konstante Größen sind, die die Symmetrieeigenschaften eines Spannungs- beziehungsweise Verzerrungstensors besitzen. Der Vektor \mathbf{n} ist der äußere Normalenvektor auf Γ . Es gilt je nach Art der verwendeten Randbedingungen aus Gl. (3-15) die Beziehung

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0\tag{3-16}$$

oder

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0.\tag{3-17}$$

Dies bedeutet, dass unter Vorgabe von homogenen Spannungs- oder Verzerrungszuständen auf dem Rand die makroskopischen Spannungen beziehungsweise Verzerrungen gerade den homogenen Größen entsprechen. Die Beziehungen (3-16) und (3-17) werden auch als „average strain theorem“ beziehungsweise „average stress theorem“ bezeichnet. Es sei noch bemerkt, dass durch die beiden Randbedingungstypen aus Gl. (3-15) die HILL-Bedingung Gl. (3-12) erfüllt wird [96].

Unter der Annahme, dass ein Kompositwerkstoff mit einer periodischen Mikrostruktur zu Grunde liegt und als RVE die sich wiederholende Einheitszelle gewählt wird, sind diese Typen von Randbedingungen zur Bestimmung der mikroskopischen Größen abzulehnen, da sie zu schlechten Ergebnissen bei den effektiven Elastizitätseigenschaften führen können. Eine genauere Untersuchung dazu wird im Kapitel 5 anhand einer zweidimensionalen Modellbetrachtung durchgeführt.

Infolge der periodischen Struktur des Kompositwerkstoffes liegt es nahe, dass sich diese Periodizität in den Spannungs- beziehungsweise den Verzerrungsfeldern (und damit auch in den Verschiebungsfeldern) widerspiegeln sollte. Adäquate Randbedingungen für die periodische Einheitszelle, welche auch als periodische Randbedingungen bezeichnet werden, sind dann unter der Annahme herleitbar, dass die Spannungsvektoren $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ auf gegenüberliegenden Rändern anti-periodisch sind und sich die Komponenten des Verzerrungstensors $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ in Ω in

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{\text{per}})\tag{3-18}$$

aufspalten lassen [96], [67], [68]. Hierbei sind ε_{ij}^0 konstante Größen, die die symmetrischen Eigenschaften eines Verzerrungstensors besitzen, und \mathbf{u}^{per} ist ein Vektorfeld, welches periodisch bezüglich Ω ist. Anhand der Periodizität der Funktion \mathbf{u}^{per} und dem GAUSSschen Integralsatz lässt sich schlussfolgern, dass

$$\langle \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{\text{per}}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{\text{per}}) d\Omega = 0\tag{3-19}$$

gilt. Damit folgt aus Gl. (3-18)

$$\langle \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega = \varepsilon_{ij}^0 \quad . \quad (3-20)$$

Die periodischen Randbedingungen lauten (siehe [96])

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= -\sigma_{ij} n_j \quad \text{auf } \Gamma \text{ (anti-periodisch)} \quad , \\ u_i &= \varepsilon_{ij}^0 y_j + u_i^{\text{per}} \quad \text{auf } \Gamma \quad , \\ u_i^{\text{per}} &\quad \text{periodisch auf } \Gamma \quad , \end{aligned} \quad (3-21)$$

wobei die Komponenten ε_{ij}^0 eines Tensors $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ vorgegeben sind.

Die erste Bedingung aus Gl. (3-21) kann vernachlässigt werden, da die übrigen Bedingungen aus Gl. (3-21) dazu führen, dass die Anti-Periodizität automatisch erfüllt wird [68], [23]. Daher reicht es aus, sich bei der Formulierung der Randbedingungen auf

$$\begin{aligned} u_i &= \varepsilon_{ij}^0 y_j + u_i^{\text{per}} \quad \text{auf } \Gamma \quad , \\ u_i^{\text{per}} &\quad \text{periodisch auf } \Gamma \end{aligned} \quad (3-22)$$

zu beschränken. Diese Randbedingungen werden noch zum späteren Zeitpunkt in eine geeignetere Form überführt, da sie sich in der jetzigen Darstellung nicht für eine numerische Analyse eignen (Abschnitt 3.3). Auch diese Randbedingungen erfüllen die HILL-Bedingung [96].

3.2 Nichtperiodische Mikrostruktur

3.2.1 CCA-Modellierung

Unter einem CCA-Modell nach Hashin [41] versteht man einen Kompositwerkstoff, welcher vollständig aus eingeschränkt zufällig verteilten Zylindergeometrien unterschiedlicher Größe besteht. Ein jeder Zylinder besteht aus einer Matrix Ω^m und einer zentral eingebetteten unidirektionalen Faser Ω^f mit einem kreisförmigen Querschnitt, weshalb dieser auch wie in [41] als Kompositzylinder bezeichnet werden soll. Zwischen den beiden Phasen wird ein kontinuierlicher Übergang von Spannungen und Verschiebungen angenommen. Alle Kompositzylinder sind so angeordnet, dass sie zueinander parallel liegen und sich nicht schneiden. Damit liegen auch alle Fasern parallel zueinander. In Abb. 3-3 ist ein zylinderförmiges CCA-Modell dargestellt, wobei in dem Bild noch der freie Raum Ω^R zwischen den Kompositzylindern erkennbar ist. Dieser wird ebenfalls mit Zylindern aufgefüllt, so dass das Volumen von Ω^R gegen Null strebt. Es sei nun r_n^f der Radius der Faser im n-ten Zylinder und r_n^Z der Radius des n-ten Zylinders. Die Einschränkung in Bezug auf die Zufälligkeit in der Verteilung besteht nun darin, dass alle Kompositzylinder das gleiche Verhältnis r_n^f/r_n^Z aufweisen. Das bedeutet, dass alle Zylindergeometrien für sich betrachtet den gleichen Faser- und Matrixvolumenanteil besitzen.

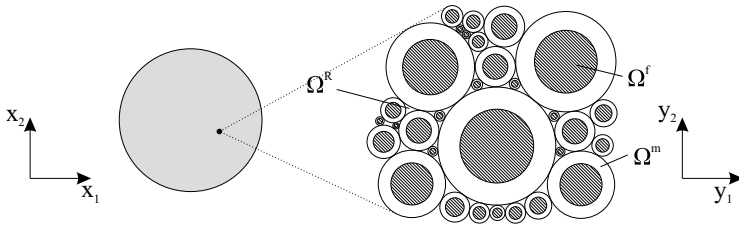


Abbildung 3-3: Zylinderförmiges CCA-Modell (links), welches vollständig aus Kompositzylindern besteht (das Volumen von Ω^R strebt gegen Null)

Die CCA-Modellierung basiert auf dem Konzept des neutralen Einschlusses [46]. Dieses Konzept definiert sich wie folgt. Es wird in einem homogenen Körper ein gegebener Spannungs- und Verzerrungszustand angenommen. Ist es möglich, eine Teilregion Ω^{cc} aus diesem Körper durch eine Region mit einer heterogenen Materialstruktur zu ersetzen, ohne dass sich die gegebenen Spannungs- und Verzerrungszustände in dem Restgebiet verändern, so wird die ersetzende Teilregion als neutraler Einschluss bezeichnet. In [41] wird gezeigt, dass ein aus zwei Phasen bestehender Kompositzylinder unter der Annahme eines konstanten Verzerrungszustandes der Form

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 & 0 & \varepsilon_{13}^0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^0 & \varepsilon_{23}^0 \\ \varepsilon_{13}^0 & \varepsilon_{23}^0 & \varepsilon_{33}^0 \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

mit geeigneten Größen ε_{ij}^0 ein neutraler Einschluss innerhalb eines homogenen, zylindrischen, transversal isotropen Körpers ist, wobei die Materialeigenschaften des Körpers äquivalent zu den (homogenisierten) Eigenschaften des Kompositzylinders sind (siehe Abb. 3-4) [46]. Das bedeutet, dass der Kompositzylinder als ein RVE interpretiert werden kann. Die transversal isotropen Eigenschaften lassen sich im Sinne der Homogenisierung durch die Betrachtung eines beliebigen Kompositzylinders des Verbundkörpers als RVE bestimmen.

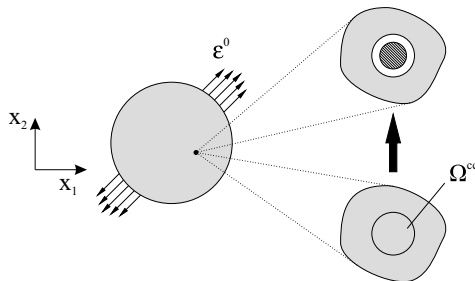


Abbildung 3-4: Austausch des homogenen Teilgebiets Ω^{cc} durch einen Kompositzylinder (Konzept des neutralen Einschlusses)

Unter Verwendung des CCA-Modellierungskonzeptes lassen sich für einen Kompositwerkstoff, welcher sich aus zwei (transversal) isotropen Phasen mit einem perfekten Phasenüber-

gang zusammensetzt, explizite Formeln für den effektiven longitudinalen Elastizitätsmodul E_l^{eff} , die effektive longitudinale Querkontraktionszahl ν_l^{eff} und den effektiven longitudinalen Schubmodul G_l^{eff} angeben, in die die Phasenvolumenanteile und die Materialeigenschaften der beteiligten Phasen eingehen. Im Fall des effektiven transversalen Schubmoduls G_t^{eff} , der effektiven transversalen Querkontraktionszahl ν_t^{eff} und des effektiven transversalen Elastizitätsmoduls E_t^{eff} lassen sich Schranken angeben [41], [42].

Eine Ausnahme bildet der transversale Kompressionsmodul k_t^{eff} , für den sich ebenfalls wie bei den longitudinalen Konstanten eine explizite Formel herleiten lässt. Die Formeln und die Schranken der Materialkonstanten sind den folgenden Gleichungen zu entnehmen [46], [41], [42]

$$k_t^{\text{eff}} = k_t^{\text{m}} + \frac{v^{\text{f}}}{\frac{1}{k_t^{\text{f}} - k_t^{\text{m}}} + \frac{v^{\text{m}}}{k_t^{\text{m}} + G_t^{\text{m}}}} \quad , \quad (3-24)$$

$$E_l^{\text{eff}} = E_l^{\text{f}} v^{\text{f}} + E_l^{\text{m}} v^{\text{m}} + \frac{4(\nu_l^{\text{f}} - \nu_l^{\text{m}})^2 v^{\text{f}} v^{\text{m}}}{\frac{v^{\text{m}}}{k_t^{\text{f}}} + \frac{v^{\text{f}}}{k_t^{\text{m}}} + \frac{1}{G_t^{\text{m}}}} \quad , \quad (3-25)$$

$$\nu_l^{\text{eff}} = \nu_l^{\text{f}} v^{\text{f}} + \nu_l^{\text{m}} v^{\text{m}} + \frac{(\nu_l^{\text{f}} - \nu_l^{\text{m}})(1/k_t^{\text{m}} - 1/k_t^{\text{f}}) v^{\text{m}} v^{\text{f}}}{\frac{v^{\text{m}}}{k_t^{\text{f}}} + \frac{v^{\text{f}}}{k_t^{\text{m}}} + \frac{1}{G_t^{\text{m}}}} \quad , \quad (3-26)$$

$$G_l^{\text{eff}} = G_l^{\text{m}} + \frac{v^{\text{f}}}{\frac{1}{G_l^{\text{f}} - G_l^{\text{m}}} + \frac{v^{\text{m}}}{2G_l^{\text{m}}}} \quad , \quad (3-27)$$

$$E_t^{\text{eff}, \pm} = \frac{4k_t^{\text{eff}} G_t^{\text{eff}, \pm}}{k_t^{\text{eff}} + m^{\text{eff}} G_t^{\text{eff}, \pm}} \quad , \quad (3-28)$$

$$\nu_t^{\text{eff}, \pm} = \frac{k_t^{\text{eff}} - m^{\text{eff}} G_t^{\text{eff}, \pm}}{k_t^{\text{eff}} + m^{\text{eff}} G_t^{\text{eff}, \pm}} \quad (3-29)$$

mit

$$m^{\text{eff}} = 1 + \frac{4k_t^{\text{eff}} (\nu_t^{\text{eff}})^2}{E_t^{\text{eff}}} \quad ,$$

bei $G_t^{\text{f}} > G_t^{\text{m}}$, $k_t^{\text{f}} > k_t^{\text{m}}$

$$\begin{aligned} G_t^{\text{eff}, -} &= G_t^{\text{m}} + \frac{v^{\text{f}}}{\frac{1}{G_t^{\text{f}} - G_t^{\text{m}}} + \frac{(k_t^{\text{m}} + 2G_t^{\text{m}}) v^{\text{m}}}{2G_t^{\text{m}} (k_t^{\text{m}} + G_t^{\text{m}})}} \quad , \\ G_t^{\text{eff}, +} &= G_t^{\text{m}} \left(1 + \frac{(1 + K_1) v^{\text{f}}}{K_2 - v^{\text{f}} \left(1 + \frac{3K_1^2 (v^{\text{m}})^2}{K_3 (v^{\text{f}})^3 + 1} \right)} \right) \quad , \end{aligned} \quad (3-30)$$

bei $G_t^f < G_t^m$, $k_t^f < k_t^m$

$$G_t^{\text{eff},-} = G_t^m \left(1 + \frac{(1 + K_1)v^f}{K_2 - v^f \left(1 + \frac{3K_1^2(v^m)^2}{K_3(v^f)^3 - K_1} \right)} \right), \quad (3-31)$$

$$G_t^{\text{eff},+} = G_t^m + \frac{1}{\frac{G_t^f - G_t^m}{2G_t^m(k_t^m + G_t^m)} + \frac{(k_t^m + 2G_t^m)v^m}{2G_t^m(k_t^m + G_t^m)}}$$

mit

$$K_1 = \frac{k_t^m}{k_t^m + 2G_t^m}, \quad K_2 = \frac{G_t^f/G_t^m + K_1}{G_t^f/G_t^m - 1},$$

$$K_3 = \frac{K_1 - G_t^f/G_t^m K_4}{1 + G_t^f/G_t^m K_4}, \quad K_4 = \frac{k_t^f}{k_t^f + 2G_t^f}.$$

Für die Schranken Gl. (3-28), Gl. (3-29), Gl. (3-30) und Gl. (3-31) kennzeichnet der Index „-“ und „+“ die untere Schranke beziehungsweise die obere Schranke.

Das Konzept der CCA-Modellierung lässt sich auch bei mehrphasigen Kompositzyindern anwenden (siehe Abb. 3-5). Dabei steht jedoch nur die Berechnung der effektiven longitudinalen Materialkonstanten sowie des effektiven transversalen Kompressionsmoduls im Fokus der Betrachtung. Für die Berechnung transversaler Konstanten kann im Fall der Mehrphasigkeit auf eine andere Berechnungsmethode, das verallgemeinerte Selbstkonsistenzschema, zurückgegriffen werden (siehe Abschnitt 3.2.2).

Die Berechnungsgleichungen der effektiven Konstanten im Fall von mehrphasigen Kompositzyindern nach der CCA-Modellierung haben eine ähnliche Darstellung wie die Gl. (3-24)-(3-27), wobei für die Herleitung eine Art Rekursionsalgorithmus angewendet werden muss. Für die nähere Erläuterung werden die Eigenschaften (3-24)-(3-27) durch die allgemeinere Bezeichnung $P^{\text{eff}}(P^f, P^m, \mathbf{Var}^f, \mathbf{Var}^m, v^f, v^m)$ beschrieben. Die in den Klammern aufgeführten Parameter kennzeichnen abhängige Größen. P^{eff} , P^f und P^m sind von gleicher physikalischer Bedeutung, \mathbf{Var}^f und \mathbf{Var}^m dienen als Platzhalter in Form von Feldern für etwaige zusätzliche Materialkonstanten der Faser- beziehungsweise Matrixphase, die in die Berechnung eingehen. Diese zusätzlichen Felder bestehen aus maximal zwei beziehungsweise drei Komponenten. Die Reihenfolge der Auflistung der abhängigen Größen in $P^{\text{eff}}(P^f, P^m, \mathbf{Var}^f, \mathbf{Var}^m, v^f, v^m)$ ist von großer Wichtigkeit, da sich durch das Vertauschen auch die heterogene Materialphasenanordnung verändert.

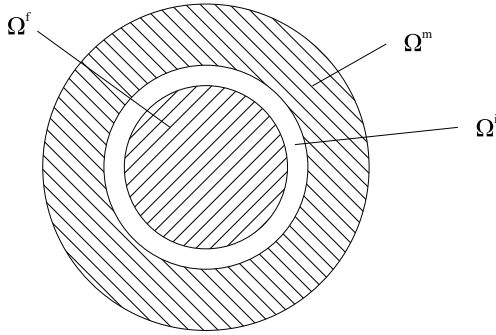


Abbildung 3-5: Drei-Phasen-Kompositzylinder einer CCA-Modellierung

Für das weitere Vorgehen wird ein CCA-Modell mit Kompositzylindern nach Abb. 3-5 angenommen. Die Faser Ω^f ist zentral im Zylinder eingebettet und durch eine Zwischenphase Ω^i von der Matrix Ω^m , welche die Außenschicht bildet, separiert. Die Phasenübergänge werden als perfekt angenommen. Die effektive Materialeigenschaft P_{3p}^{eff} des CCA-Modells mit dreiphasigen Kompositzylindern ergibt sich dann aus [46]

$$P_{3p}^{\text{eff}} = P^{\text{eff}}(P^{\text{fi}}, P^{\text{m}}, \mathbf{Var}^{\text{fi}}, \mathbf{Var}^{\text{m}}, v^f + v^i, v^m) \quad , \quad (3-32)$$

wobei

$$P^{\text{fi}} = P^{\text{eff}}\left(P^f, P^i, \mathbf{Var}^f, \mathbf{Var}^i, \frac{v^f}{v^f + v^i}, \frac{v^i}{v^f + v^i}\right) \quad (3-33)$$

gilt. Das etwaige zusätzliche Feld \mathbf{Var}^{fi} in Gl. (3-32) besteht aus Komponenten, die sich ebenfalls durch die Gl. (3-33) berechnen lassen.

3.2.2 Verallgemeinertes Selbstkonsistenzschema, GSCS

Das in dieser Arbeit verwendete verallgemeinerte Selbstkonsistenzschema (GSCS) orientiert sich an den Ausführungen von Hashin [46]. Es werden die wichtigsten Aspekte und Gleichungen noch einmal dargestellt.

Das GSCS ist eine Näherungsmethode und kann zur Berechnung von effektiven Materialeigenschaften von unidirektionalen Faserverbundwerkstoffen genutzt werden. Die Methode wird in Kapitel 5 als Referenz- beziehungsweise Validierungsmethode herangezogen.

Das GSCS basiert im Fall eines unidirektionalen Faserverbundwerkstoffes, welcher sich aus drei isotropen und elastischen Phasen zusammensetzt, auf dem folgenden geometrischen Modell. Ein Kompositzylinder wie aus Abschnitt 3.2.1 Abb. 3-5, welcher eine Matrixphase Ω^m , eine Faserphase Ω^f und eine Zwischenphase Ω^i besitzt, ist in eine vierte homogene, transversal isotrope Phase Ω^0 , welche durch die noch unbekannten effektiven Materialeigenschaften des unidirektionalen Faserverbundwerkstoffes charakterisiert ist, eingebettet (siehe Abb. 3-6). Die Zwischenphase separiert die Matrix- und die Faserphase. Der Kontakt zwischen allen Phasen wird als perfekt angenommen. Die vierte transversal isotrope Phase erstreckt sich ins Unendliche, wobei an dem äußeren Rand spezielle Randbedingungen so angenommen werden, dass sich die gewünschten effektiven Werkstoffeigenschaften herleiten lassen.

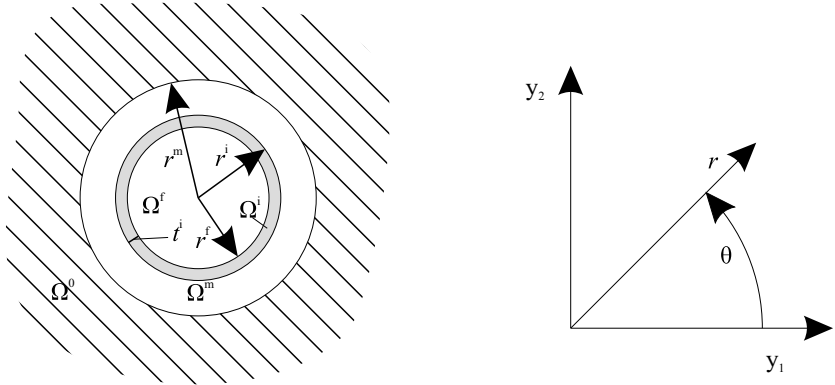


Abbildung 3-6: Links: GSCS-Modell (Kompositzzylinder eingebettet in eine unendliche, homogene Phase), rechts: verwendete Koordinatensysteme

Im Fall der Bestimmung des transversalen Schubmoduls sehen diese Randbedingungen wie folgt aus [46]

$$u_1(\infty) = \alpha^0 y_2, \quad u_2(\infty) = \alpha^0 y_1, \quad u_3(\mathbf{y}) = 0 \quad . \quad (3-34)$$

Hierbei ist α^0 ein fest vorgegebener Wert. Durch die Gl. (3-34) und das DGL-System

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad \text{in } \Omega = \Omega^0 \cup \Omega^f \cup \Omega^m \cup \Omega^i \quad (3-35)$$

wird ein Randwertproblem formuliert, welches es zu lösen gilt. Da aus Gl. (3-34) $u_3(\mathbf{x}) = 0$ gilt, wird das Randwertproblem als ebenes Problem (ebener Verzerrungszustand) behandelt.

Unter Verwendung eines zylindrischen Koordinatensystems mit Ursprung im Fasermittelpunkt (siehe Abb. 3-6) ergibt sich für Gl. (3-34)

$$u_r = \alpha^0 \sin(2\theta), \quad u_\theta = \alpha^0 \cos(2\theta) \quad . \quad (3-36)$$

Da zwischen den einzelnen Phasen ein perfekter Kontakt vorherrscht, gelten an den Phasenübergängen $r = r^f$, $r = r^i = r^f + t^i$ und $r = r^m$ die folgenden Kontinuitätsbedingungen

$$\begin{aligned} u_r^f &= u_r^i, & u_\theta^f &= u_\theta^i, & \sigma_{rr}^f &= \sigma_{rr}^i, & \sigma_{r\theta}^f &= \sigma_{r\theta}^i, \\ u_r^i &= u_r^m, & u_\theta^i &= u_\theta^m, & \sigma_{rr}^i &= \sigma_{rr}^m, & \sigma_{r\theta}^i &= \sigma_{r\theta}^m, \\ u_r^m &= u_r^0, & u_\theta^m &= u_\theta^0, & \sigma_{rr}^m &= \sigma_{rr}^0, & \sigma_{r\theta}^m &= \sigma_{r\theta}^0. \end{aligned} \quad (3-37)$$

Der verwendete phasenweise Lösungsansatz hat die Form [46]

$$u_r^k(r, \theta) = \tilde{u}_r^k(r) \sin(2\theta), \quad u_\theta^k(r, \theta) = \tilde{u}_\theta^k(r) \cos(2\theta) \quad , \quad k = f, i, m, 0 \quad (3-38)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^k(r) &= A^k r^3 + B^k r + \frac{C^k}{r} + \frac{D^k}{r^3}, \\ \tilde{u}_\theta^k(r) &= \frac{2 + (1 - 2\nu^k)}{1 - (1 - 2\nu^k)} A^k r^3 + B^k r + \frac{1 - 2\nu^k}{1 + (1 - 2\nu^k)} \frac{C^k}{r} - \frac{D^k}{r^3}, \end{aligned} \quad (3-39)$$

wobei A^k, B^k, C^k, D^k unbekannte und konstante Parameter und ν^k die Querkontraktionszahl der jeweiligen Phase Ω^k darstellen. Die dazugehörige Darstellung der phasenweisen Spannungen ergibt

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^k &= 2G^k \left(B^k - \frac{2}{1 + (1 - 2\nu^k)} \frac{C^k}{r^2} - 3 \frac{D^k}{r^4} \right) \sin(2\theta) \quad , \\ \sigma_{r\theta}^k &= 2G^k \left(\frac{3}{1 - (1 - 2\nu^k)} A^k r^2 + B^k + \frac{1}{1 + (1 - 2\nu^k)} \frac{C^k}{r^2} + 3 \frac{D^k}{r^4} \right) \cos(2\theta) \quad , \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= 2G^k \left(-\frac{6}{1 - (1 - 2\nu^k)} A^k r^2 - B^k + 3 \frac{D^k}{r^4} \right) \sin(2\theta) \quad .\end{aligned}\quad (3-40)$$

Die Größe G^k ist der Schubmodul der Phase Ω^k .

Mit Hilfe der Verschiebungen und Spannungen nach Gl. (3-38), (3-39) und (3-40) ergeben sich für jede Phase vier unbekannte Konstanten, welche über einen hochgestellten Index („0“, „m“, „f“ oder „i“) dem jeweiligen Material zugeordnet sind. Vier der insgesamt 16 Konstanten sind aufgrund von Singularitäten beziehungsweise der Randbedingungen vorgegeben. Diese sind

$$A^0 = 0, \quad B^0 = \alpha^0, \quad C^f = 0, \quad D^f = 0 \quad . \quad (3-41)$$

Die übrigen 12 Unbekannten formen mit der Gl. (3-37) das Gleichungssystem

$$\mathbf{L}\mathbf{q} = \mathbf{b} \quad , \quad (3-42)$$

wobei

$$\mathbf{q}^T = (C^0 \quad D^0 \quad A^m \quad B^m \quad C^m \quad D^m \quad A^i \quad B^i \quad C^i \quad D^i \quad A^f \quad B^f) \quad (3-43)$$

und

$$\mathbf{b}^T = \left(\alpha^0 \quad \alpha^0 \quad \frac{\alpha^0 G^0}{G^m} \quad \frac{\alpha^0 G^0}{G^m} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \quad (3-44)$$

gilt. Dabei sind G^0 und G^m der effektive Schubmodul der Phase Ω^0 beziehungsweise der Schubmodul der Phase Ω^m . Die Einträge der regulären Matrix \mathbf{L} kann man dem Anhang A entnehmen.

Für die Konstante C^0 muss gelten [24], [46]

$$C^0 = 0 \quad , \quad (3-45)$$

um die Gleichheit der Formänderungsenergie des Modells nach Abb. 3-6 mit der eines äquivalenten homogenen (effektiven) Modells zu gewährleisten. Für genauere Details wird auf [24] und [46] verwiesen. Unter der Verwendung der CRAMERSchen Regel auf die Gl. (3-45) ergibt sich

$$C^0 = \frac{\det(\mathbf{L}_0)}{\det(\mathbf{L})} = 0 \quad . \quad (3-46)$$

Die Matrix \mathbf{L}_0 erhält man durch den Austausch der ersten Spalte von \mathbf{L} durch \mathbf{b} . Da \mathbf{L} regulär und somit $\det(\mathbf{L}) \neq 0$ ist, muss $\det(\mathbf{L}_0) = 0$ sein, damit die Gl. (3-46) erfüllt wird. Die Berechnung der Determinante $\det(\mathbf{L}_0)$ führt auf eine quadratische Gleichung in Abhängigkeit des gesuchten effektiven, transversalen Schubmoduls G^0 . Man erhält

$$R \left(\frac{G^0}{G^m} \right)^2 + 2S \left(\frac{G^0}{G^m} \right) + T = 0 \quad , \quad (3-47)$$

wobei R, S, T Konstanten sind, die Material- und Geometrieeigenschaften der Faser, der Matrix und der Zwischenphase beinhalten. Für die explizite Ermittlung der Gl. (3-47) und die Berechnung der Nullstellen empfiehlt es sich, rechnergestützte Methoden zu verwenden, da die Konstanten durch komplizierte Ausdrücke dargestellt werden.

3.3 Periodische Mikrostruktur

Wie schon im Abschnitt 3.1 erwähnt, ist es infolge der Periodizität ausreichend, für die zu ermittelnden mikroskopischen Spannungs- und Verzerrungsfelder als RVE den kleinsten periodischen Mikrostrukturbereich zu betrachten. Es kann aber auch jeder andere periodische Strukturbereich eines Kompositwerkstoffes genutzt werden. Das RVE wird, da es in unendlicher Wiederholung im Sinne des Kontinuums den Kompositwerkstoff definiert, auch sich wiederholende Einheitszelle (RUC) genannt.

Das zu lösende DGL-System ist nach Abschnitt 3.1 Gl. (3-2) durch

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}(\mathbf{y}) = 0 \quad (3-48)$$

gegeben. Das verwendete Materialgesetz hat die Form

$$\sigma_{ij}(\mathbf{y}) = C_{ijkl}(\mathbf{y}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{y})) \quad . \quad (3-49)$$

Die Gln. (3-48), (3-49), (3-7), (3-8) und die Randbedingungen (siehe Gl. (3-22))

$$\begin{aligned} u_i &= \varepsilon_{ij}^0 y_j + u_i^{\text{per}} \quad \text{auf } \Gamma \quad , \\ u_i^{\text{per}} &\text{ periodisch auf } \Gamma \quad , \end{aligned} \quad (3-50)$$

wobei ε_{ij}^0 vorgegeben ist, formulieren das zu betrachtende Randwertproblem.

Bisher wurde nicht erwähnt, dass die Randbedingungen Gl. (3-50) Starrkörperverschiebungen zulassen, was einen Eindeutigkeitsverlust der Lösung \mathbf{u} zur Folge hat. Des Weiteren ist die Darstellung der Randbedingungen Gl. (3-50) in numerischen Rechnungen ungeeignet, da das periodische Feld \mathbf{u}^{per} nicht bekannt ist. Deshalb wird nachfolgend eine veränderte Darstellung der Randbedingungen beschrieben.

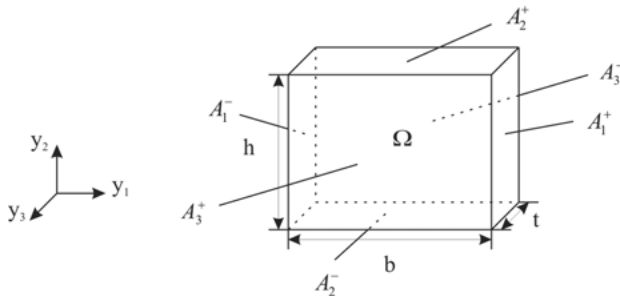


Abbildung 3-7: RUC mit Längenangaben und Randflächen

Es wird angenommen, dass die betrachtete RUC die Form eines Quaders hat (siehe Abb. 3-7), wobei die Breite, Höhe und Tiefe über die Parameter b , h beziehungsweise t definiert sind, welche auch die Periodizität charakterisieren. Schreibt man die Gl. (3-50) jeweils für die parallelen Ränder A_k^+ und A_k^- auf und bildet die Differenz, so erhält man die Randbeziehung

$$u_i^{A_k^+} - u_i^{A_k^-} = \varepsilon_{ij}^0 (y_j^{A_k^+} - y_j^{A_k^-}) \quad . \quad (3-51)$$

Die Indizes „+“ und „-“ legen fest, ob der Normalenvektor der Randfläche in positiver beziehungsweise negativer Achsenrichtung verläuft. Mit $\mathbf{u}^{A_k^-}$ ist der Verschiebungsvektor für ein $\mathbf{y}^{A_k^-} \in A_k^-$ und mit $\mathbf{u}^{A_k^+}$ der entsprechende Vektor für ein $\mathbf{y}^{A_k^+} \in A_k^+$ gemeint, wobei sich $\mathbf{y}^{A_k^-}$ und $\mathbf{y}^{A_k^+}$ nur in einer Komponente y_i unterscheiden.

Jede identische Einheitszelle des Kompositwerkstoffes erfüllt diese Form der Randbedingungen. Durch die Darstellung der Randbedingungen nach Gl. (3-51) wird deutlich, dass Starrkörperverschiebungen auftreten können, wodurch die Eindeutigkeit der Lösung des Vektorfeldes \mathbf{u} verloren geht. Dieser Eindeutigkeitsverlust kann durch das Festlegen eines vorgegebenen Verschiebungsvektors in einem beliebigen materiellen Punkt der RUC beseitigt werden.

Zum Bestimmen der effektiven Materialeigenschaften aus der Gl. (3-13) werden sechs Probleme mit speziellen vorgegebenen symmetrischen Tensoren ε^0 betrachtet. Diese Tensoren sehen wie folgt aus

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^0 \end{pmatrix}, \quad (3-52)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12}^0 & 0 \\ \varepsilon_{21}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23}^0 \\ 0 & \varepsilon_{32}^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13}^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\varepsilon_{21}^0 = \varepsilon_{12}^0$, $\varepsilon_{32}^0 = \varepsilon_{23}^0$ und $\varepsilon_{31}^0 = \varepsilon_{13}^0$ gilt. Diese speziellen Probleme haben jeweils den Vorteil, dass auf der rechten Seite des makroskopischen (effektiven) Materialgesetzes (3-13) nur eine Makroverzerrungskomponente ungleich Null ist, wodurch nach den zugehörigen makroskopischen Elastizitätskoeffizienten $\tilde{C}_{ij}^{\text{eff}}$ aufgelöst werden kann. Berücksichtigt man anstatt der Tensoren aus Gl (3-52) die elementaren Verzerrungszustände

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3-53)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so ergeben sich die effektiven Koeffizienten $\tilde{C}_{ij}^{\text{eff}}$ direkt aus den zugehörigen Makrospannungen. Dies ist dadurch begründet, dass die Differentialoperatoren des Problems linear sind, wodurch superpositioniert und normiert werden kann. Für ein besseres Verständnis wird im Folgenden näher auf die speziellen Probleme eingegangen.

Makroverzerrung in y_1 -Richtung

In Abb. 3-8 ist exemplarisch das skizzierte Verformungsbild einer quaderförmigen RUC (rechteckige Querschnittsgeometrie) mit einer zentriert eingebetteten zylindrischen Faserphase dargestellt, wobei der Tensor ε^0 nur durch die Nicht-Null-Komponente ε_{11}^0 charakterisiert ist (siehe Gl. (3-52)).

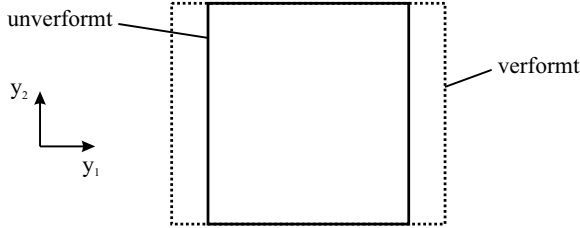


Abbildung 3-8: Skizzierte Darstellung der Verformung der RUC infolge einer Makroverzerrung in y_1 -Richtung

Mit der Gl. (3-51) und den Geometriedaten der RUC nach Abb. 3-7 lassen sich die folgenden Randbedingungen gewinnen

$$\begin{aligned} u_1^{A^+} - u_1^{A^-} &= \varepsilon_{11}^0 b, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A^+} - u_2^{A^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A^+} - u_3^{A^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0. \end{aligned} \quad (3-54)$$

Diese Randbedingungen erzeugen einen makroskopischen Verzerrungszustand, wo nur $\langle \varepsilon_{11} \rangle = \varepsilon_{11}^0$ ungleich Null ist. Unter Verwendung des makroskopischen Materialgesetzes in M-V-Notation nach Gl. (3-13) ergibt sich

$$\tilde{C}_{i1}^{\text{eff}} = \frac{\langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\langle \tilde{\varepsilon}_1 \rangle}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3-55)$$

Damit sind sechs effektive Koeffizienten von $\tilde{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$ bekannt.

Makroverzerrung in y_2 -Richtung

Die quaderförmige RUC wird in diesem Fall durch die Vorgabe von $\varepsilon_{22}^0 \neq 0$ verformt. Die restlichen Komponenten des Verzerrungstensors werden zu Null angenommen. Daraus ergeben sich die folgenden Verschiebungsrandbedingungen

$$\begin{aligned} u_1^{A^+} - u_1^{A^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A^+} - u_2^{A^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= \varepsilon_{22}^0 h, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A^+} - u_3^{A^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0. \end{aligned} \quad (3-56)$$

Als einzige Nicht-Null-Komponente der Makroverzerrung bleibt $\langle \varepsilon_{22} \rangle$. Die zugehörigen sechs effektiven Elastizitätskoeffizienten, die sich daraus berechnen lassen, sind durch

$$\tilde{C}_{i2}^{\text{eff}} = \frac{\langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\langle \tilde{\varepsilon}_2 \rangle} \quad (3-57)$$

gegeben.

Makroverzerrung in y_3 -Richtung

In den beiden vorangegangenen Betrachtungen wurden Randbedingungen angenommen, die einen Makroverzerrungszustand in Normalenrichtung bezüglich y_1 oder y_2 erzeugen. Entsprechende Randbedingungen für einen Makroverzerrungszustand in y_3 -Richtung erhält man durch die Vorgabe der Nicht-Null-Komponente $\varepsilon_{33}^0 \neq 0$. Diese lauten

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= \varepsilon_{33}^0 t. \end{aligned} \quad (3-58)$$

Aus den Gleichungen

$$\tilde{C}_{i3}^{\text{eff}} = \frac{\langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\langle \tilde{\varepsilon}_3 \rangle} \quad (3-59)$$

lassen sich weitere sechs effektive Elastizitätskoeffizienten berechnen.

Makroverzerrung in y_1 - y_2 -Richtung

Analog zu Abb. 3-8 wird in Abb. 3-9 exemplarisch das skizzierte Verformungsbild der quaderförmigen RUC unter Berücksichtigung periodischer Randbedingungen, die durch einen symmetrischen Tensor ε^0 charakterisiert sind, in dem nur die Komponenten $\varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{21}^0$ ungleich Null sind, dargestellt.

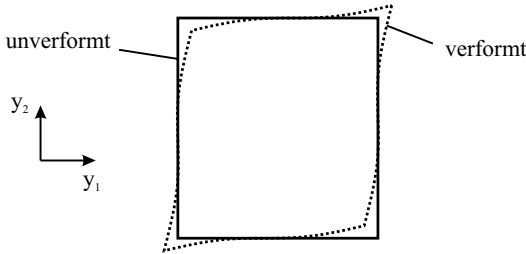


Abbildung 3-9: Skizzierte Darstellung der Verformung der RUC infolge einer Makroverzerrung in y_1 - y_2 -Richtung

Die Randbedingungen sind durch

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= \varepsilon_{12}^0 h, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= \varepsilon_{21}^0 b, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0 \end{aligned} \quad (3-60)$$

gegeben. Durch diese Randbedingungen lassen sich die Elastizitätskoeffizienten $\tilde{C}_{i4}^{\text{eff}}$ der M-V-Darstellung (M-V-Notation) des Elastizitätstensors aus

$$\tilde{C}_{i4}^{\text{eff}} = \frac{\langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\langle \tilde{\varepsilon}_4 \rangle} \quad (3-61)$$

berechnen, da nur $\langle \tilde{\varepsilon}_4 \rangle = 2\varepsilon_{12}^0$ ungleich Null ist.

Makroverzerrung in y_2 - y_3 -Richtung

Der vorangegangene Randbedingungsfall erzeugt eine Schubbelastung auf Makroebene bezüglich der y_1 - y_2 -Richtung. Für eine Schubbelastung bezüglich der y_2 - y_3 -Richtung werden die folgenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= \varepsilon_{23}^0 t, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= \varepsilon_{32}^0 h, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0 \end{aligned} \quad (3-62)$$

verwendet, wobei $\varepsilon_{23}^0 = \varepsilon_{32}^0 \neq 0$ die einzigen vorgegebenen Nicht-Null-Komponenten des Tensors $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ sind. Da die Beziehung $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$ gilt, ist nur $\langle \tilde{\varepsilon}_5 \rangle = 2\varepsilon_{23}^0 \neq 0$, und die zugehörigen Elastizitätskoeffizienten $\tilde{C}_{i5}^{\text{eff}}$ berechnen sich aus

$$\tilde{C}_{i5}^{\text{eff}} = \frac{\langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\langle \tilde{\varepsilon}_5 \rangle} \quad (3-63)$$

Makroverzerrung in y_1 - y_3 -Richtung

Für den vorgegebenen Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ mit den Nicht-Null-Komponenten $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ lassen sich die folgenden Randbedingungen aus Gl. (3-51) gewinnen

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= \varepsilon_{13}^0 t, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= \varepsilon_{31}^0 b, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0. \end{aligned} \quad (3-64)$$

Die Randbedingungen führen dazu, dass auf der Makroebene ein Verzerrungstensor entsteht, bei dem die einzigen von Null verschiedenen Komponenten $\langle \varepsilon_{13} \rangle = \langle \varepsilon_{31} \rangle$ sind. Damit lassen sich die effektiven Elastizitätskoeffizienten aus

$$\tilde{C}_{i6}^{\text{eff}} = \frac{\langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\langle \tilde{\varepsilon}_6 \rangle} \quad (3-65)$$

gewinnen.

Wie man anhand der Gl. (3-13) erkennen kann, können durch die betrachteten sechs Fälle von Randwertproblemen alle effektiven Koeffizienten von $\tilde{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$ bestimmt werden.

3.3.1 RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt

Bei der bisher betrachteten RUC (siehe Abb. 3-7) sind die Richtungen der Periodizität orthogonal zu einander und zusätzlich in Übereinstimmung mit den Koordinatenrichtungen. Nachfolgend wird eine RUC behandelt, bei der diese Orthogonalität verletzt ist. Dazu wird eine RUC nach Abb. 3-10 betrachtet. Die Größen b , h und t sind, wie in Abb. 3-7 dargestellt, die Breite, die Höhe beziehungsweise die Tiefe der Einheitszelle. Mit w wird die Länge der geneigten Kante gekennzeichnet. Die Periodizität der Zelle in der y_1 - y_2 -Ebene wird durch die Kantenlängen b , w und $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$, welcher der eingeschlossene Winkel zwischen den zugehörigen Kanten von b und w ist, charakterisiert. Wie man der Abbildung entnehmen kann, stehen die Kanten im Allgemeinen nicht senkrecht zu einander, wodurch die Orthogonalität verletzt ist ($\alpha \neq 90^\circ$).

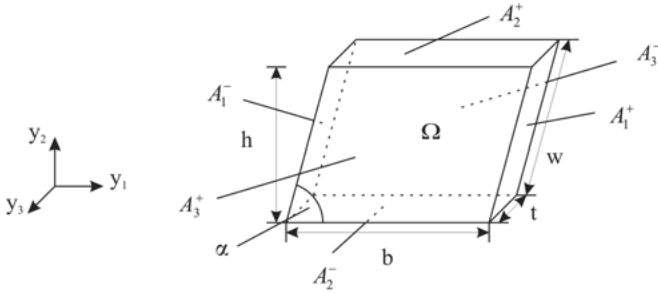


Abbildung 3-10: RUC mit Geometrieangaben und Begrenzungsflächen

Für die Ermittlung der effektiver Elastizitätskoeffizienten $\tilde{C}_{ij}^{\text{eff}}$ sind die Randwertprobleme mit den speziellen Randbedingungen aus den Gln. (3-54), (3-56), (3-58), (3-60), (3-62) und (3-64) ungeeignet. Zum Formulieren geeigneter Randbedingungen wird von der Gl. (3-51) ausgegangen.

Makroverzerrung in y_1 -Richtung

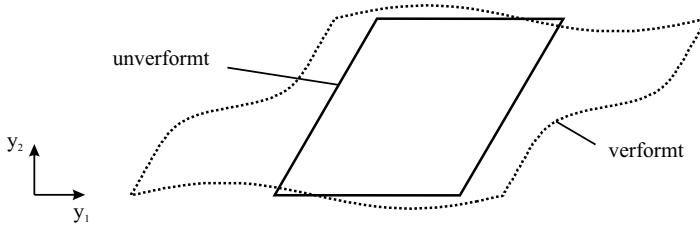


Abbildung 3-11: Skizzierte Darstellung der Verformung der RUC infolge einer Makroverzerrung in y_1 -Richtung

In Abb. 3-11 ist das Verformungsbild einer RUC mit einem parallelogrammähnlichen Querschnitt dargestellt, in den zentriert eine Faserphase eingebettet ist. Die Abbildung zeigt die Verformung infolge der Randbedingungen Gl. (3-66). Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= \varepsilon_{11}^0 b, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= \varepsilon_{11}^0 w \sin(90 - \alpha), & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0, \end{aligned} \quad (3-66)$$

wobei ε_{11}^0 , wie im Fall der quaderförmigen RUC, die einzige von Null verschiedene Komponente eines vorgegebenen Tensors $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ist. Daraus resultiert eine makroskopische Verzerungskomponente $\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0$, für die $\langle \varepsilon_{11} \rangle = \varepsilon_{11}^0$ gilt. Alle anderen Komponenten sind Null. Aus Abb. 3-11 erkennt man, dass im Vergleich zur quaderförmigen RUC die Kanten infolge der Randbelastung nicht eben bleiben. Es bildet sich ein wellenförmiger Verschiebungsrand

aus, der bezüglich gegenüberliegender Ränder die gleiche Form hat. Die effektiven Elastizitätskoeffizienten $\tilde{C}_{i1}^{\text{eff}}$ lassen sich aus Gl. (3-55) berechnen.

Makroverzerrung in y_2 -Richtung

Die Randbedingungen bei einer RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt für eine makroskopische Verzerrung in y_2 -Richtung sind durch

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= \varepsilon_{22}^0 h, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0 \end{aligned} \quad (3-67)$$

gegeben, wobei der vorgegebene Tensor ε^0 als einzige Nicht-Null-Komponente ε_{22}^0 besitzt. Es ergibt sich, dass $\langle \varepsilon_{22} \rangle = \varepsilon_{22}^0$ die einzige Komponente des makroskopischen Verzerrungstensors ist, die ungleich Null ist. Die effektiven Koeffizienten $\tilde{C}_{i2}^{\text{eff}}$ berechnen sich aus der Beziehungsgl. (3-57).

Makroverzerrung in y_3 -Richtung

Der hier vorgegebene Tensor ε^0 hat als einzige Komponente ε_{33}^0 ungleich Null. Die für das DGL-Problem hergeleiteten Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= \varepsilon_{33}^0 t \end{aligned} \quad (3-68)$$

gewährleisten eine Makroverzerrungskomponente $\langle \varepsilon_{33} \rangle = \varepsilon_{33}^0$, welche als einzige ungleich Null ist. Die effektiven Koeffizienten $\tilde{C}_{i3}^{\text{eff}}$ berechnen sich dann aus Gl. (3-59).

Makroverzerrung in y_1 - y_2 -Richtung

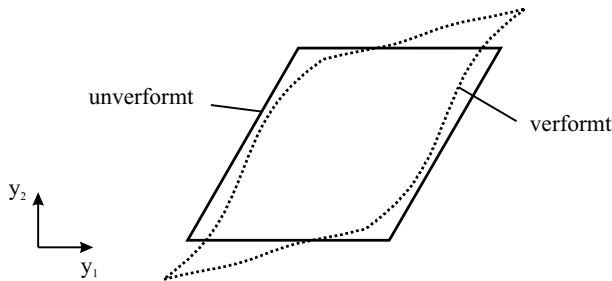


Abbildung 3-12: Skizzierte Darstellung der Verformung der RUC infolge einer Makroverzerrung in y_1 - y_2 -Richtung

In Abb. 3-12 ist das skizzierte Verformungsbild einer RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt und zentriert eingebetteter Faserphase zu sehen, welches aus der Vorgabe eines symmetrischen Tensors ε^0 mit den einzigen Nicht-Null-Komponenten $\varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{21}^0$ resultiert. Die Randbedingungen sind dabei durch

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= \varepsilon_{12}^0 h, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= \varepsilon_{21}^0 b, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= \varepsilon_{21}^0 w \sin(90 - \alpha), & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0 \end{aligned} \quad (3-69)$$

gegeben. Daraus ergibt sich, dass $\langle \varepsilon_4 \rangle = 2\langle \varepsilon_{12} \rangle = 2\varepsilon_{12}^0$ als einzige Komponente der M-V-Darstellung (M-V-Notation) der makroskopischen Verzerrungen ungleich Null ist. Somit lassen sich die effektiven Koeffizienten $\tilde{C}_{i4}^{\text{eff}}$ aus Gl. (3-61) berechnen.

Makroverzerrung in y_2 - y_3 -Richtung

Der symmetrische Tensor ε^0 hat als einzige Nicht-Null-Komponenten $\varepsilon_{23}^0 = \varepsilon_{32}^0$. Die dazugehörigen Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= \varepsilon_{23}^0 t, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= \varepsilon_{32}^0 h, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0. \end{aligned} \quad (3-70)$$

Als makroskopische Verzerrungskomponenten, welche ungleich Null sind, ergeben sich $\langle \varepsilon_{23} \rangle = \langle \varepsilon_{32} \rangle = \varepsilon_{23}^0$. Die effektiven Koeffizienten $\tilde{C}_{i5}^{\text{eff}}$ lassen sich aus der Gleichung (3-63) berechnen.

Makroverzerrung in y_1 - y_3 -Richtung

Aus der Vorgabe eines symmetrischen Tensors ε^0 mit $\varepsilon_{13}^0 = \varepsilon_{31}^0 \neq 0$ lassen sich die folgenden Randbedingungen formulieren

$$\begin{aligned} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} &= 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} &= 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} &= \varepsilon_{13}^0 t, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} &= 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} &= 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} &= 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} &= \varepsilon_{31}^0 b, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} &= \varepsilon_{31}^0 w \sin(90 - \alpha), & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} &= 0. \end{aligned} \quad (3-71)$$

Daraus resultieren makroskopische Verzerrungskomponenten $\langle \varepsilon_{13} \rangle = \langle \varepsilon_{31} \rangle = \varepsilon_{13}^0$, wobei sich die zugehörigen effektiven Elastizitätskoeffizienten aus der Gl. (3-65) berechnen lassen.

Bei einem Vergleich der Randbedingungen der einzelnen Belastungsfälle dieser RUC mit denen der quaderförmigen RUC ist zu erkennen, dass sich in einigen Fällen die Verschiebungsdifferenzen unterscheiden und in anderen gleich sind, was eine Folge der unterschiedlichen Geometrie und der Richtungen der Periodizität ist.

3.4 Imperfekter Phasenübergang

In der Regel wird für die Herleitung eines imperfekten Übergangs zwischen zwei Phasen von einem Drei-Phasen-Modell ausgegangen [11], [15], [13], [43], [44], [46], [33]. Die imperfekte Phasenübergangsbeschreibung wird dabei in Form von Unstetigkeitsbedingungen physikalischer Größen auf dem Phasenrand beschrieben.

Ein imperfekter Phasenübergang ist dabei nicht auf ein bestimmtes physikalisches Feldproblem beschränkt. In [91], [92] und [36] werden piezoelektrische Feldprobleme unter Berücksichtigung heterogener Materialstrukturen mit imperfekten Übergängen behandelt. Grundlegende Gleichungen für piezoelektrische Feldprobleme mit einem speziellen imperfekten Phasenübergang im Rahmen der Homogenisierung werden im Abschnitt 3.5.1 präsentiert.

Die in der Literatur zu findenden imperfekten Phasenübergangsmodelle für rein elastische Probleme sind im Allgemeinen nicht einfach in numerischen Modellen zu realisieren, da in den Unstetigkeitsbedingungen verschiedene physikalische Größen gekoppelt auftreten können. Die Umsetzung solcher Modelle in kommerziellen FEM-Programmen ist mit erheblichem Aufwand verbunden oder gar unmöglich. Im Folgenden wird im Rahmen der Homogenisierung ein Modell mit einem speziellen imperfekten Phasenübergang entwickelt, welches sich mit einem überschaubaren Aufwand realisieren lässt.

In der bisherigen Modellbetrachtung wurde ein perfekter Phasenübergang zwischen den Phasen des Kompositwerkstoffes angenommen. Damit ist die Gültigkeit der Gl. (3-7) und (3-8) gemeint. Dieser perfekte Phasenübergang wird nun durch einen speziellen imperfekten Übergang ersetzt.

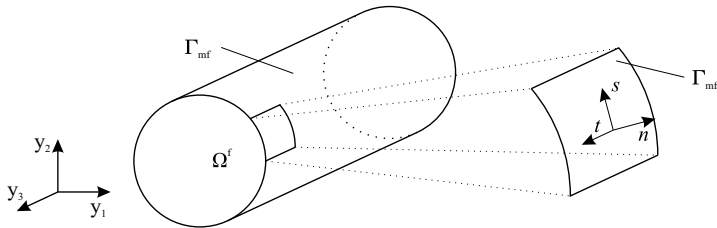


Abbildung 3-13: Gemeinsamer Rand Γ_{mf} einer eingebetteten zylinderförmigen Phase Ω^f mit der Matrixphase Ω^m

Dieser spezielle Phasenübergang ist charakterisiert durch Gl. (3-8) und unstetige Verschiebungen [43], [44] [72]. Der Phasenübergang lässt sich unter Verwendung der normalen Komponente (Index „n“) und der transversalen Komponenten (Index „s“ und „t“) des Spannungsvektors $\mathbf{t} = (t_n \ t_s \ t_t)^T$ durch die folgende Beziehung beschreiben [45]

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_n^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & K_s^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & K_t^\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|u_n\| \\ \|u_s\| \\ \|u_t\| \end{pmatrix} = \mathbf{K}^\varepsilon \|\mathbf{u}\| \quad . \quad (3-72)$$

Die konstanten Größen K_n^ε , K_s^ε und K_t^ε sind dabei Proportionalitätsfaktoren, durch die Verschiebungsdifferenzen $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^f)$ mit Spannungen $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ verknüpft werden.

Die tiefgestellten Zeichen n, s und t kennzeichnen den Bezug zu einem lokalen kartesischen Koordinatensystem auf dem Rand Γ_{mf} (siehe Abb. 3-13). Unter der Annahme eines raumfesten, kartesischen Koordinatensystems $\{y_1, y_2, y_3\}$ hat die Gl. (3-72) die Form

$$t_i = K_{ij}^\varepsilon \|u_j\|, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3-73)$$

wobei K_n^ε , K_s^ε und K_t^ε die Eigenwerte der Matrix \mathbf{K}^ε sind. Die Größen K_n^ε , K_s^ε und K_t^ε aus Gl. (3-72) besitzen einen konstanten Wert, während die Koeffizienten K_{ij}^ε in Gl. (3-73) von der Position auf dem Kontaktrand abhängig sind. Für jede Position lässt sich eine Transformationsmatrix finden, mit der \mathbf{K}^ε aus Gl. (3-72) in \mathbf{K}^ε aus Gl. (3-73) überführt werden kann.

Für den Fall, dass ein zylinderförmiger Rand Γ_{mf} berücksichtigt wird (siehe Abb. 3-13), sehen die Bedingungen für den imperfekten Phasenübergang unter Verwendung eines zylindrischen Koordinatensystems r, θ, z wie folgt aus

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^f &= \sigma_{rr}^m, & \sigma_{r\theta}^f &= \sigma_{r\theta}^m, & \sigma_{rz}^f &= \sigma_{rz}^m, \\ \sigma_{rr}^f &= K_r^\varepsilon \|u_r\|, & \sigma_{r\theta}^f &= K_\theta^\varepsilon \|u_\theta\|, & \sigma_{rz}^f &= K_z^\varepsilon \|u_z\| \end{aligned} \quad (3-74)$$

Aus Gl. (3-74) lässt sich entnehmen, dass K_r^ε den Phasenübergang in radialer Richtung beeinflusst, während K_θ^ε und K_z^ε für den Phasenübergang in transversaler Richtung verantwortlich sind. Die physikalische Einheit der Größen K_i^ε , $i = r, \theta, z$ ist [Kraft/Volumen]. Wie bereits erwähnt, kann ein imperfekter Phasenübergang im Allgemeinen aus einer Drei-Phasen-Betrachtung hergeleitet werden. Für den speziellen imperfekten Phasenübergang aus Gl. (3-74) ist es daher naheliegend, eine Interpretierbarkeit der Größen K_i^ε , $i = r, \theta, z$ aus den Materialeigenschaften der Zwischenphase einer Drei-Phasen-Modellierung zu finden. Im Fall einer sehr dünnen Zwischenschicht Ω^i , welche isotrope und vergleichsweise sehr niedrige Materialeigenschaften aufweist und eine konstante Phasendicke hat, werden in [46] die folgenden Beziehungen verwendet

$$\begin{aligned} K_r^\varepsilon &= \frac{E^i(1-\nu^i)}{t^i(1-2\nu^i)(1+\nu^i)}, \\ K_\theta^\varepsilon &= \frac{G^i}{t^i}, \\ K_z^\varepsilon &= \frac{G^i}{t^i}. \end{aligned} \quad (3-75)$$

Hierbei bezeichnen die Konstanten E^i , G^i und ν^i den Elastizitätsmodul, den Schubmodul beziehungsweise die Querkontraktionszahl der Zwischenschicht. Durch t^i ist die Dicke der Zwischenschicht gekennzeichnet. Für die Darstellung der Beziehungen in Gl. (3-75) können auch Elastizitätskoeffizienten der Zwischenphase verwendet werden. Aufgrund der Isotropie lassen sich die Koeffizienten $C_{1111}^i = E^i(1-\nu^i)/((1-2\nu^i)(1+\nu^i))$ und $C_{2323}^i = G^i$ nutzen.

Die Art der Beschreibung des Phasenübergangs aus Gl. (3-74) ist einem Federgesetz ähnlich, weshalb die K_i^ε im Englischen auch „spring constant type parameter“ oder einfach „interface parameter“ genannt werden.

Im Fall periodischer Mikrostrukturen werden die Randbedingungen aus Gl. (3-50) auf eine RUC angewendet. Der effektive Elastizitätstensor \mathbf{C}^{eff} definiert sich über die Gleichung

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{\text{eff}} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (3-76)$$

welche das makroskopische Materialgesetz repräsentiert. Hier sind die Größen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ und $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ durch [11]

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega \quad , \\ \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^m} \varepsilon_{kl} d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f} \varepsilon_{kl} d\Omega + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} \|u_k\| n_l + \|u_l\| n_k d\Gamma \end{aligned} \quad (3-77)$$

gegeben. Die makroskopischen Spannungen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ bilden sich aus dem integralen Mittelwert der Spannungen in der RUC (1. Gleichung in Gl. (3-77)). Die makroskopischen Verzerrungen $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ ergeben sich aus den integralen Mittelwertanteilen der Phase des Einschlusses (Ω^f) und des Füllmaterials (Ω^m) sowie aus einem dritten Term. Dieser dritte Term spiegelt den Verzerrungsanteil des imperfekten Phasenübergangs infolge der Verschiebungsdifferenzen auf Γ_{mf} wider. Der Term lässt sich auch so interpretieren, dass er den Verzerrungsanteil der Zwischenphase Ω^i aus einer Drei-Phasen-Modellierung repräsentiert.

Werden in der zweiten Gleichung von Gl. (3-77) die ersten beiden Integralterme mittels GAUSSSchem Integralsatz in Randintegrale überführt, ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma^m} u_k n_l^m + u_l n_k^m d\Gamma + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma^f} u_k n_l^f + u_l n_k^f d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} \|u_k\| n_l^f + \|u_l\| n_k^f d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (3-78)$$

Mit Γ^f und Γ^m wird der äußere Rand von Ω^f und Ω^m bezeichnet. Die Größen n_l^m und n_l^f sind die Komponenten des Normalenvektors bezogen auf Ω^m beziehungsweise Ω^f . Mit der Einbeziehung des Randes der RUC Γ (\mathbf{n} sei hier der Normalenvektor auf Γ) lässt sich die Gleichung wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} u_k n_l + u_l n_k d\Gamma + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} u_k^m n_l^m + u_l^m n_k^m d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} u_k^f n_l^f + u_l^f n_k^f d\Gamma + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} \|u_k\| n_l^f + \|u_l\| n_k^f d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (3-79)$$

Da auf dem Rand Γ_{mf} für die Komponenten der Normalenvektoren $n_i^m = -n_i^f$ gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} u_k n_l + u_l n_k d\Gamma - \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} u_k^m n_l^f + u_l^m n_k^f d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} u_k^f n_l^f + u_l^f n_k^f d\Gamma + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} \|u_k\| n_l^f + \|u_l\| n_k^f d\Gamma \\ &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} u_k n_l + u_l n_k d\Gamma - \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} \|u_k\| n_l^f + \|u_l\| n_k^f d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} \|u_k\| n_l^f + \|u_l\| n_k^f d\Gamma \\ &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} u_k n_l + u_l n_k d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (3-80)$$

Somit lassen sich die Größen $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ auch über Randintegrale ausdrücken.

Ähnliches lässt sich auch für die makroskopischen Spannungen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ erreichen. Mit Hilfe der Gl. (3-48) und $\partial y_j / \partial y_k = \delta_{jk}$ (δ_{jk} ist das KRONECKER-Delta) gilt in jeder Phase die Beziehung [35]

$$\frac{\partial}{\partial y_k} (y_j \sigma_{ik}) = \frac{\partial y_j}{\partial y_k} \sigma_{ik} + y_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_k} = \sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad . \quad (3-81)$$

Unter Verwendung der Gl. (3-81) und des GAUSSschen Integralsatzes erhält man

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^m} \sigma_{ij} d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f} \sigma_{ij} d\Omega \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^m} \frac{\partial}{\partial y_k} (y_j \sigma_{ik}) d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f} \frac{\partial}{\partial y_k} (y_j \sigma_{ik}) d\Omega \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma^m} y_j \sigma_{ik}^m n_k^m d\Gamma + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma^f} y_j \sigma_{ik}^f n_k^f d\Gamma \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} y_j \sigma_{ik} n_k d\Gamma + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} y_j (\sigma_{ik}^f n_k^f + \sigma_{ik}^m n_k^m) d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (3-82)$$

Da im Fall des imperfekten Phasenübergangs die Gl. (3-8) auf Γ_{mf} erfüllt ist, ergibt sich letztendlich

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \sigma_{ik} n_k y_j d\Gamma \quad . \quad (3-83)$$

Im Fall von $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ lässt sich infolge vorgegebener Randbedingungen nach Gl. (3-50) zusätzlich schlussfolgern, dass

$$\langle \varepsilon_{kl} \rangle = \varepsilon_{kl}^0 \quad (3-84)$$

gilt.

3.5 Piezoelektrische Materialien

Das Prinzip der Homogenisierung kann auch im Fall von piezoelektrischen Materialien angewandt werden. Es lassen sich Verfahren für nichtperiodische als auch für periodische Kompositstrukturen finden. Im Allgemeinen ergeben sich diese Verfahren aus einer Erweiterung der bereits bekannten Homogenisierung von elastischen Problemen. In [30] wird die Methode der „dünnen“ Verteilung, die MORI-TANAKA-Methode und das Differentialschema für piezoelektrische Kompositwerkstoffe behandelt. Verfahren auf der Basis einer RUC mit periodischen Randbedingungen sind in [79], [78], [17], [59] zu finden. In den häufigsten Fällen werden perfekte Übergänge der Materialphasen vorausgesetzt.

Im Rahmen der Homogenisierung wird im Folgenden ein Kompositwerkstoff betrachtet, welcher sich durch ein RVE beziehungsweise eine RUC (gekennzeichnet mit Ω) charakterisieren lässt. Dazu sei angenommen, dass sich die Kompositstruktur aus zwei unterschiedlichen Materialphasen zusammensetzt. Eine Phase ist die Matrixphase Ω^m , und die andere

Phase ist eine darin eingebettete „Störung“ Ω^f . Der Rand, den beide Phasen gemeinsam haben, wird mit $\Gamma_{mf} = \Gamma^m \cap \Gamma^f$ bezeichnet. Der äußere Rand des RVE (der RUC) wird mit Γ bezeichnet.

Unter der Annahme, dass Volumenlasten fehlen, ergibt sich mit Verweis auf Gl. (2-25) für den Volumenbereich Ω das folgende DGL-System

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}(\mathbf{y}) &= 0 \quad , \\ \frac{\partial}{\partial y_i} D_i(\mathbf{y}) &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (3-85)$$

mit den konstitutiven Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{y}) &= C_{ijkl}(\mathbf{y}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{y})) + e_{kij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} \phi(\mathbf{y}) \quad , \\ D_i(\mathbf{y}) &= e_{ikl}(\mathbf{y}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{y})) - \kappa_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} \phi(\mathbf{y}) \quad . \end{aligned} \quad (3-86)$$

Hierbei sind $\mathbf{u}(\mathbf{y})$, $\phi(\mathbf{y})$, $C_{ijkl}(\mathbf{y})$, $e_{kij}(\mathbf{y})$, $\kappa_{ij}(\mathbf{y})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{y})$ und $D_i(\mathbf{y})$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y}) &= \begin{cases} \mathbf{u}^m(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^m \\ \mathbf{u}^f(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases} , & \phi(\mathbf{y}) &= \begin{cases} \phi^m(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^m \\ \phi^f(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases} , \\ C_{ijkl}(\mathbf{y}) &= \begin{cases} C_{ijkl}^m(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^m \\ C_{ijkl}^f(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases} , & e_{kij}(\mathbf{y}) &= \begin{cases} e_{kij}^m(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^m \\ e_{kij}^f(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases} , \\ \kappa_{ij}(\mathbf{y}) &= \begin{cases} \kappa_{ij}^m(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^m \\ \kappa_{ij}^f(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases} , & \sigma_{ij}(\mathbf{y}) &= \begin{cases} \sigma_{ij}^m(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^m \\ \sigma_{ij}^f(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases} , \\ D_i(\mathbf{y}) &= \begin{cases} D_i^m(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^m \\ D_i^f(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega^f \end{cases} \end{aligned} \quad (3-87)$$

definiert. Auf dem gemeinsamen Rand der Phasen Γ_{mf} gelten die folgenden Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} u_i^f &= u_i^m \quad \text{auf } \Gamma_{mf} \quad , \\ \phi^f &= \phi^m \quad \text{auf } \Gamma_{mf} \quad , \end{aligned} \quad (3-88)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^f n_j^f &= -\sigma_{ij}^m n_j^m \quad \text{auf } \Gamma_{mf} \quad , \\ D_i^f n_i^f &= -D_i^m n_i^m \quad \text{auf } \Gamma_{mf} \quad . \end{aligned} \quad (3-89)$$

Mit $\mathbf{n}^f = (n_1^f \ n_2^f \ n_3^f)^T$ und $\mathbf{n}^m = (n_1^m \ n_2^m \ n_3^m)^T$ wird der äußere Normalenvektor von der Phase Ω^f beziehungsweise Ω^m bezeichnet.

Die effektiven Materialeigenschaften von Kompositwerkstoffen bei Berücksichtigung von piezoelektrischen Materialphasen lassen sich durch die makroskopische Beziehung

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= C_{ijkl}^{\text{eff}} \langle \varepsilon_{kl} \rangle - e_{kij}^{\text{eff}} \langle E_k \rangle \quad , \\ \langle D_i \rangle &= e_{ikl}^{\text{eff}} \langle \varepsilon_{kl} \rangle + \kappa_{ij}^{\text{eff}} \langle E_j \rangle \end{aligned} \quad (3-90)$$

beziehungsweise

$$\langle \bar{\sigma} \rangle = \bar{\mathbf{C}}^{\text{eff}} \langle \bar{\varepsilon} \rangle \quad (3-91)$$

definieren, wobei

$$\begin{aligned} \langle \bar{\sigma} \rangle &= \left(\langle \tilde{\sigma}_1 \rangle \ \langle \tilde{\sigma}_2 \rangle \ \langle \tilde{\sigma}_3 \rangle \ \langle \tilde{\sigma}_4 \rangle \ \langle \tilde{\sigma}_5 \rangle \ \langle \tilde{\sigma}_6 \rangle \ \langle D_1 \rangle \ \langle D_2 \rangle \ \langle D_3 \rangle \right)^T , \\ \langle \bar{\varepsilon} \rangle &= \left(\langle \tilde{\varepsilon}_1 \rangle \ \langle \tilde{\varepsilon}_2 \rangle \ \langle \tilde{\varepsilon}_3 \rangle \ \langle \tilde{\varepsilon}_4 \rangle \ \langle \tilde{\varepsilon}_5 \rangle \ \langle \tilde{\varepsilon}_6 \rangle \ \langle E_1 \rangle \ \langle E_2 \rangle \ \langle E_3 \rangle \right)^T , \end{aligned} \quad (3-92)$$

und

$$\bar{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{12}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{13}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{14}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{15}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{16}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{11}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{21}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{31}^{\text{eff}} \\ \tilde{C}_{12}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{22}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{23}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{24}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{25}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{26}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{12}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{22}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{32}^{\text{eff}} \\ \tilde{C}_{13}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{23}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{33}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{34}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{35}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{36}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{13}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{23}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{33}^{\text{eff}} \\ \tilde{C}_{14}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{24}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{34}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{44}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{45}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{46}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{14}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{24}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{34}^{\text{eff}} \\ \tilde{C}_{15}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{25}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{35}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{45}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{55}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{56}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{15}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{25}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{35}^{\text{eff}} \\ \tilde{C}_{16}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{26}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{36}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{46}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{56}^{\text{eff}} & \tilde{C}_{66}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{16}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{26}^{\text{eff}} & -\tilde{e}_{36}^{\text{eff}} \\ \tilde{e}_{11}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{12}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{13}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{14}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{15}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{16}^{\text{eff}} & \kappa_{11}^{\text{eff}} & \kappa_{12}^{\text{eff}} & \kappa_{13}^{\text{eff}} \\ \tilde{e}_{21}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{22}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{23}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{24}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{25}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{26}^{\text{eff}} & \kappa_{21}^{\text{eff}} & \kappa_{22}^{\text{eff}} & \kappa_{23}^{\text{eff}} \\ \tilde{e}_{31}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{32}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{33}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{34}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{35}^{\text{eff}} & \tilde{e}_{36}^{\text{eff}} & \kappa_{31}^{\text{eff}} & \kappa_{32}^{\text{eff}} & \kappa_{33}^{\text{eff}} \end{pmatrix}, \quad (3-93)$$

sind. Hierbei kennzeichnet der Ausdruck $\langle \cdot \rangle$ makroskopische Größen, der durch eine integrale Mittelung auf Mikroebene über den repräsentativen Volumenelementbereich gebildet wird. Die Gl. (3-91) ist eine Darstellung des makroskopischen Materialgesetzes für piezoelektrische Kompositwerkstoffe in der M-V-Notation.

Im elastischen Fall ist die Interpretierbarkeit der effektiven Elastizitätskoeffizienten an die HILL-Bedingung geknüpft, die die Äquivalenz der mittleren Formänderungsenergie der Mikroebene mit der Formänderungsenergie der Makroebene beschreibt. Die analoge Beschreibung für piezoelektrische Materialien lautet [66]

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle &= \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \\ \langle D_i E_i \rangle &= \langle D_i \rangle \langle E_i \rangle. \end{aligned} \quad (3-94)$$

Diese Bedingungen der Gleichheit auf Mikro- und Makroebene gelten dabei als erfüllt, wenn zulässige Randbedingungen für das zu betrachtende RVE formuliert sind.

Die makroskopischen Größen $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, $\langle D_i \rangle$ und $\langle E_i \rangle$ berechnen sich aus

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega, \\ \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (3-95)$$

und

$$\begin{aligned} \langle D_i \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} D_i d\Omega, \\ \langle E_i \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} E_i d\Omega. \end{aligned} \quad (3-96)$$

Für die Homogenisierung nichtperiodischer, piezoelektrischer Kompositstrukturen lassen sich analytische Verfahren nutzen, um die effektiven Materialeigenschaften zu bestimmen. Dazu werden homogene oder lineare Randbedingungen, ähnlich wie im Abschnitt 3.1 Gl. (3-15) verwendet. In [30] und [74] werden beispielsweise lineare Randbedingungen (für die Verschiebungen und das elektrische Potential) verwendet.

Im Fall von periodischen Mikrostrukturen werden die Randbedingungen aus Abschnitt 3.1

Gl. (3-22) wie folgt erweitert [78], [2]

$$\begin{aligned} u_i &= \varepsilon_{ij}^0 y_j + u_i^{\text{per}} & \text{auf } \Gamma &, \\ \phi &= -E_j^0 y_j + \phi^{\text{per}} & \text{auf } \Gamma &, \\ u_i^{\text{per}} & & \text{periodisch auf } \Gamma &, \\ \phi^{\text{per}} & & \text{periodisch auf } \Gamma &. \end{aligned} \quad (3-97)$$

Hier sind ε_{ij}^0 und E_i^0 vorgegebene Komponenten eines symmetrischen Tensors $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ beziehungsweise eines Vektors \mathbf{E}^0 .

Durch die Betrachtung piezoelektrischer Probleme erhöht sich die Anzahl der effektiven Materialeigenschaften. Für den allgemeinsten Fall eines anisotropen Kompositwerkstoffes ergeben sich 45 unabhängige, effektive Koeffizienten $\overline{C}_{ij}^{\text{eff}}$, $i, j = 1, \dots, 9$ (siehe Gl. (3-91)).

Für die Bestimmung aller Koeffizienten $\overline{C}_{ij}^{\text{eff}}$ sind neun unabhängige Randwertprobleme zu lösen. Dazu werden unter Verwendung der periodischen Randbedingungen Gl. (3-97) neun spezielle Randwertprobleme formuliert. Für jedes Randwertproblem wird ein spezieller Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ und ein spezieller Vektor \mathbf{E}^0 vorgegeben. Für die neun Randwertprobleme sehen diese Größen wie folgt aus

$$\text{Fall 1: } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-98)$$

$$\text{Fall 2: } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-99)$$

$$\text{Fall 3: } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-100)$$

$$\text{Fall 4: } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12}^0 & 0 \\ \varepsilon_{21}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-101)$$

$$\text{Fall 5: } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23}^0 \\ 0 & \varepsilon_{32}^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-102)$$

$$\text{Fall 6: } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13}^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-103)$$

$$\text{Fall 7: } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} E_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-104)$$

$$\text{Fall 8: } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-105)$$

$$\text{Fall 9: } \quad \varepsilon^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3^0 \end{pmatrix}, \quad (3-106)$$

wobei $\varepsilon_{31}^0 = \varepsilon_{13}^0$, $\varepsilon_{32}^0 = \varepsilon_{23}^0$ und $\varepsilon_{21}^0 = \varepsilon_{12}^0$ gilt.

Aus den Randwertproblemen lassen sich jeweils ein Vektor ($\bar{\varepsilon}$) und ein Vektor ($\bar{\sigma}$) (siehe Gl. (3-91)) bestimmen, wobei nur eine Komponente von ($\bar{\varepsilon}$) ungleich Null ist. Dadurch ist man in der Lage nach einer Spalte von ($\bar{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$) aufzulösen und die effektiven Koeffizienten zu ermitteln.

In Analogie zu Abschnitt 3.3 werden nachfolgend für eine RUC mit einer rechteckigen Querschnittsgeometriebeschreibung (siehe Abb. 3-7) die Randbedingungen der neun speziellen Randwertprobleme angegeben, welche in Form von Zwangsbedingungen zwischen Verschiebungen und zwischen elektrischen Potentialen auf dem Rand Γ formuliert sind

$$\text{Fall 1: } \quad \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = \varepsilon_{11}^0 b, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = 0 & , \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = 0 & , \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = 0 & , \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0 & , \end{cases} \quad (3-107)$$

$$\text{Fall 2: } \quad \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = 0 & , \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = \varepsilon_{22}^0 h, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = 0 & , \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = 0 & , \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0 & , \end{cases} \quad (3-108)$$

$$\text{Fall 3: } \quad \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = 0 & , \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = 0 & , \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = \varepsilon_{33}^0 t & , \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0 & , \end{cases} \quad (3-109)$$

$$\text{Fall 4: } \quad \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = \varepsilon_{12}^0 h, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = 0 & , \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = \varepsilon_{21}^0 b, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = 0 & , \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = 0 & , \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0 & , \end{cases} \quad (3-110)$$

$$\text{Fall 5: } \quad \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = 0 & , \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = \varepsilon_{23}^0 t & , \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = \varepsilon_{32}^0 h, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = 0 & , \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0 & , \end{cases} \quad (3-111)$$

$$\text{Fall 6: } \quad \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = \varepsilon_{13}^0 t & , \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = 0 & , \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = \varepsilon_{31}^0 b, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = 0 & , \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0 & , \end{cases} \quad (3-112)$$

$$\text{Fall 7: } \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = 0, \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = -E_1^0 b, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0, \end{cases} \quad (3-113)$$

$$\text{Fall 8: } \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = 0, \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = -E_2^0 h, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0, \end{cases} \quad (3-114)$$

$$\text{Fall 9: } \begin{cases} u_1^{A_1^+} - u_1^{A_1^-} = 0, & u_1^{A_2^+} - u_1^{A_2^-} = 0, & u_1^{A_3^+} - u_1^{A_3^-} = 0, \\ u_2^{A_1^+} - u_2^{A_1^-} = 0, & u_2^{A_2^+} - u_2^{A_2^-} = 0, & u_2^{A_3^+} - u_2^{A_3^-} = 0, \\ u_3^{A_1^+} - u_3^{A_1^-} = 0, & u_3^{A_2^+} - u_3^{A_2^-} = 0, & u_3^{A_3^+} - u_3^{A_3^-} = 0, \\ \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, & \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, & \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = -E_3^0 t, \end{cases} \quad (3-115)$$

Die Formulierungen der ersten sechs Fälle (Gl. (3-107) bis (3-112)) enthalten die gleichen Verschiebungszwangsbedingungen wie die Gln. (3-54), (3-56), (3-58), (3-60), (3-62) und (3-64). Die übrigen Zwangsbedingungen in Gl. (3-107) bis (3-112) beziehen sich auf das elektrische Potential. Sie sind in allen sechs Fällen von gleicher Form und haben als rechte Seite den Wert Null.

Die Verschiebungszwangsbedingungen der Fälle 7, 8 und 9 haben die gleiche Form mit einer rechten Seite vom Wert Null. Der Unterschied in den Fällen besteht in verschiedenen Zwangsbedingungen des elektrischen Potentials.

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 erläutert wurde, sind bei einer RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt andere Randbedingungen als bei einer quaderförmigen RUC (Rechteckquerschnitt) erforderlich. Hierfür müssen in den Gln. (3-107) bis (3-112) die Verschiebungszwangsbedingungen durch die Gln. (3-66) bis (3-71) und in den Gln. (3-113) bis (3-115) die Zwangsbedingungen der elektrischen Potentiale durch die Gleichungen

$$\text{Fall 7: } \begin{cases} \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = -E_1^0 b, \\ \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = -E_1^0 w \sin(90 - \alpha), \\ \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0, \end{cases} \quad (3-116)$$

$$\text{Fall 8: } \begin{cases} \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, \\ \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = -E_2^0 h, \\ \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = 0, \end{cases} \quad (3-117)$$

$$\text{Fall 9: } \begin{cases} \phi^{A_1^+} - \phi^{A_1^-} = 0, \\ \phi^{A_2^+} - \phi^{A_2^-} = 0, \\ \phi^{A_3^+} - \phi^{A_3^-} = -E_3^0 t \end{cases} \quad (3-118)$$

ersetzt werden.

Wie im elastischen Fall lassen sich infolge der Gültigkeit der Stetigkeitsbedingungen aus Gl. (3-88) und (3-89) die Größen $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$, $\langle D_i \rangle$, $\langle E_j \rangle$ durch Randintegrale ausdrücken.

Für $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ und $\langle E_i \rangle$ gelten zusätzlich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} u_k n_l + u_l n_k d\Gamma = \varepsilon_{kl}^0, \\ \langle E_i \rangle &= -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \phi n_i d\Gamma = E_i^0. \end{aligned} \quad (3-119)$$

3.5.1 Imperfekter Phasenübergang

Wie bereits in Abschnitt 3.4 erwähnt wurde, kann eine Modellierung eines Kompositwerkstoffes unter Einbeziehung imperfekter Phasenübergänge auf piezoelektrische Materialien erweitert werden [36], [91], [92], [14]. Im Fall eines zweiphasigen, faserverstärkten Kompositwerkstoffes kann sowohl die Phase der Faser als auch die der Matrix piezoelektrische Eigenschaften aufweisen. Der imperfekte Übergang ist durch Unstetigkeiten in den physikalischen Größen gekennzeichnet. Wie im elastischen Fall soll hier ein Modell mit einem speziellen imperfekten Phasenübergang behandelt werden, der sich unter einem überschaubaren Aufwand realisieren lässt.

Der spezielle imperfekte Übergang wird durch die Kopplung von Spannungen mit Verschiebungsdifferenzen beziehungsweise von dielektrischen Verschiebungen mit Differenzen des elektrischen Potentials beschrieben. Zusätzlich erfüllen die Spannungen und die dielektrischen Verschiebungen die Bedingungen aus Gl. (3-89). Im Fall einer zylinderförmigen Oberfläche lassen sich die imperfekten Übergangsbedingungen in Zylinderkoordinaten wie folgt darstellen [92]

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_{rr}^m, \quad \sigma_{r\theta}^f = \sigma_{r\theta}^m, \quad \sigma_{rz}^f = \sigma_{rz}^m, \quad D_r^f = D_r^m, \quad \sigma_{rr}^f = K_r^\varepsilon \|u_r\|, \quad \sigma_{r\theta}^f = K_\theta^\varepsilon \|u_\theta\|, \quad \sigma_{rz}^f = K_z^\varepsilon \|u_z\|, \quad D_r^f = -K^E \|\phi\|. \quad (3-120)$$

Zur Erinnerung sei hier noch einmal erwähnt, dass mit $\|\cdot\|$ die Differenz einer Größe „ \cdot “ auf Γ_{mf} bezeichnet wird (siehe Abschnitt 3.4).

Der Phasenübergang (Gl. (3-120)) enthält neben den Bedingungen aus Gl. (3-74) noch zusätzliche Bedingungen für das elektrische Potential und die dielektrischen Verschiebungen. Diese zusätzlichen Bedingungen kennzeichnen einen stetigen Übergang der radialen dielektrischen Verschiebung und Unstetigkeiten in dem elektrischen Potential. Die Kopplung der Größen erfolgt mit Hilfe des skalaren Parameters K^E , welcher als Proportionalitätsfaktor dient. Dieser Faktor besitzt die physikalische Einheit [Kapazität/Fläche]. Diese Kopplungsgleichung ähnelt der Gleichung eines Kondensators (zum Beispiel eines Plattenkondensator) aus der Elektrostatik. Hier ist der elektrische Verschiebungsfluss mit der elektrischen Spannung (Differenz elektrischer Potentiale zweier Punkte eines Mediums) über die Kapazität gekoppelt [102], [4]. Durch Variation des Parameters K^E lässt sich die elektrische Isolierung zwischen Faser und Matrix modifizieren.

Zwischen den Kopplungsgleichungen in Gl. (3-120) besteht keine physikalische Verknüpfung. Sie setzen sich jeweils aus rein mechanischen oder elektrischen Größen zusammen. Diese fehlende Verknüpfung der Größen lässt sich auch im Materialgesetz eines nicht-piezoelektrischen Materials wiederfinden. Daher wird angenommen, dass der imperfekte Übergang als eine sehr dünne Zwischenphase interpretiert werden kann. In Analogie zu Abschnitt 3.4 werden im Fall einer isotropen Drei-Phasen-Modellierung, wobei die sehr

dünne Zwischenphase nicht-piezoelektrisch ist, die folgenden Beziehungen in dem imperfekten Phasenübergang verwendet

$$\begin{aligned} K_r^\varepsilon &= \frac{E^i(1 - \nu^i)}{t^i(1 - 2\nu^i)(1 + \nu^i)} \quad , \\ K_\theta^\varepsilon &= \frac{G^i}{t^i} \quad , \\ K_z^\varepsilon &= \frac{G^i}{t^i} \quad , \\ K^E &= \frac{\kappa^i}{t^i} \quad . \end{aligned} \quad (3-121)$$

Hier wird mit κ^i ($\kappa_{11}^i = \kappa_{22}^i = \kappa_{33}^i = \kappa^i$) die dielektrische Konstante der isotropen Zwischenphase bezeichnet.

Die effektiven materialbeschreibenden Tensoren eines Kompositwerkstoffes mit dem imperfekten Phasenübergang aus Gl. (3-120) ergeben sich aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= C_{ijkl}^{\text{eff}} \langle \varepsilon_{kl} \rangle - e_{kij}^{\text{eff}} \langle E_k \rangle \quad , \\ \langle D_i \rangle &= e_{ikl}^{\text{eff}} \langle \varepsilon_{kl} \rangle + \kappa_{ij}^{\text{eff}} \langle E_j \rangle \quad , \end{aligned} \quad (3-122)$$

wobei $\langle \sigma_{ij} \rangle$ und $\langle D_i \rangle$, aufgrund der Gültigkeit der Stetigkeitsbedingungen aus Gl. (3-89), mit den Ausdrücken aus den Gln. (3-95) beziehungsweise (3-96) übereinstimmen. $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ stimmt mit dem Ausdruck aus der Gl. (3-77) überein

$$\langle \varepsilon_{kl} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f} \varepsilon_{kl} d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^m} \varepsilon_{kl} d\Omega + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma_{mf}} \|u_k\| n_l + \|u_l\| n_k d\Gamma \quad . \quad (3-123)$$

Das elektrische Potential ϕ ist auf Γ_{mf} unstetig. Die Komponenten der makroskopischen elektrischen Feldstärke berechnen sich aus

$$\langle E_i \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega^f} E_i d\Omega + \int_{\Omega^m} E_i d\Omega - \int_{\Gamma_{mf}} \|\phi\| n_i d\Gamma \right) \quad . \quad (3-124)$$

Die dritten Terme in den Gln. (3-123) und (3-124) spiegeln den Verzerrungsanteil beziehungsweise den elektrischen Feldstärkeanteil des imperfekten Phasenübergangs infolge der Verschiebungs- und Potentialdifferenzen auf Γ_{mf} wider. Die Terme lassen sich auch so interpretieren, dass sie die jeweiligen Anteile der Zwischenphase Ω^i aus einer Drei-Phasen-Modellierung repräsentieren.

Die Größen $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle D_i \rangle$, $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ und $\langle E_i \rangle$ lassen sich auch über Randintegrale auf Γ ausdrücken. Im Fall von $\langle \sigma_{ij} \rangle$ und $\langle D_i \rangle$ wird dabei in analoger Weise wie in Abschnitt 3.4 für die Herleitung der Gl. (3-83) vorgegangen. Man erhält die Beziehungen

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \sigma_{ik} n_k y_j d\Gamma \quad , \\ \langle D_i \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} D_k n_k y_i d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (3-125)$$

Die Vorgehensweise für $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ und $\langle E_i \rangle$ ist analog wie für die Herleitung der Gl. (3-80). Es ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} u_k n_l + u_l n_k d\Gamma \quad , \\ \langle E_i \rangle &= -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \phi n_i d\Gamma \quad .\end{aligned}\tag{3-126}$$

Werden im Fall periodischer Mikrostrukturen die Randbedingungen aus Gl. (3-97) auf dem Rand Γ einer RUC vorgegeben, erhält man

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{kl} \rangle &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Gamma} u_k n_l + u_l n_k d\Gamma = \varepsilon_{kl}^0 \quad , \\ \langle E_i \rangle &= -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \phi n_i d\Gamma = E_i^0 \quad .\end{aligned}\tag{3-127}$$

Dies bedeutet, dass durch die Wahl von ε^0 und \mathbf{E}^0 in den Randbedingungen die makroskopischen Komponenten $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ und $\langle E_i \rangle$ bereits bestimmbar sind.

4 Modellbildung unter Verwendung der FEM

Für das Lösen von Differentialgleichungsproblemen stehen die verschiedensten Methoden zur Verfügung. Man unterscheidet zwischen analytischen und numerischen Methoden. In den Ingenieurwissenschaften überwiegt die Verwendung von numerischen Methoden, weil viele Probleme von komplexer Struktur sind, die nicht mehr analytisch gelöst werden können.

Die am häufigsten genutzte Methode ist die Finite-Elemente-Methode (FEM, auch Methode der finiten Elemente genannt) [109], [57], [9]. Die Idee dieser Methode besteht darin, ein zu untersuchendes Gebiet in Teilgebiete (finite Elemente) zu unterteilen und in jedem Teilgebiet die unbekannte „wahre“ Lösung einer physikalischen Problemstellung mittels eines Funktionsansatzes zu approximieren. Der Funktionsansatz besteht aus Formfunktionen und unbekannten Koeffizienten, welche in der klassischen FEM einen Stützstellencharakter haben. Es wird nicht das eigentliche Differentialgleichungsproblem gelöst, sondern eine schwache Form (integrale Formulierung), welche sich aus der Differentialgleichung ableiten lässt, zum Beispiel in Form der Methode der gewichteten Residuen (siehe Abschnitt 2.1). Die resultierende FEM-Lösung, die bei statischen Systemen aus dem Lösen eines Gleichungssystems herrührt, unterscheidet sich um einen gewissen Fehler von der exakten Lösung des Problems. Dieser Fehler kann durch eine feinere Diskretisierung des Gebietes oder durch eine Erhöhung des Polynomgrads der Formfunktionen reduziert werden.

Die FEM ist nicht auf ein spezielles Gebiet der Physik beschränkt. Mit ihr lassen sich zum Beispiel Aufgaben aus der Statik oder Dynamik untersuchen. Ebenso ist es möglich, Mehrfeldprobleme, die durch gekoppelte DGL-Systeme charakterisiert sind, zu lösen.

Die in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen werden unter Verwendung der FEM abgehandelt. Als Hilfsmittel wird die FE-Software ANSYS verwendet, in welcher die Finite-Elemente-Methode implementiert ist. Für die Modellgenerierung der in dieser Arbeit untersuchten spezifischen Anwendungsfälle wird die Syntaxsprache APDL (ANSYS Parametric Design Language) verwendet.

Zunächst wird nachfolgend ein kurzer Einblick in die FEM gegeben. Im Anschluss daran wird auf die Überführung der periodischen Randbedingungen und des imperfekten Phasenübergangs in ein FE-Modell eingegangen. Es ist das Ziel, automatisierte Berechnungsmodelle zu erstellen, mit denen eine Homogenisierung der betrachteten heterogenen Materialsysteme möglich ist.

4.1 Grundlagen der FEM

Wie bereits erwähnt, wird bei der FEM das betrachtete Gebiet in finite Teilgebiete unterteilt. Es wird angenommen, dass innerhalb eines jeden Teilgebietes die gesuchte Lösung des gestellten Problems durch einen Näherungsansatz beschrieben wird, in dem unbekann-

te Parameter enthalten sind, welche diskrete physikalische Lösungswerte an Stützstellen des Teilgebietes repräsentieren. Die Stützstellen des Elementes werden auch als Knoten bezeichnet. Es gibt zahlreiche weitere Möglichkeiten für die Definition des Näherungsansatzes (beispielsweise die p-FEM, die isogeometrische FEM), auf die aber hier nicht näher eingegangen werden soll.

In Abb. 4-1 ist ein finites Referenzelement dargestellt. Dieses Element besitzt acht Knoten. Die diskreten physikalischen Lösungswerte werden in der FEM Freiheitsgrade genannt. Je nachdem, ob die gesuchte Lösung skalar oder vektorwertig ist, gibt es für jeden Knoten einen oder mehrere Freiheitsgrade. Für ein räumliches elastisches Problem, bei dem ein Verschiebungsvektor als Lösung gesucht wird, besitzt jeder Knoten die drei Verschiebungen in jeder Raumrichtung als Freiheitsgrade. Somit hat das Element insgesamt 24 Freiheitsgrade.

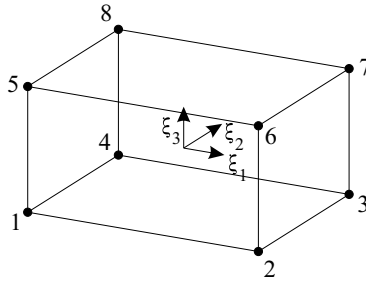


Abbildung 4-1: Hexaeder-Element mit acht Knoten

Für das dargestellte 8-Knoten-Hexaeder-Element ist der Näherungsansatz der Lösung beziehungsweise der Komponenten des Lösungsvektors durch eine trilineare Polynomfunktion (Polynomgrad 1) gegeben.

Es lassen sich auch Elemente mit höheren Polynomgraden definieren. Eine Erhöhung des Polynomgrads hat im Allgemeinen eine Erhöhung der Anzahl der Knoten und somit der Freiheitsgrade des Elementes zur Folge. Die zusätzlichen Knoten können sich auf den Kanten, den Flächen und auch im Inneren des Elementes befinden. Zu den bekanntesten Elementen in der FEM gehören die LAGRANGE-Elemente und die Serendipity-Elemente. Während bei LAGRANGE-Elementen die Knoten eines Polynomansatzes sich auf den Kanten, auf den Seitenflächen und im Inneren des Elementes befinden können, liegen die Knoten bei Serendipity-Elementen grundsätzlich auf den Elementkanten [3]. Die Serendipity-Elemente sind häufig in kommerzieller FE-Software implementiert.

Im Allgemeinen kann der Verschiebungsansatz eines räumlichen elastischen Problems (siehe Abschnitt 2.1) für ein Element mit N^e Knoten beschrieben werden durch

$$\mathbf{u}^e = \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N^e} N_i \begin{pmatrix} \hat{u}_1^{i,e} \\ \hat{u}_2^{i,e} \\ \hat{u}_3^{i,e} \end{pmatrix} = \mathbf{N}_u^e \hat{\mathbf{u}}^e, \quad (4-1)$$

wobei gilt

$$\mathbf{N}_u^e = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_{N^e} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_{N^e} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_{N^e} \end{pmatrix}, \quad (4-2)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^e = \begin{pmatrix} \hat{u}_1^{1,e} \\ \hat{u}_2^{1,e} \\ \hat{u}_3^{1,e} \\ \vdots \\ \hat{u}_1^{N^e,e} \\ \hat{u}_2^{N^e,e} \\ \hat{u}_3^{N^e,e} \end{pmatrix} . \quad (4-3)$$

Die Matrix \mathbf{N}_u^e beinhaltet die Formfunktionen N_i , welche spezielle Funktionen sind, die am Knoten i ihren maximalen Funktionswert annehmen. Für das in Abb. 4-1 dargestellte Element haben die Formfunktionen bezogen auf ein lokales Elementkoordinatensystem $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ die folgende Gestalt [3]

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_{1i}\xi_1)(1 + \xi_{2i}\xi_2)(1 + \xi_{3i}\xi_3), \quad i = 1, \dots, N^e, \quad (4-4)$$

wobei ξ_{1i} , ξ_{2i} und ξ_{3i} die natürlichen Koordinaten des Knotens i sind.

Der Vektor $\hat{\mathbf{u}}^e$ beinhaltet als Komponenten die Knotenfreiheitsgrade, deren Anzahl im Fall des Hexaeder-Elementes 24 beträgt.

Setzt man den Ansatz aus Gl. (4-1) in die Gl. (2-23) eines elastischen Variationsproblems bezogen auf den Volumenbereich des Elementes Ω^e ein und werden für die Testfunktionen der Ansatz

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}_u^e \hat{\mathbf{v}}^e, \quad (4-5)$$

gewählt, wobei der Vektor $\hat{\mathbf{v}}^e$ beliebige Werte beinhalten kann, so erhält man folgende Gleichung

$$(\hat{\mathbf{v}}^e)^T \mathbf{K}_{uu}^e \hat{\mathbf{u}}^e = (\hat{\mathbf{v}}^e)^T \mathbf{F}_{uu}^e. \quad (4-6)$$

Da die Gl. (4-6) für beliebige $\hat{\mathbf{v}}^e$ gelten soll, ergibt sich daraus das Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_{uu}^e \hat{\mathbf{u}}^e = \mathbf{F}_{uu}^e. \quad (4-7)$$

Hierbei sind

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}_u d\Omega \quad (4-8)$$

die Elementsteifigkeitsmatrix mit

$$\mathbf{B}_u = \nabla \mathbf{N}_u^e, \quad (4-9)$$

und

$$\mathbf{F}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_u^e)^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^e} (\mathbf{N}_u^e)^T \hat{\mathbf{p}} d\Gamma, \quad (4-10)$$

der Elementlastvektor, welcher sich aus dem Anteil der Volumenlasten und dem Anteil der Oberflächenlasten zusammensetzt. Mit Hilfe der Gl. (4-6) lässt sich für das Gebiet Ω , welches durch eine endliche Anzahl M an finiten Elementen diskretisiert ist, ein Gesamt-system assemblieren. Unter der Verwendung einer elementweisen Zuordnungsmatrix \mathbf{L}^e , mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^e &= \mathbf{L}^e \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{v}}^e &= \mathbf{L}^e \hat{\mathbf{v}} \end{aligned}, \quad (4-11)$$

die die lokalen Knotennummern eines jeden Elementes den globalen Knotennummern im Gesamtsystem zuordnet und als Komponenten die Werte 1 oder Null besitzt, folgt

$$(\hat{\mathbf{v}})^T \mathbf{K}_{uu} \hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{v}})^T \mathbf{F}_{uu} \quad . \quad (4-12)$$

Hierbei sind

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_{i=1}^M (\mathbf{L}^{e,i})^T \mathbf{K}_{uu}^{e,i} \mathbf{L}^{e,i} \quad (4-13)$$

und

$$\mathbf{F}_{uu} = \sum_{i=1}^M (\mathbf{L}^{e,i})^T \mathbf{F}_{uu}^{e,i} \quad (4-14)$$

die Gesamtsteifigkeitsmatrix beziehungsweise der Lastvektor des Gesamtsystems. Infolge der Beliebigkeit der Komponenten von $\hat{\mathbf{v}}$ ergibt sich

$$\mathbf{K}_{uu} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{uu} \quad . \quad (4-15)$$

Im Fall einer piezoelektrischen Problemstellung besitzt das Hexaeder-Element aus Abb. 4-1 in jedem Knoten als zusätzlichen Freiheitsgrad das elektrische Potential. Der Lösungsansatz aus Gl. (4-1) wird um den Ansatz für das elektrische Potential

$$\phi^e = \mathbf{N}_{\phi}^e \hat{\phi}^e = \begin{pmatrix} N_1 & \cdots & N_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_8 \end{pmatrix} \quad , \quad (4-16)$$

erweitert. Durch Einsetzen der Lösungsansätze Gl. (4-1), Gl. (4-16) sowie der Testfunktionen Gl. (4-5) und

$$w^e = \mathbf{N}_{\phi}^e \hat{w}^e \quad (4-17)$$

in die Gl. (2-38) für ein piezoelektrisches Variationsproblem ergibt sich analog zu Gl. (4-7) das folgende erweiterte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{u\phi}^e \\ (\mathbf{K}_{u\phi}^e)^T & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}^e \\ \hat{\phi}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{uu}^e \\ \mathbf{F}_{\phi\phi}^e \end{pmatrix} \quad . \quad (4-18)$$

Hierbei sind

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_{\phi} d\Omega \quad , \quad (4-19)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{\phi}^T \kappa \mathbf{B}_{\phi} d\Omega \quad , \quad (4-20)$$

$$\mathbf{F}_{\phi\phi}^e = - \int_{\Gamma_D^e} (\mathbf{N}_{\phi})^T \hat{q} d\Gamma \quad , \quad (4-21)$$

wobei

$$\mathbf{B}_{\phi} = \nabla_{\phi} \mathbf{N}_{\phi} \quad (4-22)$$

ist. Die verbleibenden Teilmatrizen entsprechen denen des rein elastischen Problems. Es lässt sich wie im elastischen Fall ein piezoelektrisches Gesamtsystem der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{uu} \\ \mathbf{F}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (4-23)$$

aufstellen, wobei die Teilmatrizen \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\phi}$, $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ beziehungsweise \mathbf{F}_{uu} , $\mathbf{F}_{\phi\phi}$ aus der Assemblierung der Elementbeiträge analog zu den Gln. (4-13) beziehungsweise (4-14) entstehen.

4.2 Periodische Randbedingungen

In Abschnitt 4.1 sind exemplarisch ausgewählte mathematische Modelle aus der Mechanik in FE-Modelle überführt worden. Dabei ist jedoch ein Aspekt bei der Überführung unberücksichtigt geblieben. Es wurde angenommen, dass die gesuchte Lösung die DIRICHLET-Randbedingungen bereits erfüllt. In dem präsentierten Weg, das FE-Gesamtsystem aus einer Elementassemblierung aufzubauen, sind die DIRICHLET-Randbedingungen noch nicht eingearbeitet, was dazu führt, dass die Gesamtsteifigkeitsmatrix singulär ist. Erst nach einer Einarbeitung der Randbedingungen ergibt sich ein Gleichungssystem, bei dem die Steifigkeitsmatrix regulär wird und das System eine eindeutige Lösung besitzt.

Die Einarbeitung von Rand- oder Zwangsbedingungen kann durch verschiedene Methoden erfolgen. Die Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren und die Penalty-Methode sind zwei weit verbreitete Verfahren. Hierbei werden die schwachen Formulierungen mit zusätzlichen integralen Ausdrücken versehen, die eine Erweiterung des FE-Gesamtgleichungssystems (Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren) beziehungsweise eine Platzierung von Straftermen in der Gesamtsteifigkeitsmatrix und in der dazugehörigen Komponente der rechten Seite des Gleichungssystems (Penalty-Methode) zur Folge haben. Eine weitere weit verbreitete Technik zum Berücksichtigen der Randbedingungen ist die direkte Manipulation im Gesamtgleichungssystem zum Beispiel durch das Streichen von Zeilen und Spalten bei homogenen DIRICHLET-Randbedingungen. Genauere Informationen über die Techniken sind zum Beispiel in [32], [27], [109] und [110] zu finden.

Elastisch

Die periodischen Randbedingungen, welche im Rahmen der Homogenisierung zum Bestimmen der effektiven Materialeigenschaften verwendet werden, sind in Abschnitt 3.3 ausführlich dargestellt. Diese Bedingungen spiegeln sowohl einen stetigen und periodischen Lösungsverlauf beim Übergang von einer RUC zu ihren Nachbarn als auch eine makroskopische Belastung wider. Die Randbedingungen aus Gl. (3-50) werden dabei in eine geeignetere Darstellung für eine FE-Modellierung, Gl. (3-51), überführt. Diese Darstellung ist durch die Angabe von Verschiebungsdifferenzen auf sich gegenüberliegenden Rändern charakterisiert. Bei der Anwendung der FEM werden die Randbedingungen durch eine endliche Anzahl von numerischen Zwangsbedingungen ersetzt. Diese Zwangsbedingungen lassen sich im elastischen Fall durch Verschiebungsdifferenzen an den Knoten der finiten Elemente ausdrücken. Das bedeutet, dass die Differenzen der Verschiebungsfunktionen durch Differenzen der Verschiebungsfreiheitsgrade auf den Rändern ersetzt werden. Dies setzt natürlich voraus, dass die Diskretisierung sich gegenüberliegender Ränder identisch

ist. Dies ist ein wichtiger Bestandteil bei der Realisierung der Randbedingungen. Die numerischen Zwangsbedingungen haben die Form

$$\hat{u}_i^{A_k^+} - \hat{u}_i^{A_k^-} = C \quad . \quad (4-24)$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht die Differenz eines Verschiebungsfreiheitsgrades $\hat{u}_i^{A_k^+}$, zugehörig zur Randfläche A_k^+ , mit dem entsprechenden Freiheitsgrad der gegenüberliegenden Randfläche A_k^- . Der konstante Wert C auf der rechten Seite entspricht dem Wert, der sich aus der rechten Seite der Gl. (3-51) ergibt.

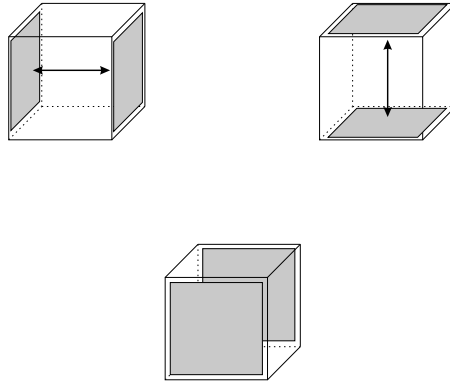


Abbildung 4-2: Schematische Darstellung der Knotenpaarungen der Zwangsbedingungen für die Flächen (ohne Kanten- und Eckknoten der RUC)

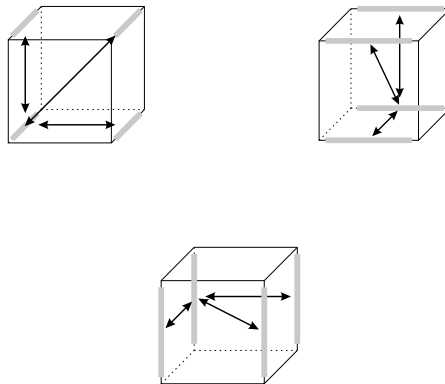


Abbildung 4-3: Schematische Darstellung der Knotenpaarungen der Zwangsbedingungen für die Kanten

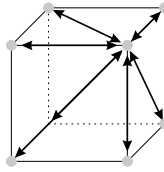


Abbildung 4-4: Schematische Darstellung der Knotenpaarungen der Zwangsbedingungen für die Eckknoten

In Abb. 4-2 bis 4-4 ist schematisch die Paarung der Knotenfreiheitsgrade zum Aufstellen der Zwangsbedingungen dargestellt. Es ist erkennbar, dass für die Generierung der Zwangsbedingungen eine Einteilung des Randes der RUC durchgeführt wird. Diese Einteilung bezieht sich auf die Knoten und die damit verbundenen Verschiebungsfreiheitsgrade. Der Rand wird in die Mengen S_V , S_E und S_F eingeteilt, die die Eckknoten, die Kantenknoten beziehungsweise die Flächenknoten erfassen. Es wird dabei berücksichtigt, dass die Mengen S_V , S_E und S_F paarweise disjunkt sind, also das $S_V \cap S_E = \emptyset$, $S_V \cap S_F = \emptyset$ und $S_E \cap S_F = \emptyset$ gilt. Die Vereinigung der Knotenmengen S_V , S_E und S_F entspricht dann gerade der Gesamtanzahl aller Knoten auf dem Rand der RUC.

Wie schon in Abschnitt 3.3 erwähnt wurde, ist neben den Randbedingungen noch die zusätzliche Fixierung eines materiellen Punktes der RUC erforderlich. Dies kann durch die Vorgabe aller Verschiebungsfreiheitsgrade eines Knotens aus dem diskretisierten Modell gewährleistet werden. Die Wahl des Knotens und die Werte der Fixierung haben keinen Einfluss auf die Ermittlung der effektiven Eigenschaften. Mit anderen Worten heißt das, dass die effektiven Eigenschaften invariant gegenüber der Knotenwahl und der Fixierung der Freiheitsgrade sind.

Piezoelektrisch

Im Fall einer piezoelektrischen Modellierung werden die periodischen Randbedingungen analog zum elastischen Fall nach den dargestellten Schemata in Abb. 4-2 bis 4-4 definiert. Somit erhält man für alle Knotenpaarungen auf dem Rand der RUC jeweils vier Typen von Zwangsbedingungen. Durch den zusätzlichen Freiheitsgrad des elektrischen Potentials in der Modellierung ist darauf zu achten, dass die Fixierung eines beliebigen Knotens der RUC ebenfalls um diesen Freiheitsgrad erweitert werden muss.

4.3 Bestimmen der makroskopischen Größen

Um die effektiven Materialeigenschaften berechnen zu können, werden im elastischen Fall die makroskopischen Spannungen und Verzerrungen benötigt (siehe Gl. (3-11) oder (3-13)). Infolge der FE-Modellierung werden diese Größen numerisch berechnet. Im Fall eines Modells mit einem perfekten Phasenübergang ergeben sich die makroskopischen Spannungen und Verzerrungen aus

$$\langle \tilde{\sigma}_k \rangle_{\star} = \frac{1}{\sum_{i=1}^M |\Omega^{e,i}|} \sum_{i=1}^M \tilde{\sigma}_k^{e,i} |\Omega^{e,i}|, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (4-25)$$

$$\langle \tilde{\varepsilon}_k \rangle_\star = \frac{1}{\sum_{i=1}^M |\Omega^{e,i}|} \sum_{i=1}^M \tilde{\varepsilon}_k^{e,i} |\Omega^{e,i}|, \quad k = 1, \dots, 6 \quad (4-26)$$

Hierbei sind $\tilde{\sigma}_k^{e,i}$, $\tilde{\varepsilon}_k^{e,i}$ (in M-V-Notation) und $|\Omega^{e,i}|$ die abgeleiteten Elementspannungen, die Elementverzerrungen beziehungsweise das Elementvolumen. In Worten heißt das zusammengefasst, dass sich die makroskopischen Größen aus der Summe der einzelnen gewichteten Elementgrößen ergeben. Die Wichtungsfaktoren sind durch die jeweiligen Elementvolumenanteile gegeben. Die Elementspannungen und -verzerrungen werden aus den jeweiligen Größen der beteiligten Knoten des Elements gemittelt.

Piezoelektrisch

In Analogie zu einem elastischen Modell werden bei einem piezoelektrischen Modell die zusätzlichen makroskopischen Größen der dielektrischen Verschiebung und der elektrischen Feldstärke wie folgt berechnet

$$\langle D_k \rangle_\star = \frac{1}{\sum_{i=1}^M |\Omega^{e,i}|} \sum_{i=1}^M D_k^{e,i} |\Omega^{e,i}|, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4-27)$$

$$\langle E_k \rangle_\star = \frac{1}{\sum_{i=1}^M |\Omega^{e,i}|} \sum_{i=1}^M E_k^{e,i} |\Omega^{e,i}|, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4-28)$$

4.4 Imperfekter Phasenübergang

In Abschnitt 3.4 ist ein mathematisches Modell für den imperfekten Phasenübergang beschrieben worden. Dieser Phasenübergang wird im Folgenden in ein geeignetes FE-Modell überführt. Da auf eine FE-Software (ANSYS) zurückgegriffen wird, ist man hinsichtlich der Nutzung eingeschränkt. Im idealen Fall wird der imperfekte Übergang durch ein finites Element beschrieben. In [76] wird für den zweidimensionalen Fall eine Elementmatrix abgeleitet, die den imperfekten Übergang beschreibt. Diese Matrix wird im Rahmen der FEM beim Aufstellen des globalen Gesamtsystems berücksichtigt. Für detaillierte Informationen wird auf den Artikel [76] verwiesen.

Die FE-Beschreibung des imperfekten Phasenübergangs bei einer rein elastischen Problemstellung erfolgt in dieser Arbeit durch Federelemente. Bezogen auf die FE-Software ANSYS wird der Elementtyp COMBIN14 verwendet. Die Phasen werden mit Hilfe von linearen Hexaeder- und Pentaeder-Elementen (Abb. 4-1, Formfunktionen haben den Polynomgrad 1) diskretisiert. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass auf den Randflächen der Phasen, die für die Übergangsbeschreibung relevant sind, eine Knotenanordnung der diskretisierten Matrix- und Faserphase derart realisiert wird, dass sich zu jedem Knoten der Matrix ein Knoten der Faserphase finden lässt, der die gleiche geometrische Position besitzt. Das verwendete Federelement ist durch die folgende eindimensionale Gleichung charakterisiert

$$F = K^{\star,\varepsilon} (\hat{u}^j - \hat{u}^i) \quad (4-29)$$

wobei j ein Knoten der Matrixphase und i der entsprechende Faserknoten sind. Mit F und $K^{*,\varepsilon}$ werden die Federkraft beziehungsweise die Federsteifigkeit bezeichnet. In Anlehnung an die Gl. (3-74) werden pro Knotenpaar im dreidimensionalen Fall drei Federelemente verwendet, die jeweils durch ein Kraftgesetz beschrieben sind. Diese sind durch

$$\begin{aligned} F_r &= K_r^{*,\varepsilon} \|u_r\|_* \quad , \\ F_\theta &= K_\theta^{*,\varepsilon} \|u_\theta\|_* \quad , \\ F_z &= K_z^{*,\varepsilon} \|u_z\|_* \end{aligned} \quad (4-30)$$

gegeben. Mit $\|\cdot\|_*$ wird in Analogie zu $\|\cdot\|$ (siehe Abschnitt 3.4) die Differenz von Verschiebungsfreiheitsgraden bezeichnet. Die Parameter $K_i^{*,\varepsilon}$, $i = r, \theta, z$ sind die Federsteifigkeiten, welche über die Beziehungen [105]

$$K_i^{*,\varepsilon} = K_i^\varepsilon A^n, \quad i = r, \theta, z \quad (4-31)$$

mit den imperfekten Kontaktparametern aus Gl. (3-74) in Relation stehen. Die Größe A^n bezeichnet den auf den Knoten n bezogenen resultierenden Flächeninhalt aus der Diskretisierung der Kontaktoberfläche einer der beiden Phasen (siehe Abb. 4-5). Der Knoten n ist sowohl einem Volumenelement als auch einem Federelement zugeordnet.

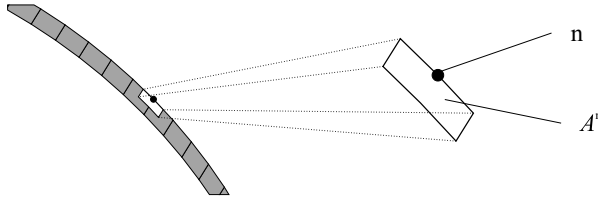


Abbildung 4-5: Ausschnitt der diskretisierten Kontaktoberfläche der Faser mit linearen Elementen (ein Element in Faserlängsrichtung) mit Markierung des Flächeninhalts A^n

Unter der Annahme, dass die FE-Diskretisierung der Faserphase geometrisch durch ein Prisma mit der Grundfläche eines gleichseitigen Polygons repräsentiert wird und in Faserlängsrichtung die Elementunterteilung 1 beträgt, ist der Flächeninhalt A^n durch

$$A^n = r^f t \sin\left(\frac{\pi}{c_{cs}}\right) \quad (4-32)$$

gegeben, wobei die Größen r^f , t und c_{cs} den Faserradius, die Faserlänge beziehungsweise die Anzahl der Eckknoten des Polygons beschreiben. Zur Herleitung der Gleichung kann die Abb. 4-6, in der ein exemplarischer Querschnitt eines Prismas dargestellt ist, verwendet werden. Es ist zu bemerken, dass für die Gültigkeit der Gleichung vorausgesetzt wird, dass sich der diskretisierte Faserquerschnitt komplett innerhalb des RUC-Querschnitts befindet.

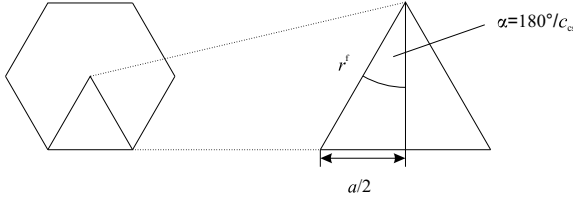


Abbildung 4-6: Querschnitt eines Prismas (gleichseitiges Hexagon) mit Kantenlänge a und $c_{cs} = 6$

Dies gilt zum Beispiel für eine RUC, bei der sich der Faserquerschnitt zentriert im RUC-Querschnitt befindet (siehe Abb. 4-7). Wird stattdessen eine RUC betrachtet, bei der die Fasergeometrie geteilt ist, so ist die Gl. (4-32) nicht uneingeschränkt auf alle Knoten anwendbar. Knoten, die sich auf dem Querschnittsrand der RUC befinden, wird ein Flächeninhalt zugeordnet, der durch

$$A^n = \frac{1}{2} r^f t \sin \left(\frac{\pi}{c_{cs}} \right) \quad (4-33)$$

gegeben ist. Den restlichen Knoten wird der Flächeninhalt nach Gl. (4-32) zugeordnet. Für die Berechnung der gemittelten Spannungen und Verzerrungen wird wie im vorherigen Abschnitt 4.3 vorgegangen. Die makroskopischen Größen werden numerisch berechnet. Für die makroskopischen Spannungen (siehe Abschnitt 3.4 Gl. (3-77)) wird die Gl. (4-25) verwendet. Die makroskopischen Verzerrungen ergeben sich aus

$$\langle \tilde{\varepsilon}_k \rangle_\star = \frac{1}{\sum_{i=1}^M |\Omega^{e,i}|} \left(\sum_{i=1}^{M^f} \tilde{\varepsilon}_k^{e,f,i} |\Omega^{e,f,i}| + \sum_{i=1}^{M^m} \tilde{\varepsilon}_k^{e,m,i} |\Omega^{e,m,i}| + R \right), \quad k = 1, \dots, 6 \quad (4-34)$$

mit

$$R = \begin{cases} \sum_{o=1}^{2c_{cs}} \|u_k^o\|_\star n_k A^o, & \text{falls } k = 1, 2, 3 \quad , \\ \sum_{o=1}^{2c_{cs}} (\|u_1^o\|_\star n_2 + \|u_2^o\|_\star n_1) A^o, & \text{falls } k = 4 \quad , \\ \sum_{o=1}^{2c_{cs}} (\|u_2^o\|_\star n_3 + \|u_3^o\|_\star n_2) A^o, & \text{falls } k = 5 \quad , \\ \sum_{o=1}^{2c_{cs}} (\|u_1^o\|_\star n_3 + \|u_3^o\|_\star n_1) A^o, & \text{falls } k = 6 \quad . \end{cases} \quad (4-35)$$

Die Größen M^f , M^m , $|\Omega^{e,f,i}|$, $|\Omega^{e,m,i}|$, $\|u_k^o\|_\star$ und n_k , $k = 1, 2, 3$ bezeichnen die Elementanzahl der jeweiligen Phase (Faser oder Matrix), das Elementvolumen der jeweiligen Phase, die Differenzen der kartesischen Verschiebungsfreiheitsgrade der Knotenpaarung, welche den Knoten o beinhaltet, und die Komponenten des äußeren Normalenvektors der Faser. Mit M wird die Summe von M^f und M^m bezeichnet.

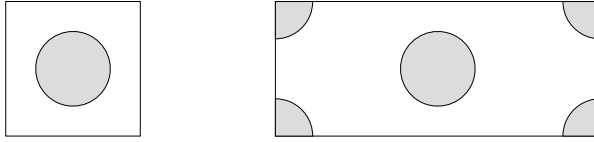


Abbildung 4-7: Unterschiedliche RUC-Querschnitte, links: Faser zentriert in der RUC, rechts: geteilte Fasergeometrien an den RUC-Ecken

Piezeoelektrisch

In Abschnitt 3.5.1 sind die Modellierungsbedingungen für den imperfekten Phasenübergang unter Berücksichtigung piezeoelektrischer Materialien beschrieben worden. Dieser Übergang ist gekennzeichnet durch unstetige Verläufe der Verschiebungen und des elektrischen Potentials. Für eine Überführung des Phasenübergangs in eine FE-Beschreibung werden Federelemente verwendet, die den elastischen Anteil des Übergangs widerspiegeln. Für den elektrischen Anteil werden die Phasen durch Elemente gekoppelt, die Kondensatorcharakter haben [82]. Für die numerische Modellierung werden die Phasengeometrien durch lineare Hexaeder- und Pentaeder-Elemente diskretisiert. Die Kontaktflächen der Phasen besitzen eine identische Knotenverteilung.

Die Umsetzung des imperfekten Phasenübergangs bei einer piezeoelektrischen Problemstellung erfolgt bezogen auf die Softwareanwendung ANSYS durch COMBIN14-Elemente und CIRCU94-Elemente. Der Elementtyp COMBIN14 spiegelt den elastischen Anteil des imperfekten Phasenübergangs wider. Der Elementtyp CIRCU94, welcher ein Zwei-Knoten-Element beschreibt, spiegelt den elektrischen Anteil des Phasenübergangs wider. Dieses Element besitzt die Möglichkeit, ein kondensatorähnliches Verhalten zu simulieren

$$Q = K^{*,E}(\hat{\phi}^i - \hat{\phi}^j) \quad . \quad (4-36)$$

Hiebei sind Q , $K^{*,E}$ und $(\hat{\phi}^i - \hat{\phi}^j)$ die elektrische Ladung, die Kapazität beziehungsweise die Differenz der elektrischen Knotenfreiheitsgrade, die das elektrische Potential repräsentieren. In Anlehnung an die Gl. (3-120) werden pro Knotenpaarung drei Federlemente und ein Kondensatorelement verwendet. Diese werden beschrieben durch

$$\begin{aligned} F_r &= K_r^{*,\varepsilon} \|u_r\|_* \quad , \\ F_\theta &= K_\theta^{*,\varepsilon} \|u_\theta\|_* \quad , \\ F_z &= K_z^{*,\varepsilon} \|u_z\|_* \quad , \\ Q &= K^{*,E} \|\phi\|_{**} \quad . \end{aligned} \quad (4-37)$$

Während $\|u_i\|_*$, $i = r, \theta, z$ die Verschiebungsdifferenz von Matrix zu Faser widerspiegelt, kennzeichnet $\|\phi\|_{**}$ die elektrische Potentialdifferenz von Faser zu Matrix. Die Parameter $K_i^{*,\varepsilon}$ sind die Federsteifigkeiten, die über die Gl.(3-74) gegeben sind. Für den Parameter $K^{*,E}$ gilt die Beziehung

$$K^{*,E} = K^E A^n \quad . \quad (4-38)$$

Die Größe A^n ist der Flächeninhalt der zum Knoten n gehörenden Kontaktoberfläche (siehe Abb. 4-5).

Für die Bestimmung der makroskopischen Größen, die für die Berechnung der effektiven

Materialeigenschaften benötigt werden, wird wie in den vorherigen Abschnitten vorgegangen. Die Integrale werden numerisch ermittelt. Die makroskopischen Spannungen und die dielektrischen Verschiebungen ergeben sich aus den Gln. (4-25) und (4-27). Die makroskopischen Verzerrungen $\langle \tilde{\varepsilon}_k \rangle_*$, bei denen die Verschiebungsunstetigkeit beachtet werden muss, berechnen sich aus Gl. (4-34). Für die makroskopischen Komponenten der elektrischen Feldstärke, welche aus Gl. (3-124) folgen, wird die folgende Gleichung verwendet

$$\langle E_k \rangle_* = \frac{1}{\sum_{i=1}^M |\Omega^{e,i}|} \left(\sum_{i=1}^{M^f} E_k^{e,f,i} |\Omega^{e,f,i}| + \sum_{i=1}^{M^m} E_k^{e,m,i} |\Omega^{e,m,i}| + R^E \right) \quad (4-39)$$

mit

$$R^E = \sum_{o=1}^{2c_{cs}} \|\phi^o\|_{**} n_k A^o \quad . \quad (4-40)$$

5 Berechnung effektiver Materialeigenschaften

Dieses Kapitel befasst sich mit der Berechnung und der Auswertung der effektiven Materialeigenschaften von Faserverbundwerkstoffen mit Hilfe der in Kapitel 3 näher beschriebenen Homogenisierungsmodelle unter Nutzung einer RUC. Es werden der Einfluss der Faserverteilung und der Einfluss des imperfekten Phasenübergangs auf die effektiven Koeffizienten untersucht.

Die Homogenisierungsmodelle werden mit anderen Modellen aus der Literatur hinsichtlich der berechneten Koeffizienten verglichen und bewertet. Die verwendeten Materialkomponenten für die betrachteten Verbundwerkstoffe werden dabei Literaturquellen entnommen. In einigen Fällen basiert die Beschreibung auf fiktiven Ausgangsstoffen oder lediglich auf Verhältnisangaben von Materialeigenschaften von Faser zu Matrix.

In [7], [22], [49] und [31] sind für verschiedene Werkstoffe Materialkonstanten angegeben. Beispielsweise liegt der Wert des Elastizitätsmoduls für einige Metalle/Metallegierungen im zwei- bis dreistelligen GPa-Bereich. Für Epoxidharze liegt der Wert im einstelligen GPa-Bereich. Die Elastizitätsmoduln für Kohlenstofffasern können je nach Herstellungsprozess Werte im zweistelligen bis hohen dreistelligen GPa-Bereich annehmen [77]. Das bedeutet, dass sich Materialkennwerte von Phasen um das Hundertfache oder höher unterscheiden können. In den nachfolgenden Berechnungsmodellen kann es vorkommen, dass die verwendeten fiktiven Phasen des Verbundwerkstoffes in einigen Fällen durch einen Unterschied des Schubmoduls von bis zu 120 charakterisiert werden. Da die physikalische Beschreibung der Berechnungsmodelle linear ist, lassen sich trotzdem grundlegende Aussagen aus den Berechnungsmodellen auf heterogene Werkstoffmodelle mit realen Ausgangsstoffen übertragen.

Zum Anfang des Kapitels wird der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungsarten auf die effektiven Materialeigenschaften untersucht. Im ersten Abschnitt werden Berechnungsmodelle für rein elastische Faserverbundmaterialien behandelt. Die periodische heterogene Mikrostruktur wird so verändert, dass Verbundwerkstoffe mit verschiedenen Faserverteilungen entstehen, die Periodizität der RUC aber dennoch gewährleistet bleibt. Es werden RUC-Modelle mit einem rhombus- beziehungsweise parallelogrammförmigen Querschnitt verwendet. Des Weiteren werden die Eigenschaften des Phasenkontaktes variiert und deren Einfluss auf die effektiven Koeffizienten untersucht. Im letzten Abschnitt werden Berechnungsmodelle für Verbundwerkstoffe behandelt, bei denen die Fasern piezoelektrische Eigenschaften besitzen.

Ein Einblick in den Einfluss der Netzfeinheit auf die Berechnung der effektiven Materialeigenschaften ist im Anhang B zu finden.

Einfluss der Randbedingungen auf die Ergebnisse

Im Allgemeinen wird in Homogenisierungsmodellen Bezug auf ein RVE genommen. Dabei sollte das RVE eine ausreichende Anzahl an heterogenen Einschlüssen beinhalten, damit es als repräsentativ gilt, weil reale Kompositwerkstoffe in der Regel eine zufällige heterogene Einschlussverteilung aufweisen.

Die in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodelle zum Bestimmen der effektiven Materialeigenschaften von Verbundwerkstoffen basieren auf der Annahme, dass der heterogene Strukturaufbau des Kompositwerkstoffes periodisch ist. Das bedeutet, dass das RVE durch eine RUC beschrieben werden kann.

Im Folgenden wird für den elastischen Fall der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen in Kombination mit einer variierenden RVE-Größe auf die berechneten effektiven Materialeigenschaften exemplarisch an C_{1212}^{eff} näher untersucht. Dies gibt einen Einblick, ab wann ein RVE mit den linearen Verschiebungsrandbedingungen oder den homogenen Spannungsrandbedingungen als repräsentativ gelten kann.

Es wird ein unidirektionaler Faserverbundwerkstoff betrachtet, dessen periodische Mikrostruktur durch eine RUC mit einem quadratischen Querschnitt widergespiegelt wird (siehe Abb. 5-1). Die Faser ist zentral in die RUC eingebettet. Um die Rechenzeit und den Modellierungsaufwand gering zu halten, werden 2-D-Berechnungsmodelle verwendet.

Die verwendeten Randbedingungen sind die linearen Verschiebungsrandbedingungen und die homogenen Spannungsrandbedingungen entsprechend Gl. (3-15) sowie die periodischen Randbedingungen nach Gl. (3-22).

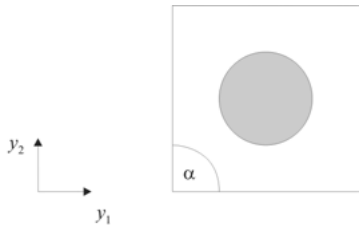


Abbildung 5-1: RUC ($\alpha = 90^\circ$) mit einem quadratischen Querschnitt und einer zentriert eingebetteten Faser

Für die Phasen des Kompositwerkstoffes werden fiktive isotrope Materialien benutzt, wobei deren Eigenschaften durch den Schubmodul G und die Querkontraktionszahl ν gegeben sind (siehe Tabelle 5-1). Es werden zwei unterschiedliche Faservolumenanteile betrachtet, 0.4 und 0.7.

Tabelle 5-1: Materialtabellen mit (a) kleinem Schubmodulverhältnis, (b) großem Schubmodulverhältnis

Phase	G in [GPa]	ν	Phase	G in [GPa]	ν
Matrix	1	0.35	Matrix	1	0.35
Faser	10	0.2	Faser	120	0.2

(a)

(b)

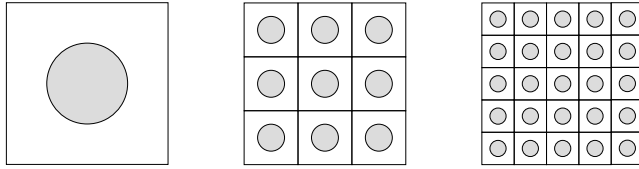


Abbildung 5-2: Unterschiedliche RVE-Größen: links: RVE besteht aus einer RUC, mitte: RVE besteht aus 3×3 RUCs, rechts: RVE besteht aus 5×5 RUCs

Es wird angenommen, dass entweder ein ebener Verzerrungszustand oder ein ebener Spannungszustand vorliegt. Im Fall der ebenen Verzerrung werden die linearen Verschiebungsrandbedingungen oder die periodischen Randbedingungen verwendet. Im Fall der ebenen Spannung werden die homogenen Spannungsrandbedingungen genutzt. Diese unterschiedlichen Zustände gewährleisten nur eine makroskopische Nicht-Null-Komponente der Verzerrungen (ebener Verzerrungszustand) beziehungsweise eine makroskopische Nicht-Null-Komponente der Spannungen (ebener Spannungszustand). Die effektiven Materialeigenschaften lassen sich dann aus einer zweidimensionalen Formulierung der Gl. (3-13) oder Gl. (3-14) ableiten.

Die entwickelten Berechnungsmodelle lassen sich unter Verwendung der FEM so verändern, dass die Größe des RVE-Bereiches erhöht werden kann. Angefangen wird mit einem RVE mit einem Fasereinschluss, was der kleinsten RUC entspricht. Die RVE-Betrachtung wird dann in y_1 - und y_2 -Richtung um jeweils eine weitere RUC erweitert. Das bedeutet, dass sich das RVE nach der ersten Erweiterung aus vier RUCs zusammensetzt. Der betrachtete Verbundwerkstoff verändert sich dadurch nicht. In Abb. 5-2 sind exemplarisch verschiedene RVE-Größen dargestellt.

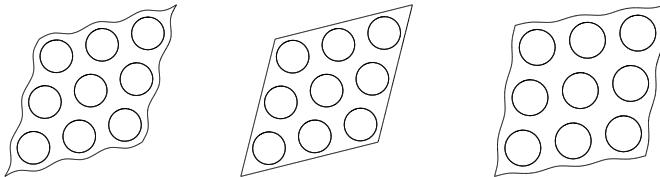


Abbildung 5-3: Skizziertes Verformungsbild eines RVE bestehend aus 3×3 RUCs, links: Periodische Randbedingungen, mitte: Lineare Verschiebungsrandbedingungen, rechts: Homogene Spannungsrandbedingungen

Für die FE-Diskretisierung werden lineare Viereck- und Dreieck-Elemente verwendet. Die Elementkantenlänge wird auf ein Zehntel der Breite der RUC festgelegt, da nicht die Genauigkeit, sondern der Vergleich der effektiven Elastizitätskoeffizienten der unterschiedlichen Randbedingungsmodellierungen im Vordergrund steht. Des Weiteren bleibt zusätzlich der Berechnungsaufwand, der sich mit jeder RUC-Erweiterung erhöht, überschaubar. Die FE-Diskretisierung eines aus mehreren RUCs bestehenden RVE erfolgt durch das Kopieren des FE-Netzes einer einzigen RUC. Die linearen Verschiebungsrandbedingungen, die

homogenen Spannungsrandbedingungen und die periodischen Randbedingungen werden durch das Festlegen von Verschiebungsfreiheitsgraden, das Aufbringen von Knotenlasten beziehungsweise durch Zwangsbedingungen realisiert.

In Abb. 5-4 und 5-5 sind die normierten Koeffizienten C_{1212}^{eff} bezüglich unterschiedlicher Randbedingungen und Phaseneigenschaften dargestellt. Die effektiven Koeffizienten sind im Fall der linearen Verschiebungsrandbedingungen mit „LVRB“, im Fall der homogenen Spannungsrandbedingungen mit „USRB“ und im Fall der periodischen Randbedingungen mit „per. RB“ gekennzeichnet. Die Normierung erfolgt anhand der Koeffizienten bei periodischen Randbedingungen. Im Fall der periodischen Randbedingungen hat die Größe der RVE (Anzahl der RUCs) keinen Einfluss auf die effektiven Elastizitätskoeffizienten.

Aus den Abbildungen erkennt man, dass die Werte bei linearen Verschiebungsrandbedingungen größer sind im Vergleich zu den Werten bei periodischen Randbedingungen. Die linearen Verschiebungsrandbedingungen verformen das RVE derart, dass die Randflächen eben bleiben (siehe Abb. 5-3). Dieser Zwang ist verantwortlich dafür, dass die effektiven Koeffizienten ein „steiferes“ Materialverhalten charakterisieren. Mit einer zunehmenden Anzahl an Einheitszellen innerhalb des RVE ist eine Tendenz zu den Ergebnissen bei periodischen Randbedingungen erkennbar. Dies ist dadurch erklärbar, dass sich durch die RVE-Vergrößerung (Erhöhung der Anzahl der RUC) der Einfluss der Randbedingungen auf die Spannungen und Verzerrungen im Inneren des RVE reduziert. RUCs, welche im ausreichenden Abstand zum Rand liegen, besitzen eine fast identische Spannungs- und Verzerrungsverteilung.

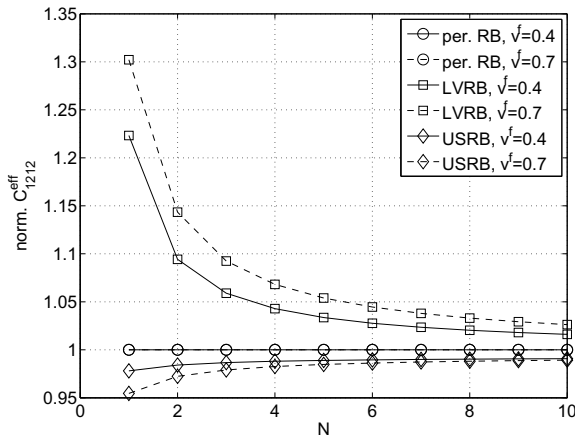


Abbildung 5-4: Vergleich von C_{1212}^{eff} zu unterschiedlichen Randbedingungen mit variierendem RVE, bestehend aus $N \times N$ RUCs, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, Schubmodulverhältnis $G^f/G^m = 10$

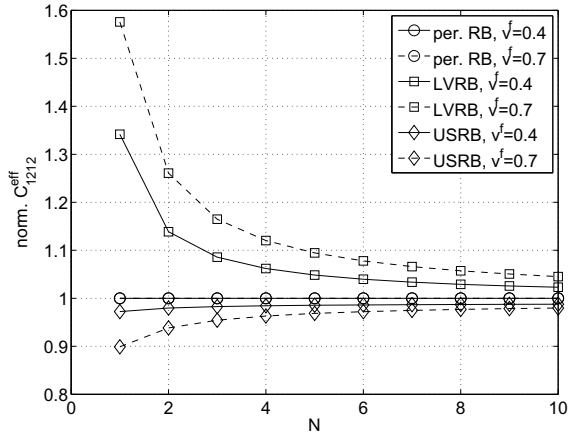


Abbildung 5-5: Vergleich von C_{1212}^{eff} zu unterschiedlichen Randbedingungen mit variierendem RVE, bestehend aus $N \times N$ RUCs, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, Schubmodulverhältnis $G^f/G^m = 120$

Bei homogenen Spannungsrandbedingungen kann sich der RVE-Rand frei verformen. Durch den Zwang der homogenen Randspannungen werden im Vergleich zu den periodischen Randbedingungen effektive Koeffizienten ermittelt, die ein „weicherer“ Materialverhalten charakterisieren. Mit einer zunehmenden RVE-Größe wird auch hier der Einfluss der Randbedingungen auf die inneren RUCs kleiner. Es stellen sich fast identische Spannungs- und Verzerrungsfelder ein. Die effektiven Koeffizienten nähern sich daher asymptotisch den Ergebnissen bei periodischen Randbedingungen an.

Die Höhe der Abweichung der effektiven Koeffizienten bei linearen Verschiebungsrandbedingungen beziehungsweise bei homogenen Spannungsrandbedingungen zu den Koeffizienten bei periodischen Randbedingungen ist abhängig vom betrachteten Faservolumenanteil und dem Materialverhältnis der Phasen (siehe dazu Tab. 5-2). Die in der Tab. 5-2 präsentierten prozentualen Abweichungen ergeben sich aus der Formel

$$\text{diff1} = \frac{|C_{1212}^{\text{eff},i} - C_{1212}^{\text{eff,per. RB}}|}{C_{1212}^{\text{eff,per. RB}}} 100\% \quad , \quad i = \text{„LVRB“}, \text{„USRB“} \quad . \quad (5-1)$$

Die Größen $C_{1212}^{\text{eff,LVRB}}$, $C_{1212}^{\text{eff,USRB}}$ und $C_{1212}^{\text{eff,per. RB}}$ kennzeichnen die berechneten Koeffizienten zu den drei verschiedenen Randbedingungen. Es wurde ein RVE verwendet, das sich aus 100 (10×10) RUCs zusammensetzt.

Auf Grundlage der Berechnung von C_{1212}^{eff} und der realisierten FE-Modellierung kann geschlossen werden, dass eine Berechnung der effektiven Elastizitätskoeffizienten für Kompositwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur näherungsweise auch über die Randbedingungen aus Gl. (3-15) erfolgen kann. Dabei muss das zur Berechnung verwendete RVE eine hinreichende Größe aufweisen (Anzahl an RUCs). Ein Vorteil ist, dass sich die Randbedingungen einfacher in einem FE-Modell realisieren lassen. Ein Nachteil ergibt sich durch den erhöhten Rechenaufwand infolge der RVE-Größe. Aufgrund der besseren Ge-

naugigkeit und des reduzierten Zeitaufwands werden daher in dieser Arbeit die periodischen Randbedingungen verwendet.

Tabelle 5-2: Prozentuale Abweichung (gerundet auf eine Stelle nach dem Komma) von $C_{1212}^{\text{eff},i}$ zu dem Referenzwert $C_{1212}^{\text{eff,per. RB}}$ bei einem RVE, bestehend aus 10×10 RUCs; siehe Gl. (5-1); verwendete Faservolumenanteile $v^f = 0.4$ und $v^f = 0.7$

G^f/G^m	$C_{1212}^{\text{eff,LVRB}}$		$C_{1212}^{\text{eff,USRB}}$	
	0.4	0.7	0.4	0.7
10	1.61 %	2.62 %	0.09 %	1.08 %
120	2.30 %	4.53 %	1.23 %	2.02 %

5.1 Elastische unidirektionale Faserverbundstrukturen

5.1.1 Rhombischer RUC-Querschnitt mit perfektem Phasenübergang

In der Literatur werden häufig unter der Annahme von periodischen Mikrostrukturen unidirektionaler Faserverbundwerkstoffe hexagonale oder quadratische Verteilungen der Faserquerschnittsgeometrie betrachtet. Charakteristisch für solche Strukturen ist, dass die benachbarten Fasern in einem Winkel α von 60° (Abb. 5-6) beziehungsweise 90° (Abb. 5-1) zueinander orientiert sind. Eine Verallgemeinerung der Faseranordnung lässt sich durch die Annahme eines variablen Winkels erreichen. Der Querschnitt der Kompositstruktur, der aus einer solchen Annahme entsteht, kann im Allgemeinen durch eine Aneinanderreihung von Rhomben beschrieben werden.

In Abb. 5-7 ist eine solche rhombische Anordnung dargestellt. Der Winkel α beträgt hier 45° . Aus der Abbildung kann man erkennen, dass die periodische Faseranordnung auch über einen rechteckigen Strukturbereich beschreibbar ist. Anstelle einer rhombischen periodischen Mikrozeile wird, wie in [104] veröffentlicht, eine RUC mit einem Rechteckquerschnitt gewählt. Eine entsprechende physikalische Modellbeschreibung für diese RUC-Geometrie ist in Abschnitt 3.3 zu finden.

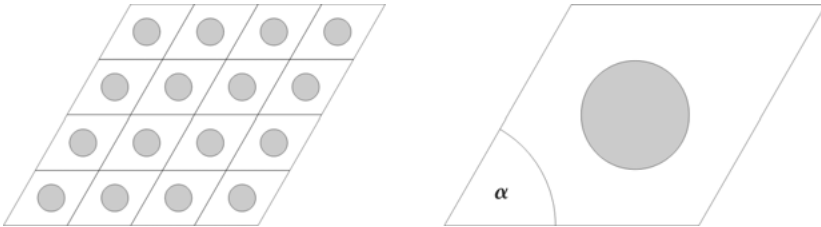


Abbildung 5-6: Hexagonale Faseranordnung, $\alpha = 60^\circ$

Es ist zu beachten, dass für die Modellbetrachtung anstelle des Koordinatensystems $\{y_1, y_2, y_3\}$ ein gedrehtes System $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$ genutzt wird. Das bedeutet, dass effektive Materialeigenschaften bezüglich $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$ berechnet werden und im Anschluss daran auf

das ursprünglichen Koordinatensystem transformiert werden können (siehe dazu Gl. (2-42)), wobei für die Richtungskosinus in Gl. (2-40) der Winkel $\alpha' = \alpha/2$ verwendet wird. Im weiteren Verlauf werden das ursprüngliche und das gedrehte Koordinatensystem als globales Koordinatensystem beziehungsweise lokales Koordinatensystem bezeichnet. Unter der Annahme, dass die rhombische Querschnittsgeometrie eine (normierte) Einheitskantenlänge besitzt, ergeben sich die Abmessungen des neuen RUC-Querschnitts aus [104]

$$\begin{aligned} b &= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) , \\ h &= 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) . \end{aligned} \quad (5-2)$$

Dabei ist b die Breite und h die Höhe der quaderförmigen RUC. Bei der Entwicklung eines FE-Berechnungsmodells ist darauf zu achten, dass der Faservolumenanteil geometrische Restriktionen erfüllen muss, da es ansonsten zu einer topologischen Überlappung der Phasen beim periodischen Fortsetzen der Struktur kommt. Daher wird bei der Berechnung die Abbruchbedingung [104]

$$r^f > \min\left\{\frac{h}{2}, 0.5\right\} \quad (5-3)$$

genutzt.

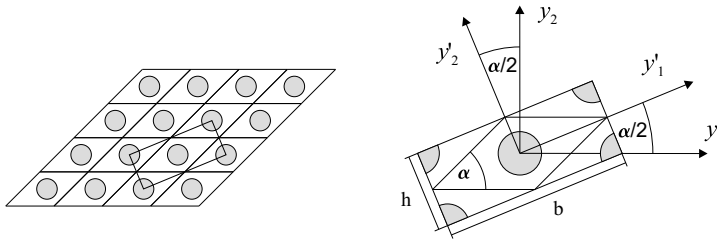


Abbildung 5-7: Rhombische Faseranordnung (links) und Darstellung der verwendeten RUC mit Rechteckquerschnitt (rechts)

Für die Berechnung der effektiven Eigenschaften wird das FE-Modell der betrachteten RUC mittels Hexaeder- und Pentaeder-Elementen diskretisiert, welche durch Ansatzfunktionen mit dem Polynomgrad 2 charakterisiert sind. Durch die Symmetrie des RUC in der Querschnittsebene wird zuerst ein Viertel der Geometrie diskretisiert. Im Anschluss werden das FE-Modell und die dazugehörigen Modelldaten bezüglich der Symmetrieachsen gespiegelt, um das gesamte FE-Modell zu erhalten. Für die Berechnung der effektiven Elastizitätskoeffizienten werden die Randbedingungen aus den Gln. (3-54), (3-56), (3-58), (3-60), (3-62) und (3-64) verwendet. Zum Verhindern der Starrkörperbewegungen werden die Verschiebungsfreiheitsgrade im Querschnittsmittelpunkt einer der Randflächen der zentrierten Faser zu Null gesetzt.

Das effektive Materialverhalten eines Verbundwerkstoffes aus isotropen Phasen, dessen Faserverteilung durch eine RUC nach Abb. 5-7 beschrieben wird, ist im Allgemeinen orthotrop. Der dazugehörige Elastizitätstensor in M-V-Notation ist in Gl. (2-44) dargestellt. Diese Darstellung bezieht sich dabei auf das lokale Koordinatensystem. Bei einer Transfor-

mation auf globale Koordinaten verändert sich die Darstellung des Tensors zu Gl. (2-43). Das Materialverhalten ändert sich nicht durch die Transformation.

Validierung der Berechnungsmodelle

Zum Validieren der entwickelten Berechnungsmodelle werden die effektiven Materialeigenschaften mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen [104]. Im Fall von Faserverbundwerkstoffen mit rhombischer Faseranordnung lassen sich nur wenige Artikel finden, die sich mit der Herleitung effektiver Materialeigenschaften beschäftigen und dazu Werte präsentieren. Außerdem beziehen sich diese Werte meistens nur auf wenige Komponenten des Materialtensors. In [56], [34], [86] und [38] sind effektive Werte für die longitudinalen Schubkoeffizienten angegeben.

In [38] wird die Methode AHM („asymptotic homogenization method“) verwendet, bei der basierend auf einer asymptotischen Reihenentwicklung Differentialgleichungsprobleme hergeleitet werden, aus deren periodischer Lösung die effektiven Materialeigenschaften gewonnen werden. Diese Probleme werden mittels harmonischer, komplexwertiger Funktionsansätze und Taylor- und Laurent-Reihenentwicklungen gelöst. Die Methode in [56] (in Tabellen abgekürzt mit „Jiang“) kombiniert das Konzept des äquivalenten Einschlusses mit der Verwendung von Reihenentwicklungen komplexwertiger Potentiale.

In [34] wird eine weitere Methode (in Tabellen abgekürzt mit „G&N“) zum Lösen eines Schubproblems eines faserverstärkten Materials präsentiert. In [86] werden zwei Methoden zur Ermittlung effektiver Schubkoeffizienten für unterschiedliche periodische Mikrostrukturen behandelt. Eine Methode ist die AHM, die schon weiter oben erläutert worden ist. Die andere Methode ist die EEVM („eigenfunction expansion-variational method“). Diese Methode wird auch in [107] genutzt und basiert auf der Kombination einer Reihenentwicklung komplexwertiger Potentiale mit einem variationellen Funktional.

Für den Fall, dass die Faserlängsrichtung in y_3 -Richtung zeigt und der Faserquerschnitt in der y'_1 - y'_2 -Ebene liegt, sind die longitudinalen Schubkoeffizienten die Koeffizienten C_{2323}^{eff} und C_{1313}^{eff} . Für die Berechnung dieser Koeffizienten werden auf dem Rand der RUC aus Abb. 5-7 die periodischen Randbedingungen Gl. (3-62) beziehungsweise (3-64) verwendet. In [56] und [38] werden unidirektional faserverstärkte Verbundmaterialien aus isotropen Phasen untersucht, wobei die zugrundeliegende rhombische Faseranordnung durch den Winkel $\alpha \in \{45, 60, 90\}$ charakterisiert ist. Der Volumenanteil der Fasern variiert dabei von 0.1 bis 0.6. Für den Verbundwerkstoff wird ein Schubmodulverhältnis

$$\frac{G^f}{G^m} = 120 \quad (5-4)$$

zwischen Faser und Matrix angenommen. Da eine solche Materialbeschreibung für eine dreidimensionale FE-Analyse unzureichend ist, werden zusätzlich die Querkontraktionszahlen

$$\nu^f = \nu^m = 0.3 \quad (5-5)$$

für beide Phasen angenommen. Durch das Festlegen eines der Schubmoduln aus Gl. (5-4) und der Annahme der Isotropie ist die Materialbeschreibung der Phasen eindeutig.

Tabelle 5-3: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten (drei Nachkommastellen), verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $\alpha \in \{60^\circ, 90^\circ\}$

v^f	$\frac{C_{2323}^{\text{eff},60^\circ}}{G^m} = \frac{C_{1313}^{\text{eff},60^\circ}}{G^m}$		$\frac{C_{2323}^{\text{eff},90^\circ}}{G^m} = \frac{C_{1313}^{\text{eff},90^\circ}}{G^m}$	
	FEM	Jiang	FEM	Jiang
0.1	1.218	1.218	1.218	1.218
0.2	1.489	1.489	1.490	1.490
0.3	1.837	1.837	1.840	1.839
0.4	2.297	2.297	2.313	2.313
0.5	2.939	2.939	3.009	3.008
0.6	3.904	3.903	4.187	4.186

In Tab. 5-3 sind normierte effektive Koeffizienten, die mittels der FEM berechnet wurden, Ergebnissen aus [56] gegenübergestellt. Die Tabelle beinhaltet Werte für Modelle von Kompositwerkstoffen mit einer Faseranordnung von 60° und 90° . Man erkennt eine sehr gute Übereinstimmung der Koeffizienten. Dies gilt auch für höhere Faservolumenanteile. Des Weiteren ergibt sich, dass die Schubkoeffizienten C_{2323}^{eff} und C_{1313}^{eff} identisch sind, weshalb nur ein Schubkoeffizient aufgelistet wird. Dies ist dadurch begründet, dass ein Kompositwerkstoff mit hexagonaler Faseranordnung im homogenisierten Sinn ein transversal isotropes Materialverhalten aufweist. Im Fall der 90° -Anordnung der Fasern ist das Materialverhalten tetragonal [85], [97], [39]. Die Gleichheit der Koeffizienten bei 90° kann man sich dadurch veranschaulichen, dass die y'_2 - y'_3 -Beanspruchung einer um 90° gedrehten y'_1 - y'_3 -Beanspruchung entspricht.

Tabelle 5-4: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten (drei Nachkommastellen), verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $\alpha = 45^\circ$

v^f	$\frac{C_{2323}^{\text{eff},45^\circ}}{G^m}$		$\frac{C_{1313}^{\text{eff},45^\circ}}{G^m}$	
	FEM	Jiang	FEM	Jiang
0.1	1.225	1.225	1.211	1.211
0.2	1.526	1.525	1.458	1.458
0.3	1.951	1.950	1.751	1.751
0.4	2.606	2.606	2.107	2.106
0.5	3.803	3.803	2.555	2.554

In Tabelle 5-4 und 5-5 werden die mittels FEM berechneten effektiven Schubkoeffizienten für Modelle von Kompositwerkstoffen mit einer 45° Faseranordnung Vergleichsergebnissen aus [38] und [56] gegenübergestellt. Die Koeffizienten werden wie in den Modellen zuvor aus longitudinalen Schubbelastungen abgeleitet und sind bezüglich lokaler (siehe Tab. 5-4) und globaler Koordinaten (siehe Tab. 5-5) dargestellt. In Tab. 5-5 taucht neben den Koeffizienten C_{2323}^{eff} und C_{1313}^{eff} ein weiterer Koeffizient C_{2313}^{eff} auf, welcher sich aus der Koordinatentransformation auf globale Koordinaten nach Gl. (2-42) ergibt. Man erkennt in den Tabellen eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse der unterschiedlichen Methoden; die Werte der beiden Methoden aus der Literatur („Jiang“ und „AHM“) sind identisch.

Tabelle 5-5: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten (vier Nachkommastellen), verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $\alpha = 45^\circ$

v^f		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\frac{C_{2323}^{\text{eff}, 45^\circ}}{G^m}$	FEM	1.2231	1.5162	1.9220	2.5337	3.6210
	Jiang	1.2230	1.5160	1.9217	2.5334	3.6206
	AHM	1.2230	1.5160	1.9217	2.5334	3.6206
$\frac{C_{2313}^{\text{eff}, 45^\circ}}{G^m}$	FEM	-0.0047	-0.0238	-0.0706	-0.1767	-0.4414
	Jiang	-0.0047	-0.0238	-0.0706	-0.1767	-0.4414
	AHM	-0.0047	-0.0238	-0.0706	-0.1767	-0.4414
$\frac{C_{1313}^{\text{eff}, 45^\circ}}{G^m}$	FEM	1.2137	1.4685	1.7806	2.1802	2.7382
	Jiang	1.2136	1.4684	1.7804	2.1800	2.7378
	AHM	1.2136	1.4684	1.7804	2.1800	2.7378

Tabelle 5-6: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $\alpha = \arccos(1/4)$, $G^f/G^m = 20$

v^f		0.3	0.5	0.7
$\frac{C_{2323}^{\text{eff}}}{G^m}$	FEM	1.74	2.66	4.83
	G&N	1.74	2.66	4.83
	AHM	1.74	2.66	4.83
	EEVM	1.74	2.66	4.83
$\frac{C_{2313}^{\text{eff}}}{G^m}$	FEM	0.02	0.08	0.34
	G&N	0.02	0.08	0.34
	AHM	0.02	0.08	0.34
	EEVM	0.02	0.08	0.34
$\frac{C_{1313}^{\text{eff}}}{G^m}$	FEM	1.75	2.70	5.00
	G&N	1.75	2.70	5.00
	AHM	1.75	2.70	5.00
	EEVM	1.75	2.70	5.00

Für eine weitere Validierung werden die Modelle aus [86] und [34] benutzt. Die Validierung bezieht sich ebenfalls auf die longitudinalen Schubkoeffizienten. Die in Tab. 5-6 und 5-7 dargestellten normierten Koeffizienten, welche auf das globale Koordinatensystem bezogen sind, charakterisieren das effektive Materialverhalten von Kompositwerkstoffen mit einer Faseranordnung, die durch den Winkel $\alpha = \arccos(1/4)$ beschrieben wird. Dies ist ca. 75.5° . Die Phasen der Verbundwerkstoffe sind in der Literatur über ein Schubmodulverhältnis von 20 und 120 angegeben. Der Faservolumenanteil variiert von 0.3 bis 0.7 mit einem Inkrement von 0.2. Für eine FE-Analyse werden die Querkontraktionszahlen aus Gl. (5-5) verwendet.

Die dargestellten Koeffizienten der in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodelle (Tab. 5-6 und 5-7) sind auf die zweite Nachkommastelle gerundet. Die Ergebnisse der drei Methoden („G&N“, „AHM“, „EEVM“) aus der Literatur stimmen sehr gut mit den berechneten Werten („FEM“) überein. Dies gilt auch im Fall hoher Faservolumenanteile.

Tabelle 5-7: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $\alpha = \arccos(1/4)$, $G^f/G^m = 120$

v^f		0.3	0.5	0.7
$\frac{C_{2323}^{\text{eff}}}{G^m}$	FEM	1.83	2.96	6.16
	G&N	1.83	2.96	6.16
	AHM	1.83	2.96	6.16
	EEVM	1.83	2.96	6.16
$\frac{C_{2313}^{\text{eff}}}{G^m}$	FEM	0.02	0.11	0.60
	G&N	0.02	0.11	0.60
	AHM	0.02	0.11	0.60
	EEVM	0.02	0.11	0.60
$\frac{C_{1313}^{\text{eff}}}{G^m}$	FEM	1.84	3.01	6.47
	G&N	1.84	3.01	6.47
	AHM	1.84	3.01	6.47
	EEVM	1.84	3.01	6.47

Diese gute Übereinstimmung mit Homogenisierungsmethoden aus der Literatur zeigt, dass sich die entwickelten Berechnungsmodelle für die Bestimmung der effektiven longitudinalen Schubkoeffizienten eignen.

Tabelle 5-8: Materialeigenschaften der Faser und Matrix nach [42]

Matrix Epoxid		Faser Kohlenstoff					
E^m [GPa]	ν^m	E_t^f [GPa]	ν_t^f	E_t^f [GPa]	ν_t^f	G_t^f [GPa]	
3.45	0.35	345	0.2	9.66	0.3	2.07	

Da sich mit dem in dieser Arbeit entwickelten Berechnungskonzept alle Koeffizienten eines Elastizitätstensors ermitteln lassen, ist die oben angegebene Validierung noch nicht vollständig, weil nur die Schubkoeffizienten betrachtet wurden. Daher wird das entwickelte Berechnungskonzept mit einer weiteren Methode validiert [104]. In [42] werden unidirektional faserverstärkte Verbundwerkstoffe (zwei Phasen), welche durch ein transversal isotropes Materialverhalten charakterisiert werden, betrachtet und die dafür effektiven Materialeigenschaften angegeben. Für die Berechnung der Eigenschaften wurde in [42] die CCA-Modellierung genutzt, welche in Abschnitt 3.2.1 näher dargestellt ist. Durch sie lassen sich explizite Formeln für longitudinale Materialkonstanten und Schranken für transversale Konstanten herleiten. Eine Ausnahme bildet der transversale Kompressionsmodul. Ein äquivalentes transversal isotropes Modell eines Kompositwerkstoffes kann in der FEM durch eine geeignete RUC gebildet werden. Für den folgenden Vergleich wird eine hexagonale Faseranordnung ($\alpha = 60^\circ$) genutzt. Die Materialeigenschaften der Faser- und Matrixphase sind der Tab. 5-8 zu entnehmen. Die Phasen besitzen ein isotropes beziehungsweise ein transversal isotropes Materialverhalten. Zur Beschreibung des Phasenmaterials reichen daher zwei beziehungsweise fünf unabhängige Materialkonstanten (siehe Abschnitt 2.3) aus, um den jeweiligen Elastizitätstensor bilden zu können.

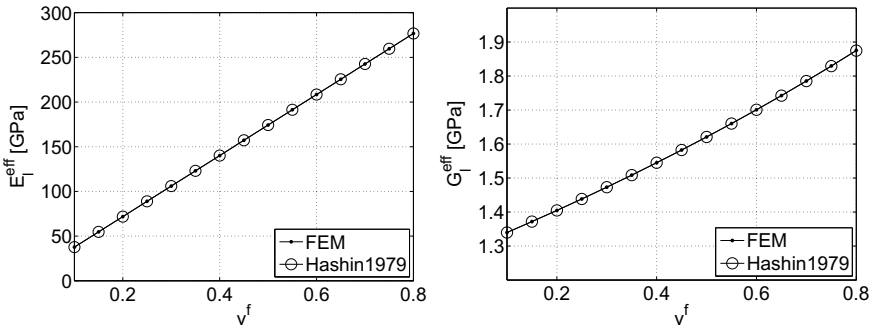


Abbildung 5-8: Longitudinale Moduli, links: Elastizitätsmodul, rechts: Schubmodul, $\alpha = 60^\circ$

In den Abb. 5-8 bis 5-10 sind die berechneten effektiven Materialkonstanten in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil dargestellt. Mit „Hashin1979“ sind die Koeffizienten aus der CCA-Modellierung nach [42] gekennzeichnet. Ein hochgestellter Index „-“ oder „+“ kennzeichnet die Ergebnisse als untere beziehungsweise obere Schranke. Infolge des transversal isotropen effektiven Materialverhaltens lässt sich der zugehörige Elastizitätstensor aus fünf voneinander unabhängigen Materialkonstanten bilden. Diese sind zum Beispiel der Elastizitätsmodul E_l^{eff} , der Schubmodul G_l^{eff} und die Querkontraktionszahl ν_l^{eff} in longitudinaler Richtung sowie der Elastizitätsmodul E_t^{eff} und die Querkontraktionszahl ν_t^{eff} in transversaler Richtung (siehe Abschnitt 2.3).

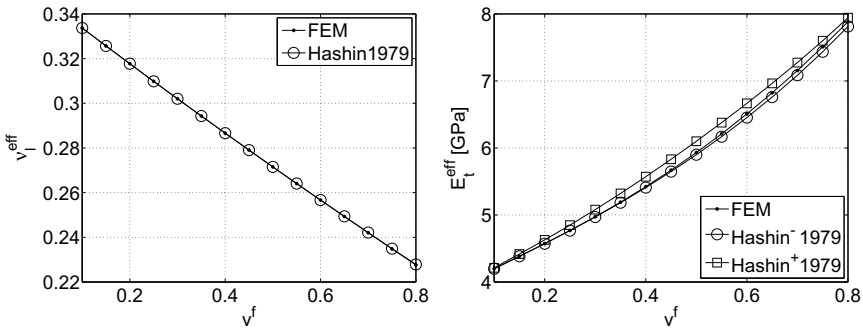


Abbildung 5-9: Elastizitätskonstanten, links: longitudinale Querkontraktionszahl, rechts: transversaler Elastizitätsmodul, $\alpha = 60^\circ$

Die Abb. 5-8 und 5-9 zeigen die longitudinalen Konstanten in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil. Es ist zu erkennen, dass sich die Querkontraktionszahl in umgekehrter Weise wie der Elastizitätsmodul und der Schubmodul verhält. Während mit einem zunehmenden Volumenanteil die Elastizitätsmoduln ansteigen, sinkt die Querkontraktionszahl ab. Ebenso ist zu erkennen, dass der longitudinale Elastizitätsmodul und die longitudinale Querkontraktionszahl einen ausgeprägten linearen Verlauf aufweisen. Betrachtet man die

Berechnungsformeln der CCA-Modellierung Gl. (3-25) und (3-26) für diese Größen, wird dies aus den ersten beiden Termen der jeweiligen Formel offensichtlich. Ohne Berücksichtigung des dritten Terms würde man als Formel den arithmetischen Mittelwert bekommen. Dies würde der Mischungsregel nach VOIGT entsprechen. Hinsichtlich des Vergleichs mit der CCA-Modellierung nach Hashin ist eine gute Übereinstimmung für alle Faservolumenanteile zu erkennen.

In Abb. 5-9 und 5-10 sind transversale Konstanten (FE-Modell) beziehungsweise Schranken (nach [42]) dargestellt. Die Berechnungsformeln für die Schranken sind den Gln. (3-28) bis (3-31) zu entnehmen. Wie im longitudinalen Fall ist ein umgekehrtes Verhalten der Kurven der Elastizitätsmodul/Schubmoduln (steigend) und der Querkontraktionszahl (fallend) bei einem zunehmenden Faservolumenanteil zu erkennen. Die Ergebnisse für den Schubmodul aus der FE-Modellierung verlaufen anfangs nahe der unteren Schranke und nähern sich mit zunehmendem Faservolumenanteil der oberen Schranke an. Im Fall der Querkontraktionszahl ist dies gerade anders herum. Die Kurven der FEM-Rechnung liegen innerhalb der analytischen Schranken.

Es lässt sich zusammenfassen, dass sich die entwickelten Berechnungsmodelle im Großen und Ganzen zum Ermitteln der effektiven Materialeigenschaften eignen.

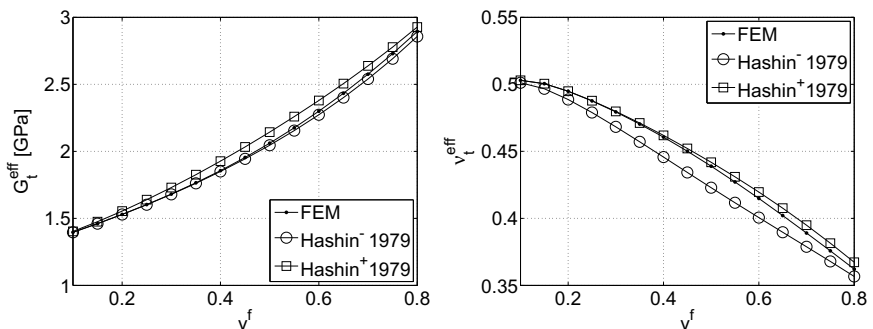


Abbildung 5-10: Elastizitätskonstanten, links: transversaler Schubmodul, rechts: transversale Querkontraktionszahl, $\alpha = 60^\circ$

Weitere Untersuchungen

Nachdem die Berechnungsmodelle validiert worden sind, wird im Folgenden der Einfluss der Faseranordnung auf die effektiven Koeffizienten für unterschiedliche Faservolumenanteile untersucht. Dazu wird eine Parameterstudie durchgeführt, wobei der Winkel α und der Faservolumenanteil v^f variiert werden [104]. Die Faservolumenanteile wurden exemplarisch gewählt. Es werden Volumenanteile von 0.1 bis 0.7 genutzt. Die verwendeten Materialdaten sind der Tabelle 5-8 zu entnehmen.

In den Abb. 5-11 bis 5-13 sind die effektiven Materialkonstanten in Abhängigkeit vom Winkel α angegeben. Die Konstanten werden aus den Komponenten $\bar{C}_{ij}^{\text{eff}}$ der Elastizitätsmatrix abgeleitet, welche bezüglich des lokalen Koordinatensystems berechnet wurden. Da ein unidirektional faserverstärkter Verbundwerkstoff mit einer rhombischen Faseranordnung im

Allgemeinen orthotrope Eigenschaften hat, und da die Achsen des lokalen Koordinatensystems Symmetrieachse sind, lassen sich die Konstanten aus der Gl. (2-45) bestimmen.

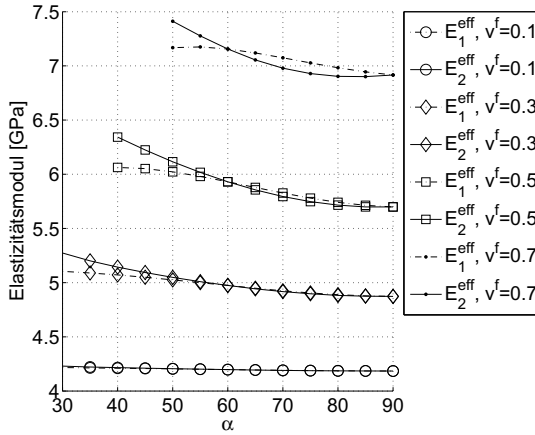


Abbildung 5-11: Effektive transversale Elastizitätsmodul unterschiedlicher Faservolumenanteile v^f in Abhängigkeit von α

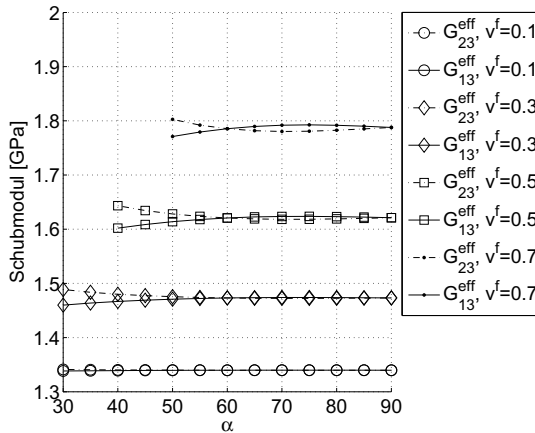


Abbildung 5-12: Effektive longitudinale Schubmodul unterschiedlicher Faservolumenanteile v^f in Abhängigkeit von α

In Abb. 5-11 und 5-12 sind die effektiven transversalen Elastizitätsmodul in der y'_1 - y'_2 -Ebene beziehungsweise die longitudinalen Schubmodul in Faserlängsrichtung dargestellt. Man erkennt, dass bei einer Faseranordnung von 60° und 90° eine Übereinstimmung der Werte von E_1^{eff} und E_2^{eff} im numerischen Sinn vorliegt, was plausibel ist, da bei 60° und 90°

ein transversal isotropes beziehungsweise tetragonales Materialverhalten vorliegt. Für den Winkelbereich zwischen 60° bis 90° ist zu erkennen, dass sich die transversalen Moduln mit einem höheren Faservolumenanteil zunehmend voneinander unterscheiden. Ab einem Winkel von 60° ist ein Wechsel des größten Elastizitäts- beziehungsweise Schubmoduls zu beobachten.

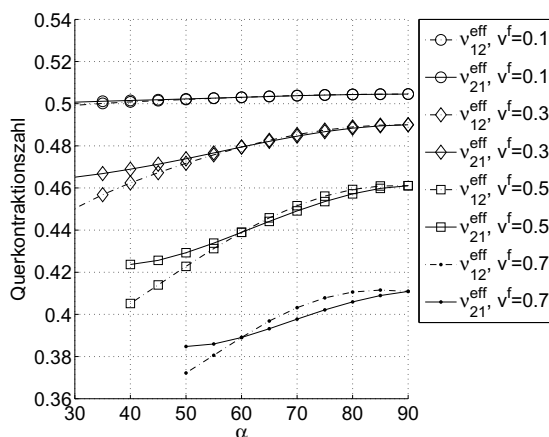


Abbildung 5-13: Effektive transversale Quercontraktionszahlen unterschiedlicher Faservolumenanteile v^f in Abhängigkeit von α

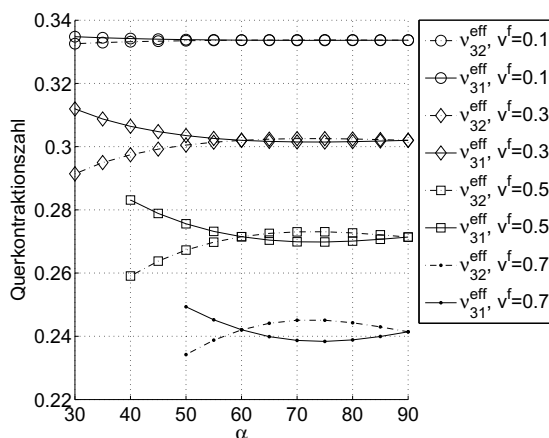


Abbildung 5-14: Effektive longitudinale Quercontraktionszahlen unterschiedlicher Faservolumenanteile v^f in Abhängigkeit von α

Der größte Unterschied zwischen E_1^{eff} und E_2^{eff} oder G_{13}^{eff} und G_{23}^{eff} herrscht vor, wenn der Winkel α am kleinsten ist. Des Weiteren erkennt man, dass die Elastizitätsmoduln mit zunehmendem Winkel eher fallen.

In Abb. 5-13 und 5-14 sind die transversalen und longitudinalen Querkontraktionszahlen dargestellt. Wie im Fall der Moduln sind die paarweise dargestellten Querkontraktionszahlen für 60° und 90° von gleicher Größenordnung. Ebenso ist der Einfluss des zunehmenden Faservolumenanteils auf die Konstanten und der Wechsel der dominierenden Querkontraktionszahl erkennbar.

Tabelle 5-9: Prozentuale Abweichung (gerundet auf eine Stelle nach dem Komma) vom Minimum zum Maximum für ausgewählte Materialkonstanten

Vol.-anteil	E_1^{eff}	E_2^{eff}	G_{12}^{eff}	G_{23}^{eff}	ν_{32}^{eff}	ν_{12}^{eff}
0.5	6.0 %	10.2 %	10.2 %	1.5 %	5.1 %	12.1 %
0.7	3.6 %	6.9 %	7.2 %	1.2 %	4.4 %	9.6 %

Dass die Berechnungsmodelle bei den verschiedenen Volumenanteilen unterschiedliche Winkelbereiche durchlaufen, liegt an der Abbruchbedingung Gl. (5-3) für die Geometrieerstellung, da sich ansonsten die Randfasergeometrien überschneiden oder die zentrierte Faser aus der Rechteckgeometrie herausragen würden.

Die Elastizitätsmoduln/Schubmoduln steigen und die Querkontraktionszahlen fallen mit einem zunehmenden Faservolumenanteil.

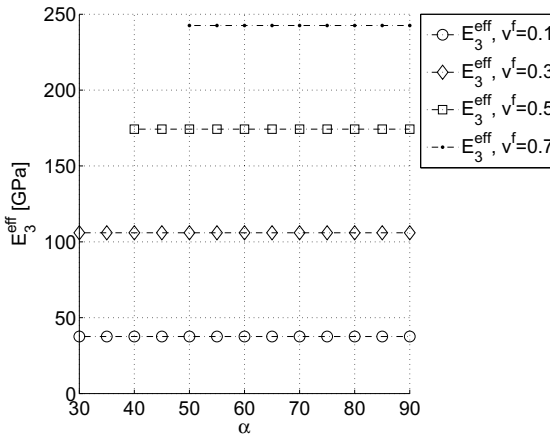


Abbildung 5-15: Effektiver Elastizitätsmodul E_3^{eff} unterschiedlicher Faservolumenanteile v^f in Abhängigkeit von α

Aus den Abbildungen ist erkennbar, dass der Faservolumenanteil einen größeren Einfluss auf die Materialkonstanten besitzt als die Faseranordnung. Dennoch darf der Einfluss der Faseranordnung nicht vernachlässigt werden. In Tab. 5-9 ist exemplarisch für ausgewählte Konstanten zu einem festen Faservolumenanteil die prozentuale Abweichung des Minimums zum Maximum einer Konstante über alle Faseranordnungen dargestellt. Die Formel, welche

zur Berechnung des Unterschieds benutzt wurde, wird am Beispiel des Elastizitätsmoduls E_1^{eff} erläutert. Sie lautet

$$\text{diff2} = \frac{|E_1^{\text{eff,max}} - E_1^{\text{eff,min}}|}{E_1^{\text{eff,max}}} 100\% \quad (5-6)$$

Die Größen $E_1^{\text{eff,max}}$ und $E_1^{\text{eff,min}}$ sind der maximale beziehungsweise der minimale effektive Elastizitätsmodul E_1^{eff} für alle Faseranordnungen zu einem konkreten Faservolumenanteil. Die Unterschiede der anderen Konstanten werden analog zu Gl. (5-6) berechnet. Die Faseranordnung beeinflusst die effektiven Konstanten unterschiedlich. Eine Konstante, auf die die Faseranordnung keinen erkennbaren Einfluss ausübt, ist der effektive Elastizitätsmodul E_3^{eff} (siehe Abb. 5-15).

5.1.2 Rhombischer RUC-Querschnitt mit imperfektem Phasenübergang

Die bisherigen Ergebnisse resultieren aus einem RUC-Modell mit Rechteckquerschnitt und einem perfekten Phasenübergang zwischen Matrix und Faser. Dieser Phasenübergang wird nun durch den in Abschnitt 3.4 beschriebenen imperfekten Phasenübergang ersetzt. Im Rahmen der FE-Modellierung ist die imperfekte Phasenübergangsbeschreibung, welche auch in [105] verwendet wurde, in Abschnitt 4.4 zu finden.

Für eine Validierung der in diesem Teilabschnitt entwickelten Berechnungsmodelle wird auf die in Abschnitt 3.2 beschriebenen Methoden (CCA, GSCS) zurückgegriffen. Im Anschluss daran wird der Einfluss von Materialveränderungen auf die effektiven Elastizitätskoeffizienten untersucht.

Validierung der Berechnungsmodelle

Die Berechnungsmodelle mit einem imperfekten Phasenübergang werden anhand von Modellen aus dem Artikel von Hashin [46] validiert [105]. Diese Modelle wurden bereits im Abschnitt 3.2 beschrieben. Dabei handelt es sich um das CCA-Modell und das verallgemeinerte Selbstkonsistenzschema (GSCS). Die Modelle aus der Literatur basieren auf Drei-Phasen-Beschreibungen des Kompositwerkstoffes, die einen perfekten Übergang von einer Phase zur nächsten besitzen. Der Verbundwerkstoff setzt sich aus einer Matrix-, einer Faser- und einer Zwischenphase, welche Matrix und Faser voneinander trennt, zusammen. Die Materialeigenschaften der Phasen werden als elastisch und isotrop angenommen. Das resultierende effektive Materialverhalten des Verbundwerkstoffes aus der CCA-Modellierung und der GSCS-Modellierung ist transversal isotrop.

Die elastischen Materialeigenschaften der Matrix und der Faser, die hier zur Validierung genutzt werden, wurden dem Artikel [46] entnommen. Diese Eigenschaften sind durch ein Schubmodulverhältnis von $G^f/G^m = 10$ und die Querkontraktionszahlen $\nu^m = 0.35$ und $\nu^f = 0.2$ angegeben. Die Zwischenphase besitzt eine Querkontraktionszahl von $\nu^i = 0.3$. Der Schubmodul G^i der Zwischenphase wird variiert.

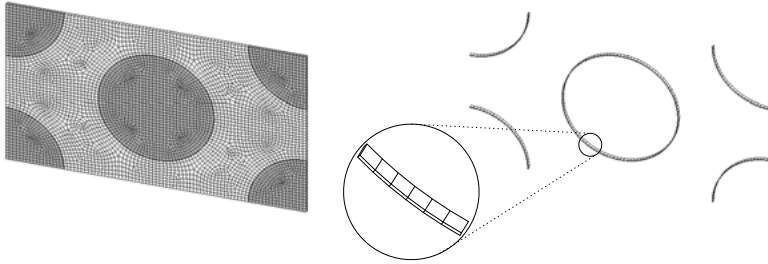


Abbildung 5-16: Diskretisierung des Drei-Phasen-Modells mit separater Darstellung der Zwischenphase, $\alpha = 60^\circ$ und $v^f = 0.4$

Der Faservolumenanteil beträgt $v^f = 0.4$. Die Zwischenphase, welche die zylinderförmige Faser von der Matrix trennt, besitzt eine konstante Dicke t^i . Die Dicke ist durch die Beziehung [46]

$$t^i = \eta r^f, \quad (5-7)$$

gegeben, wobei η ein vorgegebener Parameter und r^f der Faserradius sind.

Für die Validierung werden zusätzlich FE-Berechnungsmodelle entwickelt, welche ebenfalls drei Phasen aufweisen. Die Zwischenphase wird durch einen Ring aus finiten Elementen diskretisiert. Da die Geometrie dieser Phase einen sehr dünnen Ring bildet, erfolgt die Diskretisierung in radialer Richtung mit einem finiten Element (siehe Abb. 5-16). Das in Abb. 5-16 dargestellte, diskretisierte Modell einer RUC repräsentiert einen unidirektionalen Faserverbundwerkstoff mit einer hexagonalen Faseranordnung, dessen effektives Materialverhalten transversal isotrop ist.

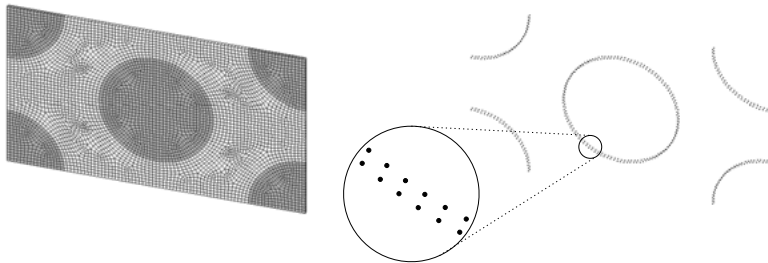


Abbildung 5-17: Diskretisierung des imperfekten Modells mit separater Darstellung der Knoten der Federelemente (imperfekter Phasenübergang), $\alpha = 60^\circ$ und $v^f = 0.4$

In Abb. 5-17 ist das diskretisierte RUC-Modell dargestellt, welches sich aus einer Matrixphase, einer Faserphase und einer imperfekten Phasenübergangsbeschreibung zusammensetzt. Für die Volumendiskretisierung werden Hexaeder- und Pentaeder-Elemente mit einem Polynomgrad von 1 verwendet. Der imperfekte Phasenübergang wird durch Federelemente beschrieben (siehe Abschnitt 4.4). Zur Erinnerung, die Matrix und die Faser besitzen eine identische Knotenverteilung an den jeweiligen Phasenrandflächen, die zu Γ_{mf} gehören. Die Federelemente verknüpfen die Knotenpaarungen miteinander (siehe Abb. 5-17).

Um einen Vergleich des imperfekten RUC-Modells mit einem Drei-Phasen-Modell zu gewährleisten, müssen die Steifigkeiten der Federelemente entsprechend gewählt werden. Da die Zwischenphase der Drei-Phasen-Modellierung isotrop ist, lassen sich die Beziehungen aus den Gln. (3-75) und (4-31) nutzen.

In den Abb. 5-18 bis 5-23 sind die Ergebnisse der Berechnung in Form normierter effektiver Materialkonstanten dargestellt. Die Ergebnisse aus den in dieser Arbeit entwickelten FE-Modellierungen sind durch den Zusatz „FEM“ gekennzeichnet. Die dargestellten Konstanten sind der transversale Kompressionsmodul, der longitudinale Schubmodul und der transversale Schubmodul. Alle weiteren Konstanten lassen sich ebenfalls berechnen, werden aber hier nicht angegeben. Für die Validierung sind die ausgewählten Konstanten ausreichend.

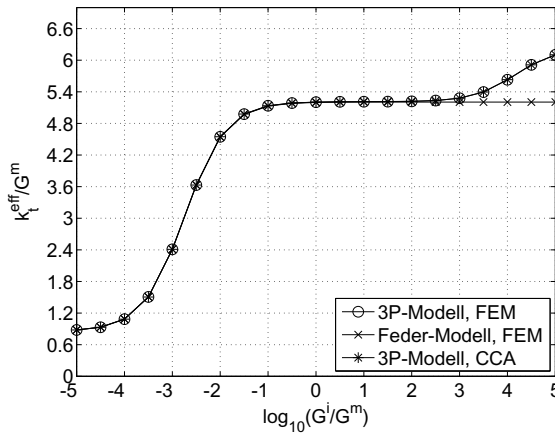


Abbildung 5-18: Normierter effektiver transversaler Kompressionsmodul bei $\eta = 0.001$ in Abhängigkeit von G^i/G^m

Für die dargestellten Konstanten wurde eine Zwischenphasendicke von einem Tausendstel des Faserradius verwendet. Der transversale Kompressionsmodul und der longitudinale Schubmodul stimmen bis zu einem Wert von $\log_{10}(G^i/G^m) < 2$ sehr gut mit den Vergleichsergebnissen („CCA“, „3P-Modell FEM“) überein. Für sehr kleine G^i wird im Fall der Drei-Phasen-Modellierung infolge der Randbedingungen der Lasttransfer zwischen Matrix- und Faserphase reduziert. Ähnlich verhält es sich bei der Modellierung mit dem imperfekten Phasenübergang. Die versteifende Wirkung der Fasern kommt somit kaum zum Tragen. Für $\log_{10}(G^i/G^m) > 2$ zeigt sich zwischen den Drei-Phasen-Modellierungen und dem Fe-

dermodell eine immer größer werdende Abweichung. Die imperfekte Phasenübergangsmodellierung führt im Grenzfall $G^i = \infty$ zu Ergebnissen eines aus zwei Phasen bestehenden Verbundwerkstoffes mit einem perfekten Kontakt. Bei der Drei-Phasen-Modellierung wird die Zwischenphase nahezu ein starres Medium im Vergleich zu den anderen beiden beteiligten Phasen. Dadurch ergibt sich ein nicht zu vernachlässigender Anteil bei der Ermittlung der gemittelten Spannungen, welcher in die Berechnung der effektiven Materialeigenschaften eingeht. Werden nur die Ergebnisse der Drei-Phasen-Modellierungen miteinander verglichen, erkennt man, dass über den gesamten dargestellten Bereich von G^i/G^m eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse vorliegt. Bei allen drei Abbildungen der Materialkonstanten liegt der Bereich, bei dem sich die Werte der effektiven Werkstoffeigenschaften signifikant ändern, zwischen ca. $\log_{10}(G^i/G^m) = -4$ und $\log_{10}(G^i/G^m) = -1$. Die Ursache dafür ist die Isotropie der Zwischenphase.

In Abb. 5-20 sind die transversalen Schubmoduln zu sehen. Anstelle einer CCA-Modellierung wird zur Validierung das verallgemeinerte Selbstkonsistenzschema (GSCS) aus Abschnitt 3.2.2 verwendet, welches in [46] näher erläutert ist. Zur Erinnerung, dies war dadurch begründet, dass für transversale Konstanten (Ausnahme: transversaler Kompressionsmodul) keine Lösung nach einer CCA-Modellierung existiert.

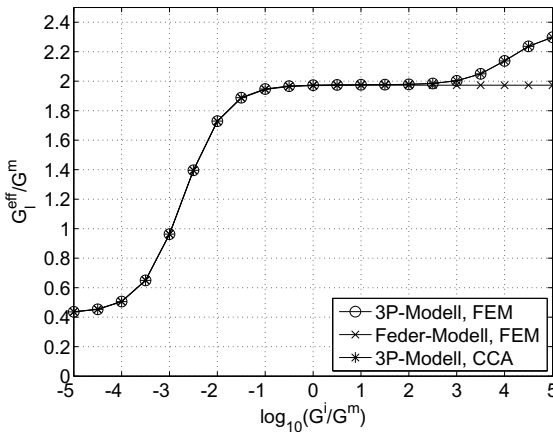


Abbildung 5-19: Normierter effektiver longitudinaler Schubmodul bei $\eta = 0.001$ in Abhängigkeit von G^i/G^m

Vergleicht man die Ergebnisse der Drei-Phasen-Modellierungen miteinander, so ist eine Abweichung zwischen den berechneten Werten erkennbar. Da die Ergebnisse aus den FE-Modellierungen in Abb. 5-18, 5-19 sowie in Abb. 5-20 für weite Teile eine gute Übereinstimmung zeigen, wird ein Modellierungsfehler ausgeschlossen. In [46] wird festgehalten, dass das GSCS im Allgemeinen als Näherungsmethode aufzufassen ist, was als Ursache für die Abweichung zu deuten ist. Dies wird bestärkt durch einen annähernd parallelen Verlauf der Drei-Phasen-Modellierungen im Bereich $-1 < \log_{10}(G^i/G^m) < -5$.

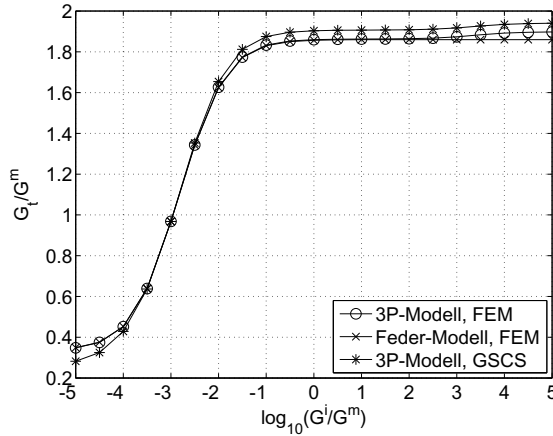


Abbildung 5-20: Normierter effektiver transversaler Schubmodul bei $\eta = 0.001$ bezüglich G^i/G^m

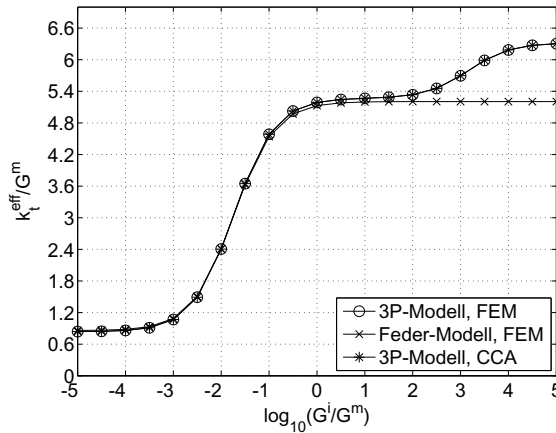


Abbildung 5-21: Normierter effektiver transversaler Kompressionsmodul bei $\eta = 0.01$ in Abhängigkeit von G^i/G^m

Die Abweichungen der Ergebnisse zwischen den Drei-Phasen-Modellierungen betragen ca. 23.3% bei $\log_{10}(G^i/G^m) = -5$ beziehungsweise ca. 2.2% bei $\log_{10}(G^i/G^m) = 5$. Werden die Ergebnisse der FE-Berechnungsmodelle miteinander verglichen, so ist eine gute Übereinstimmung bis ca. $\log_{10}(G^i/G^m) < 2.5$ zu erkennen.

Eine Erhöhung der Dicke der Zwischenphase führt zu einem höheren Phasenvolumenanteil. Dadurch nimmt der Einfluss der Zwischenphase in der Berechnung der makroskopischen

Spannungen zu und die Ergebnisse der Drei-Phasen-Modelle und des Federmodells weichen stärker von einander ab (siehe Abb. 5-21 bis 5-23).

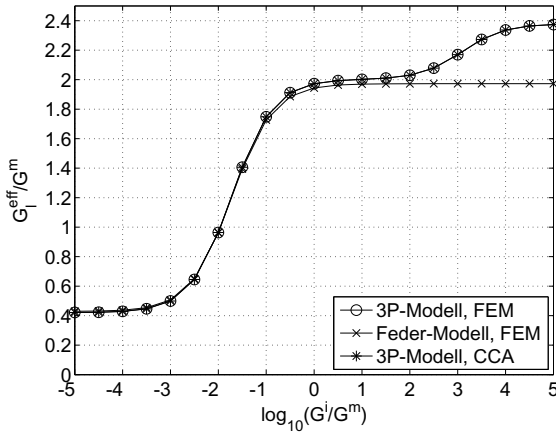


Abbildung 5-22: Normierter effektiver longitudinaler Schubmodul bei $\eta = 0.01$ in Abhängigkeit von G^i/G^m

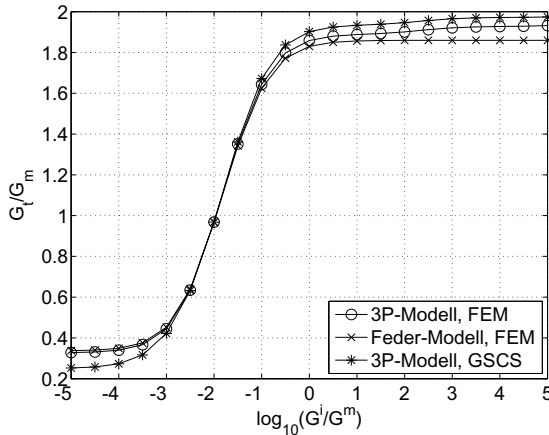


Abbildung 5-23: Normierter effektiver transversaler Schubmodul bei $\eta = 0.01$ in Abhängigkeit von G^i/G^m

Materialkennwerte (Elastizitätsmodul, Schubmodul, Querkontraktionszahl) von realen Materialien können sich um das Hundertfache unterscheiden. Somit ist ein Schubmodulverhältnis von $(G^i/G^m) = 10$ für die Phasen eines Kompositwerkstoffes aus Sicht der Praxis durchaus realistisch. Im Fall einer Zwischenphase ist es naheliegend, den Bereich des

Zwischenphasenschubmoduls auf $-1 < \log_{10}(G^i/G^m) < 1$ ($-2 < \log_{10}(G^i/G^f) < 0$) zu begrenzen. Bei einer Einschränkung auf diesen Bereich lässt sich eine gute bis sehr gute Übereinstimmung der FE-Ergebnisse (Drei-Phasen-Modell/Federmodell) aus den Abbildungen erkennen. Im Fall einer Zwischenphasendicke von einem Hundertstel des Faserradius ($\eta = 0.01$) ist die prozentuale Abweichung der Federmodellergebnisse von den Drei-Phasen-Modellergebnissen für den eingeschränkten Bereich aus der Tab. 5-10 zu entnehmen. Die Berechnungsformel für die Abweichung lautet

$$\text{diff3} = \frac{|P^{\text{eff}} - P^{\text{eff,ref}}|}{P^{\text{eff,ref}}} 100\% \quad (5-8)$$

Die Größe P^{eff} kennzeichnet eine beliebige effektive Konstante. Als Referenzwerte $P^{\text{eff,ref}}$ dienen die effektiven Konstanten der Drei-Phasen-Modellierung (3P-Modell FEM).

Tabelle 5-10: Prozentuale Abweichung der Ergebnisse des Federmodells von dem Drei-Phasen-Modell (3P-Modell FEM) (gerundet auf zwei Stellen nach dem Komma) im Intervall $-1 < \log_{10}(G^i/G^m) < 1$

$\log_{10}(G^i/G^m)$	k_t^{eff}	G_t^{eff}	G_t^{eff}
-1	0.91 %	1.21 %	1.16 %
0	1.16 %	1.45 %	1.53 %
1	1.30 %	1.61 %	1.66 %

Es lässt sich zusammenfassen, dass die Ergebnisse der Federmodellierung über weite Strecken von gleicher Größenordnung wie die der Drei-Phasen-Modellierung mit einer sehr dünnen Zwischenschicht sind. Mit einer zunehmenden Steifigkeit und Dicke der Zwischenphase weichen die Ergebnisse stärker voneinander ab. Eingeschränkt auf das Intervall $-1 < \log_{10}(G^i/G^m) < 1$ lässt sich im Rahmen der Homogenisierung die Drei-Phasen-Modellierung bis zu einer gewissen Zwischenphasendicke näherungsweise durch die Federmodellierung ersetzen. Bei einer deutlichen Ausprägung der Zwischenphase ist ein Drei-Phasen-Modell einem Federmodell vorzuziehen.

Weitere Untersuchungen

Nachfolgend werden weitere Untersuchungen zu den Berechnungsmodellen mit einem imperfekten Phasenübergang durchgeführt. Diese haben das Ziel, den Einfluss des Materialunterschieds der beteiligten Phasen auf die effektiven Werkstoffeigenschaften näher zu untersuchen. Im Zusammenhang mit einer Drei-Phasen-Modellierung kann zusätzlich festgestellt werden, wie die Materialveränderung die Vergleichbarkeit der Modelle beeinflusst. Dies wird anhand exemplarisch ausgewählter effektiver Elastizitätskoeffizienten veranschaulicht.

Tabelle 5-11: Fixierte Geometrie- und Materialeigenschaften

α	v^f	ν^f	ν^m	ν^i
60°	0.4	0.2	0.35	0.3

Für die Untersuchung des Einflusses der beteiligten Phaseigenschaften auf die effektiven Elastizitätskoeffizienten wird angenommen, dass die Phase der Matrix, der Faser und der Zwischenschicht (für die imperfekte Phasenübergangsbeschreibung) ein isotropes

Materialverhalten besitzen. Es werden die in der Tab. 5-11 aufgeführten Geometrie- und Materialinformationen in den Berechnungsmodellen verwendet. Diese Informationen sind der Winkel α , der Faservolumenanteil v^f und die Querkontraktionszahlen der Faser ν^f , der Matrix ν^m und der Zwischenphase ν^i . Zusätzlich werden die Schubmoduln der Matrix- und Faserphase über ein Verhältnis G^f/G^m (G^m hat den Wert 1) vorgegeben. Die Zwischenphasendicke wird auf ein Tausendstel und ein Hundertstel des Faserradius festgelegt.

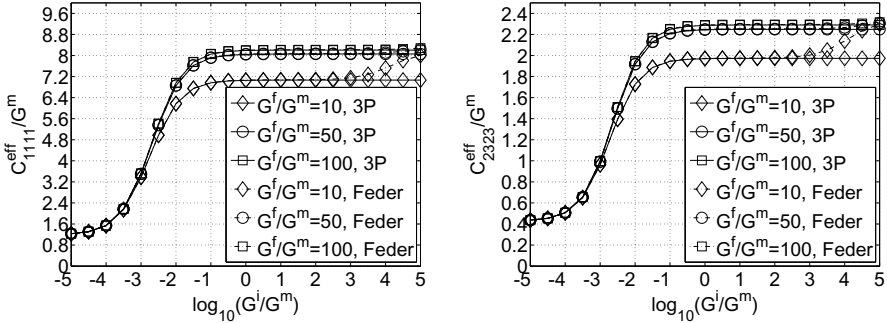


Abbildung 5-24: Normierte Koeffizienten C_{1111}^{eff}/G^m und C_{2323}^{eff}/G^m , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $\alpha = 60^\circ$, $v^f = 0.4$, $\eta = 0.001$

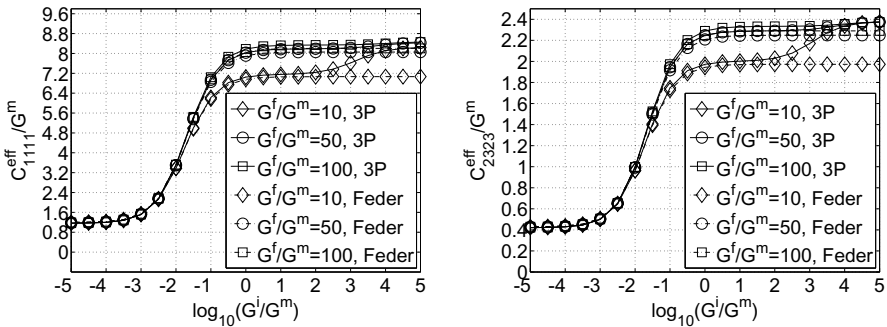


Abbildung 5-25: Normierte Koeffizienten C_{1111}^{eff}/G^m und C_{2323}^{eff}/G^m , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $\alpha = 60^\circ$, $v^f = 0.4$, $\eta = 0.01$

In Abb. 5-24 und 5-25 sind die normierten Elastizitätskoeffizienten C_{1111}^{eff} und C_{2323}^{eff} in Abhängigkeit von G^i/G^m für drei verschiedene Schubmodulverhältnisse zwischen Faser und Matrix dargestellt. Die Verhältnisse sind durch die Werte 10, 50 und 100 angegeben. Die Veränderung des Schubmodulverhältnisses von 10 zu 100 bewirkt eine Vergrößerung des Wertebereiches von C_{1111}^{eff}/G^m und C_{2323}^{eff}/G^m . Des Weiteren lässt sich ein Einfluss auf die Vergleichbarkeit der Federmodellierung mit der Drei-Phasen-Modellierung feststellen

(siehe Tab. 5-12). Bei einer Einschränkung des Zwischenphasenmaterials auf das Intervall $-1 < \log(G^i/G^m) < 1$ ist mit einem zunehmenden Materialverhältnis G^f/G^m eine leichte Erhöhung in der prozentualen Abweichung der Modellergebnisse erkennbar. Für die Berechnung der Abweichung wird die Gl. (5-8) verwendet. Die Größe P^{eff} kennzeichnet hier einen beliebigen effektiven Elastizitätskoeffizienten der Federmodellierung. Als Referenzwert $P^{\text{eff,ref}}$ dient der jeweilige effektive Koeffizient der Drei-Phasen-Modellierung.

Tabelle 5-12: Prozentuale Abweichung der Ergebnisse des Federmodells von dem Drei-Phasen-Modell (3P-Modell FEM) (gerundet auf zwei Stellen nach dem Komma) im Intervall $-1 < \log_{10}(G^i/G^m) < 2$, Zwischenphasendicke beträgt ein Hundertstel des Faserradius

$\log_{10}(G^i/G^m)$	$G^f/G^m = 10$		$G^f/G^m = 50$		$G^f/G^m = 100$	
	C_{1111}^{eff}	C_{2323}^{eff}	C_{1111}^{eff}	C_{2323}^{eff}	C_{1111}^{eff}	C_{2323}^{eff}
-1	0.98 %	1.21 %	1.19 %	1.47 %	1.22 %	1.51 %
0	1.26 %	1.45 %	1.53 %	1.77 %	1.57 %	1.81 %
1	1.40 %	1.61 %	1.57 %	1.81 %	1.61 %	1.85 %
2	2.36 %	2.83 %	1.63 %	1.88 %	1.63 %	1.87 %

5.1.3 Parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt mit perfektem Phasenübergang

In den vorherigen Abschnitten wurden Kompositwerkstoffe mit einer rhombischen Faseranordnung untersucht. Die periodische Verteilung der unidirektionalen Faser kann dabei durch einen Rhombus beschrieben werden. Verändert man nun eine Kantenlänge des Rhombus, so entsteht ein Parallelogramm.

Dieser Teilabschnitt befasst sich mit Berechnungsmodellen unter Verwendung einer RUC mit einem Parallelogramm-Querschnitt und einem perfekten Phasenübergang. Zuerst werden die Berechnungsmodelle anhand von Modellen aus der Literatur validiert. Im Anschluss daran wird der Einfluss des parallelogrammförmigen RUC-Querschnitts auf die effektiven Elastizitätskoeffizienten untersucht.

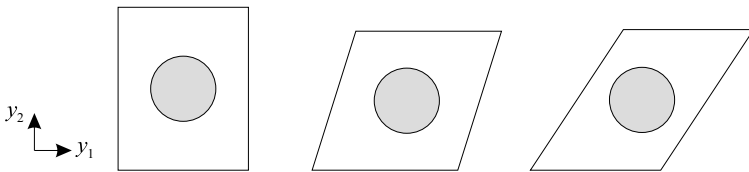


Abbildung 5-26: Spezielle Querschnitte für die RUC, die durch den Algorithmus erzeugt werden können: Links - Rechteck, Mitte - Rhombus, Rechts - Parallelogramm

In Abb. 5-26 sind einige spezielle Formen des Parallelogramms dargestellt, die mit dem entwickelten Berechnungsalgorithmus betrachtet werden können. Dies sind das Rechteck, der Rhombus und das allgemeine Parallelogramm. Die Geometrieeigenschaften eines Parallelogramms und somit die Verteilung der Fasern im Verbundwerkstoff werden durch das Festlegen zweier Kantenlängen, welche nicht parallel zueinander liegen, und eines Winkels beschrieben. In Abb. 3-10 aus Teilabschnitt 3.3.1 sind diese Eigenschaften durch b , w und

α gekennzeichnet. Zur Bestimmung der effektiven Elastizitätskoeffizienten eines Kompositwerkstoffes ist es ausreichend, eine normierte Geometrie zu betrachten. Der Kantenlänge b wird die Einheitslänge zugewiesen. Somit lässt sich die Geometrie durch ein Kantenlängenverhältnis und einen Winkel α beschreiben.

Die RUC-Geometrie wird mit Hexaeder- und Pentaeder-Elementen vom Polynomgrad 2 diskretisiert. Das FE-Netz muss eine gleiche Flächendiskretisierung gegenüberliegender RUC-Ränder gewährleisten, damit die periodischen Randbedingungen Gl. (3-66) bis (3-71) in das FE-Modell integriert werden können. Für die Verhinderung der Starrkörperbewegungen der RUC werden die drei Verschiebungsfreiheitsgrade im Querschnittsmittelpunkt einer der beiden Faserrandflächen zu Null gesetzt.

Validierung der Berechnungsmodelle

Hinsichtlich einer Validierung der entwickelten Berechnungsmodelle werden die effektiven Elastizitätskoeffizienten mit Koeffizienten aus der Literatur verglichen. Für den Vergleich der Ergebnisse werden in den Berechnungsmodellen die in Abb. 5-26 dargestellten RUC-Querschnitte verwendet. Im Fall des Parallelogramms (siehe Abb. 5-26 rechts) stehen leider nur wenige Arbeiten zur Verfügung, die für Vergleichszwecke genutzt werden können. Es werden hier für den Vergleich effektive Elastizitätskoeffizienten herangezogen, für die sich in [34], [86] und [83] Werte finden lassen. Für eine Validierung der entwickelten Berechnungsmodelle im Fall der beiden anderen RUC-Querschnitte lassen sich in [34], [83] entsprechende Vergleichsmöglichkeiten finden.

Die effektiven Koeffizienten der Methoden aus der Literatur sind mit „AHM“ [86], [83] und „G&N“ [34] und die Ergebnisse der in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodelle mit „FEM“ gekennzeichnet.

Tabelle 5-13: Materialeigenschaften der Faser und Matrix

$E^m, [GPa]$	ν^m	$E^f, [GPa]$	ν^f
2.6	0.3	312	0.3

Tabelle 5-14: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $\alpha = 90^\circ$

w/b	v^f	$C_{1111}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{1122}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{1133}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{2233}^{\text{eff}}/G^m$	
		AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM
1.1	0.1	4.0757	4.0756	1.6972	1.6971	1.7319	1.7318	1.7288	1.7287
	0.3	5.9477	5.9460	2.1087	2.1091	2.4169	2.4165	2.3596	2.3598
	0.5	10.347	10.321	2.4968	2.5095	3.8533	3.8498	3.4096	3.4198
1.25	0.1	4.0847	4.0847	1.6957	1.6957	1.7341	1.7340	1.7268	1.7267
	0.3	6.1334	6.1324	2.0892	2.0900	2.4668	2.4667	2.3256	2.3258
	0.5	12.207	12.333	2.3617	2.4520	4.3705	4.4358	3.2052	3.2289
1.5	0.1	4.1016	4.1016	1.6917	1.6917	1.7380	1.7380	1.7236	1.7235
	0.3	6.5184	6.5535	2.0439	2.0406	2.5687	2.5782	2.2780	2.2757

Für die Validierung der entwickelten Berechnungsmodelle werden die Phaseneigenschaften aus [34] und [83] verwendet. Diese Eigenschaften sind in Tab. 5-13 aufgelistet. Die isotropen Phasen sind durch ein Schubmodulverhältnis der Faser zur Matrix von 120 (Verhältnis

wie in [34]) charakterisiert. Diese Materialdaten werden für alle entwickelten Berechnungsmodelle zur Validierung verwendet. In Tab. 5-14 bis 5-19 sind die effektiven Koeffizienten aufgelistet.

Tabelle 5-15: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $\alpha = 90^\circ$

w/b	v^f	$C_{3333}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{2323}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{1313}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{1212}^{\text{eff}}/G^m$	
		AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM
1.1	0.1	34.578	34.578	1.2152	1.2152	1.2212	1.2211	1.1567	1.1567
	0.3	96.853	96.853	1.7984	1.7983	1.8864	1.8864	1.5287	1.5285
	0.5	159.48	159.48	2.7861	2.7860	3.3100	3.3099	2.1612	2.1595
1.25	0.1	34.578	34.578	1.2113	1.2113	1.2255	1.2254	1.1556	1.1556
	0.3	96.858	96.857	1.7476	1.7476	1.9611	1.9611	1.5231	1.5226
	0.5	159.57	159.59	2.5576	2.5576	3.9762	3.9762	2.1992	2.1624
1.5	0.1	34.578	34.578	1.2054	1.2054	1.2326	1.2325	1.1528	1.1528
	0.3	96.874	96.876	1.6808	1.6808	2.1114	2.1114	1.5090	1.5090

In Tab. 5-14 und 5-15 sind effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von verschiedenen Kantenlängenverhältnissen und Faservolumenanteilen für Verbundwerkstoffe, deren Faseranordnung durch den rechteckigen RUC-Querschnitt charakterisiert wird (siehe Abb. 5-26, rechts), dargestellt. Neben den Ergebnissen der in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodelle („FEM“) sind zusätzlich Vergleichsergebnisse („AHM“) angegeben. Die acht aufgelisteten effektiven Koeffizienten beschreiben das Materialverhalten in Faserlängsrichtung und in der Faserquerschnittsebene. Infolge der Veränderung des Kantenlängenverhältnisses w/b ist zu einem festen Faservolumenanteil ein monotoner Anstieg oder Abfall für fast alle Koeffizienten zu erkennen.

Vergleicht man die Ergebnisse der unterschiedlichen Methoden miteinander, so erkennt man eine gute Übereinstimmung bei niedrigen Faservolumenanteilen ($v^f = 0.1$) bis hin zu einem Wert von 0.3. Für 0.5 sind kleine Unterschiede in einigen Koeffizienten erkennbar.

Tabelle 5-16: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten bei einer rhombischen RUC-Querschnittsgeometrie, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

α	v^f	$C_{1111}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{1122}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{2222}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{3333}^{\text{eff}}/G^m$	
		AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM
30°	0.1	4.0376	4.0377	1.6980	1.6979	4.1106	4.1109	34.579	34.578
	0.3	5.5696	5.5723	2.3232	2.3191	5.7018	5.7085	96.853	96.852
70°	0.1	4.0609	4.0609	1.7075	1.7074	4.0595	4.0595	34.578	34.578
	0.3	5.7209	5.7228	2.2425	2.2405	5.6993	5.7009	96.851	96.851
	0.5	8.9147	8.9576	3.0557	3.0157	8.7726	8.8073	159.44	159.44

In Tab. 5-16 und 5-17 sind acht effektive Koeffizienten für Kompositwerkstoffe, deren Faseranordnung durch den rhombischen RUC-Querschnitt nach Abb. 5-26 (Bildmitte) charakterisiert wird, dargestellt. Die Koeffizienten beschreiben das effektive Materialverhalten längs und quer zur Faserichtung. Durch die rhombische Querschnittsgeometrie der RUC und das in Abb. 5-26 verwendete Koordinatensystem ergibt sich ein Elastizitätstensor, dessen Darstellung in M-V-Notation der des Tensors bezüglich monokliner Symmetrie in Gl.

(2-43) entspricht. Wie bereits in Abschnitt 5.1.1 erwähnt wurde, ist das effektive Materialverhalten im Allgemeinen orthotrop. Durch eine Transformation in ein geeignetes lokales Koordinatensystem kann der Tensor in M-V-Notation die Darstellung aus Gl. (2-44) annehmen. Die Koeffizienten der Tab. 5-17 (außer C_{1212}^{eff}) würden in diesem Fall den Wert Null besitzen.

Die berechneten Koeffizienten („FEM“) in Tab. 5-16 und 5-17 zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Vergleichsergebnissen („AHM“). Wie in den vorherigen zwei Tabellen sind bei einem höheren Faservolumenanteil beim Vergleich einiger Koeffizienten kleine Unterschiede erkennbar.

Tabelle 5-17: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten bei einer rhombischen RUC-Querschnittsgeometrie, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

α	v^f	$C_{1111}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{2212}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{3312}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{1212}^{\text{eff}}/G^m$	
		AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM
30°	0.1	0.0124	0.0123	-0.0335	-0.0334	-0.0063	-0.0063	1.1616	1.1617
50°	0.1	0.0056	0.0056	-0.0103	-0.0102	-0.0014	-0.0013	1.1722	1.1721
	0.3	0.0479	0.0482	-0.1267	-0.1293	-0.0236	-0.0243	1.6870	1.6919
70°	0.1	-0.0038	-0.0038	0.0057	0.0057	0.0006	0.0005	1.1651	1.1650
	0.3	-0.0378	-0.0378	0.0674	0.0679	0.0089	0.0090	1.6085	1.6097
	0.5	-0.0987	-0.1017	0.2939	0.3086	0.0586	0.0620	2.4261	2.4445

Tabelle 5-18: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten bei einer RUC-Querschnittsgeometrie in Parallelogrammform, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

w/b	v^f	$C_{1111}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{1122}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{2222}^{\text{eff}}/G^m$		$C_{1212}^{\text{eff}}/G^m$	
		AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM	AHM	FEM
1.1	0.1	4.0621	4.0621	1.7086	1.7084	4.0561	4.0561	1.1657	1.1658
	0.3	5.7327	5.7478	2.2659	2.2555	5.6394	5.6465	1.6077	1.6152
	0.5	8.9137	9.1808	3.2075	3.0681	8.3894	8.4718	2.3723	2.4555
1.25	0.1	4.0741	4.0742	1.7026	1.7025	4.0565	4.0565	1.1607	1.1607
	0.3	5.9190	5.9446	2.1924	2.1819	5.6245	5.6289	1.5625	1.5680
1.4	0.1	4.0861	4.0861	1.6978	1.6978	4.0551	4.0551	1.157	1.1570
	0.3	6.1396	6.1817	2.1311	2.1203	5.5872	5.5901	1.5344	1.5389

Auf der rechten Seite in Abb. 5-26 ist die allgemeinste Querschnittsform einer RUC dargestellt, welche sich mit dem entwickelten Berechnungsalgorithmus betrachten lässt. Diese Form ist das Parallelogramm. Unidirektionale Faserverbundwerkstoffe, die durch eine RUC mit einem solchen Querschnitt charakterisiert werden und deren Phasen ein isotropes Materialverhalten aufweisen, besitzen ein effektives monoklines Materialverhalten. Die Darstellung des Elastizitätstensors in M-V-Notation bezogen auf das in Abb. 5-26 dargestellte Koordinatensystem entspricht der Gl. (2-43).

Die effektiven Koeffizienten in Tab. 5-18 und 5-19 gehören zu Berechnungsmodellen, in denen eine RUC mit einem Parallelogramm-Querschnitt genutzt wird. Die Tabellen zeigen die Abhängigkeit der Koeffizienten von dem Kantenlängenverhältnis und dem Faservolumenanteil. Der verwendete Winkel α des Parallelogramms berechnet sich aus der Annahme,

dass b Einheitslänge hat, und der Formel [34]

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b}{2w}\right) \quad . \quad (5-9)$$

Es ergeben sich Winkel von ca. 63° (bei $w/b = 1.1$), 66° (bei $w/b = 1.25$) und 69° (bei $w/b = 1.4$).

Die Tab. 5-18 enthält Koeffizienten, welche das effektive Verhalten in der Querschnittsebene beschreiben. Im Fall $v^f = 0.5$ weichen die berechneten Koeffizienten C_{1111}^{eff} , C_{2222}^{eff} und C_{1122}^{eff} („FEM“) deutlicher von den Vergleichsergebnissen („AHM“, [83]) ab als der Koeffizient C_{2222}^{eff} . Ansonsten ist eine gute Übereinstimmung der berechneten Ergebnisse mit den Vergleichsergebnissen erkennbar.

Die Koeffizienten C_{1313}^{eff} und C_{2323}^{eff} in Tab. 5-19 beschreiben das Schubverhalten des Verbundwerkstoffes längs zur Faserrichtung. Zusätzlich zu den eigenen Ergebnissen sind Vergleichsergebnisse aus [34] („G&N“) und [83] („AHM“) angegeben. Im Unterschied zu den Koeffizienten aus Tab. 5-18 stimmen die berechneten Ergebnisse auch für höhere Faservolumenanteile ($v^f = 0.5$) sehr gut mit den Vergleichsergebnissen überein.

Tabelle 5-19: Normierte effektive Elastizitätskoeffizienten bei einer RUC-Querschnittsgeometrie in Parallelogrammform, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

w/b	v^f	$C_{1313}^{\text{eff}}/G^m$			$C_{2323}^{\text{eff}}/G^m$		
		G&N	AHM	FEM	G&N	AHM	FEM
1.1	0.3	1.87	1.8657	1.8657	1.81	1.811	1.8109
	0.5	3.11	3.1088	3.1088	2.81	2.8088	2.8087
1.25	0.3	1.92	1.9245	1.9245	1.77	1.7674	1.7674
	0.5	2.00	1.9998	1.9998	1.72	1.7252	1.7252

Es lässt sich zusammenfassen, dass die Elastizitätskoeffizienten der Berechnungsmodelle mit den unterschiedlichen RUC-Querschnitten im Großen und Ganzen eine gute Übereinstimmung mit den Vergleichsergebnissen aufweisen. Diese Übereinstimmung mit den Homogenisierungsmethoden aus der Literatur zeigt, dass sich die entwickelten Berechnungsmodelle für die Bestimmung der effektiven Elastizitätskoeffizienten eignen.

Weitere Untersuchungen

Wie schon vorher erwähnt wurde, wird im Fall des parallelogrammförmigen RUC-Querschnitts die Faseranordnung über das Kantenlängenverhältnis w/b und den Winkel α gesteuert. Die nachfolgenden Betrachtungen haben das Ziel, den Einfluss des Kantenlängenverhältnisses und des Winkels auf die effektiven Elastizitätskoeffizienten näher zu untersuchen. Dies wird anhand ausgewählter Koeffizienten veranschaulicht.

Für die Untersuchungen werden die Materialphasen der Matrix und der Faser als isotrop angenommen. Die Eigenschaften der Phasen sind durch das Schubmodulverhältnis

$$\frac{G^f}{G^m} = 120 \quad , \quad (5-10)$$

und die Querkontraktionszahlen $\nu^f = 0.2$ beziehungsweise $\nu^m = 0.35$ gegeben (G^m wird 1 gewählt). Der Faservolumenanteil wird auf $v^f = 0.3$ festgelegt.

In den Abb. 5-27 bis 5-30 sind ausgewählte Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit vom Winkel α und dem Kantenlängenverhältnis w/b dargestellt. Der Winkel variiert von 50° bis 90° und das Kantenlängenverhältnis beträgt 1.0, 1.1 beziehungsweise 1.2.

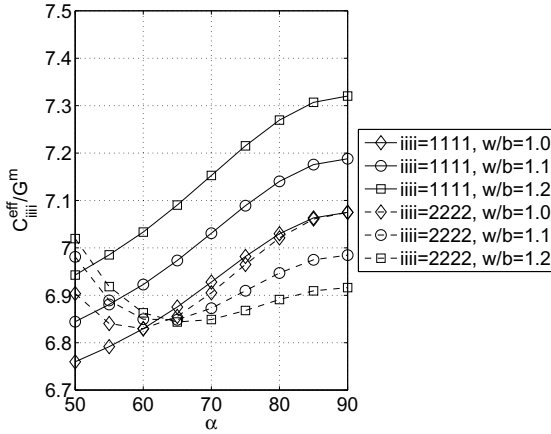


Abbildung 5-27: Normierte effektive Koeffizienten C_{1111}^{eff}/G^m und C_{2222}^{eff}/G^m in Abhängigkeit von α und w/b , verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $v^f = 0.3$

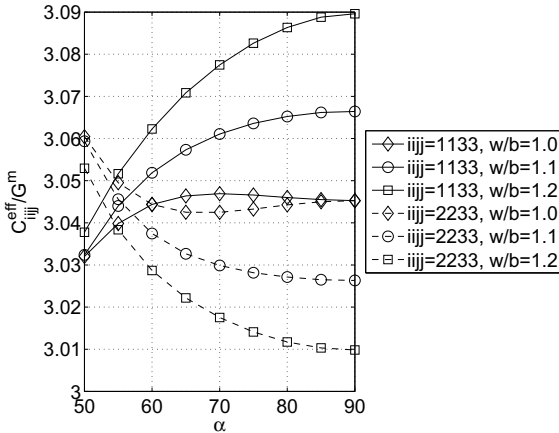


Abbildung 5-28: Normierte effektive Koeffizienten C_{1111}^{eff}/G^m und C_{2222}^{eff}/G^m in Abhängigkeit von α und w/b , verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $v^f = 0.3$

Bei einem Kantenlangenverhältnis von $w/b = 1.0$ und einem Winkel $\alpha = 60^\circ$ beziehungsweise $\alpha = 90^\circ$ ergibt sich ein hexagonales beziehungsweise tetragonales Materialverhalten des Verbundwerkstoffes. Die effektiven Koeffizienten C_{1111}^{eff} und C_{2222}^{eff} haben im numerischen Sinn den gleichen Wert. Gleiches gilt für die anderen paarweise dargestellten Koeffizienten (zum Beispiel C_{2323}^{eff} und C_{1313}^{eff}). Die Koeffizienten C_{1211}^{eff} und C_{1222}^{eff} sind Null.

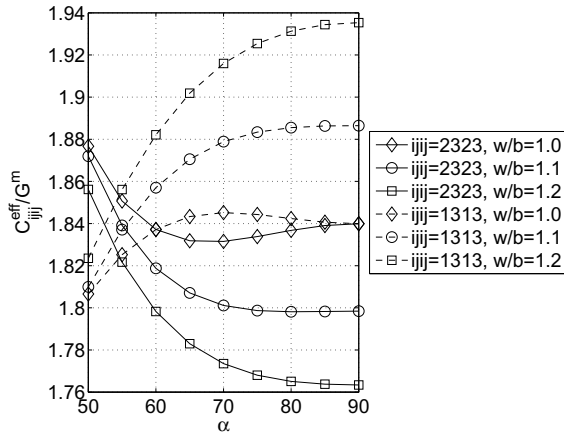


Abbildung 5-29: Normierte effektive Koeffizienten $C_{1111}^{\text{eff}}/G^m$ und $C_{2222}^{\text{eff}}/G^m$ in Abhängigkeit von α und w/b , verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $v^f = 0.3$

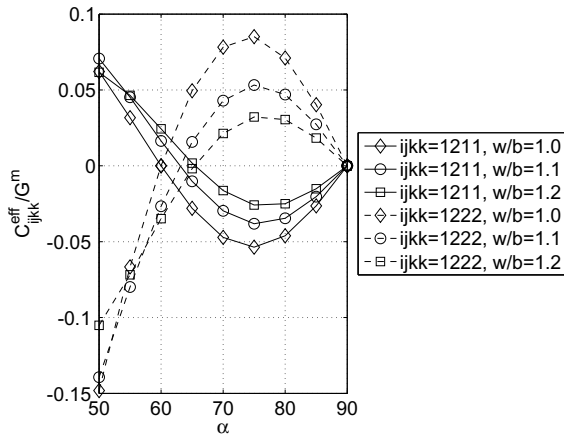


Abbildung 5-30: Normierte effektive Koeffizienten $C_{1211}^{\text{eff}}/G^m$ und $C_{1222}^{\text{eff}}/G^m$ in Abhängigkeit von α und w/b , verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $v^f = 0.3$

Die Veränderung des Kantenlängenverhältnisses wirkt sich unterschiedlich auf die effektiven Koeffizienten aus. Die Werte einiger Koeffizienten (C_{1111}^{eff} , C_{1133}^{eff}) werden größer, während andere kleiner werden (C_{2233}^{eff} , C_{2323}^{eff}). Die Hauptursache dafür liegt in dem veränderten Faserabstand. Eine weitere Ursache ist, dass mit einem größer werdenden Kantenlängenverhältnis das Faservolumen in der RUC steigt, da der Faservolumenanteil ($v^f = 0.3$) konstant gehalten wird. Der Volumenanstieg in Kombination mit dem veränderten Faserabstand beeinflusst die elastische Interaktion zwischen benachbarten RUCs in y_1 - und y_2 -Richtung. Der Einfluss der Interaktion ist dabei zurückzuführen auf die verwendeten periodischen Randbedingungen, die die Stetigkeit der Spannungen und Verschiebungen am gemeinsamen Rand benachbarter Zellen gewährleisten. All das lässt sich am Beispiel der RUC mit Rechteckquerschnitt ($\alpha = 90^\circ$) näher verdeutlichen. Die Fasern liegen hier in y_1 - und y_2 -Richtung auf einer Linie. Mit einem größer werdenden Kantenlängenverhältnis nimmt der Faserabstand zwischen benachbarten RUCs in y_1 -Richtung ab und in y_2 -Richtung zu. Das bedeutet, dass die Erhöhung des Kantenlängenverhältnisses in der Regel zu einem anisotropen Materialverhalten des Verbundwerkstoffes führt.

Wie bereits erwähnt wurde, haben die Koeffizienten C_{1111}^{eff} und C_{2222}^{eff} aus Abb. 5-27 bei $w/b = 1.0$, $\alpha = 60^\circ$ den gleichen Wert. Die Gleichheit der Koeffizienten lässt sich auch bei den Kantenlängenverhältnissen $w/b = 1.1$ und $w/b = 1.2$ wiederfinden, jedoch zu bestimmten Winkeln $\alpha \neq 60^\circ$. Für die paarweise dargestellten Koeffizienten der anderen Abbildungen lässt sich Ähnliches beobachten. Dies ist damit zu erklären, dass sich zu diesen Winkelkonfigurationen Faseranordnungen ergeben, bei denen man anstelle des Parallelogramm-Querschnitts einen Rechteck-Querschnitt wählen kann (siehe Abb. 5-31). Infolge der neuen Geometrie der RUC und dessen Symmetrieebenen ergibt sich, dass das effektive Materialverhalten im Allgemeinen orthotrop ist. Die Übereinstimmung in den Koeffizientenwerten aus Abb. 5-27, 5-28 und 5-29 kann dem rechten RUC-Querschnitt aus Abb. 5-31 zugeordnet werden. Bei Verwendung des linken RUC-Querschnitts aus Abb. 5-31 werden die Koeffizienten C_{1211}^{eff} und C_{1222}^{eff} (siehe Abb. 5-30) zu Null.

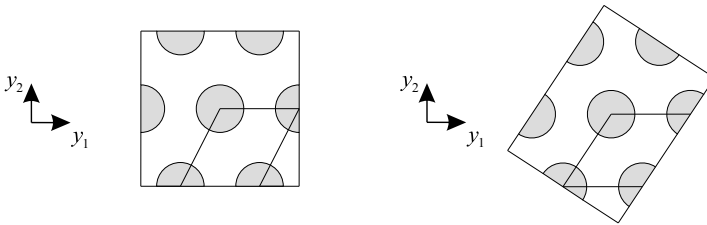


Abbildung 5-31: RUC-Querschnitte mit speziellen Winkelvorgaben α bei einem Kantenlängenverhältnis von $w/b = 1.1$, links: $\alpha > 60^\circ$, rechts: $\alpha < 60^\circ$

5.1.4 Parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt mit imperfektem Phasenübergang

Dieser Teilabschnitt beschäftigt sich mit unidirektionalen elastischen Faserverbundstrukturen, die durch eine RUC mit einem Parallelogramm-Querschnitt repräsentiert werden. Im Unterschied zum vorherigen Teilabschnitt wird der Kontakt zwischen der Faser- und

Matrixphase durch einen imperfekten Phasenübergang beschrieben.

Ziel dieses Teilabschnittes ist es, die veränderten Berechnungsmodelle zu validieren.

Zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften werden wie in Teilabschnitt 5.1.3 RUC-Querschnitte berücksichtigt, bei denen die Kante b Einheitslänge hat (siehe Abb. 3-10).

Für die FE-Modellierung der Phasen werden lineare Hexaeder- und Pentaeder-Elemente (Polynomgrad 1) verwendet. Die imperfekte Phasenübergangsbeschreibung wird durch Federelemente realisiert (siehe Abschnitt 4.4).

Validierung der Berechnungsmodelle

Die Validierung der Berechnungsmodelle erfolgt anhand bereits betrachteter Modelle. Als Vergleichsmodelle dienen die Berechnungsmodelle aus dem Teilabschnitt 5.1.2. Die verwendeten RUC-Querschnitte in den Vergleichsmodellen und in den aktuellen Berechnungsmodellen sind der Abb. 5-32 zu entnehmen. Mit den beiden Modellvarianten lassen sich effektive Elastizitätskoeffizienten von Verbundwerkstoffen mit einer rhombischen Faseranordnung berechnen. Für die verschiedenen Berechnungsmodelle werden unterschiedliche Koordinatensysteme verwendet. Daraus entstehen Vorteile in der Realisierung der periodischen Randbedingungen. Im Fall des RUC-Querschnitts aus der Parallelogrammbeschreibung wird das globale Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$ genutzt, während im anderen Fall das lokale Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$ verwendet wird. Es werden die effektiven Elastizitätskoeffizienten der Modelle berechnet, auf ein gemeinsames Koordinatensystem transformiert und anschließend miteinander verglichen.

Für die Validierung werden die Materialphasen aus der Tab. 5-8 verwendet. Die Faserverteilung wird durch den Winkel $\alpha = 45^\circ$ beschrieben. Der Faservolumenanteil beträgt 0.4. Die verwendete imperfekte Phasenübergangsbeschreibung in den beiden Modellvarianten wird durch G^i (variierbar), $\nu^i = 0.3$ und $\eta = 0.001$ charakterisiert.

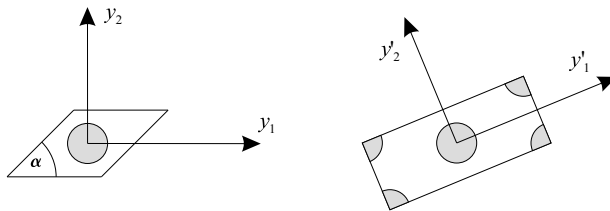


Abbildung 5-32: Darstellung der RUC-Querschnitte und die jeweils betrachteten Koordinatensysteme, links: RUC-Querschnitt aus der Parallelogrammbeschreibung ($w/b = 1.0$), rechts: RUC-Querschnitt aus Abschnitt 5.1.2

In Abb. 5-33 sind exemplarisch normierte effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von $\log_{10}(G^i/G^m)$ präsentiert. Dies sind $C_{1111}^{\text{eff}}/G^m$, $C_{2222}^{\text{eff}}/G^m$, $C_{2323}^{\text{eff}}/G^m$ und $C_{1313}^{\text{eff}}/G^m$. Die Koeffizienten der verschiedenen Modellvarianten sind mit „Para“ (linker RUC-Querschnitt in Abb. 5-32) und „Rect“ (rechter RUC-Querschnitt in Abb. 5-32) gekennzeichnet. Für die Darstellung der Koeffizienten wurde das lokale Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$ verwendet.

Man erkennt über den gesamten Bereich von $\log_{10}(G^i/G^m)$ eine sehr gute Übereinstimmung der effektiven Koeffizienten.

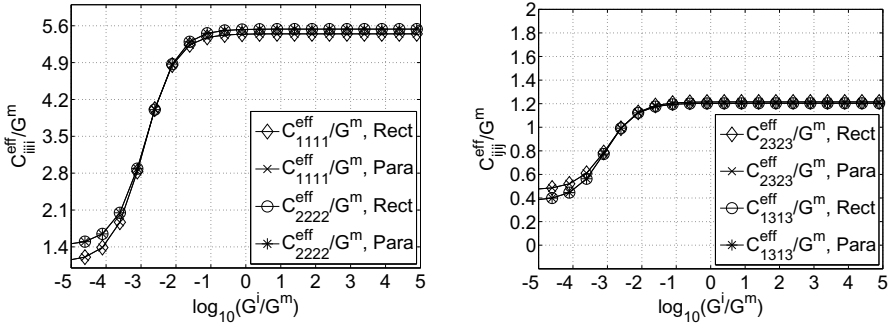


Abbildung 5-33: Normierte effektive Koeffizienten C^{eff}_{iii}/G^m und $C^{\text{eff}}_{ijij}/G^m$, verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $\eta = 0.001$, $v^f = 0.4$, $\alpha = 45^\circ$

Eine sehr gute Übereinstimmung ist auch bei einer Variation des Winkels zu erkennen (siehe Abb. 5-34). Für den imperfekten Phasenübergang wurden die Werte $G^i = 10$ GPa, $\nu^i = 0.3$ und $\eta = 0.001$ verwendet.

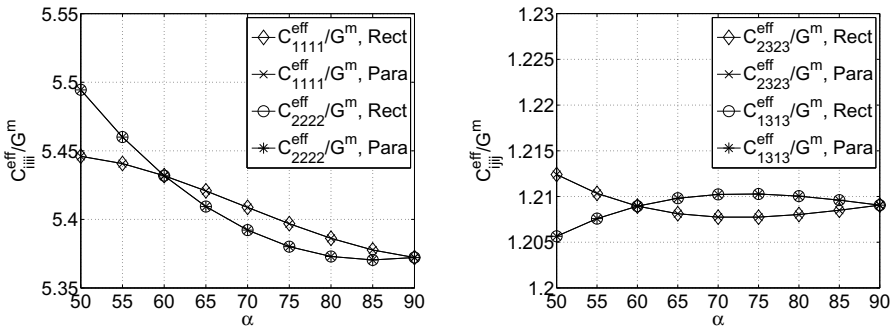


Abbildung 5-34: Normierte effektive Koeffizienten C^{eff}_{iii}/G^m und $C^{\text{eff}}_{ijij}/G^m$, verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $\eta = 0.001$, $v^f = 0.4$, $G^i = 10$ GPa, $\nu^i = 0.3$

Es lässt sich zusammenfassen, dass die Berechnungsmodelle aus diesem Teilabschnitt in der Lage sind, die Betrachtungen aus allen vorherigen Teilabschnitten des Kapitels abzudecken.

5.2 Piezoelektrische unidirektionale Faserverbundstrukturen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Berechnung und der Bewertung von effektiven Materialeigenschaften piezoelektrischer Verbundwerkstoffe. Dabei wird der Einfluss der Faserverteilung und der Einfluss des Phasenübergangs auf die effektiven Materialeigenschaften untersucht. Wie im elastischen Fall wird die Faserverteilung über geometrische Größen der RUC gesteuert. Für den in dieser Arbeit allgemeinsten Fall der periodischen Faserverteilung (Parallelogramm-Querschnitt) sind das der Winkel α und die Kantenlängen des RUC-Querschnitts. Der Phasenübergang wird durch die Angabe eines perfekten beziehungsweise imperfekten Phasenübergangs beschrieben.

Im Abschnitt 3.5 sind die wichtigsten Grundlagen hinsichtlich der theoretischen Betrachtung festgehalten. Da für die Untersuchung das numerische Verfahren der FEM verwendet wird, sind im Kapitel 4 wichtige Informationen hinsichtlich der Modellierung und der Berechnung von Untersuchungsergebnissen festgehalten.

5.2.1 Rhombischer RUC-Querschnitt mit perfektem Phasenübergang

Im Abschnitt 5.1.1 wurden Berechnungsmodelle für unidirektionale elastische Verbundwerkstoffe, die durch einen rhombischen RUC-Querschnitt und einen perfekten Phasenübergang charakterisiert werden, behandelt. Diese Berechnungsmodelle werden so verändert, dass sich effektive Materialeigenschaften von piezoelektrischen Faserverbundwerkstoffen berechnen lassen. Ziel dieses Teilabschnittes ist es, den Einfluss der Winkelvariation und somit der Faserverteilung und den Einfluss des Faservolumenanteils auf das effektive Materialverhalten zu untersuchen.

Zuerst werden die Berechnungsmodelle validiert. Dies geschieht durch einen Vergleich der berechneten effektiven Materialeigenschaften mit Ergebnissen aus vorhandener Literatur. Im Anschluss daran wird untersucht, wie sich eine Variation des Faservolumenanteils und der Faseranordnung auf die effektiven Koeffizienten auswirkt.

Die RUC-Geometrie wird mit Hexaeder- und Pentaeder-Elementen vom Polynomgrad 2 diskretisiert. Infolge der piezoelektrischen Modellierung werden für die Berechnung der effektiven Koeffizienten die Randbedingungen aus Gl. (3-107) bis (3-115) verwendet. Des Weiteren werden die drei Verschiebungsfreiheitsgrade und der elektrische Freiheitsgrad im Querschnittsmittelpunkt einer der beiden Faserrandflächen der zentrierten Faser zu Null gesetzt.

Validierung der Berechnungsmodelle

Für die Validierung der Berechnungsmodelle wird auf eine Beschreibung eines Kompositwerkstoffes aus [78] zurückgegriffen. In Tab. 5-20 sind die Materialeigenschaften der Phasen, der Matrix (Epoxidharz) und der Fasern (PZT-5), festgehalten. Die elastischen Eigenschaften der Fasern spiegeln dabei ein isotropes Materialverhalten wider, während die piezoelektrischen und dielektrischen ein transversal isotropes Verhalten charakterisieren. Das Materialverhalten der Matrix ist isotrop. Die Fasern sind unidirektional in einer

hexagonalen Anordnung ($\alpha = 60^\circ$) in die Matrix eingebettet. Zwischen Faser und Matrix existiert ein perfekter Phasenübergang. Der Faservolumenanteil beträgt 0.5.

Tabelle 5-20: Materialdaten der Phasen des betrachteten Kompositwerkstoffes aus [78]

Phase	E [GPa]	ν	e_{311} [C/m ²]	e_{333} [C/m ²]	e_{223} [C/m ²]	κ_{11} 10^{-9} [C ² /(Nm ²)]	κ_{33} 10^{-9} [C ² /(Nm ²)]
Faser	87	0.34	-2.1	9.5	9.2	4.071	2.079
Matrix	3	0.33	0	0	0	0.079	0.079

In Tab. 5-21 und 5-22 sind ausgewählte effektive Koeffizienten (gekennzeichnet mit „FEM“) und Vergleichsergebnisse aus [78] (gekennzeichnet mit „Pastor“) aufgelistet. Die erste Tabelle beinhaltet die elastischen Eigenschaften. Die zweite Tabelle enthält die piezoelektrischen und dielektrischen Eigenschaften. Das effektive Materialverhalten ist transversal isotrop. Da in diesem Fall $C_{111}^{\text{eff}} = C_{222}^{\text{eff}}$, $C_{113}^{\text{eff}} = C_{223}^{\text{eff}}$, $C_{233}^{\text{eff}} = C_{131}^{\text{eff}}$, $e_{311}^{\text{eff}} = e_{322}^{\text{eff}}$, $e_{223}^{\text{eff}} = e_{113}^{\text{eff}}$ und $\kappa_{11}^{\text{eff}} = \kappa_{22}^{\text{eff}}$ gilt, enthalten die Tabellen alle von Null verschiedenen effektiven Koeffizienten.

Tabelle 5-21: Effektive elastische Materialeigenschaften sowie Vergleichsergebnisse aus [78]

	C_{111}^{eff} [GPa]	C_{112}^{eff} [GPa]	C_{113}^{eff} [GPa]	C_{333}^{eff} [GPa]	C_{233}^{eff} [GPa]	C_{1212}^{eff} [GPa]
FEM	10.2710	4.5236	4.9661	48.3341	3.2047	2.8738
Pastor	10.4017	4.4771	4.9952	48.3542	3.2466	2.9623

Tabelle 5-22: Effektive piezoelektrische Materialeigenschaften sowie Vergleichsergebnisse aus [78]

	e_{311}^{eff} [C/m ²]	e_{333}^{eff} [C/m ²]	e_{223}^{eff} [C/m ²]	κ_{11}^{eff} 10^{-9} [C ² /(Nm ²)]	κ_{33}^{eff} 10^{-9} [C ² /(Nm ²)]
FEM	-0.0873	5.4053	0.0276	0.2299	1.0996
Pastor	-0.0882	5.4047	0.0287	0.2330	1.0996

Bei dem Vergleich der gelisteten Werte erkennt man, dass sie nahe beieinander liegen. Da in [78] für die Berechnung der Koeffizienten auch die FEM verwendet wird, liegt die Vermutung nahe, dass die Diskrepanz in den Werten zum Teil aus der FE-Diskretisierung resultiert. Die FE-Diskretisierung der RUC aus [78] ist gröber als die Diskretisierung der RUC in dieser Arbeit. Der hexagonale RUC-Querschnitt aus der Literatur ist in 192 Elemente unterteilt, der RUC-Querschnitt in dieser Arbeit in 4784 Elemente. Hinzu kommt, dass in [78] lineare Elemente anstelle von quadratischen verwendet werden.

Nichtdestotrotz kann festgestellt werden, dass sich die entwickelten Modelle für die Berechnung der effektiven Eigenschaften eignen.

Weitere Untersuchungen

Nach der Validierung der Berechnungsmodelle soll im Folgenden der Einfluss der Faser-Verteilung auf die effektiven Eigenschaften untersucht werden. Dabei wird wie in den vorangegangenen Abschnitten die Faser-Verteilung über die Veränderung des Winkels α (siehe dazu Abb. 5-7) gesteuert.

Für die Untersuchung werden die Materialdaten aus Tab. 5-20 verwendet. Um den Einfluss des Faservolumenanteils auf die effektiven Koeffizienten mitzuberechnen, werden exemplarisch die Volumenanteile $v^f = 0.3$ und $v^f = 0.5$ genutzt.

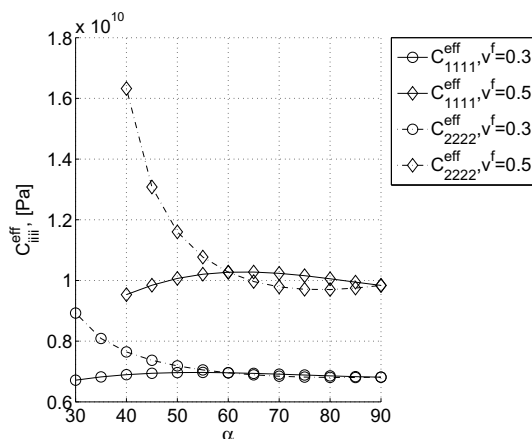


Abbildung 5-35: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$ und $v^f = 0.5$

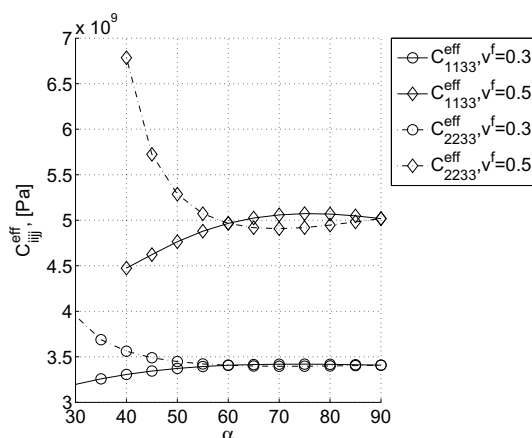


Abbildung 5-36: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$ und $v^f = 0.5$

In Abb. 5-35 bis 5-40 sind exemplarisch ausgewählte effektive Werkstoffeigenschaften dargestellt. Diese Eigenschaften beziehen sich auf das Materialverhalten in Faserlängsrichtung

und quer dazu. Im Allgemeinen lässt sich das effektive Verhalten in den lokalen Koordinaten $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$ durch die folgende Matrix ausdrücken

$$\bar{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad (5-11)$$

die die materialbeschreibende effektive Matrix in M-V-Notation für piezoelektrische Kompositwerkstoffe aus Gl. (3-91) widerspiegelt. Mit „*“ sind in der Matrix effektive Komponenten gekennzeichnet, die von Null verschieden sind. Für den Fall, dass die Matrix auf das globale Koordinatensystem bezogen wird, ergibt sich

$$\bar{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}. \quad (5-12)$$

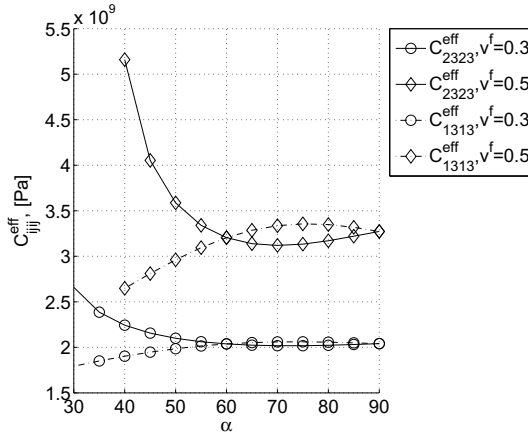


Abbildung 5-37: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$ und $v^f = 0.5$

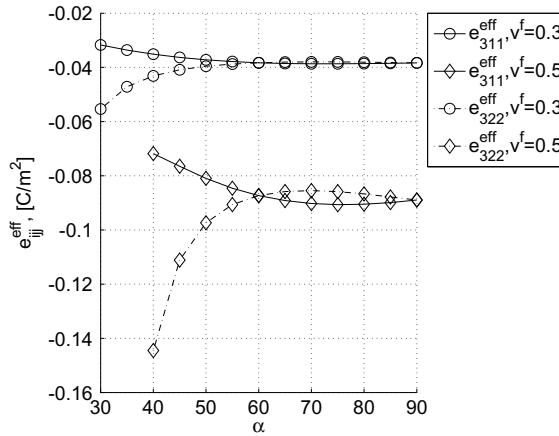


Abbildung 5-38: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$ und $v^f = 0.5$

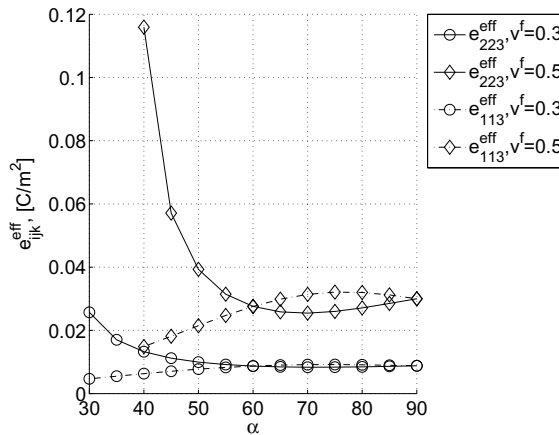


Abbildung 5-39: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$ und $v^f = 0.5$

Die in den Abbildungen paarweise dargestellten effektiven Koeffizienten weisen für $\alpha = 60^\circ$ und für $\alpha = 90^\circ$ im numerischen Sinn gleiche Werte auf. Eine Erhöhung des Faservolumenanteils bewirkt eine Erhöhung der effektiven Elastizitätskoeffizienten und der dielektrischen Koeffizienten. Die Werte der piezoelektrischen Koeffizienten werden größer (im Fall von e_{ijk}^{eff}) beziehungsweise kleiner (im Fall von e_{ijj}^{eff}). Ebenso ist erkennbar, dass die anisotrope Ausprägung der Koeffizienten mit einem zunehmenden Volumenanteil der Faser stärker

zur Geltung kommt. Wie bei der elastischen Betrachtung aus Abschnitt 5.1.1 zeigen sich bei sehr kleinen Winkeln die größten Wertunterschiede in den paarweise auftretenden Koeffizienten.

Wie groß der Einfluss der Faseranordnung auf das effektive Materialverhalten ist, verdeutlichen die Tab. 5-23 und 5-24. Die hier aufgelisteten Werte im Fall von $v^f = 0.5$ spiegeln die prozentuale Abweichung des Minimalwertes zum Maximalwert eines effektiven Koeffizienten wider. Der Minimal- und Maximalwert wird aus einem Vergleich der Koeffizientenwerte für alle Winkelkonfigurationen bestimmt. Für die Berechnung der Abweichung wird die Formel in Gl. (5-6) verwendet. Für die meisten Koeffizienten lässt sich eine deutliche Abweichung feststellen. Selbst bei einer Einschränkung auf $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ist im Fall einiger Koeffizienten ein noch ausgeprägter Einfluss der Faserverteilung zu erkennen.

Tabelle 5-23: Prozentuale Abweichung des Minimalwertes zum Maximalwert für ausgewählte Koeffizienten, $v^f = 0.5$

C_{1111}^{eff}	C_{2222}^{eff}	C_{2323}^{eff}	C_{1212}^{eff}	e_{311}^{eff}	e_{322}^{eff}	e_{223}^{eff}	κ_{11}^{eff}	κ_{22}^{eff}
7.2 %	40.5 %	39.5 %	34.9 %	26.2 %	69.1 %	78.0 %	21.9 %	41.8 %

Tabelle 5-24: Prozentuale Abweichung des Minimalwertes zum Maximalwert für ausgewählte Koeffizienten bei einer Einschränkung des Winkels auf $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $v^f = 0.5$

C_{1111}^{eff}	C_{2222}^{eff}	C_{2323}^{eff}	C_{1212}^{eff}	e_{311}^{eff}	e_{322}^{eff}	e_{223}^{eff}	κ_{11}^{eff}	κ_{22}^{eff}
4.2 %	5.5 %	4.6 %	22.7 %	3.8 %	4.0 %	15.0 %	4.7 %	4.9 %

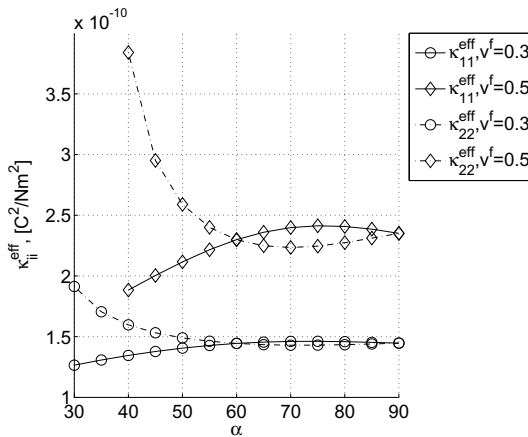


Abbildung 5-40: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$ und $v^f = 0.5$

Es gibt effektive Koeffizienten, die nahezu unabhängig vom Winkel α und somit unabhängig von der Faseranordnung sind. Zu diesen gehören die Koeffizienten e_{333}^{eff} , $\kappa_{333}^{\text{eff}}$ und C_{3333}^{eff} (siehe Abb. 5-41). Die Ursache dafür ist die unidirektionale Anordnung der Fasern.

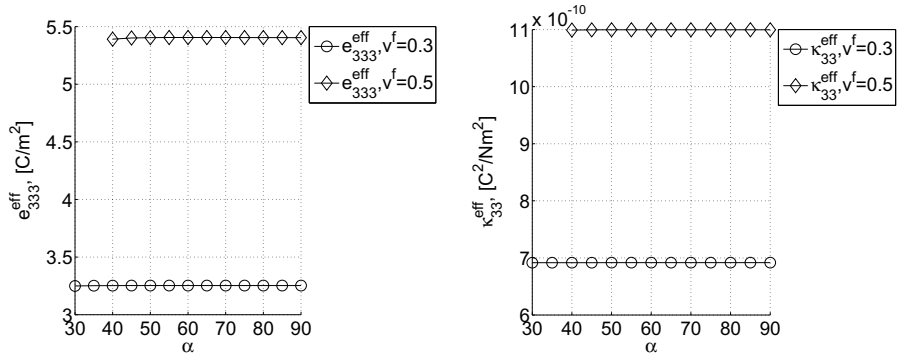


Abbildung 5-41: Effektive Koeffizienten e_{33}^{eff} und κ_{33}^{eff} in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$ und $v^f = 0.5$

5.2.2 Parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt mit perfektem Phasenübergang

In diesem Teilabschnitt werden Berechnungsmodelle für piezoelektrische Verbundwerkstoffe behandelt, deren Faserdistribution durch eine RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt repräsentiert wird. Der Phasenkontakt zwischen Matrix und Faser wird als perfekt angenommen. Wie bereits aus dem Teilabschnitt 5.1.3 bekannt ist, wird die Faserdistribution über den Winkel α und das Kantenlängenverhältnis des RUC-Querschnitt w/b gesteuert. Das erste Ziel dieses Teilabschnittes ist die Validierung der Berechnungsmodelle. Im Anschluss daran wird der Einfluss des Winkels und des Kantenlängenverhältnisses auf die effektiven Werkstoffeigenschaften untersucht.

Für die FE-Diskretisierung werden quadratische Hexaeder- und Pentaeder-Elemente (Polynomgrad 2) genutzt. Die verwendeten Randbedingungen für die Berechnung der effektiven Materialeigenschaften sind in Abschnitt 3.5 näher erläutert.

Validierung der Berechnungsmodelle

Die Validierung der Berechnungsmodelle erfolgt anhand bereits behandelter Modelle aus dem Teilabschnitt 5.2.1. Dazu werden die berechneten effektiven Materialeigenschaften der verschiedenen Modelle miteinander verglichen. Dabei ist es ausreichend, den Vergleich auf ausgewählte effektive Koeffizienten zu beschränken. In Abb. 5-32 sind die Querschnitte der RUCs der zwei Modellvarianten dargestellt. Da in den Berechnungsmodellen unterschiedliche Koordinatensysteme verwendet werden, ist eine Koordinatentransformation der berechneten effektiven Koeffizienten erforderlich.

Für die Validierung werden die Phaseneigenschaften aus der Tab. 5-20 verwendet. Der Faservolumenanteil ist auf $v^f = 0.3$ festgelegt.

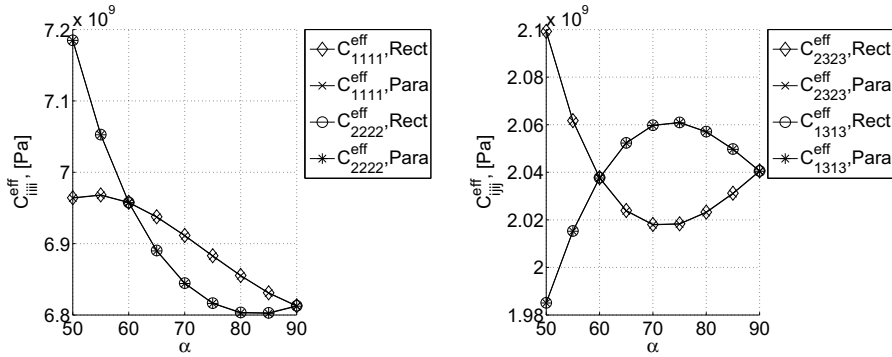


Abbildung 5-42: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$

In Abb. 5-42 und 5-43 sind die effektiven Koeffizienten der zwei Modellvarianten in Abhängigkeit des Winkels α dargestellt. Es ist unabhängig von der Faseranordnung eine gute Übereinstimmung für alle Koeffizienten erkennbar.

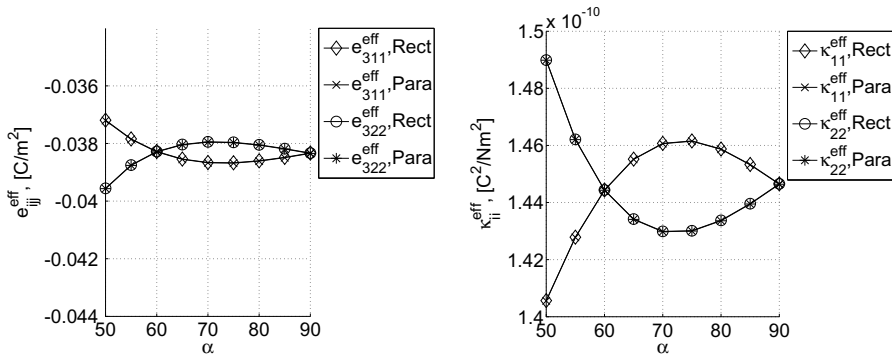


Abbildung 5-43: Effektive piezoelektrische und dielektrische Koeffizienten in Abhängigkeit von α , verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $v^f = 0.3$

Daraus lässt sich schlussfolgern, dass sich die Berechnungsmodelle auf Basis der RUC mit dem parallelogrammförmigen Querschnitt zum Berechnen der effektiven Werkstoffeigenschaften eignen.

Weitere Untersuchungen

Unter Verwendung der validierten Berechnungsmodelle wird nachfolgend der Einfluss der Faseranordnung auf die effektiven Koeffizienten untersucht. Wie bereits bekannt, lässt sich

die Faseranordnung über den Winkel α und das Kantenlängenverhältnis w/b des RUC-Querschnitts steuern. Die verwendeten Phasen für die Beschreibung des Kompositwerkstoffes sind die gleichen wie bei der Validierung (Tab. 5-20). Der Winkel α variiert von 50° bis 90° . Das Kantenlängenverhältnis w/b nimmt Werte von 1.0, 1.1 oder 1.2 an.

Im Allgemeinen lässt sich das effektive Materialverhalten, bezogen auf das Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, durch die folgende Matrix in M-V-Notation beschreiben

$$\bar{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad (5-13)$$

wobei mit „*“ die Komponenten der Matrix gekennzeichnet sind, die nicht Null sind. In Abb. 5-44 sind ausgewählte piezoelektrische und dielektrische Koeffizienten paarweise dargestellt. Die effektiven Koeffizienten beschreiben das Verhalten des Kompositwerkstoffes quer zur Faserrichtung. Bei einem Kantenlängenverhältnis von 1.0 und einem Winkel von 60° und 90° haben die paarweise dargestellten Koeffizienten im numerischen Sinn den gleichen Wert. Gleiche Koeffizientenwerte lassen sich auch bei höheren Kantenlängenverhältnissen beobachten. Je höher das Verhältnis wird, desto kleiner ist der Winkel α , bei dem sich die Gleichheit ergibt. Der größte Wertunterschied in den paarweise dargestellten Koeffizienten tritt jeweils bei 90° und $w/b = 1.2$ ein.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Einfluss des Winkels und des Kantenlängenverhältnisses in Analogie zu dem elastischen Fall aus Teilabschnitt 5.1.1 zu bewerten ist.

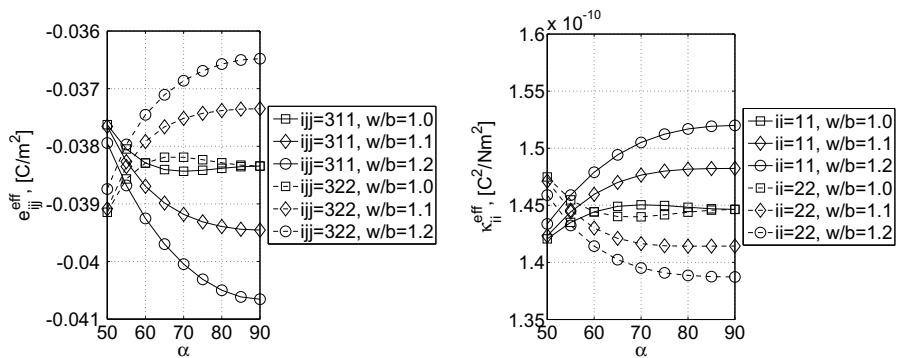


Abbildung 5-44: Effektive piezoelektrische und dielektrische Koeffizienten in Abhängigkeit von α und w/b , verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$, $v^f = 0.3$

5.2.3 Parallelogrammförmiger RUC-Querschnitt mit imperfektem Phasenübergang

Die Berechnungsmodelle aus dem vorherigen Teilabschnitt werden nun so verändert, dass anstelle des perfekten Phasenübergangs ein imperfekter Phasenübergang verwendet wird. Der imperfekte Übergang wird durch die Beziehungen in der Gl. (3-120) und (3-121) beschrieben. In [84] wurde der Einfluss eines abgewandelten imperfekten Phasenübergangs für unidirektionale piezoelektrische Faserverbundwerkstoffe behandelt. Anstelle der elektrischen Beziehung in Gl. (3-120) wurde ein elektrisch perfekter Übergang verwendet. Zusätzlich wurde kein Bezug zu einer isotropen Zwischenphasenmodellierung hergestellt, wodurch zwischen den Parametern K_i^ε , $i = r, \theta, z$ keine Abhängigkeit bestand. Daher konnte der Einfluss von jedem K_i^ε auf die effektiven Koeffizienten separat untersucht werden.

Das Ziel dieses Teilabschnittes ist es, den Einfluss des imperfekten Phasenübergangs nach Gl. (3-120) und (3-121) auf die effektiven Koeffizienten zu untersuchen.

Die Beziehung aus Gl. (3-121) verknüpft die Parameter der imperfekten Phasenübergangsbeschreibung K_i^ε , $i = r, \theta, z$, K_E^ε mit den Materialeigenschaften einer sehr dünnen isotropen nichtpiezoelektrischen Zwischenphase. Das ermöglicht es zusätzlich, die Berechnungsmodelle anhand von Drei-Phasen-Modellen zu validieren.

Für die FE-Diskretisierung werden lineare Hexaeder- und Pentaeder-Elemente (Polynomgrad 1) verwendet. Der elastische Teil der imperfekten Phasenübergangsbeschreibung wird durch Federelemente realisiert. Der elektrische Teil wird durch Kondensatorelemente simuliert (siehe Abschnitt 4.4).

Die für die Untersuchung verwendeten Phasen sind der Tab. 5-20 zu entnehmen. Die Faseranordnung soll eine eher untergeordnete Rolle einnehmen. Daher werden das Kantenlängenverhältnis des RUC-Querschnitts w/b und der Winkel α auf 1.0 beziehungsweise 60° festgelegt. Der Faservolumenanteil beträgt 0.4.

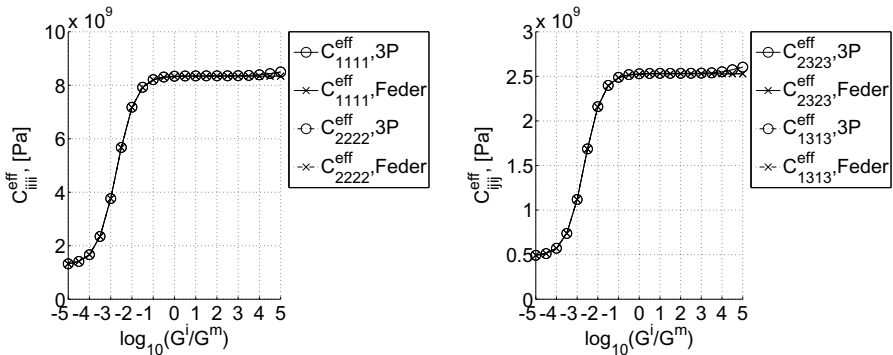


Abbildung 5-45: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von G^i/G^m , $\kappa^i/\kappa^m = 1$, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

Für die Validierung der Berechnungsmodelle mit Drei-Phasen-Modellen werden noch Informationen hinsichtlich der Zwischenphase benötigt, welche auch in die Gl. (3-121) für den imperfekten Phasenübergang einfließen. Die Dicke der Zwischenphase wird auf ein Tau-

sendstel des Faserradius festgelegt. Die Querkontraktionszahl ν^i wird mit 0.3 angenommen. Der Schubmodul G^i und die dielektrische Konstante κ^i werden in der Untersuchung als variierbare Größen behandelt.

In Abb. 5-45 und 5-46 sind ausgewählte elastische, piezoelektrische und dielektrische Koeffizienten dargestellt, die das effektive Materialverhalten des Kompositwerkstoffes bei einem variierenden Schubmodul G^i und einer festen dielektrischen Konstante $\kappa^i = \kappa^m$ beschreiben. Die Abkürzung „Feder“ kennzeichnet die Koeffizienten der Berechnungsmodelle mit dem imperfekten Phasenübergang. Die Koeffizienten der Drei-Phasen-Modelle sind durch „3P“ gekennzeichnet.

In Abb. 5-45 sind die elastischen Koeffizienten zu betrachten. Es ist eine gute Übereinstimmung mit der Drei-Phasen-Modellierung zu erkennen. Ist der Zwischenphasenschubmodul sehr viel größer (ab $G^i/G^m = 3$) als die der anderen Phasen des Kompositwerkstoffes, so ist ein zunehmender Unterschied in den Werten der verschiedenen Modellierungen festzustellen. Das liegt daran, dass der Einfluss des Anteils der Zwischenphase auf die Berechnung der makroskopischen Spannungen zunimmt. Die paarweise dargestellten Koeffizienten C_{1111}^{eff} und C_{2222}^{eff} weisen jeweils für beide Berechnungsmodellierungen den gleichen Wert auf, was auf die hexagonale Faseranordnung zurückzuführen ist. Analoges lässt sich für C_{1313}^{eff} und C_{2323}^{eff} sagen.

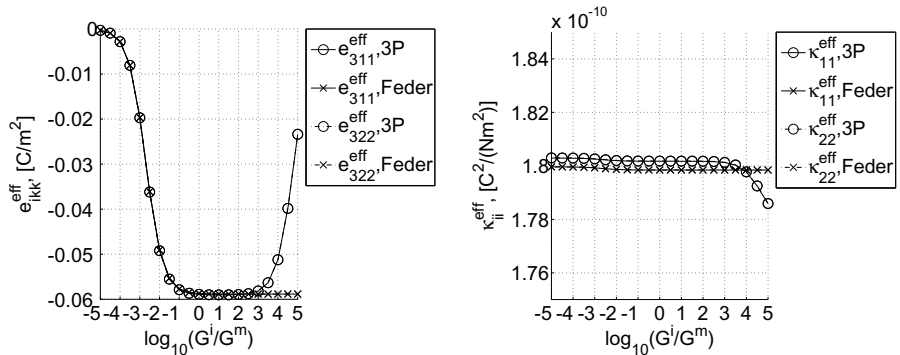


Abbildung 5-46: Effektive piezoelektrische und dielektrische Koeffizienten in Abhängigkeit von G^i/G^m , $\kappa^i/\kappa^m = 1$, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

In Abb. 5-46 sind die piezoelektrischen und dielektrischen Koeffizienten dargestellt. Auch hier ist eine gute Übereinstimmung der Koeffizienten zu erkennen.

Die Veränderung des Zwischenphasenschubmoduls scheint sich unterschiedlich auf die jeweiligen Koeffizienten auszuwirken. Der Zwischenphasenschubmodul beeinflusst die elastischen und piezoelektrischen Koeffizienten stärker als die dielektrischen. Eingeschränkt auf das Intervall $-5 < \log_{10}(G^i/G^m) < 3$ ist nur eine sehr kleine Veränderung in den dielektrischen Koeffizienten erkennbar. Des Weiteren zeigt sich, dass mit einem kleiner werdenden Zwischenphasenschubmodul die piezoelektrischen Koeffizienten kleiner werden. Somit wird das piezoelektrische Verhalten des Kompositwerkstoffes reduziert. Im Fall der Drei-Phasen-Modellierung lässt sich dies damit erklären, dass ein im Vergleich zu den anderen beteiligten Phasen kleinerer Schubmodul der Zwischenphase den elastischen Lasttransfer zwischen der

Matrix und den Fasern infolge der aufgetragenen Randbedingungen reduziert. Somit wird auch die Wirkung des piezoelektrischen Effektes der Fasern verringert. Im theoretischen Grenzfall ($\log_{10}(G^i/G^m)=-5$) sind die piezoelektrischen Eigenschaften der Fasern nahezu wirkungslos.

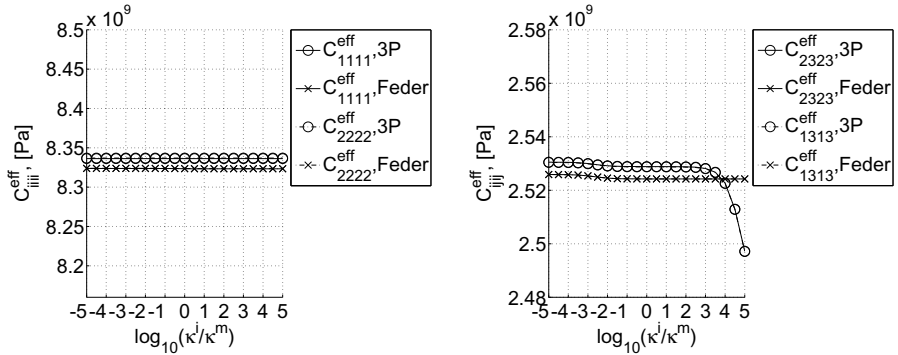


Abbildung 5-47: Effektive Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit von κ^i/κ^m , $G^i/G^m = 1$, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

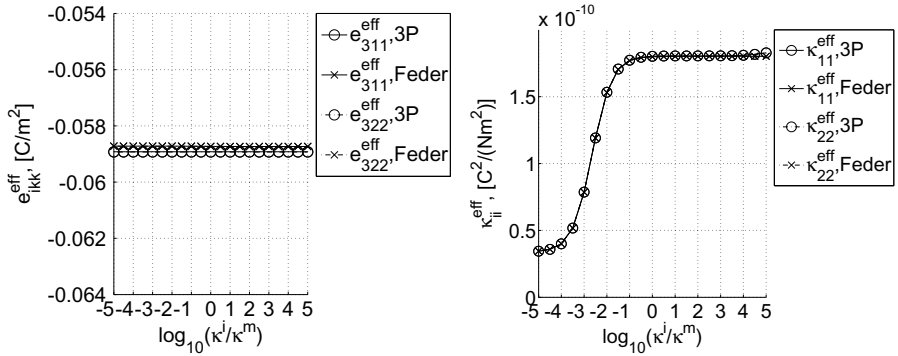


Abbildung 5-48: Effektive piezoelektrische und dielektrische Koeffizienten in Abhängigkeit von κ^i/κ^m , $G^i/G^m = 1$, verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

In Abb. 5-47 und 5-48 sind ausgewählte elastische, piezoelektrische und dielektrische Koeffizienten dargestellt, die das effektive Materialverhalten des Kompositwerkstoffes bei einer variierenden dielektrischen Konstante κ^i und einem festen Zwischenphasenschubmodul $G^i = G^m$ beschreiben. Die elastischen Koeffizienten lassen sich aus der Abb. 5-47 entnehmen. Man kann eine sehr gute Übereinstimmung der paarweisen Koeffizienten der unterschiedlichen Modellierungen erkennen. Des Weiteren entsprechen die Werte der Dreiphasenmodellierung in gewisser Näherung denen der imperfekten Modellierung. Eine Veränderung der dielektrischen Konstante der Zwischenphase κ^i übt nahezu keinen Einfluss

auf die elastischen Koeffizienten aus. Im Fall von C_{1313}^{eff} und C_{2323}^{eff} sind nur leichte Veränderungen erkennbar.

In Abb. 5-48 sind die piezoelektrischen und dielektrischen Koeffizienten dargestellt. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der paarweise dargestellten Koeffizienten sowie eine gute Näherung der Koeffizienten der imperfekten Modellierung mit denen der Drei-Phasen-Modellierung. Die Veränderung der dielektrischen Konstante κ^i hat keinen erkennbaren Einfluss auf die dargestellten piezoelektrischen Koeffizienten. Im Fall der dielektrischen Koeffizienten ist jedoch ein deutlicher Einfluss von κ^i festzustellen. Es gibt aber auch effektive Koeffizienten, die sowohl von G^i als auch von κ^i eine ausgeprägte Abhängigkeit zeigen (siehe Abb. 5-49).

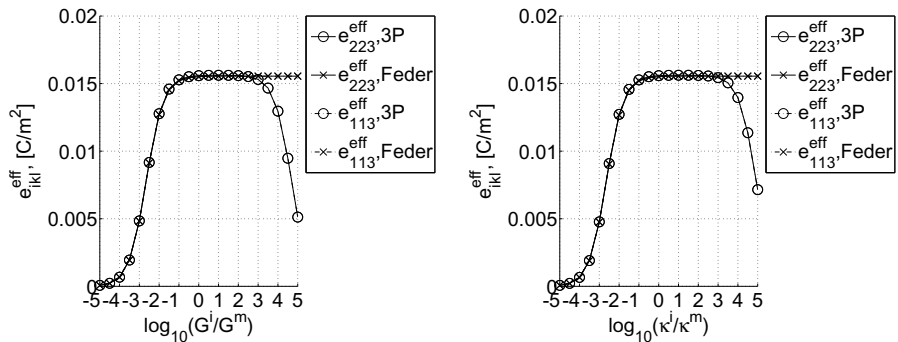


Abbildung 5-49: Effektive Koeffizienten e_{223}^{eff} und e_{113}^{eff} in Abhängigkeit von G^i/G^m , $\kappa^i/\kappa^m = 1$ (linkes Bild) beziehungsweise in Abhängigkeit von κ^i/κ^m , $G^i/G^m = 1$ (rechtes Bild), verwendetes Koordinatensystem $\{y_1, y_2, y_3\}$

Tabelle 5-25: Prozentuale Abweichung ausgewählter effektiver Koeffizienten der imperfekten Modellierung zu den Koeffizienten der Drei-Phasen-Modellierung, $\kappa^i/\kappa^m = 1$, $v^f = 0.4$, die verwendete Zwischenphasendicke beträgt ein Hundertstel des Faserradius

$\log_{10}(G^i/G^m)$	C_{1111}^{eff}	C_{2323}^{eff}	e_{311}^{eff}	e_{223}^{eff}	κ_{11}^{eff}
-2	0.03 %	0.15 %	3.66 %	3.44 %	1.81 %
-1	1.21 %	1.45 %	4.49 %	4.15 %	1.80 %
0	1.53 %	1.76 %	4.70 %	4.36 %	1.80 %
1	1.58 %	1.81 %	4.60 %	4.21 %	1.80 %

Wie im elastischen Fall weichen die effektiven Koeffizienten der imperfekten Modellierung und der Drei-Phasen-Modellierung mit einer zunehmenden Zwischenphasendicke stärker voneinander ab. In Tab. 5-25 sind im Fall einer Zwischenphasendicke von einem Hundertstel des Faserradius für ausgewählte effektive Koeffizienten die prozentualen Abweichungen präsentiert. Für die Berechnung der Abweichung wird die folgende Gleichung verwendet

$$\text{diff4} = \frac{|P^{\text{eff}} - P^{\text{eff,ref}}|}{|P^{\text{eff,ref}}|} 100\% \quad . \quad (5-14)$$

Als Referenzwerte $P^{\text{eff,ref}}$ werden die Koeffizienten der Drei-Phasen-Modellierung genutzt. Bei einer Einschränkung des Zwischenphasenschubmoduls auf einen eher realistischen Wertebereich von $-2 < \log_{10}(G^i/G^m) < 1$ zeigt sich, dass im Fall der piezoelektrischen Koeffizienten die größten Abweichungen auftreten.

Es lässt sich zusammenfassen, dass die Ergebnisse der imperfekten Phasenübergangsmodellierung über weite Strecken näherungsweise denen der Drei-Phasen-Modellierung mit einer sehr dünnen isotropen nichtpiezoelektrischen Zwischenphase entsprechen. Die Veränderung von G^i oder κ^i wirkt sich unterschiedlich auf die effektiven Koeffizienten aus. Im Fall von G^i werden die elastischen und piezoelektrischen Koeffizienten erkennbar beeinflusst, die dielektrischen Koeffizienten bleiben nahezu konstant. Bei der Variation von κ^i bleiben die elastischen und einige piezoelektrischen Koeffizienten nahezu konstant. Die dielektrischen Koeffizienten zeigen dagegen einen erkennbaren Einfluss. Die effektiven Koeffizienten (e_{223}^{eff} , e_{113}^{eff}) lassen sich sowohl von G^i als auch von κ^i beeinflussen. Mit einer zunehmenden Zwischenphasedicke weichen die berechneten Koeffizienten der imperfekten Modellierung und der Drei-Phasen-Modellierung deutlicher voneinander ab.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden unter der Verwendung der FEM numerische Modelle zum Berechnen effektiver Materialeigenschaften von unidirektionalen Faserverbundwerkstoffen mit einer periodischen Mikrostruktur entwickelt. Die Berechnungsmodelle auf Basis einer RUC sind in der Lage, verschiedene Faseranordnungen und Phasenübergänge zu simulieren und deren Einfluss auf die effektiven Materialeigenschaften zu untersuchen. Die simulierbaren Faseranordnungen lassen sich im Allgemeinen durch einen rhombischen oder einen parallelogrammförmigen RUC-Querschnitt beschreiben. Die Verwendung des imperfekten Phasenübergangs, welcher auch als sehr dünne Zwischenphase interpretiert werden kann, bietet die Möglichkeit der Wichtung des Lasttransfers zwischen der Matrix- und der Faserphase. Diesbezüglich wurden im Rahmen der Doktorarbeit zu Validierungszwecken zusätzlich Drei-Phasen-Modelle entwickelt.

Die numerischen Berechnungsmodelle wurden sowohl für eine elastische als auch eine piezoelektrische Modellierung von Verbundwerkstoffen entwickelt. Durch die Verwendung von dreidimensionalen RUCs in Kombination mit den jeweiligen periodischen Randbedingungen lassen sich alle effektiven materialbeschreibenden Koeffizienten der betrachteten Werkstoffmodelle berechnen.

Es wurden Berechnungsmodelle für elastische Faserverbundwerkstoffe mit einer rhombischen Faserverteilung und einem perfekten Phasenübergang entwickelt. Dies schließt auch Verbundwerkstoffe mit einer hexagonalen und quadratischen Faseranordnung mit ein. Dazu wurde ein rechteckiger RUC-Querschnitt verwendet, da sich die Modellierung leichter realisieren lässt. Zur Validierung der Berechnungsmodelle wurde auf analytische Methoden aus der Literatur zurückgegriffen. Es konnte eine gute Übereinstimmung der effektiven Koeffizienten mit Vergleichsergebnissen anderer Berechnungsmethoden („Jiang“, „AHM“, „EEVM“, „G&N“, CCA-Modell) gezeigt werden. Im Anschluss an die Validierung wurde der Einfluss der Faserverteilung und des Faservolumenanteils auf die effektiven Koeffizienten untersucht. Dazu wurden isotrope (Matrix) und transversal isotrope (Faser) Phasen für die Beschreibung des Verbundwerkstoffes verwendet. Das effektive Materialverhalten konnte im Allgemeinen als orthotrop charakterisiert werden. Es wurde festgestellt, dass der Faservolumenanteil einen größeren Einfluss auf die effektiven Koeffizienten als die Faserverteilung hat. Der Einfluss der Faserverteilung ist dennoch nicht zu vernachlässigen. Infolge der Unidirektionalität der Fasern werden nicht alle Koeffizienten gleichermaßen durch eine veränderte Faseranordnung beeinflusst. Ein Beispiel ist der Koeffizient C_{333}^{eff} , welcher nahezu konstant bleibt.

Für das Einbeziehen einer sehr dünnen isotropen Zwischenphase in die rein elastischen Untersuchungen von Faserverbundwerkstoffen wurden die Berechnungsmodelle verändert. Der bisherige perfekte Phasenübergang wurde durch den imperfekten Phasenübergang, welcher durch unstetige Randverschiebungen charakterisiert wird, ersetzt. Im Rahmen der FEM erfolgte die Modellierung des imperfekten Übergangs durch Feder Elemente, deren Federsteifigkeiten sich an den Materialeigenschaften der isotropen Zwischenphase orientieren. Zur Validierung der Berechnungsmodelle wurden sowohl Drei-Phasen-Modelle analytischer

Methoden aus der Literatur (CCA-Modell, GSCS) als auch eigens entwickelte Drei-Phasen-Modelle (FEM) verwendet. Der Vergleich von effektiven Materialkonstanten anhand von Modellbeispielen ergab generell eine gute Übereinstimmung. Es konnte festgestellt werden, dass sich bei einer Einschränkung des Zwischenphasenschubmoduls auf einen realistischen Bereich bis zu einer gewissen Zwischenphasendicke durch die imperfekte Phasenübergangsmodellierung eine Näherung an die Koeffizienten der Drei-Phasen-Modellierung (CCA-Modell, FEM) erzielen lässt. Eine Untersuchung hinsichtlich des Einflusses des Materialunterschieds der Matrix- und der Faserphase ergab, dass ein zunehmender Unterschied in der Regel zu einer Verschlechterung in der Übereinstimmung der Ergebnisse der Modellierungen führt. Zusätzlich ist zu erwähnen, dass durch die Festlegung sehr hoher Federsteifigkeiten in den imperfekten Phasenübergangsmodellen ein nahezu perfekter Phasenübergang simuliert wird. Somit können die Modelle auch zur Berechnung effektiver Eigenschaften von Kompositwerkstoffen, die sich aus zwei Phasen zusammensetzen und einen perfekten Phasenübergang besitzen, verwendet werden.

Eine komplexere Faseranordnung als die rhombische konnte durch die Entwicklung von Berechnungsmodellen auf Basis einer RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt erreicht werden. Durch das Festlegen eines geeigneten Kantenlängenverhältnisses und Winkels des Querschnitts lassen sich auch rhombische und rechteckige Faseranordnungen simulieren. Eine Validierung der Berechnungsmodelle erfolgte durch den Vergleich mit Methoden aus der Literatur („AHM“, „G&N“) anhand der berechneten effektiven Koeffizienten von verschiedenen Modellbeispielen, die sich in Faseranordnung und Faservolumen voneinander unterscheiden. Es konnte im Großen und Ganzen eine gute Übereinstimmung in den Koeffizienten festgestellt werden. Anschließend wurde eine genauere Untersuchung des Einflusses des parallelogrammförmigen RUC-Querschnitts auf die effektiven Koeffizienten durchgeführt. Es konnte festgestellt werden, dass im Fall eines parallelogrammförmigen Querschnitts und einer isotropen Matrix- und Faserphase das effektive Materialverhalten im Allgemeinen monoklin ist. Ein zunehmendes Kantenlängenverhältnis verstärkt zusätzlich die anisotrope Ausrichtung der Elastizität des Verbundwerkstoffes. Des Weiteren konnte gezeigt werden, dass sich im Fall ungleicher Kantenlängen neben der rechteckigen ($\alpha = 90^\circ$) noch weitere Faseranordnungen finden lassen, denen ein effektives orthotropes Materialverhalten zugeordnet werden kann.

Die Berechnungsmodelle auf Basis einer RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt wurden auf einen imperfekten Phasenübergang erweitert. Daraus ergibt sich der Vorteil, dass alle Betrachtungen von Verbundwerkstoffen der zuvor entwickelten Modelle durch diese Berechnungsmodelle simuliert werden können. Dies konnte durch einen Modellvergleich (rhombische Faseranordnung und imperfekter Phasenübergang), der gleichzeitig zur Validierung genutzt wurde, anhand von berechneten effektiven Koeffizienten von Testbeispielen untermauert werden.

Die entwickelten Berechnungsmodelle für piezoelektrische Verbundwerkstoffe mit einer rhombischen Faseranordnungen und einem perfekten Phasenübergang basieren auf einer RUC mit einem rechteckigen Querschnitt. Die Validierung der Modelle erfolgte anhand eines Simulationsbeispiels eines Verbundwerkstoffes mit hexagonaler Faseranordnung aus der Literatur. Nach der erfolgreichen Validierung wurde der Einfluss der Faseranordnung auf die effektiven Koeffizienten untersucht. Analog zum elastischen Fall wurde festgestellt, dass infolge der Veränderung der Faseranordnung ein Großteil der berechneten Koeffizienten deutlichen Schwankungen unterliegen kann. Dies gilt speziell im Fall eines hohen Faservolumenanteils und Materialunterschieds der Phasen. Dies zeigt, dass der Einfluss der

Faseranordnung auf die effektiven Koeffizienten im Allgemeinen nicht zu unterschätzen ist. Ausnahmen bilden die Koeffizienten C_{333}^{eff} , e_{333}^{eff} , und κ_{33}^{eff} , die aufgrund der Unidirektionalität der Fasern konstant bleiben.

Die Entwicklung von piezoelektrischen Berechnungsmodellen auf Basis einer RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt ermöglichte die Betrachtung komplexerer Faseranordnungen. Für die Validierung der Berechnungsmodelle wurden zuvor entwickelte Modelle verwendet. Ein Vergleich der effektiven Koeffizienten für Modellbeispiele ergab eine sehr gute Übereinstimmung. Anschließend wurde der Einfluss der Faseranordnung auf die effektiven Koeffizienten untersucht. Dies sollte klären, inwieweit sich ein verändertes Kantentlängenverhältnis und ein veränderter Winkel auf das Materialverhalten des Verbundwerkstoffes auswirken. Es konnte festgestellt werden, dass das effektive Werkstoffverhalten in Analogie zum elastischen Fall zu bewerten ist.

Das Einbeziehen einer sehr dünnen Zwischenphase, welche aus Gründen der einfacheren Realisierung ein nicht-piezoelektrisches Materialverhalten aufweist, in die piezoelektrischen Betrachtungen erfolgte über einen imperfekten Phasenübergang. Der Übergang ist durch Unstetigkeiten in den Verschiebungen und in dem elektrischen Potential gekennzeichnet. Im Rahmen der FEM wurden für die Realisierung des imperfekten Übergangs Federelemente und Kondensatorelemente verwendet, wobei deren Federsteifigkeiten und deren elektrische Kapazitäten sich an den Materialeigenschaften der Zwischenphase orientieren. Zum Validieren der Berechnungsmodelle wurden zusätzlich Drei-Phasen-Modelle entwickelt. Die Validierung anhand von Modellbeispielen wurde gleichzeitig auch für Untersuchungen hinsichtlich des Einflusses der imperfekten Übergangsmodellierung genutzt. Es sollte überprüft werden, wie sich unterschiedliche Federsteifigkeiten oder elektrische Kapazitäten auf das effektive Materialverhalten auswirken. Es stellte sich heraus, dass durch die Veränderung der Federsteifigkeiten die elastischen Koeffizienten deutlich stärker beeinflusst werden als die dielektrischen. Diese bleiben nahezu konstant. Bei einer Veränderung der elektrischen Kapazität konnte gerade ein umgekehrter Effekt beobachtet werden. Für die effektiven piezoelektrischen Koeffizienten konnte festgestellt werden, dass eine Veränderung der Federsteifigkeit alle Koeffizienten, welche nicht Null sind, deutlich beeinflusst, während eine Veränderung der elektrischen Kapazität nur eine Wirkung auf gewisse Koeffizienten zeigt. Einige Koeffizienten bleiben nahezu konstant. Der Vergleich mit einer Drei-Phasen-Modellierung, wobei die Zwischenphase eine Dicke von einem Tausendstel des Faserradius hatte, lieferte über weite Bereiche ähnliche Resultate. Ein Koeffizientenvergleich der Modellierungen im Fall einer Zunahme der Zwischenphasendicke ergab wie im elastischen Fall eine Verschlechterung der Übereinstimmung. Die größte Abweichung trat bei den piezoelektrischen Koeffizienten auf.

Die in dieser Arbeit präsentierten numerischen Homogenisierungskonzepte auf Basis einer RUC, welche einen parallelogrammförmigen Querschnitt aufweisen, stellen in Kombination mit der imperfekten Phasenübergangsmodellierung und der Erweiterung auf piezoelektrische Faserverbundwerkstoffe den Neuheitswert der vorliegenden Arbeit dar.

Ausblick

In zukünftigen Arbeiten kann das hier präsentierte numerische Homogenisierungskonzept auf Basis einer RUC mit einem parallelogrammförmigen Querschnitt auch auf andere (periodische) Verbundstrukturen übertragen werden. Denkbar sind beispielsweise Verbundwerkstoffe mit Partikeleinschlüssen. Darüber hinaus können weitere Untersuchungen zu

einer komplexeren Partikelverteilung durchgeführt werden. Hierfür kann die Verteilung durch eine RUC in Form eines allgemeinen Parallelepipeds beschrieben werden. Für die Geometriebeschreibung können drei Kantenlängen und drei Winkel verwendet werden. Im Rahmen der numerischen Phasenübergangsformulierung werden in dieser Arbeit im elastischen Fall Federelemente verwendet, die Faserknoten und Matrixknoten koppeln. In nachfolgenden Arbeiten kann die Entwicklung anderer Strategien zur Realisierung des imperfekten Phasenübergangs unter Verwendung der FEM in Betracht gezogen werden. Die in dieser Arbeit verwendete numerische Modellierung eines imperfekten Übergangs kann aus pragmatischer Sicht durch eine geeignete Modifizierung der Übergangsbedingungen im elastischen Fall auch dazu verwendet werden, ein approximatives Kohäsivzonenmodell zu entwickeln. In Verbindung mit einem RVE oder einer RUC ließe sich so ein Einstieg in Untersuchungen zur Rissbildung und zum Rissfortschritt in Verbundwerkstoffen ermöglichen.

A Verallgemeinertes Selbstkonsistenzschema

Für die Darstellung der 12×12 -Matrix \mathbf{L} aus dem Abschnitt 3.2.2 werden zuerst die folgenden Abkürzungen eingeführt

$$\chi^0 = 1 - 2\nu^0, \quad \chi^m = 1 - 2\nu^m, \quad \chi^i = 1 - 2\nu^i, \quad \chi^f = 1 - 2\nu^f \quad . \quad (\text{A-1})$$

Somit hat \mathbf{L} folgende Gestalt

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{0m} & \mathbf{0}^{4 \times 4} & \mathbf{0}^{4 \times 2} \\ \mathbf{0}^{4 \times 2} & \mathbf{L}^{mi} & \mathbf{0}^{4 \times 2} \\ \mathbf{0}^{4 \times 2} & \mathbf{0}^{4 \times 4} & \mathbf{L}^{if} \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{A-2})$$

wobei

$$\mathbf{L}^{0m} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(r^m)^2} & -\frac{1}{(r^m)^4} & \frac{(r^m)^2}{1 - \chi^m} \\ -\frac{\chi^0}{(1 + \chi^0)(r^m)^2} & \frac{1}{(r^m)^4} & \frac{(2 + \chi^m)(r^m)^2}{1 - \chi^m} \\ \frac{2G^0}{(1 + \chi^0)G^m(r^m)^2} & \frac{3G^0}{G^m(r^m)^4} & 0 \\ -\frac{G^0}{(1 + \chi^0)G^m(r^m)^2} & -\frac{3G^0}{G^m(r^m)^4} & \frac{3(r^m)^2}{1 - \chi^m} \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{A-3})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{(r^m)^2} & \frac{1}{(r^m)^4} \\ 1 & \frac{\chi^m}{(1 + \chi^m)(r^m)^2} & -\frac{1}{(r^m)^4} \\ 1 & \frac{2}{(1 + \chi^m)(r^m)^2} & -\frac{3}{(r^m)^4} \\ 1 & \frac{1}{(1 + \chi^m)(r^m)^2} & \frac{3}{(r^m)^4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}^{\text{mi}} = \begin{pmatrix} -(r^{\text{i}})^3 & -r^{\text{i}} & -\frac{1}{r^{\text{i}}} & -\frac{1}{(r^{\text{i}})^3} \\ -\frac{(2+\chi^{\text{m}})(r^{\text{i}})^3}{1-\chi^{\text{m}}} & -r^{\text{i}} & -\frac{\chi^{\text{m}}}{(1+\chi^{\text{m}})r^{\text{i}}} & \frac{1}{(r^{\text{i}})^3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{(1+\chi^{\text{m}})(r^{\text{i}})^2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{3(r^{\text{i}})^2}{1-\chi^{\text{m}}} & -1 & -\frac{1}{(1+\chi^{\text{m}})(r^{\text{i}})^2} & \frac{3}{(r^{\text{i}})^4} \end{pmatrix}, \quad (\text{A-4})$$

$$\mathbf{L}^{\text{if}} = \begin{pmatrix} (r^{\text{f}})^3 & r^{\text{f}} & \frac{1}{r^{\text{f}}} \\ \frac{(2+\chi^{\text{i}})(r^{\text{f}})^3}{1-\chi^{\text{i}}} & r^{\text{f}} & \frac{\chi^{\text{i}}}{(1+\chi^{\text{i}})r^{\text{f}}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{(1+\chi^{\text{i}})(r^{\text{f}})^2} \\ \frac{3(r^{\text{f}})^2}{1-\chi^{\text{i}}} & 1 & \frac{1}{(1+\chi^{\text{i}})(r^{\text{f}})^2} \\ \frac{1}{(r^{\text{f}})^3} & -(r^{\text{f}})^3 & -r^{\text{f}} \\ -\frac{1}{(r^{\text{f}})^3} & -\frac{(2+\chi^{\text{f}})(r^{\text{f}})^3}{(1-\chi^{\text{f}})} & -r^{\text{f}} \\ -\frac{3}{(r^{\text{f}})^4} & 0 & -\frac{G^{\text{f}}}{G^{\text{i}}} \\ \frac{3}{(r^{\text{f}})^4} & -\frac{3G^{\text{f}}(r^{\text{f}})^2}{G^{\text{i}}(1-\chi^{\text{f}})} & -\frac{G^{\text{f}}}{G^{\text{i}}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A-5})$$

Die restlichen Teilmatrizen $\mathbf{0}^{2 \times 4}$ und $\mathbf{0}^{4 \times 4}$ sind 2×4 - beziehungsweise 4×4 -Matrizen mit NULL-Einträgen.

B Untersuchungen zur FE-Netzfeinheit

Dieser Abschnitt dient dazu, den Einfluss der FE-Netzfeinheit für die entwickelten Berechnungsmodelle etwas näher zu untersuchen. Für die FE-Diskretisierung der Berechnungsmodelle werden lineare und quadratische finite Elemente verwendet. Modelle mit einem perfekten Phasenübergang (außer die Drei-Phasen-Modelle) werden mit quadratischen Elementen diskretisiert. Im Fall eines imperfekten Phasenübergangs werden lineare Elemente verwendet.

Für die Berechnung der effektiven Materialeigenschaften unidirektionaler Faserverbundwerkstoffe werden dreidimensionale RUCs genutzt, wobei die Fasern in y'_3 -Richtung zeigen. In diesem Fall kann die Abmessung der RUC in y'_3 -Richtung aus theoretischer Sicht beliebig gewählt werden, da die heterogene Beschreibung des Kompositwerkstoffes von dieser Richtung unabhängig ist. Im FE-Modell der RUC ist eine Elemententeilung von einem Element in dieser Richtung ausreichend, um die effektiven Koeffizienten zu berechnen, da die resultierenden Spannungen und Verzerrungen aus den Berechnungsmodellen unabhängig von der y'_3 -Richtung sind.

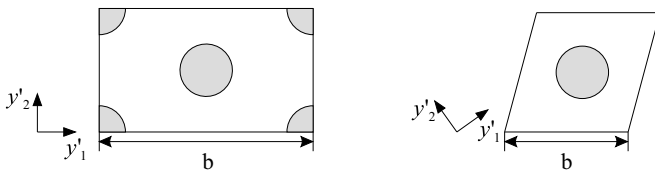
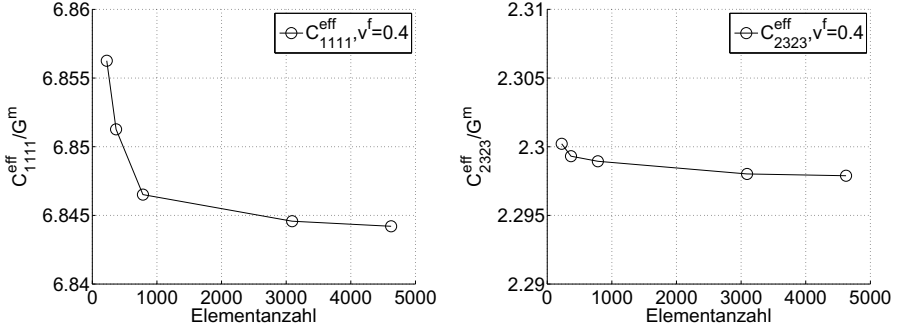
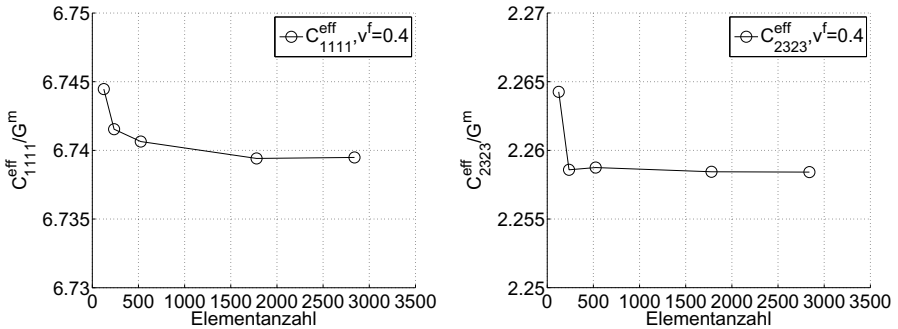


Abbildung B-1: Verwendete RUC-Querschnitte der Berechnungsmodelle: links: Rechteckgeometrie (Faseranordnung $\alpha = 60^\circ$), rechts: Rhombusgeometrie (Faseranordnung $\alpha = 75^\circ$)

Die Untersuchungen zur Netzfeinheit werden beispielhaft an ausgewählten Berechnungsmodellen der Abschnitte 5.1.1 und 5.1.3 durchgeführt. Die verwendeten RUC-Querschnitte sind der Abb. B-1 zu entnehmen. Aufgrund der oben beschriebenen Abmessung einer RUC in y'_3 -Richtung wird die Netzfeinheit nur in der y'_1 - y'_2 -Ebene untersucht. Die Feinheit des Netzes wird durch die Vorgabe einer Elementkantenlänge (0.1, 0.075, 0.05, 0.025 oder 0.02) im FE-Modell gesteuert. Unter der Annahme, dass die Kantenlänge b des rechten RUC-Querschnitts (Verweis auf Abb. B-1) Einheitslänge aufweist, sind entlang dieser Kante 10, 14, 20, 40 oder 50 Elemente angeordnet. Entlang der Kante des linken RUC-Querschnitts sind 20, 26, 36, 72 oder 88 Elemente angeordnet. Die verwendeten Materialdaten in den Modellen sind der Tab. B-1 zu entnehmen. Der Faservolumenanteil ist auf 0.4 festgelegt.

Tabelle B-1: Materialdaten der Matrix- und der Faserphase

Phase	Schubmodul	Querkontraktionszahl
Matrix	1	0.3
Faser	120	0.3

**Abbildung B-2:** Normierte effektive Koeffizienten $C_{1111}^{\text{eff}}/G^m$ und $C_{2323}^{\text{eff}}/G^m$, verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $\alpha = 60^\circ$ **Abbildung B-3:** Normierte effektive Koeffizienten $C_{1111}^{\text{eff}}/G^m$ und $C_{2323}^{\text{eff}}/G^m$, verwendetes Koordinatensystem $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$, $\alpha = 75^\circ$

In Abb. B-2 und B-3 sind jeweils die effektiven Koeffizienten C_{1111}^{eff} und C_{2323}^{eff} in Abhängigkeit von der Elementanzahl zu sehen. In Tab. B-2 und B-3 sind die dazugehörigen prozentualen Abweichungen der Koeffizienten zu einer Referenzlösung festgehalten, wobei als verwendete Referenzlösung der Koeffizient der feinsten Netzkonfiguration genommen wurde. Die Formel zur Berechnung der prozentualen Abweichung lautet

$$\text{diff5} = \frac{|C_{ijkl}^{\text{eff}} - C_{ijkl}^{\text{eff,ref}}|}{C_{ijkl}^{\text{eff,ref}}} 100\% \quad . \quad (\text{B-1})$$

Aus den Tabellen erkennt man, dass die Abweichungen der Koeffizienten zum Referenzwert selbst bei einer groben FE-Diskretisierung unter 0.26% liegen. Eine unzureichende FE-Diskretisierung der Faser zum Beispiel bei der Verwendung linearer Elemente in Kombination mit einer sehr groben FE-Diskretisierung kann zu schlechten Näherungsergebnissen führen. Außerdem wird der Volumeninhalt der Faser infolge der groben Diskretisierung kleiner. Daher ist darauf zu achten, dass die FE-Diskretisierung des Faservolumens in ausreichender Näherung die ursprüngliche Geometrie widerspiegelt.

Tabelle B-2: Prozentuale Abweichung (gerundet auf drei Stellen nach dem Komma) von C_{1111}^{eff} und C_{2323}^{eff}

C_{ijkl}^{eff}	Elementanzahl	Abweichung in %
C_{1111}^{eff}	224	0.176
	368	0.103
	784	0.034
	3092	0.005
	4624	0
C_{2323}^{eff}	224	0.101
	368	0.062
	784	0.046
	3092	0.006
	4624	0

Tabelle B-3: Prozentuale Abweichung (gerundet auf drei Stellen nach dem Komma) von C_{1111}^{eff} und C_{2323}^{eff}

C_{ijkl}^{eff}	Elementanzahl	Abweichung in %
C_{1111}^{eff}	125	0.074
	236	0.031
	525	0.017
	1779	0.001
	2840	0
C_{2323}^{eff}	125	0.259
	236	0.007
	525	0.015
	1779	0.006
	2840	0

Der Zeitaufwand für die Realisierung der Zwangsbedingungen im FE-Modell nimmt mit einer feiner werdenden FE-Diskretisierung zu, da geeignete Knotenpaarungen für die Zwangsgleichungen gefunden werden müssen. Die Berechnungsmodelle sollten daher eine FE-Diskretisierung besitzen, die einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Zeitaufwand widerspiegelt. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen wird eine Elementkantenlänge kleiner gleich 0.025 (bei quadratischen Elementen) oder kleiner gleich 0.02 (bei linearen Elementen) verwendet. Eine weitere Möglichkeit, die Netzfeinheit der Modelle zu untersuchen, besteht in der Berechnung und dem Vergleich der Formänderungsenergien. Dies wurde jedoch nicht in dieser Arbeit umgesetzt.

Literaturverzeichnis

- [1] ABOUDI, J. : *Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach*. Elsevier Science Publisher B.V., 1991
- [2] AGBOSSOU, A. ; RICHARD, C. ; VIGIER, Y. : Segmented piezoelectric fiber composite for vibration control: fabricating and modeling of electromechanical properties. In: *Composites Science and Technology* 63 (2003), S. 871–881
- [3] ALTENBACH, J. ; SACHAROV, A. S.: *Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1982
- [4] ALTMANN, S. ; SCHLAYER, D. : *Elektrotechnik: Lehr- und Übungsbuch*. Carl Hanser Verlag München Wien, 2001
- [5] ANDRIANOV, I. V. ; DANISHEVS'KYY, V. V. ; KALAMKAROV, A. L.: Micromechanical analysis of fiber-reinforced composites on account of influence of fiber coatings. In: *Composites: Part B* 39 (2008), S. 874–881
- [6] ARTIOLI, E. ; BISEGNA, P. ; MACERI, F. : Effective longitudinal shear moduli of periodic fibre-reinforced composites with radially-graded fibres. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), S. 383–397
- [7] ASHBY, M. F. ; JONES, D. R. H.: *Engineering materials 1: an introduction to properties, applications, and design*. Elsevier Ltd., 2012
- [8] AVK - INDUSTRIEVEREINIGUNG VERSTÄRKTE KUNSTOFFE E. V. (Hrsg.): *Handbuch Faserverbundkunststoffe: Grundlagen, Verarbeitung, Anwendungen*. Vieweg + Teubner | GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, 2010
- [9] BATHE, K.-J. : *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002
- [10] BENSOUSSAN, A. ; LIONS, J.-L. ; PAPANICOLAOU, G. : Asymptotic analysis for periodic structures. In: *Studies in mathematics and its applications*. North Holland Publishing Company, 1978
- [11] BENVENISTE, Y. : The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents. In: *Mechanics of Materials* 4 (1985), S. 197–208
- [12] BENVENISTE, Y. : A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. In: *Mechanics of Materials* 6 (1987), S. 147–157

- [13] BENVENISTE, Y. : A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54 (2006), S. 708–734
- [14] BENVENISTE, Y. : An interface model for a three-dimensional curved thin piezoelectric interphase between two piezoelectric media. In: *Mathematics and Mechanics of Solids* 14 (2009), S. 102–122
- [15] BENVENISTE, Y. ; MILOH, T. : Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. In: *Mechanics of Materials* 33 (2001), S. 309–323
- [16] BERGER, H. ; KARI, S. ; GABBERT, U. ; RODRIGUEZ-RAMOS, R. ; GUINOVAR, R. ; OTERO, J. A. ; BRAVO-CASTILLERO, J. : An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), S. 5692–5714
- [17] BERGER, H. ; KARI, S. ; GABBERT, U. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; GUINOVAR-DÍAZ, R. : A comprehensive numerical homogenisation technique for calculating effective coefficients of uniaxial piezoelectric fibre composites. In: *Materials Science and Engineering A* 412 (2005), S. 53–60
- [18] BERTHELOT, J.-M. : *Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis*. Springer-Verlag New York, Inc., 1999
- [19] BETTEN, J. : *Kontinuumsmechanik: Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1993
- [20] BISEGNA, P. ; LUCIANO, R. : Variational bounds for the overall properties of piezoelectric composites. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), S. 583–602
- [21] BOURNE, D. E. ; KENDALL, P. C.: *Vektoranalysis*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988
- [22] BOWER, A. F.: *Applied Mechanics of Solids*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010
- [23] CAPORALE, A. ; LUCIANO, R. ; SACCO, E. : Micromechanical analysis of interfacial debonding in unidirectional fiber-reinforced composites. In: *Computers and Structures* 84 (2006), S. 2200–2211
- [24] CHRISTENSEN, R. M. ; LO, K. H.: Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 27 (1979), S. 315–330
- [25] CHRISTENSEN, R. M. ; LO, K. H.: ERRATUM - Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 34 (1986), S. 639
- [26] CIORANESCU, D. ; DONATO, P. : *An Introduction to Homogenization*. Oxford University Press, 1999

- [27] COOK, R. D. ; MALKUS, D. S. ; PLESHA, M. E. ; WITT, R. J.: *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley and Sons, Inc., 1989
- [28] DENG, M. ; FENG, Y. : Two-scale finite element method for piezoelectric problem in periodic structure. In: *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)* 32 (2011), S. 1525–1540
- [29] DEUTSCH, V. ; PLATTE, M. ; VOGT, M. : *Ultraschallprüfung: Grundlagen und industrielle Anwendungen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997
- [30] DUNN, M. L. ; TAYA, M. : Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), S. 161–175
- [31] FREUND, L. B. ; SURESH, S. : *Thin film materials: Stress, defect formation and surface evolution*. Cambridge University Press, 2003
- [32] GABBERT, U. : Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktion-Methode. In: *Technische Mechanik* 4 (1983), S. 40–46
- [33] GEYMONAT, G. ; KRASUCKI, F. ; LENCI, S. : Mathematical Analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. In: *Mathematics and Mechanics of Solids* 4 (1999), S. 201–225
- [34] GOLOVCHAN, V. T. ; NIKITYUK, N. I.: Solution of the problem of shear of a fibrous composite medium. In: *Translated from Prikladnaya Mekhanika* 17 (1981), S. 29–35
- [35] GROSS, D. ; SEELIG, T. : *Bruchmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001
- [36] GU, S. T. ; HE, Q. C.: Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphases as imperfect interfaces. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59 (2011), S. 1413–1426
- [37] GUINOVARTE-DÍAZ, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; SABINA, F. J.: Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49 (2001), S. 1445–1462
- [38] GUINOVARTE-DÍAZ, R. ; LÓPEZ-REALPOZO, J. C. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; RAMÍREZ, M. ; CAMACHO-MONTES, H. ; SABINA, F. J.: Influence of parallelogram cells in the axial behaviour of fibrous composite. In: *International Journal of Engineering Science* 49 (2011), S. 75–84
- [39] GUINOVARTE-DÍAZ, R. ; YAN, P. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; LÓPEZ-REALPOZO, J. C. ; JIANG, C. P. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; SABINA, F. J.: Effective properties of piezoelectric composites with parallelogram periodic cells. In: *International Journal of Engineering Science* 53 (2012), S. 58–66
- [40] GÖRNDT, A. ; GABBERT, U. : Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures. In: *Acta Mechanica* 154 (2002), S. 129–140

- [41] HASHIN, Z. : Theory of fiber reinforced materials / NASA CR1974. 1972. – Forschungsbericht
- [42] HASHIN, Z. : Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents. In: *Journal of Applied Mechanics* 46 (1979), S. 543–550
- [43] HASHIN, Z. : Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. In: *Mechanics of Materials* 8 (1990), S. 333–348
- [44] HASHIN, Z. : Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (1991), S. 745–762
- [45] HASHIN, Z. : Extremum principles for elastic heterogenous media with imperfect interfaces and their application to bounding of effective moduli. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40 (1992), S. 767–781
- [46] HASHIN, Z. : Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002), S. 2509–2537
- [47] HASHIN, Z. ; SHTRIKMAN, S. : On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (1962), S. 335–342
- [48] HASHIN, Z. ; SHTRIKMAN, S. : A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (1962), S. 343–352
- [49] HEISSLER, H. : *Verstärkte Kunststoffe in der Luft- und Raumfahrttechnik*. Verlag W. Kohlhammer, 1986
- [50] HERSHEY, A. V.: The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. In: *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME* 21 (1954), S. 236–240
- [51] HERVÉ, E. ; ZAOUI, A. : n-layered inclusion-based micromechanical modelling. In: *International Journal of Engineering Science* 31 (1993), S. 1–10
- [52] HERVÉ, E. ; ZAOUI, A. : Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites. In: *International Journal of Engineering Science* 33 (1995), S. 1419–1433
- [53] HILL, R. : The elastic behaviour of a crystalline aggregate. In: *Proceedings of the Physical Society, Section A* 65 (1952), S. 349–354
- [54] HILL, R. : Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), S. 357–372
- [55] IKEDA, T. : *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press Inc., New York, 1996
- [56] JIANG, C. P. ; XU, Y. L. ; CHEUNG, Y. K. ; LO, S. H.: A rigorous analytical method for doubly periodic cylindrical inclusions under longitudinal shear and its application. In: *Mechanics of Materials* 36 (2004), S. 225–237

- [57] JUNG, M. ; LANGER, U. : *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*. B. G. Teubner GmbH, 2001
- [58] KAMALI, M. T. ; SHODJA, H. M.: A semi-analytical method for piezocomposite structures with arbitrary interfaces. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), S. 4588–4604
- [59] KAR-GUPTA, R. ; VENKATESH, T. A.: Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: A numerical model to assess the effects of fiber distribution. In: *Acta Materialia* 55 (2007), S. 1275–1292
- [60] KARI, S. ; BERGER, H. ; GABBERT, U. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. : Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites. In: *Composites Science and Technology* 68 (2008), S. 684–691
- [61] KARI, S. ; BERGER, H. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; GABBERT, U. : Computational evaluation of effective material properties of composites reinforced by randomly distributed spherical particles. In: *Composite Structures* 77 (2007), S. 223–231
- [62] KIM, J.-K. ; MAI, Y.-W. : *Engineered Interfaces in Fiber Reinforced Composites*. Elsevier Science Ltd., 1998
- [63] KRÖNER, E. : Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. In: *Zeitschrift für Physik* 151 (1958), S. 504–518
- [64] KUNA, M. : Energiebilanzintegrale für Risse in piezoelektrischen Werkstoffen unter elektrischen und mechanischen Beanspruchungen. In: *Technische Mechanik* 15 (1995), S. 195–204
- [65] LEZHNEV, S. ; NAIZABEKOV, A. ; PANIN, E. ; VOLOKITINA, I. : Influence of combined process „rolling-pressing“ on microstructure and mechanical properties of copper. In: *Procedia Engineering* 81 (2014), S. 1499–1504
- [66] LI, J. Y. ; DUNN, M. L.: Analysis of microstructural fields in heterogeneous piezoelectric solids. In: *International Journal of Engineering Science* 37 (1999), S. 665–685
- [67] LUCIANO, R. ; SACCO, E. : Homogenization technique and damage model for old masonry material. In: *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997), S. 3191–3208
- [68] LUCIANO, R. ; SACCO, E. : Variational methods for the homogenization of periodic heterogeneous media. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 17 (1998), S. 599–617
- [69] LÓPEZ-REALPOZO, J. C. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; SABINA, F. J.: Transport properties in fibrous elastic rhombic composite with imperfect contact condition. In: *International Journal of Mechanical Science* 53 (2011), S. 98–107

- [70] McLAUGHLIN, R. : A study of the differential scheme for composite materials. In: *International Journal of Engineering Science* 15 (1977), S. 237–244
- [71] MORI, T. ; TANAKA, K. : Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. In: *Acta Metallurgica* 21 (1973), S. 571–574
- [72] NIE, S. ; BASARAN, C. : A micromechanical model for effective elastic properties of particulate composites with imperfect interfacial bonds. In: *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), S. 4179–4191
- [73] NORRIS, A. N. ; CALLEGARI, A. J. ; SHENG, P. : A generalized differential effective medium theory. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 33 (1985), S. 525–543
- [74] ODEGARD, G. M.: Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites. In: *Acta Materialia* 52 (2004), S. 5315–5330
- [75] OSBORNE, D. ; CHANDRA, N. ; GHONEM, H. : Interphase behavior of titanium matrix composites at elevated temperature. In: *Composites: Part A* 32 (2001), S. 545–553
- [76] OTERO, J. A. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; SABINA, F. J. ; MONSIVAIS, G. : Semi-analytical method for computing effective properties in elastic composite under imperfect contact. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), S. 609–622
- [77] PARK, S.-J. : *Carbon Fibers*. Springer Science+Business Media Dordrecht, 2015
- [78] PASTOR, J. : Homogenization of linear piezoelectric media. In: *Mechanics Research Communications* 24 (1997), S. 145–150
- [79] PETTERMANN, H. E. ; SURESH, S. : A comprehensive unit cell model: a study of coupled effects in piezoelectric 1-3 composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000), S. 5447–5464
- [80] RAGHAVAN, P. ; GHOSH, S. : A continuum damage mechanics model for unidirectional composites undergoing interfacial debonding. In: *Mechanics of Materials* 37 (2005), S. 955–979
- [81] REUSS, A. : Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 9 (1929), S. 49–58
- [82] RODRIGUEZ-RAMOS, R. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; LÓPEZ-REALPOZO, J. C. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; SABINA, F. J. ; LEBON, F. ; DUMONT, S. ; WÜRKNER, M. ; BERGER, H. ; GABBERT, U. : Characterization of piezoelectric composites with mechanical and electrical imperfect contacts. In: *Journal of Composite Materials* 50 (2015), S. 1603–1625

- [83] RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; BERGER, H. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; LÓPEZ-REALPOZO, J. C. ; WÜRKNER, M. ; GABBERT, U. ; BRAVO-CASTILLERO, J. : Two approaches for the evaluation of the effective properties of elastic composite with parallelogram periodic cells. In: *International Journal of Engineering Science* 58 (2012), S. 2–10
- [84] RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; LÓPEZ-REALPOZO, J. C. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; OTERO, J. A. ; SABINA, F. J. ; BERGER, H. ; WÜRKNER, M. ; GABBERT, U. : Micromechanical analysis of fibrous piezoelectric composites with imperfectly bonded adherence. In: *Archive of Applied Mechanics* 84 (2014), S. 1565–1582
- [85] RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; SABINA, F. J. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. : Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents - I. Elastic and square symmetry. In: *Mechanics of Materials* 33 (2001), S. 223–235
- [86] RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; YAN, P. ; LÓPEZ-REALPOZO, J. C. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; SABINA, F. J. ; JIANG, C. P.: Two analytical models for the study of periodic fibrous elastic composite with different unit cells. In: *Composite Structures* 93 (2011), S. 709–714
- [87] RUSCHMEYER, K. ; KOCH, J. ; HELKE, G. ; LUBITZ, K. ; SCHÖNECKER, A. ; PETERSEN, A. ; MÖCKEL, T. ; RIEDEL, M. : *Piezokeramik*. Expert Verlag, 1995
- [88] RÖSLER, J. ; HARDERS, H. ; BÄKER, M. : *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2012
- [89] SADD, M. H.: *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Elsevier Inc., 2005
- [90] SEVOSTIANOV, I. ; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. ; GUINOVART-DÍAZ, R. ; BRAVO-CASTILLERO, J. ; SABINA, F. J.: Connections between different models describing imperfect interfaces in periodic fiber-reinforced composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), S. 1518–1525
- [91] SHODJA, H. M. ; TABATABAEI, S. M. ; KAMALI, M. T.: A piezoelectric-inhomogeneity system with imperfect interface. In: *International Journal of Engineering Science* 44 (2006), S. 291–311
- [92] SHODJA, H. M. ; TABATABAEI, S. M. ; KAMALI, M. T.: A piezoelectric medium containing a cylindrical inhomogeneity: Role of electric capacitors and mechanical imperfections. In: *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), S. 6361–6381
- [93] SILVA, E. C. N. ; FONSECA, J. S. O. ; KIKUCHI, N. : Optimal design of periodic piezocomposites. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 159 (1998), S. 49–77
- [94] STANDARDS COMMITTEE OF THE IEEE ULTRASONICS, FERROELECTRICS, AND FREQUENCY CONTROL SOCIETY: An American National Standard: IEEE Standard on Piezoelectricity. In: *Key Papers in Physics: Piezoelectricity*. American Institute of Physics, 1992

- [95] STEINHORST, P. : *Anwendung adaptiver FEM für piezoelektrische und spezielle mechanische Probleme*, Technische Universität Chemnitz, Diss., 2009
- [96] SUQUET, P. M.: Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In: *Homogenization Techniques for Composite Media*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987
- [97] TORQUATO, S. : *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag New York, Inc., 2002
- [98] VOIGT, W. : *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: B.G. Teubner, 1910
- [99] VURAL, M. ; RAVICHANDRAN, G. : Dynamic response and energy dissipation characteristics of balsa wood: experiment and analysis. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), S. 2147–2170
- [100] WALPOLE, L. J.: On the overall elastic moduli of composite materials. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17 (1969), S. 235–251
- [101] WEISSBACH, W. : *Werkstoffkunde : Strukturen, Eigenschaften, Prüfung*. Vieweg + Teubner Verlag; Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2012
- [102] WEISSGERBER, W. : *Elektrotechnik für Ingenieure 1*. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 2000
- [103] WILLIS, J. R.: Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 25 (1977), S. 185–202
- [104] WÜRKNER, M. ; BERGER, H. ; GABBERT, U. : On numerical evaluation of effective material properties for composite structures with rhombic fiber arrangements. In: *International Journal of Engineering Science* 49 (2011), S. 322–332
- [105] WÜRKNER, M. ; BERGER, H. ; GABBERT, U. : Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. In: *International Journal of Engineering Science* 63 (2013), S. 1–9
- [106] XIA, Z. ; ZHANG, Y. ; ELLYIN, F. : A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), S. 1907–1921
- [107] YAN, P. ; JIANG, C. P.: An eigenfunction expansion-variational method based on a unit cell in analysis of a generally doubly periodic array of cracks. In: *Acta Mechanica* 210 (2010), S. 117–134
- [108] YUAN, F. G. ; PAGANO, N. J. ; CAI, X. : Elastic moduli of brittle matrix composites with interfacial debonding. In: *International Journal of Solides and Structures* 34 (1997), S. 177–201
- [109] ZIENKIEWICZ, O. C.: *Methode der finiten Elemente*. Fachbuchverlag Leipzig, 1987

- [110] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The finite element method: The basis*.
Butterworth-Heinemann, 2000

Online-Buchshop für Ingenieure

■ ■ VDI nachrichten

BUCHSHOP

Online-Shops



**Fachliteratur und mehr -
jetzt bequem online recher-
chieren & bestellen unter:
www.vdi-nachrichten.com/
Der-Shop-im-Ueberblick**



**Täglich aktualisiert:
Neuerscheinungen
VDI-Schriftenreihen**



Im Buchshop von vdi-nachrichten.com finden Ingenieure und Techniker ein speziell auf sie zugeschnittenes, umfassendes Literaturangebot.

Mit der komfortablen Schnellsuche werden Sie in den VDI-Schriftenreihen und im Verzeichnis lieferbarer Bücher unter 1.000.000 Titeln garantiert fündig.

Im Buchshop stehen für Sie bereit:

VDI-Berichte und die Reihe **Kunststofftechnik**:

Berichte nationaler und internationaler technischer Fachtagungen der VDI-Fachgliederungen

Fortschritt-Berichte VDI:

Dissertationen, Habilitationen und Forschungsberichte aus sämtlichen ingenieurwissenschaftlichen Fachrichtungen

Newsletter „Neuerscheinungen“:

Kostenfreie Infos zu aktuellen Titeln der VDI-Schriftenreihen bequem per E-Mail

Autoren-Service:

Umfassende Betreuung bei der Veröffentlichung Ihrer Arbeit in der Reihe Fortschritt-Berichte VDI

Buch- und Medien-Service:

Beschaffung aller am Markt verfügbaren Zeitschriften, Zeitungen, Fortsetzungsreihen, Handbücher, Technische Regelwerke, elektronische Medien und vieles mehr – einzeln oder im Abo und mit weltweitem Lieferservice

VDI nachrichten

BUCHSHOP

www.vdi-nachrichten.com/Der-Shop-im-Ueberblick

Die Reihen der Fortschritt-Berichte VDI:

- 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
 - 2 Fertigungstechnik
 - 3 Verfahrenstechnik
 - 4 Bauingenieurwesen
- 5 Grund- und Werkstoffe/Kunststoffe
 - 6 Energietechnik
 - 7 Strömungstechnik
- 8 Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik
 - 9 Elektronik/Mikro- und Nanotechnik
 - 10 Informatik/Kommunikation
 - 11 Schwingungstechnik
- 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
 - 13 Fördertechnik/Logistik
- 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
 - 15 Umwelttechnik
 - 16 Technik und Wirtschaft
 - 17 Biotechnik/Medizintechnik
 - 18 Mechanik/Bruchmechanik
 - 19 Wärmetechnik/Kältetechnik
- 20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE CAQ, CIM ...)
 - 21 Elektrotechnik
 - 22 Mensch-Maschine-Systeme
 - 23 Technische Gebäudeausrüstung

ISBN 978-3-18-334618-9